Summationsmethoden und Momentfolgen. I.

Von

Felix Hausdorff in Greifswald.

Die folgenden Betrachtungen knüpfen an die sehr einfache Bemerkung an, daß die Beziehung zwischen einer Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und ihren Cesàroschen Mitteln $A_0, A_1, A_2, \ldots$ irgendwelcher Ordnung sich in den *Differenzen*

$$b_n = a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 - \ldots + (-1)^n a_n,$$

$$B_n = A_0 - \binom{n}{1} A_1 + \binom{n}{2} A_2 - \ldots + (-1)^n A_n$$

rein *multiplikativ* ausdrückt:

$$(0) \qquad B_n = \mu_n b_n.$$

Die gleiche Bemerkung gilt von den Hölderschen Mitteln, die sich hierdurch auch für nicht ganzzahlige Ordnung definieren lassen. Allgemein sind die linearen Beziehungen zwischen den a_n, A_n, die die Form (0) haben, paarweise *vertauschbar* und bilden insofern ein natürliches System. Wenn hierbei jeder konvergenten Folge a_n eine konvergente Folge A_n entsprechen soll, so muß die Multiplikatorenfolge μ_n gewissen Bedingungen genügen; unser Hauptresultat ist, daß ihr dann eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Funktion $\chi(u)$ beschränkter Schwankung zugehört, deren Stieltjessche *Momentfolge* sie ist:

$$\mu_n = \mu(n), \qquad \mu(t) = \int_0^1 u^t d\chi(u).$$

Durch passende Annahmen über die Funktion $\chi(u)$ oder die Momentfunktion $\mu(t)$ erhalten wir als Nebenergebnisse einen einfachen Beweis für die Äquivalenz der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte gleicher (beliebiger) Ordnung, ferner die Ausfüllung der Hölderschen Skala zu einer logarithmischen und ihre Ergänzung durch stärkere Skalen exponentialen Charakters. Überdies gelangen wir zu einer einfachen, den Umweg über Kettenbrüche vermeidenden Lösung des Momentproblems für ein endliches Intervall.

§ 1.

Die unendliche Matrix $\lambda = (\lambda_{p,m})$ $(p, m = 0, 1, 2, \ldots)$ sei „zeilenfinit“, d. h. für jedes p gebe es nur endlich viele $\lambda_{p,m} \neq 0$. Wenn das Gleichungssystem

$$(1) \qquad A_p = \sum_m \lambda_{p,m} a_m$$

ein „Summationsverfahren“[1]) definieren, nämlich dazu dienen soll, einer divergenten Folge a_m den eventuell existierenden $\lim A_p$ als verallgemeinerten Grenzwert zuzuordnen, so verlangt man naturgemäß, daß dies Verfahren „konsistent“ sei, d. h. bei einer konvergenten Folge a_m den gewöhnlichen Grenzwert liefere: mit $a_m \to \alpha$ soll stets $A_p \to \alpha$ sein. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür hat Herr Toeplitz[2]) gefunden. Es ist für unseren Zweck passender, die Forderung zu zerlegen, und wir nennen die Matrix λ eine *C-Matrix* (Konvergenz erhaltende Matrix), wenn aus der Konvergenz von a_m die von A_p folgt; speziell eine *reine C-Matrix*, wenn mit $a_m \to 0$ auch $A_p \to 0$, und noch spezieller eine *normierte C-Matrix*, wenn mit $a_m \to \alpha$ auch $A_p \to \alpha$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine C-Matrix sind:

(A) $\sum_m |\lambda_{p,m}|$ ist für $p = 0, 1, 2, \ldots$ beschränkt.

(B) $\lim_p \lambda_{p,m} = l_m$ existiert, für $m = 0, 1, 2, \ldots$

(C) $\lim_p \sum_m \lambda_{p,m} = l$ existiert.

Wir unterdrücken den Beweis, der dem Toeplitzschen Vorbild folgt. Für $a_m \to \alpha$ hat man dann

$$A_p \to \left(l - \sum l_m\right)\alpha + \sum l_m a_m.$$

Für eine *reine* C-Matrix ist das Verschwinden sämtlicher l_m, für eine *normierte* überdies $l = 1$ notwendig und hinreichend. Eine reine C-Matrix mit $l \neq 0$ kann man „normieren“, indem man sie mit $\frac{1}{l}$ multipliziert. Summe, Differenz und Produkt von zwei (reinen) C-Matrizen ist wieder eine (reine) C-Matrix.

---

[1]) Für die *Reihe* $\sum (a_m - a_{m-1})$; es fehlt an einem entsprechenden Ausdruck für *Folgen*.

[2]) O. Toeplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Matematyczno-Fizyczne, 22 (1911), S. 113–119.

Wir schreiben (1) in Matrizenform

$$(2)\qquad A = \lambda a,$$

$$a = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_2 & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & \ldots \\ A_1 & 0 & 0 & \ldots \\ A_2 & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{pmatrix}$$

und setzen fest, daß bei solchen „einspaltigen" Matrizen die Anhängung des Index p das Glied in der Zeile p, Spalte 0 bedeuten soll, also

$$(3)\qquad A_p = (\lambda a)_p.$$

Nennen wir mit Herrn Toeplitz die Menge der Folgen a, für die $(\lambda a)_p$ konvergiert, das *Konvergenzfeld* $C(\lambda)$ der Matrix λ. Für zwei Matrizen λ, μ bestehen vier Möglichkeiten, die zur Aufstellung einer *Rangordnung* dienen können:

I.	$C(\lambda) = C(\mu)$	: λ mit μ *äquivalent.*
II.	$C(\lambda)$ echte Teilmenge von $C(\mu)$	: λ *schwächer* als μ.
III.	$C(\mu)$ echte Teilmenge von $C(\lambda)$	: λ *stärker* als μ.
IV.	Keiner der Fälle I II III trifft zu	: λ mit μ *unvergleichbar.*

In Zeichen etwa:

I: $\lambda \sim \mu$. II: $\lambda < \mu$. III: $\lambda > \mu$. IV: $\lambda \parallel \mu$.

Bezüglich des Rechnens mit Äquivalenzen sei nur bemerkt, daß aus $\lambda \sim \lambda'$ zwar $\lambda\mu \sim \lambda'\mu$, aber nicht $\mu\lambda \sim \mu\lambda'$ folgt. Aus $\lambda \sim \lambda'$, $\mu \sim \mu'$ folgt, wenn λ' mit μ vertauschbar ist: $\lambda\mu \sim \lambda'\mu = \mu\lambda' \sim \mu'\lambda'$. In einem System paarweise vertauschbarer Matrizen dürfen also Äquivalenzen multipliziert werden.

Wenn die Matrizen λ, μ Reziproke haben, so verteilen sich die obigen vier Fälle folgendermaßen:

I. $\mu\lambda^{-1}$ und $\lambda\mu^{-1}$ sind C-Matrizen.
II. $\mu\lambda^{-1}$ ist C-Matrix, $\lambda\mu^{-1}$ nicht.
III. $\lambda\mu^{-1}$ ist C-Matrix, $\mu\lambda^{-1}$ nicht.
IV. Weder $\mu\lambda^{-1}$ noch $\lambda\mu^{-1}$ ist C-Matrix.

Sind $\mu\lambda^{-1}$ und $\lambda\mu^{-1}$ reine (normierte) C-Matrizen, so wollen wir λ und μ rein (normiert) äquivalent nennen und die normierte Äquivalenz mit

$$\lambda \approx \mu$$

bezeichnen.

Sind λ und λ^{-1} reine C-Matrizen, so ist λ im vorhin erwähnten Sinne der Normierung fähig. Sind λ, μ rein äquivalent, so kann man durch Anbringung eines nichtverschwindenden Zahlfaktors (Normierung von $\mu\lambda^{-1}$) normierte Äquivalenz herstellen.

Sei nun ϱ eine *feste* Matrix, die eine Reziproke hat, und

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_2 & \dots \\ . & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots \end{pmatrix}$$

eine *willkürliche Diagonalmatrix.* Wir beschränken uns nunmehr auf Matrizen der Gestalt

(4) $$\lambda = \varrho^{-1}\mu\varrho,$$

die vermöge des festen ϱ in eine Diagonalmatrix überführbar sind; *diese Matrizen sind paarweise vertauschbar.* Ist umgekehrt $\lambda^* = \varrho^{-1}\mu^*\varrho$ eine der Matrizen (4), worin die Elemente μ_n^* der Diagonalmatrix μ^* paarweise verschieden sind, so sind *alle* mit λ^* vertauschbaren Matrizen λ durch (4) gegeben; denn setzt man $\mu = \varrho\lambda\varrho^{-1}$, also $\lambda = \varrho^{-1}\mu\varrho$, so ist μ mit μ^* vertauschbar und daher, wie unmittelbar folgt, ebenfalls eine Diagonalmatrix.

Die Beziehung $A = \lambda a$ nimmt nach (4) vermöge der einspaltigen Hilfsmatrizen

(5) $$b = \varrho a, \quad B = \varrho A$$

die einfache Form

(6) $$B = \mu b,$$

also die multiplikative Gestalt

(7) $$B_n = \mu_n b_n$$

an; der Matrix λ entspricht die Diagonalmatrix μ oder die ***Multiplikatorenfolge*** μ_n umkehrbar eindeutig. Wir nennen diese eine (reine, normierte) ***C-Folge***, wenn λ eine (reine, normierte) C-Matrix ist, und übertragen auch die Graduierung (äquivalent, schwächer, stärker, unvergleichbar) auf die Multiplikatorenfolgen. Dieses einfache Prinzip wollen wir für eine ganz spezielle, numerisch bestimmte Wahl der transformierenden Matrix ϱ genauer verfolgen.

§ 2.

Aus einer Zahlenfolge a_m bilden wir die Doppelfolge der Differenzen verschiedener Ordnung

(8) $$a_{m,n} = a_m - \binom{n}{1} a_{m+1} + \binom{n}{2} a_{m+2} - \dots + (-1)^n a_{m+n}$$

mit der *Rekursionsformel*

$$a_{m,n} = a_{m+1,n} + a_{m,n+1}.$$

Insbesondere nennen wir die einfache Folge der Zahlen

$$(9) \qquad b_n = a_{0,n} = a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 - \dots + (-1)^n a_n$$

kurz die *Differenzenfolge* der a_m. Die Differenzen der b_n sind dann

$$b_{n,m} = a_{m,n},$$

denn dies gilt für $m = 0$ und wird vermöge der Rekursionsformel von m auf $m + 1$ übertragen; insbesondere ist

$$a_m = a_{m,0} = b_{0,m},$$

die a_m bilden also auch die Differenzenfolge der b_n, so daß die zu (9) gehörige Matrix

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 \dots \\ 1 & -3 & 3 & -1 \dots \\ . & . & . & . \dots \\ . & . & . & . \dots \\ . & . & . & . \dots \end{pmatrix}$$

($b = \varrho a$) ihre eigene Reziproke ist. Auf diese festgewählte Matrix ϱ gründen wir die Zuordnung (4) zwischen Matrizen λ und Diagonalmatrizen μ, betrachten jetzt also *nur solche Gleichungssysteme* (1), *die in den Differenzenfolgen* b_n, B_n *die multiplikative Gestalt* (7) *haben*.

Der Zusammenhang zwischen den a_m, b_n kann auf bekannte Arten mittels erzeugender Funktionen einfach ausgedrückt werden (man braucht die auftretenden Potenzreihen nicht einmal konvergent vorauszusetzen, sondern kann sie als komplexe Zahlen mit unendlich vielen Einheiten auffassen). Einerseits ist

$$(10) \qquad \sum_n b_n \frac{z^n}{n!} = e^z \sum_m (-1)^m a_m \frac{z^m}{m!},$$

andererseits

$$(11) \qquad \sum_n b_n y^n = \sum_m (-1)^m a_m \frac{y^m}{(1-y)^{m+1}};$$

dies letzte können wir so ausdrücken, daß vermöge der Eulerschen Transformation

$$(1-x)(1-y) = 1$$

zwischen

$$(12) \qquad f(x) = \sum_m a_m x^m, \qquad g(y) = \sum_n b_n y^n$$

der Zusammenhang

$$f(x) = (1-y)g(y), \qquad g(y) = (1-x)f(x)$$

besteht.

Drücken wir nun die Beziehungen $B_n = \mu_n b_n$ in den a_m, A_p aus, so kommt

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \binom{p}{n} \mu_n b_n \\ &= \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=0}^{n} (-1)^n \binom{p}{n} \mu_n (-1)^m \binom{n}{m} a_m \\ &= \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=m}^{p} (-1)^{n-m} \binom{p}{m} \binom{p-m}{n-m} \mu_n a_m \\ &= \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} a_m \sum_{n=0}^{p-m} (-1)^n \binom{p-m}{n} \mu_{m+n}, \end{aligned}$$

oder

$$A_p = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} \mu_{m,\,p-m}\, a_m \tag{13}$$

nach der Bezeichnungsweise (8), d. h. die $\mu_{m,n}$ sind die Differenzen der μ_n.

Setzt man alle $a_m = 1$, so kommt

$$\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} \mu_{m,\,p-m} = \mu_0. \tag{14}$$

Die Bedingungen § 1, (A) (B) dafür, daß die Gleichungen (13) einer C-Matrix $\lambda = \varrho\mu\varrho$ entsprechen, lauten nun:

(α) $\quad M_p = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} |\mu_{m,\,p-m}|$ ist für $p = 0, 1, 2, \ldots$ beschränkt:

$$M_p \leqq M.$$

(β) $\quad \lim\limits_{p} \binom{p}{m} \mu_{m,\,p-m} = l_m$ existiert, für $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Die Bedingung (C) ist wegen (14) von selbst erfüllt. Das sind also die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine C-Folge μ_n; für $a_m \to \alpha$ ist dann

$$A_p \to \left(\mu_0 - \sum l_m\right)\alpha + \sum l_m a_m.$$

Für eine reine C-Folge ist das Verschwinden aller l_m, für eine normierte überdies $\mu_0 = 1$ notwendig und hinreichend.

In Wahrheit steht aber, wie wir nun zeigen wollen, die Sache noch einfacher: *die Bedingung* (α) *allein genügt*, und aus ihr folgen sämtliche Bedingungen (β) und zwar mit

$$l_1 = l_2 = \ldots = 0.$$

Es wird also (α) die notwendige und hinreichende Bedingung für eine C-Folge, und aus $a_m \to \alpha$ folgt dann

$$A_p \to \mu_0 \alpha + l_0 (a_0 - \alpha), \qquad l_0 = \lim \mu_{0,p}.$$

Für eine reine C-Folge tritt die Bedingung $l_0 = 0$, für eine normierte $\mu_0 = 1$ hinzu.

§ 3.

Eine (reelle) Folge μ_m heiße *total monoton* (I. Schur), *wenn alle Differenzen* $\mu_{m,n} \geqq 0$ *sind*[3]). Wir zeigen, daß für eine total monotone Folge die Grenzwerte l_m existieren und, bis auf $l_0 \geqq 0$, verschwinden.

Setzen wir

$$\lambda_{p,m} = \binom{p}{m} \mu_{m,p-m}, \qquad \Lambda_{p,m} = \lambda_{p,0} + \lambda_{p,1} + \ldots + \lambda_{p,m},$$

so erhält man aus der Rekursionsformel

$$\mu_{m,p-m} = \mu_{m,p-m+1} + \mu_{m+1,p-m}$$

durch Multiplikation mit $\frac{(p+1)!}{m!\,(p-m)!}$

$$(p+1)\lambda_{p,m} = (p-m+1)\lambda_{p+1,m} + (m+1)\lambda_{p+1,m+1}$$

oder

$$(p+1)(\lambda_{p,m} - \lambda_{p+1,m}) = (m+1)\lambda_{p+1,m+1} - m\lambda_{p+1,m},$$

also

$$(p+1)(\Lambda_{p,m} - \Lambda_{p+1,m}) = (m+1)\lambda_{p+1,m+1}.$$

Hiernach ist $\Lambda_{p,m} \geqq \Lambda_{p+1,m} \geqq 0$ und es existiert $L_m = \lim\limits_p \Lambda_{p,m}$, also auch $l_m = L_m - L_{m-1}$ $(l_0 = L_0)$; ferner ist nach der letzten Formel $\sum\limits_p \frac{1}{p+1}\lambda_{p+1,m+1}$ konvergent, und wegen der Divergenz von $\sum\limits_p \frac{1}{p+1}$ kann demnach $\lim\limits_p \lambda_{p+1,m+1} = l_{m+1}$ nicht $\neq 0$ sein.

Sodann zeigen wir, *daß eine reelle Folge* μ_n, *die der Bedingung* (α) *genügt, Differenz zweier total monotoner Folgen ist.* Vermöge der Rekursionsformel der Differenzen hat man

$$|\mu_{m,n}| \leqq |\mu_{m,n+1}| + |\mu_{m+1,n}| \leqq |\mu_{m,n+2}| + 2|\mu_{m+1,n+1}| + |\mu_{m+2,n}| \leqq \cdots$$

---

[3]) Nur für eine total monotone Folge mit $\mu_0 = 1$ stellen die Gleichungen (13) eine lineare *Mittel*bildung im eigentlichen Sinne dar.

(speziell für $m = n = 0$: $M_0 \leqq M_1 \leqq M_2 \leqq \ldots$, so daß die Forderung ($\alpha$) durch die der Konvergenz $M_p \to M$ ersetzt werden kann). Die Folge dieser Größen ist beschränkt, da

$$\sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} |\mu_{m+h, n+p-h}| \leqq \sum_{h=0}^{p} \binom{m+n+p}{m+h} |\mu_{m+h, n+p-h}| \leqq M_{m+n+p} \leqq M,$$

hat also einen Grenzwert $\pi_{m,n}$; ersichtlich ist

$$\pi_{m,n} = \pi_{m,n+1} + \pi_{m+1,n}$$

und daher sind die $\pi_{m,n}$ die Differenzen der Größen $\pi_{m,0} = \pi_m$:

$$\pi_{m,n} = \pi_m - \binom{n}{1} \pi_{m+1} + \ldots + (-1)^n \pi_{m+n}.$$

Wegen $\pi_{m,n} \geqq |\mu_{m,n}| \geqq \pm \mu_{m,n}$ sind die Folgen

$$\alpha_m = \tfrac{1}{2}(\pi_m + \mu_m), \qquad \beta_m = \tfrac{1}{2}(\pi_m - \mu_m)$$

total monoton und $\mu_m = \alpha_m - \beta_m$ Differenz total monotoner Folgen. Beiläufig sind dies die „kleinsten" total monotonen Folgen, als deren Differenz μ_m darstellbar ist, d. h. man erhält jede andere Darstellung, indem man α_m, β_m um eine und dieselbe, willkürliche, total monotone Folge vermehrt.

Endlich ist bei jeder komplexen Folge μ_n, die der Bedingung (α) genügt, sowohl Realteil als Imaginärteil Differenz total monotoner Folgen, und demnach existieren die Grenzwerte l_m mit $l_{m+1} = 0$.

Damit sind die Behauptungen am Schlusse von § 2 bewiesen; man sieht übrigens unmittelbar, daß die bloße Verwandlung des Anfangsgliedes μ_0 in $\mu_0 - l_0$ aus der C-Folge eine reine C-Folge macht. Und wir können als Ergebnis der bisherigen Untersuchungen aussprechen:

Satz I. *Damit μ_n eine C-Folge sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$(\alpha) \qquad M_p = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} |\mu_{m, p-m}| \quad \textit{beschränkt } (M_p \to M)$$

sei; mit $l_0 = \lim \mu_{0,n}$ ist dann $\mu_0 - l_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ eine reine C-Folge.

§ 4.

Wir zeigen zunächst, daß zu den hier betrachteten Beziehungen $A = \lambda a$ oder $B = \mu b$ die Cesàrosche und Höldersche Mittelbildung gehört[4]).

[4]) Dies ist, soviel ich weiß, nur in der (nach Abfassung der vorliegenden Arbeit durch freundliche Mitteilung des Herrn I. Schur zu meiner Kenntnis gelangten) Abhandlung bemerkt worden: W. A. Hurwitz and L. L. Silverman, On the consistency and equivalence of certain definitions of summability, Transact. Amer. Math.

Wir definieren die Matrix S^α (Summenmatrix der Ordnung α) in der Schreibweise (3) durch

$$(S^\alpha a)_n = a_n + \binom{\alpha}{1} a_{n-1} + \binom{\alpha+1}{2} a_{n-2} + \ldots + \binom{\alpha+n-1}{n} a_0$$
$$= a_n + \frac{\alpha}{1} a_{n-1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2} a_{n-2} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} a_0,$$

so daß formal

$$\sum_n (S^\alpha a)_n x^n = (1-x)^{-\alpha} \sum_n a_n x^n,$$

wo $(1-x)^{-\alpha}$ die Binomialreihe bedeutet; daraus folgt

$$S^\alpha S^\beta = S^{\alpha+\beta}.$$

Hierin kann α beliebig (auch komplex) sein. Nehmen wir aber α von $-1, -2, -3, \ldots$ verschieden an, so daß $\left[\binom{\alpha}{0} = 1 \text{ zu setzen}\right]$

$$\binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$ von Null verschieden ist, so können wir eine Matrix C_α, die *Cesàrosche Matrix* der Ordnung α, durch

$$A = C_\alpha a,$$

$$(15) \qquad A_n = (C_\alpha a)_n = (S^\alpha a)_n : \binom{n+\alpha}{n}$$

erklären. Wir behaupten, daß dies mit

$$(16) \qquad B_n = b_n : \binom{n+\alpha}{n}$$

identisch ist; d. h. also: bedeutet c_α die Diagonalmatrix mit dem allgemeinen Gliede $1 : \binom{n+\alpha}{n}$, so ist $C_\alpha = c_\alpha S^\alpha = \varrho c_\alpha \varrho$.

Nehmen wir zum Beweise α positiv an und benutzen die erzeugenden Funktionen (12). Es ist

$$1 : \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \alpha \int_0^1 u^n (1-u)^{\alpha-1}\, du,$$

Soc., **18** (1917), S. 1–20. Daß es nicht häufiger geschehen ist, dürfte an der verbreiteten Gewohnheit liegen, in der Definition (15) der Cesàroschen Mittel den Divisor $\binom{n+\alpha}{n}$ durch den (für $n \to \infty$) äquivalenten $(n+1)^\alpha : \Gamma(\alpha+1)$ zu ersetzen, also an Stelle der „natürlichen" Cesàroschen Matrix C_α die „modifizierte"

$$C_\alpha^* = E_\alpha C_\alpha \approx C_\alpha$$

zu betrachten, wo E_α die Diagonalmatrix mit dem allgemeinen Gliede $\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} : (n+1)^\alpha$ ist. Vgl. dazu Fußnote [8]).

also

$$F(x) = \sum A_n x^n = \alpha \int_0^1 \sum (S^\alpha a)_n x^n u^n (1-u)^{\alpha-1} du$$

$$= \alpha \int_0^1 f(ux)(1-ux)^{-\alpha}(1-u)^{\alpha-1} du$$

$$= \frac{\alpha}{x} \int_0^x f(\xi)(1-\xi)^{-\alpha}\left(1-\frac{\xi}{x}\right)^{\alpha-1} d\xi,$$

also mittels der Eulerschen Transformation

$$(1-x)(1-y) = (1-\xi)(1-\eta) = 1:$$

$$G(y) = (1-x) F(x) = \frac{\alpha}{y} \int_0^y g(\eta)(1-\eta)^{\alpha+1} \left(\frac{1-\frac{\eta}{y}}{1-\eta}\right)^{\alpha-1} \frac{d\eta}{(1-\eta)^2}$$

$$= \frac{\alpha}{y} \int_0^y g(\eta)\left(1-\frac{\eta}{y}\right)^{\alpha-1} d\eta = \alpha \int_0^1 g(uy)(1-u)^{\alpha-1} du,$$

also

$$B_n = b_n \cdot \alpha \int_0^1 u^n (1-u)^{\alpha-1} du = b_n : \binom{n+\alpha}{n} \qquad (\alpha > 0). \tag{17}$$

Damit ist (16) für $\alpha > 0$ bewiesen, gilt aber allgemein für $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, da beide Seiten rationale Funktionen von α und in dem angegebenen Gebiet regulär sind. Wir wollen uns übrigens, wie üblich, auf Cesàrosche Mittelbildung von reeller Ordnung $\alpha > -1$ beschränken.

Die Bildung des arithmetischen Mittels entspricht der Matrix $C_1 = C$, die wir auch mit H bezeichnen wollen, und liefert für die Differenzenfolgen

$$B_n = b_n : (n+1).$$

Die wiederholte, *Höldersche Mittelbildung* gibt für die Matrix H^k ($k = 1, 2, \ldots$) die Beziehung

$$B_n^k = b_n : (n+1)^k,$$

wonach es sich von selbst gebietet, sie für jede beliebige (auch komplexe) Ordnung α durch

$$B_n = b_n : (n+1)^\alpha \tag{18}$$

zu definieren. Die zugehörige Matrix H^α hat, wie S^α (aber nicht C_α), die Eigenschaft

$$H^\alpha H^\beta = H^{\alpha+\beta}.$$

Speziell für $\alpha > 0$ können wir analog zu (17) den Multiplikator durch ein Integral ausdrücken und schreiben

$$(19)\qquad B_n = b_n \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(n+1)x} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= b_n \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^n \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} du \qquad (\alpha > 0).$$

Wir beschränken uns auf Höldersche Mittelbildung reeller Ordnung.

Da H der Multiplikatorenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ mit paarweise verschiedenen Gliedern entspricht, so können wir, nach der Bemerkung am Ende von § 1, unsere Matrizen $\lambda = \varrho \mu \varrho$ als *die mit H vertauschbaren Matrizen* definieren[5]). Bemerken wir noch mit Herrn I. Schur, daß die Funktionalgleichung $H(\alpha) H(\beta) = H(\alpha + \beta)$ mit der Anfangsbedingung $H(1) = H$ die Matrix $H(\alpha)$ eindeutig bestimmt, wenn man sie (nämlich jedes ihrer Elemente) als reelle stetige Funktion der reellen Variablen α voraussetzt. Denn $H(\alpha)$ ist mit H vertauschbar, also $H(\alpha) = \varrho \mu(\alpha) \varrho$, gebildet mit einer Diagonalmatrix $\mu(\alpha)$, für deren Elemente sich $\mu_n(\alpha) \mu_n(\beta) = \mu_n(\alpha + \beta)$ mit $\mu_n(1) = 1 : (n+1)$, also bekanntlich $\mu_n(\alpha) = 1 : (n+1)^\alpha$ ergibt, d. h. $H(\alpha)$ ist unser H^α. Entsprechendes gilt beiläufig auch von S^α.

§ 5.

Dem Fingerzeige folgend, den die Integraldarstellungen (17), (19) geben, bilden wir mit einer Funktion $\chi(u)$, die im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ von beschränkter Schwankung ist, die Stieltjesschen Integrale

$$(20)\qquad \mu_n = \int_0^1 u^n d\chi(u) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und nennen dies eine *Momentfolge*. Wir werden erkennen, daß *C-Folgen und Momentfolgen identisch* sind. Einstweilen genügt uns die eine Hälfte dieser Behauptung:

Satz II. *Jede Momentfolge ist eine C-Folge; dann und nur dann, wenn $\chi(u)$ an der Stelle $u = 0$ stetig ist, ist sie eine reine C-Folge.*

---

[5]) Als solche werden sie von Hurwitz und Silverman (loc. cit. [4])) behandelt und in der Form $\lambda = \varphi(H)$ dargestellt, die definitionsgemäß (im Einklang mit dem Spezialfall eines Polynoms $\varphi(x)$) der Multiplikatorenfolge $\mu_n = \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$ entspricht; $\varphi(x)$ wird dabei für $x = 0$ als regulär angenommen. Aber gerade diese Annahme ist zu eng (sie läßt z. B. Cesàrosche und Höldersche Matrizen nur von ganzzahliger Ordnung zu) und das Hauptergebnis der Verf., daß eine für $|x - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}$ reguläre Funktion $\varphi(x)$ eine reine C-Matrix $\varphi(H)$ liefert, hat nur hinreichenden, nicht notwendigen Charakter.

Da die Differenz von zwei (reinen) C-Folgen eine (reine) C-Folge ist, so genügt es, $\chi(u)$ als monoton zunehmend vorauszusetzen. Dann ist aber

$$\mu_{m,n} = \int_0^1 u^m (1-u)^n \, d\chi(u) \geqq 0,$$

die Folge μ_m ist total monoton und (α) ist wegen (14) von selbst erfüllt. Statt der Zusatzbehauptung können wir ohne mehr Mühe gleich die Erfüllung sämtlicher Bedingungen (β) beweisen. Es ist im ganzen Intervall

$$\binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq [u + (1-u)]^p = 1,$$

daher bei Zerlegung $\int_0^1 = \int_0^\delta + \int_\delta^1 \quad (0 < \delta < 1)$

$$\binom{p}{m} \mu_{m,p-m} \leqq \int_0^\delta d\chi(u) + \binom{p}{m} (1-\delta)^{p-m} \int_\delta^1 d\chi(u),$$

also für $p \to \infty$

$$\overline{\lim_p} \binom{p}{m} \mu_{m,p-m} \leqq \chi(\delta) - \chi(0)$$

und für $\delta \to 0$, falls $\chi(u)$ an der Stelle $u=0$ stetig ist: $\lim\limits_p \binom{p}{m} \mu_{m,p-m} = 0$; die Bedingungen (β) sind mit $l_0 = l_1 = \ldots = 0$ erfüllt, μ_n bildet eine reine C-Folge.

Für eine Unstetigkeit an der Stelle $u=0$ ist der einfachste Fall, daß $\chi(u)$ dort den Sprung 1 macht und sonst konstant ist; dem entspricht die Momentfolge

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = 0,$$

für die sich $A_p = a_0$ ergibt, also eine C-Folge, aber keine reine. Im allgemeinen Fall, wenn $\chi(u)$ an der Stelle $u=0$ den Sprung $\chi(+0) - \chi(0) = \chi_0$ macht, können wir $\chi(u)$ auffassen als Summe einer bei $u=0$ stetigen Funktion und einer solchen, die bei $u=0$ den Sprung χ_0 macht und sonst konstant ist, also ist μ_n eine C-Folge und

$$\mu_0 - \chi_0, \; \mu_1, \; \mu_2, \ldots$$

eine reine C-Folge. Beiläufig folgt daraus $\chi_0 = \lim \mu_{0,n}$.

Aus Satz I folgt unmittelbar, daß auch die Differenzen $\lambda_n = \mu_{0,n}$ einer C-Folge eine C-Folge bilden; die Bedingung einer reinen C-Folge λ_n ist hier $\lim \lambda_{0,n} = \lim \mu_n = 0$, bei Momentfolgen also die Stetigkeit von $\chi(u)$ an der Stelle $u=1$. Im allgemeinen Fall ist $\chi(1) - \chi(1-0) = \lim \mu_n$ der Sprung an der Stelle $u=1$.

Läßt man $\chi(u)$ an der Stelle $\vartheta\,(0<\vartheta<1)$ einen Sprung machen und sonst konstant sein, so erhält man die reine C-Folge

$$\mu_n=\vartheta^n. \tag{21}$$

Prüfen wir ihre Stärke, auf die wir noch zurückkommen (§ 7), an der Folge $a_m=z^m$, die für $|z|<1$ nach 0 konvergiert. Es wird hier

$$A_p=\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}z^m\vartheta^m(1-\vartheta)^{p-m}=(1-\vartheta+\vartheta z)^p$$

und dies konvergiert nach 0, falls $(z=x+iy)$

$$|1-\vartheta+\vartheta z|^2=1-2\vartheta(1-x)+\vartheta^2[(1-x)^2+y^2]<1,$$

eine Bedingung, die man dann und nur dann durch geeignetes $0<\vartheta<1$ erfüllen kann, falls $1-x>0$. Für jeden Wert z in der Halbebene $\Re z<1$ kann also die Folge z^m durch eine Multiplikatorenfolge (21) mit hinreichend kleinem ϑ zur Konvergenz nach 0 gebracht werden. Man bemerke, daß der Borelsche Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty}e^{-t}\sum z^n\frac{t^n}{n!}$$

ebenfalls für $\Re z<1$, der Abelsche

$$\lim_{t\to 1}(1-t)\sum z^n t^n$$

nur für $|z|\leqq 1$ existiert.

Für $|z|\leqq 1$, $z\neq 1$ wird übrigens die Folge z^m durch jede noch so schwache Momentfolge, die einer bei $u=0$ und $u=1$ stetigen Funktion $\chi(u)$ entspricht, zur Konvergenz nach 0 gebracht. Es genügt, $|z|=1$, $z=e^{i\varphi}$ (φ kein Vielfaches von 2π) anzunehmen; dann wird

$$A_p=\int_0^1(1-u+ue^{i\varphi})^p\,d\chi(u),$$

$$|1-u+ue^{i\varphi}|^2=1-4u(1-u)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

und bei Zerlegung des Integrals ($0<\delta<\frac{1}{2}$ und $\chi(u)$ monoton zunehmend gedacht)

$$|A_p|\leqq\int_0^\delta d\chi(u)+\left[1-4\delta(1-\delta)\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{p}{2}}\int_\delta^{1-\delta}d\chi(u)+\int_{1-\delta}^1 d\chi(u),$$

woraus wie oben

$$\overline{\lim}\,|A_p|\leqq\chi(\delta)-\chi(0)+\chi(1)-\chi(1-\delta)$$

und auf Grund der Stetigkeitsannahme $A_p\to 0$ folgt.

Beschränken wir uns des weiteren auf den Fall, daß $\chi(u)$ für $0 \leqq u \leqq 1$ stetig ist und für $0 < u < 1$ eine stetige Ableitung $\varphi(u)$ hat, also auf reine C-Folgen der Gestalt

$$\mu_n = \int_0^1 \varphi(u)\, u^n\, d\,u \tag{22}$$

mit Existenz des eventuell uneigentlichen Integrals $\int_0^1 |\varphi(u)|\, d\,u$, oder ($u = e^{-x}$, $\Phi(x) = u\,\varphi(u)$)

$$\mu_n = \int_0^\infty \Phi(x)\, e^{-xn}\, d\,x \tag{23}$$

mit stetigem $\Phi(x)$ für $x > 0$ und Existenz von $\int_0^\infty |\Phi(x)|\, d\,x$. Man sieht unmittelbar, daß auch mehrfache Integrale wie

$$\left\{\begin{aligned} \mu_n &= \int_0^1\int_0^1 \varphi(u,\, v)\, u^n\, d\,u\, d\,v = \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(x,\, y)\, e^{-xn}\, d\,x\, d\,y, \\ \mu_n &= \int_0^1\int_0^1 \varphi(u,\, v)\,(u v)^n\, d\,u\, d\,v = \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(x,\, y)\, e^{-(x+y)n}\, d\,x\, d\,y, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

worin $\Phi(x, y)$ für $x, y > 0$ stetig und $\int_0^\infty\int_0^\infty |\Phi(x,\, y)|\, d\,x\, d\,y$ existierend angenommen ist, reine C-Folgen liefern (auch ohne Zurückführung auf einfache Integrale).

Beispiele. Die Annahme

$$\varphi(u) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} \qquad (\alpha,\, \beta > 0)$$

gibt nach (22) die normierte C-Folge

$$\mu_n = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(n+\alpha+\beta)} = \binom{n+\beta-1}{n} : \binom{n+\alpha+\beta-1}{n}.$$

Diese Multiplikatorenfolge entspricht nach (16) der Matrix[6])

$$\lambda = C_{\alpha+\beta-1} : C_{\beta-1},$$

die also eine normierte C-Matrix ist; d. h. mit einem Cesàroschen Mittel der Ordnung > -1 konvergiert jedes Mittel höherer Ordnung und zwar nach demselben Grenzwert. Übrigens ist λ^{-1} keine C-Matrix $\left(\frac{1}{\mu_n}\right.$ divergiert mit n nach ∞ und ist also keine C-Folge, da eine solche wegen (α) jedenfalls beschränkt sein muß$\left.\right)$ und daher $C_{\alpha+\beta-1}$ *stärker* als $C_{\beta-1}$.

[6]) Wegen der Vertauschbarkeit aller unserer Matrizen können wir Matrizenquotienten mit Doppelpunkt oder Bruchstrich schreiben. Aus demselben Grunde dürfen hier Äquivalenzen multipliziert werden (§ 1), wobei aus reinen (normierten) Äquivalenzen wieder solche entstehen.

Für $\alpha = 1$ erhält man speziell die C-Folge

$$\mu_n = \frac{\beta}{n+\beta}$$

und die normierte C-Matrix

$$\Gamma_\beta = C_\beta : C_{\beta-1}$$

deren zugehörige lineare Substitution $A = \Gamma_\beta\, a$ übrigens

$$A_p = \left[a_0 + \binom{\beta}{1} a_1 + \binom{\beta+1}{2} a_2 + \ldots + \binom{\beta+p-1}{p} a_p\right] : \binom{\beta+p}{p}$$

lautet, mit den in umgekehrter Reihenfolge angeordneten Koeffizienten von C_β. Kombiniert man linear dies μ_n mit der Folge $\mu_n = 1$, die der Einheitsmatrix E entspricht, so erhält man

$$\mu_n = \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) : \left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

als normierte C-Folge, zugleich aber auch $\frac{1}{\mu_n}$, und das besagt $\Gamma_\alpha \approx \Gamma_\beta$; die Matrizen Γ_β $(\beta > 0)$ sind allesamt normiert äquivalent; insbesondere $\Gamma_\beta \approx \Gamma_1 = C$.

Die Annahme

$$\varphi(u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\beta-1} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

oder

$$\Phi(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}$$

gibt

$$\mu_n = \left(\frac{\beta}{n+\beta}\right)^\alpha$$

als normierte C-Folge; ihr entspricht für $\beta = 1$ die Hölder sche Matrix H^α, für beliebiges β die als α-te Potenz von Γ_β aufzufassende Matrix Γ_β^α. H^α ist also stärker als die Einheitsmatrix und $H^{\alpha+\gamma}$ stärker als H^γ bei beliebigem γ: mit einem Hölderschen Mittel konvergiert jedes Mittel höherer Ordnung nach demselben Grenzwert. Das gleiche gilt von Γ_β^α.

Die Relation $\Gamma_\alpha \approx \Gamma_1$ oder $C_\alpha : C_{\alpha-1} \approx H$ läßt sich nun schreiben $C_{\alpha-1} : H^{\alpha-1} \approx C_\alpha : H^\alpha$ oder $(\alpha > 0)$

$$(25) \qquad \frac{C_{\alpha-1}}{H^{\alpha-1}} \approx \frac{C_\alpha}{H^\alpha} \approx \frac{C_{\alpha+1}}{H^{\alpha+1}} \approx \ldots,$$

insbesondere $(\alpha = 1)$

$$E = \frac{C}{H} \approx \frac{C_2}{H^2} \approx \frac{C_3}{H^3} \approx \ldots,$$

d. h.

$$C_k \approx H^k$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$ Das ist der Äquivalenzsatz der Herren Knopp und

Schnee[7]); die Einschränkung auf ganzes k werden wir sogleich beseitigen. Unserem Beweis liegt die Äquivalenz

$$T_\alpha = \Gamma_1 : \Gamma_\alpha \approx E$$

zugrunde; dieser Matrix T_α entspricht die C-Folge

$$\mu_n = \left(1+\frac{n}{\alpha}\right):(1+n) = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\,\frac{1}{n+1},$$

und daher ist

$$T_\alpha = \frac{1}{\alpha} E + \frac{\alpha-1}{\alpha} H$$

genau die Matrix, die Herr I. Schur[7]) in seinem Beweise des Äquivalenzsatzes verwendet: ihre Rolle tritt durch die Einfachheit der zugehörigen Multiplikatoren hier besonders klar hervor.

§ 6.

Wenn in (23) $\Phi(x)$ für $x > 0$ eine stetige Ableitung hat und außer $\int\limits_0^\infty |\Phi(x)|\,dx$ auch $\int\limits_0^\infty |\Phi'(x)|\,dx$ existiert, so ist außer μ_n auch $n\mu_n$ eine reine C-Folge.

Denn es existiert $\int\limits_0^\infty \Phi'(x)\,dx$, also $\Phi(+0)$ und $\Phi(+\infty)$; der letztere Grenzwert muß wegen der Integrabilität von $\Phi(x)$ verschwinden. Aus (23) folgt dann durch partielle Integration

$$n\mu_n = \Phi(+0) + \int\limits_0^\infty e^{-nx}\Phi'(x)\,dx \tag{26}$$

als Summe einer konstanten und einer Momentfolge wie (23).

Hiervon machen wir folgende Anwendung. Bilden wir mit den Funktionen $(\alpha, \beta > 0)$

$$\Phi(x) = e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^{\beta-1} : \Gamma(\beta), \quad \Psi(x) = e^{-x} x^{\beta-1} : \Gamma(\beta)$$

die Momente

$$\varphi_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}, \qquad \psi_n = \frac{1}{(n+1)^\beta}.$$

Da nun $\Phi(x) : x^{\beta-1}$ und $\Psi(x) : x^{\beta-1}$ an der Stelle $x = 0$ regulär sind mit gleichem konstanten Glied, so sind dort auch

$$[\Phi(x) - \Psi(x)] : x^\beta \quad \text{und} \quad [\Phi'(x) - \Psi'(x)] : x^{\beta-1}$$

---

[7]) K. Knopp, Grenzwerte von Reihen bei Annäherung an die Konvergenzgrenze, Diss. Berlin 1907. W. Schnee, Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes, Math. Ann., **67** (1909), S. 110–125. W. B. Ford, On the relation between the sum-formulas of Hölder and Cesàro, Amer. Journ. of Math., **32** (1910), S. 315–326. I. Schur, Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Ann., **74** (1913), S. 447–458.

regulär, also $\Phi'(x) - \Psi'(x)$ bis nach $x = 0$ integrabel (die obere Grenze ∞ bedarf keiner Erörterung). Hiernach bildet außer φ_n, ψ_n auch $n(\varphi_n - \psi_n)$ eine reine C-Folge, ebenso

$$(n+\alpha)\varphi_n - (n+1)\psi_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} - (n+1)^{1-\beta}.$$

Speziell für $\alpha + \beta = 1$ (also $0 < \alpha < 1$) ist

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} - (n+1)^{\alpha}$$

eine reine C-Folge; multipliziert man dies mit einer der reinen C-Folgen $1 : \binom{n+\alpha}{n}$ oder $(n+1)^{-\alpha}$, so ergibt sich

$$\mu_n = (n+1)^{\alpha} : \binom{n+\alpha}{n}$$

nebst $\frac{1}{\mu_n}$ als normierte C-Folge; die zugehörige Matrix $C_\alpha : H^\alpha$ ist also der Einheitsmatrix normiert äquivalent oder

$$C_\alpha \approx H^\alpha. \tag{27}$$

Dies gilt zunächst für $0 < \alpha \leqq 1$, aber auf Grund von (25) für jedes $\alpha > -1$, womit der Äquivalenzsatz auch auf nicht ganzzahlige Ordnung ausgedehnt ist. Es folgt noch[8]) für $\alpha, \beta, \alpha + \beta > -1$

$$C_{\alpha+\beta} \approx H^{\alpha+\beta} = H^\alpha H^\beta \approx C_\alpha C_\beta.$$

Wenn in (26) $\Phi(+0) = 0$ und auch noch $\int_0^\infty |\Phi''(x)|\,dx$ existiert, so ist auch noch $n^2 \mu_n$ eine C-Folge. Wenn $\Phi(x)$ für $x > 0$ unbeschränkt differenzierbar ist, wenn ferner sämtliche Ableitungen, $\Phi(x)$ selbst eingeschlossen, von 0 bis ∞ absolut integrabel sind und für $x \to 0$ nach 0 konvergieren, so sind

$$\mu_n = \int_0^\infty \Phi(x) e^{-xn}\,dx, \quad n\mu_n = \int_0^\infty \Phi'(x) e^{-xn}\,dx, \quad n^2\mu_n = \int_0^\infty \Phi''(x) e^{-xn}\,dx, \ldots$$

sämtlich Momentfolgen, d. h. die C-Folge μ_n ist stärker als alle Multiplikatorenfolgen der Hölderschen oder Cesàroschen Skala.

Solche Funktionen sind z. B.

$$\Phi(x) = e^{-ax - \frac{b}{x}} x^{\lambda-1} \qquad (a > 0,\ b > 0,\ \lambda \text{ beliebig}),$$

$$\Phi(x) = e^{-\frac{b}{x}} x^{\lambda-1} \qquad (b > 0,\ \lambda < 0).$$

---

[8]) Mit der Formel $C_\alpha C_\beta \approx C_{\alpha+\beta}$ für „natürliche" Cesàrosche Matrizen verwandt, aber nicht identisch ist die für „modifizierte" (s. Fußnote [4])) $C^*_\alpha C^*_\beta \approx C^*_{\alpha+\beta}$, die als Spezialfall in einem von Herrn G. Faber, Über die Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte, Münch. Ak. Ber. 1913, S. 519—531, bewiesenen allgemeinen Grenzwertsatz enthalten ist.

Speziell erhält man aus

$$\int_0^\infty e^{-ax-\frac{b}{x}} x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \sqrt{\pi}\, e^{-2(ab)^{\frac{1}{2}}} b^{-\frac{1}{2}} \qquad (a \geqq 0,\quad b > 0),$$

indem man a durch $n+a$ ersetzt, eine reine C-Folge der Gestalt

$$(28) \qquad \mu_n = e^{-A(n+a)^{\frac{1}{2}}} \qquad (A > 0,\quad a \geqq 0),$$

die stärker ist als alle Hölderschen C-Folgen.

In ähnlicher Weise kann man mehrfache Integrale[9]) vom Typus

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax-by-\frac{c}{xy}} x^{\lambda-1} y^{\mu-1}\,dx\,dy$$

behandeln ($\lambda - \frac{1}{3}$, $\mu - \frac{2}{3}$ ganzzahlig) und findet so die reinen C-Folgen

$$(29) \qquad \mu_n = e^{-A(n+a)^\alpha} \qquad (A > 0,\ a > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ \alpha \text{ rational}),$$

worin speziell für $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ auch $a = 0$ sein darf; wir werden dieses dürftige Resultat in § 9 vervollständigen.

§ 7.

Hier ist der Ort, auf die Tatsache hinzuweisen, daß keineswegs, wie man aus der Hölderschen Skala schließen könnte, das infinitäre Verhalten der Multiplikatoren μ_n für ihre Wirksamkeit oder Rangordnung als C-Folgen maßgebend ist; eine zu starke Konvergenz von μ_n nach 0 kann diese Wirksamkeit beeinträchtigen oder aufheben, offenbar weil dann A_p überwiegend von den Anfangsgliedern der Folge a_m abhängt. Als Beispiel betrachten wir die drei Scharen von C-Folgen (vgl. (21), (28))

$$e^{-\alpha\log(n+1)} = (n+1)^{-\alpha}, \quad e^{-\beta n^{\frac{1}{2}}}, \quad e^{-\gamma n} = \vartheta^n$$
$$(\alpha, \beta, \gamma > 0, \quad 0 < \vartheta < 1),$$

deren Matrizen $H^\alpha, J^\beta, K^\gamma$ heißen mögen. Während nun stets $H^\alpha < J^\beta$ ist und dem infinitären Verhalten nach auch $J^\beta < K^\gamma$ zu erwarten wäre, ist in Wahrheit nicht einmal $H^\alpha < K^\gamma$, sondern K^γ mit H^α und J^β stets *unvergleichbar*.

Denn zunächst kann nicht $K^\gamma \gtrsim H$ sein. In diesem Fall wäre $(n+1)\vartheta^n$ oder

$$\mu_n = n\vartheta^n(1-\vartheta) = \vartheta(1-\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}\vartheta^n$$

[9]) J. Liouville, Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples, Journ. de Math. (2), 1 (1856), S. 82–88.

eine C-Folge, also

$$\mu_{m,n} = \vartheta(1-\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}[\vartheta^m(1-\vartheta)^n] = \vartheta^m(1-\vartheta)^n[m-(m+n)\vartheta].$$

Nach (α) müßte

$$M_p = \sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\vartheta^m(1-\vartheta)^{p-m}\,|\,m-p\vartheta\,|$$

beschränkt sein, während nach bekannten Abschätzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\frac{M_p}{\sqrt{p}} \to \sqrt{\frac{2\vartheta(1-\vartheta)}{\pi}}.$$

Es ist auch niemals $K^\gamma \gtrsim H^\alpha$, denn durch Erhebung in eine hinlänglich hohe Potenz würde man $K^{m\gamma} \gtrsim H^{m\alpha} > H$ erhalten. Wegen $J^\beta > H^\alpha$ ist auch nicht $K^\gamma \gtrsim J^\beta$.

Andererseits ist natürlich auch nicht $K^\gamma \lesssim J^\beta$, denn $e^{-\beta\sqrt{n}+\gamma n}$ ist gewiß, da es mit n nach ∞ divergiert, keine C-Folge. Um so weniger ist $K^\gamma \lesssim H^\alpha$. Daher ist K^γ mit H^α und mit J^β unvergleichbar.

Während hier ϑ^n noch wenigstens eine C-Folge war, kann diese Eigenschaft bei noch stärkerem Verschwinden von $\lim \mu_n$ auch ganz verloren gehen. Wir wollen z. B. zeigen, daß $1 : n!$ keine C-Folge ist.

Aus (10) erhält man

$$\varphi(z) = \sum_n (-1)^n \mu_n \frac{z^n}{n!} = e^{-z}\sum_n \mu_{0,n}\frac{z^n}{n!}$$

und durch Erhöhung der Indizes um m

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^m\varphi^{(m)}(z) &= \sum_n (-1)^n \mu_{m+n}\frac{z^n}{n!} = e^{-z}\sum_n \mu_{m,n}\frac{z^n}{n!},\\ (-1)^m\frac{z^m}{m!}\varphi^{(m)}(z) &= e^{-z}\sum_n\binom{m+n}{m}\mu_{m,n}\frac{z^{m+n}}{(m+n)!}\\ &= e^{-z}\sum_p\binom{p}{m}\mu_{m,p-m}\frac{z^p}{p!}. \end{aligned}\right.$$

Ist nun μ_m eine C-Folge, so ist nach (β) $\lim\limits_p \binom{p}{m}\mu_{m,p-m} = l_m$ und es muß dann auch der Borelsche Grenzwert dieser Folge, d. h. der Limes der rechten Seite von (30) für $z\to\infty$ oder

$$\lim_{z\to\infty} z^m\varphi^{(m)}(z) = (-1)^m m!\, l_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

existieren. Da dies z. B. für

$$\mu_n = \frac{n!}{(2n)!}, \qquad \varphi(z) = \cos\sqrt{z},$$

$$\mu_n = \frac{n!}{(2n+1)!}, \qquad \varphi(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

nicht zutrifft, so bilden diese μ_n keine C-Folgen. Andererseits sind 4^{-n} und $1:\binom{n+\frac{1}{2}}{n}=\frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$ C-Folgen, und mit $\frac{1}{n!}$ müßte auch das Produkt dieser drei, also $\frac{n!}{(2n+1)!}$ eine C-Folge sein, demnach ist auch $\frac{1}{n!}$ keine.

Für die Momentfolge (20) einer monotonen Funktion $\chi(u)$ erhält man $(0<\vartheta<1)$

$$\mu_n \geqq [\chi(1)-\chi(\vartheta)]\,\vartheta^n,$$

so daß, wenn $\chi(u)$ im Intervall $\vartheta \leqq u \leqq 1$ nicht konstant ist, μ_n nicht stärker als ϑ^n nach 0 konvergieren kann. Der Konvergenzradius von $\sum \mu_n x^n$ ist dann gewiß $\leqq 1:\vartheta$, und diese Reihe kann nur dann eine ganze Funktion sein, wenn $\chi(u)$ für $0<u\leqq 1$ konstant ist, also alle μ_n bis auf höchstens μ_0 verschwinden.

§ 8.

Mittels geeigneter Momentfolgen können wir die Höldersche Skala zu einer *logarithmischen* Skala von bekanntem Bau ausfüllen, bei der auch, im Gegensatz zu dem in § 7 Gesagten, die Rangordnung der Multiplikatorenfolgen als C-Folgen genau mit ihrer infinitären Rangordnung übereinstimmt.

Es bedeute l_k den iterierten Logarithmus und

$$e_0=0,\quad e_1=1,\quad e_2=e,\quad e_{k+1}=e^{e_k},$$

so daß $l_k a$ für $a>e_{k-1}$ reell, für $a>e_k$ positiv ist. Man hat für $a>0,\ y>0$:

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^{y-1}}{\Gamma(y)}e^{-xa}=a^{-y}=e^{-y\,la}; \tag{31}$$

für $a>1,\ z>0$:

$$\int_0^\infty dy\,\frac{y^{z-1}}{\Gamma(z)}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{y-1}}{\Gamma(y)}e^{-xa}=[la]^{-z}=e^{-z l_2 a}; \tag{32}$$

für $a>e,\ u>0$:

$$\int_0^\infty dz\,\frac{z^{u-1}}{\Gamma(u)}\int_0^\infty dy\,\frac{y^{z-1}}{\Gamma(z)}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{y-1}}{\Gamma(y)}e^{-xa}=[l_2 a]^{-u}=e^{-u l_3 a} \tag{33}$$

usf. Ersetzt man a durch $n+a$, so sind also nach (24)

$$[n+a]^{-y},\quad [l(n+a)]^{-z},\quad [l_2(n+a)]^{-u},\ldots,[l_k(n+a)]^{-y_k}$$

reine C-Folgen (die letzte für $y_k>0,\ a>e_k$), denn aus der Existenz der iterierten Integrale folgt, da der Integrand positiv ist, die Existenz der betreffenden mehrfachen Integrale.

Multipliziert man (31) mit $\Gamma(y)$ und differenziert nach y, so kommt

$$\int_0^\infty dx \log x\, x^{y-1} e^{-xa} = e^{-yla}[\Gamma'(y) - \Gamma(y) la],$$

woraus, mit Ersetzung von a durch $n+a$, folgt, daß auch

$$[n+a]^{-y}\, l(n+a)$$

für $a > 0$, $y > 0$ eine C-Folge ist. Durch Erhebung in eine ganze Potenz und Multiplikation mit $[l(n+a)]^{-z}$ $(z > 0)$ ergibt sich, daß

$$[n+a]^{-y}[l(n+a)]^{-z}$$

für $a > 1$, $y > 0$ und *beliebiges* z eine C-Folge ist. Operiert man ebenso an (32), so ergibt sich

$$[l(n+a)]^{-z}[l_2(n+a)]^{-u}$$

für $a > e$, $z > 0$ und beliebiges u als C-Folge; sodann ist für $a > e$, $y > 0$, beliebiges z und u

$$[n+a]^{-y}[l(n+a)]^{-z}[l_2(n+a)]^{-u}$$
$$= (n+a)^{-y}[l(n+a)]^{-z+1} \cdot [l(n+a)]^{-1}[l_2(n+a)]^{-u}$$

eine C-Folge. So fortfahrend erhält man

(34) $$[n+a]^{-y}[l(n+a)]^{-y_1} \ldots [l_k(n+a)]^{-y_k}$$

als reine C-Folge, falls $a > e_k$ und der erste nicht verschwindende der Exponenten $y, y_1, \ldots, y_k$ positiv ist.

Ferner folgt aus (31) für $a, b, y > 0$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^y}{\Gamma(y+1)} \frac{e^{-xa} - e^{-xb}}{x} = \frac{a^{-y} - b^{-y}}{y}$$

und diese Formel gilt auch noch für $y > -1$ $(y \neq 0)$. Verwandelt man y in $-y$ und nimmt dann $0 < y < 1$, so ergibt sich also (a, b durch $n+a$, $n+b$ ersetzt)

$$(n+b)^y - (n+a)^y$$

und nach Multiplikation mit $(n+b)^{-y}$ auch

$$(n+a)^y : (n+b)^y$$

als C-Folge, zunächst für $0 < y < 1$, durch Potenzierung für $y > 0$ und durch Vertauschung von a, b für jedes y. Genau ebenso zeigt sich

$$[l_k(n+a)]^{y_k} : [l_k(n+b)]^{y_k}$$

für $a, b > e_k$ und beliebiges y_k als C-Folge, womit wir statt (34) die allgemeinere reine C-Folge

(35) $$\varphi_n = [n+a]^{-y}\,[l(n+a_1)]^{-y_1}\dots[l_k(n+a_k)]^{-y_k}$$

erhalten, falls $a > 0$, $a_1 > 1, \dots, a_k > e_k$ und der erste nicht verschwindende der Exponenten $y, y_1, \dots, y_k$ positiv ist. Ist

$$\psi_n = [n+b]^{-z}\,[l(n+b_1)]^{-z_1}\dots[l_k(n+b_k)]^{-z_k}$$

ein zweiter Ausdruck dieser Form (die Faktorenzahl kann in beiden gleich angenommen werden), so ist $\frac{\psi_n}{\varphi_n}$ eine C-Folge $\left(\frac{\varphi_n}{\psi_n}\text{ aber keine}\right)$, falls die erste nicht verschwindende der Differenzen $z-y$, $z_1-y_1, \dots, z_k-y_k$ positiv ist, während bei Gleichheit aller Exponenten sowohl $\frac{\psi_n}{\varphi_n}$ wie $\frac{\varphi_n}{\psi_n}$ C-Folgen sind. D. h. die Rangordnung der φ_n als C-Folgen ist dieselbe wie die ihres infinitären Verhaltens.

§ 9.

Jede total monotone Folge ($\mu_{m,n} \geqq 0$) ist eine C-Folge, da hier (α) wegen (14) erfüllt ist. Um total monotone Folgen zu erhalten, verstehen wir unter $\mu(t)$ eine für $t \geqq 0$ stetige, für $t > 0$ unbeschränkt differenzierbare Funktion mit

(36) $$(-1)^n \mu^{(n)}(t) \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

und setzen

(37) $$\mu_m = \mu(m);$$

da bekanntlich ($n \geqq 1$)

$$\mu_{m,n} = (-1)^n \mu^{(n)}(t)$$

(t ein Wert zwischen m und $m+n$), so ist μ_m total monoton. Wir kommen auf diese „total monotonen" Funktionen $\mu(t)$ am Ende von § 10 zurück und werden dann auch zeigen, daß wegen der hier vorausgesetzten Stetigkeit bei $t=0$ die Folge (37) eine *reine* C-Folge ist.

Die Bedingung (36) ist erfüllt, wenn wir setzen

(38) $$\mu(t) = e^{\varrho(t)}, \qquad (-1)^n \varrho^{(n)}(t) \geqq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

wie aus

$$\mu' = e^{\varrho}\varrho', \qquad \mu'' = e^{\varrho}(\varrho'' + \varrho'^2), \qquad \mu''' = e^{\varrho}(\varrho''' + 3\varrho'\varrho'' + \varrho'^3), \dots$$

hervorgeht. Wir geben zwei Beispiele: das eine liefert einen neuen Beweis des Äquivalenzsatzes, das andere eine Vervollständigung unserer Ergebnisse über Exponentialfolgen (§ 6).

Für

(A) $$\varrho(t) = \log\Gamma(\alpha+t) - \log\Gamma(\beta+t) + (\beta-\alpha)\log(1+t) \quad (\alpha, \beta > 0)$$

ist

$$-\varrho'(t)=\frac{\Gamma'(\beta+t)}{\Gamma(\beta+t)}-\frac{\Gamma'(\alpha+t)}{\Gamma(\alpha+t)}-\frac{\beta-\alpha}{1+t}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+\alpha+t}-\frac{1}{m+\beta+t}\right)-\frac{\beta-\alpha}{1+t}$$

$$(-1)^n\varrho^{(n)}(t):(n-1)!=\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+\alpha+t)^{-n}-(m+\beta+t)^{-n}\right]-(\beta-\alpha)(1+t)^{-n}.$$

Da die zweite Ableitung von t^{-n} $(t>0)$ positiv, diese Funktion nach oben konkav ist, gilt für $0<\alpha<\beta<\gamma$

$$\begin{vmatrix}\alpha^{-n} & \alpha & 1\\ \beta^{-n} & \beta & 1\\ \gamma^{-n} & \gamma & 1\end{vmatrix}<0,$$

insbesondere für $\gamma=\alpha+1$, also $0<\beta-\alpha<1$

$$\alpha^{-n}-\beta^{-n}>(\beta-\alpha)\left[\alpha^{-n}-(\alpha+1)^{-n}\right]$$

und hierin kann man die Argumente α, β um $m+t$ vermehren. Daher

$$(-1)^n\varrho^{(n)}(t):(n-1)!\,(\beta-\alpha)>\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+\alpha+t)^{-n}-(m+1+\alpha+t)^{-n}\right]-(1+t)^{-n}$$
$$=(\alpha+t)^{-n}-(1+t)^{-n}$$

und dies ist $\geqq 0$, falls $\alpha\leqq 1$ angenommen wird. Mit Einschließung der trivialen Grenzfälle haben wir also für

$$0<\alpha\leqq 1,\qquad 0\leqq\beta-\alpha\leqq 1$$

$(-1)^n\varrho^{(n)}(t)\geqq 0$ und es ist

$$\mu_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)}(n+1)^{\beta-\alpha}$$

oder nach Anbringung eines positiven Faktors

$$\binom{\alpha+n-1}{n}(n+1)^{\beta-\alpha}:\binom{\beta+n-1}{n}$$

eine total monotone Folge, $C_{\beta-1}:C_{\alpha-1}H^{\beta-\alpha}$ oder

$$C_{\alpha+\gamma-1}:C_{\alpha-1}H^{\gamma}\qquad(0<\alpha\leqq 1,\quad 0\leqq\gamma\leqq 1)$$

eine reine C-Matrix. Speziell (für $\alpha=1$ oder $\gamma=1-\alpha$) sind

$$C_\alpha:H^\alpha,\qquad H^{\alpha-1}:C_{\alpha-1}\qquad\qquad(0<\alpha\leqq 1)$$

C-Matrizen[10]); in Verbindung mit (25) folgt daraus, daß $C_\alpha:H^\alpha$ und $H^\alpha:C_\alpha$ für $\alpha>-1$ (normierte) C-Matrizen sind, also $C_\alpha\approx H^\alpha$.

[10]) Daß diesen total monotone Multiplikatorenfolgen entsprechen, kann man nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn I. Schur noch elementarer beweisen.

Für

(B) $$\varrho(t) = -A(t+a)^{\alpha} \qquad (A>0,\ a\geqq 0,\ 0<\alpha<1)$$

ist

$$(-1)^n \varrho^{(n)}(t) = A\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-1-\alpha)(t+a)^{\alpha-n}$$
$$= A\alpha\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}:(t+a)^{n-\alpha}>0,$$

also ist die *Exponentialfolge*

(39) $$e^{-A(n+a)^{\alpha}} \qquad (A>0,\ a\geqq 0,\ 0<\alpha<1)$$

total monoton. Prüfen wir ferner

$$\varrho(t) = -A(t+a)^{\alpha}+B(t+b)^{\beta}$$

und nehmen alsbald

(40) $$A>0,\quad B>0,\quad 0\leqq a<b,\quad 0<\beta<\alpha<1$$

an, so wird

$$(-1)^n\varrho^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{A\alpha}{(t+a)^{n-\alpha}} - \frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\frac{B\beta}{(t+b)^{n-\beta}}$$

und (38) verlangt, daß

$$\frac{B}{A}\leqq\frac{\alpha}{\beta}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\beta)}\frac{(t+b)^{n-\beta}}{(t+a)^{n-\alpha}}$$

für $n=1,2,3,\dots$ und $t>0$. Der Quotient $(t+b)^{n-\beta}:(t+a)^{n-\alpha}$ ist für $t>-a$ positiv und divergiert nach ∞ für $t\to -a$ und $t\to\infty$; sein Minimum für $t>-a$ ist

$$\left(\frac{b-a}{\alpha-\beta}\right)^{\alpha-\beta}\frac{(n-\beta)^{n-\beta}}{(n-\alpha)^{n-\alpha}}$$

und unsere Bedingung ist also gewiß erfüllt, wenn für $n=1,2,3,\dots$

$$B:A(b-a)^{\alpha-\beta}\leqq\frac{\alpha}{\beta}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\beta)}\cdot\frac{(n-\beta)^{n-\beta}}{(n-\alpha)^{n-\alpha}}.$$

Hier hat der Ausdruck rechts für $n\to\infty$ einen positiven Grenzwert, die rechte Seite der folgenden Ungleichung, und daher für $n=1,2,3,\dots$ eine positive untere Grenze

$$c_{\alpha,\beta}\leqq\frac{\alpha}{\beta}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{e}{\alpha-\beta}\right)^{\alpha-\beta}.$$

Demnach ist

$$e^{-A(n+a)^{\alpha}+B(n+b)^{\beta}}$$

unter den Bedingungen (40) und

(41) $$B\leqq A(b-a)^{\alpha-\beta}c_{\alpha,\beta}$$

eine total monotone Folge, d. h. von den Exponentialfolgen

$$e^{-A(n+a)^\alpha}, \qquad e^{-B(n+b)^\beta}$$

die erstere die stärkere; dabei muß also, bei Festhaltung der übrigen Parameter, b oder A über einer gewissen unteren Grenze liegen, und da $c_{\alpha,\beta}$ für $\alpha \to 1$ nach 0 konvergiert, so rückt diese Grenze bei Annäherung von α an 1 ins Unendliche. Allerdings sind unsere jetzigen Bedingungen nur hinreichend, nicht notwendig; immerhin erhalten wir doch eine Bestätigung der uns schon bekannten Tatsache, daß die Exponentialfolge (39) für $\alpha = 1$ ihre Stärke verliert.

Ähnlich wie das letzte Beispiel (oder durch Grenzübergang) ist

$$\varrho(t) = -A(t+a)^\alpha + B \log (t+b)$$

zu behandeln, wieder unter den Bedingungen (40) (die letzte durch $0 < \alpha < 1$ zu ersetzen); statt (41) kommt

$$B \leqq A(b-a)^\alpha c_\alpha, \qquad 0 < c_\alpha \leqq \alpha^{1-\alpha} e^\alpha : \Gamma(1-\alpha).$$

Es ist also

$$e^{-A(n+a)^\alpha}(n+b)^B$$

eine C-Folge, sobald bei Fixierung der übrigen Parameter b eine gewisse Grenze übertrifft; da aber $(n+c)^B : (n+b)^B$ bei beliebigen $b, c > 0$ eine C-Folge ist (§ 8), ist jene Bedingung überflüssig. D. h. die Exponentialfolge (39) ist stärker als alle C-Folgen $(n+b)^{-B}$, insbesondere als alle Multiplikatorenfolgen der Hölderschen Skala.

§ 10.

Zum Abschluß dieser Untersuchung beweisen wir noch die Umkehrung von II:

Satz III. *Jede C-Folge ist eine Momentfolge.*

D. h. wenn die Zahlen μ_n der Bedingung (α) genügen, so lassen sie sich als die Momente (20) einer Funktion $\chi(u)$ darstellen, die für $0 \leqq u \leqq 1$ von beschränkter Schwankung ist; wir werden überdies sehen, daß $\chi(u)$ im wesentlichen eindeutig bestimmt ist.

Zunächst zeigen wir, daß ein im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ positives Polynom $f(u)$ in der Form

$$f(u) = \sum_{m=0}^{p} a_m u^m (1-u)^{p-m} \tag{42}$$

mit positiven Koeffizienten a_m dargestellt werden kann.

Ist $f(u)$ linear, so hat man

$$f(u) = a_0(1-u) + a_1 u,$$

wo $a_0 = f(0)$ und $a_1 = f(1)$ positiv sind.

Ist $f(u)$ irreduzibel quadratisch,

$$f(u) = \alpha + 2\beta u + \gamma u^2 \qquad (\alpha, \gamma, \alpha\gamma - \beta^2 > 0),$$

so setze man mit noch zu bestimmendem $p \geqq 2$

$$\begin{aligned} f(u) &= \alpha \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \\ &\quad + 2\beta u \sum_{m=1}^{p} \binom{p-1}{m-1} u^{m-1} (1-u)^{p-m} \\ &\quad + \gamma u^2 \sum_{m=2}^{p} \binom{p-2}{m-2} u^{m-2} (1-u)^{p-m} . \\ &= \sum_{m=0}^{p} \frac{(p-2)!}{m!\,(p-m)!} u^m (1-u)^{p-m} \\ &\qquad [p(p-1)\alpha + 2m(p-1)\beta + m(m-1)\gamma]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in eckiger Klammer

$$p(p-1)\alpha + m(2p\beta - 2\beta - \gamma) + m^2\gamma$$

soll für $m = 0, 1, \ldots, p$ positiv werden; wir können ihn sogar für jedes reelle m positiv machen, indem wir seine Determinante

$$\begin{aligned} &p(p-1)\alpha\gamma - \tfrac{1}{4}(2p\beta - 2\beta - \gamma)^2 \\ = {} &p^2(\alpha\gamma - \beta^2) + p(2\beta^2 + \beta\gamma - \alpha\gamma) - \tfrac{1}{4}(2\beta + \gamma)^2 \end{aligned}$$

positiv machen, was für hinlänglich großes p der Fall ist.

Also gestatten lineare und irreduzibel quadratische Polynome die gewünschte Darstellung, und durch Multiplikation solcher ergibt sie sich für beliebige $f(u)$.

Wir beweisen III nun zunächst für total monotone Folgen μ_n und schließen dabei den trivialen Fall des Verschwindens aller $\mu_{m,n}$, d. h. nach (14) das Verschwinden von μ_0 aus; es können dann auch nicht alle Zahlen $\mu_{0,p}, \ldots, \mu_{p,0}$ einer Diagonale der Matrix $(\mu_{m,n})$ verschwinden.

Ordnen wir jedem Polynom

$$f(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n$$

die Zahl

$$M f = \alpha_0 \mu_0 + \alpha_1 \mu_1 + \ldots + \alpha_n \mu_n$$

zu, so hat diese lineare Funktionaloperation die Eigenschaft: *wenn* $f(u)$ *im Intervall* $0 \leqq u \leqq 1$ *positiv ist, so ist* $M f > 0$. Denn aus der Darstellung (42) folgt

$$M f = \sum_{m=0}^{p} a_m \mu_{m,\,p-m} > 0$$

($Mf = 0$ würde das Verschwinden aller $\mu_{m,p-m}$ für $m = 0, 1, \ldots, p$ bedingen). *Wenn* $f(u)$ *im Intervall* $0 \leqq u \leqq 1$ *nicht negativ ist, so ist* $Mf \geqq 0$. Denn $\varepsilon + f(u)$ ist dann positiv, bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$, also $\varepsilon \mu_0 + Mf > 0$ und daher $Mf \geqq 0$.

Insbesondere sind für

$$f(u) = (x_0 + x_1 u + \ldots + x_n u^n)^2, \quad g(u) = u(x_0 + x_1 u + \ldots + x_n u^n)^2$$

die beiden Formen

$$(43) \qquad Mf = \sum_0^n \mu_{i+k} x_i x_k, \quad Mg = \sum_0^n \mu_{i+k+1} x_i x_k$$

der reellen Variablen $x_0, \ldots, x_n$ für jedes n nicht negativ. Nehmen wir zunächst an, sie seien für jedes n definit positiv, so gibt es nach der Stieltjesschen Kettenbruchtheorie[11]) gewiß eine Lösung des Momentproblems, d. h. eine für $u \geqq 0$ monotone (nicht abnehmende) Funktion $\chi(u)$ derart, daß

$$\mu_n = \int_0^\infty u^n \, d\chi(u).$$

Hier ist aber gewiß $\chi(u)$ für $u > 1$ konstant; denn für $1 < \alpha < \beta$, $\chi(\alpha) < \chi(\beta)$ würde

$$\begin{aligned} \mu_{m,1} &= \int_0^1 u^m (1-u)\, d\chi(u) - \int_1^\infty u^m (u-1)\, d\chi(u) \\ &\leqq \int_0^1 d\chi(u) - \alpha^m(\alpha - 1) \int_\alpha^\beta d\chi(u) \end{aligned}$$

mit $m \to \infty$ nach $-\infty$ divergieren, während $\mu_{m,n} \geqq 0$ sein soll. Setzen wir also, unter eventueller, für die Momente belangloser Abänderung von $\chi(u)$ für Sprungstellen, $\chi(1) = \chi(1+0)$, so ist

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \, d\chi(u)$$

und, da es sich demgemäß um ein endliches Intervall handelt, so tritt der Stieltjessche Bestimmtheitsfall (Konvergenz des Kettenbruchs) ein: das Momentproblem hat, von einer additiven Konstanten und von den Sprungstellen abgesehen, nur eine Lösung $\chi(u)$. Man kann das so ausdrücken: setzen wir $\chi(0) = 0$ und präzisieren $\chi(u)$ für $0 < u < 1$ durch

---

[11]) T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Toulouse, **8** (1894), S. 1–122; **9** (1895), S. 1–47. Vgl. auch O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Teubner, 1913), Kap. 9. In § 11 beweisen wir Satz III ohne Berufung auf die Stieltjessche Theorie.

die *Forderung des arithmetischen Mittels*

$$\chi(u) = \tfrac{1}{2}\chi(u-0) + \tfrac{1}{2}\chi(u+0),$$

so ist $\chi(u)$ durch die vorgeschriebenen Momente eindeutig bestimmt für $0 \leqq u \leqq 1$. Wir wollen auch im folgenden $\chi(u)$ durch irgendwelche Vorschriften eindeutig bestimmt nennen, wenn es durch diese Vorschriften, sowie $\chi(0) = 0$ und die Bedingung des arithmetischen Mittels eindeutig bestimmt ist.

Den Fall, daß die quadratischen Formen Mf, Mg semidefinit werden können, kann man durch Grenzübergang erledigen. Ersetzen wir μ_n durch

$$\mu_n + \frac{\varepsilon}{n+1} = \mu_n + \varepsilon \int_0^1 u^n\, du \qquad (\varepsilon > 0),$$

so ist Mf durch

$$Mf + \varepsilon \int_0^1 f(u)\, du$$

zu ersetzen, und wenn $f(u) \geqq 0$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$, so wird dieser Ausdruck positiv, außer wenn $f(u)$ durchweg verschwindet; die zugehörigen an Stelle von (43) auftretenden quadratischen Formen werden also jetzt definit, und es gibt eine eindeutig bestimmte monotone Funktion $\chi(u, \varepsilon)$ mit

$$\mu_n + \frac{\varepsilon}{n+1} = \int_0^1 u^n\, d\chi(u, \varepsilon).$$

Ist $0 < \delta < \varepsilon$, so schließen wir aus

$$\mu_n + \frac{\delta}{n+1} + (\varepsilon - \delta)\frac{1}{n+1} = \mu_n + \frac{\varepsilon}{n+1}$$

wieder wegen der Bestimmtheit des Momentproblems auf

$$\chi(u, \delta) + (\varepsilon - \delta)\, u = \chi(u, \varepsilon),$$

d. h. die Funktion

$$\chi(u) = \chi(u, \delta) - \delta u = \chi(u, \varepsilon) - \varepsilon u$$

hängt in Wahrheit von ε nicht ab und es ist

$$\mu_n = \int_0^1 u^n\, d\chi(u).$$

Aus der Monotonie von $\chi(u, \varepsilon) = \chi(u) + \varepsilon u$ geht für $\varepsilon \to 0$ die von $\chi(u)$ hervor. Also sind auch in diesem Falle die μ_n die Momente einer eindeutig bestimmten monotonen Funktion $\chi(u)$, die hier bekanntlich nur endlich viele Wachstumsstellen haben kann, d. h. endlich viele Sprünge macht und sonst konstant ist.

Also: jede total monotone Folge μ_n ist Momentfolge einer eindeutig bestimmten monotonen Funktion $\chi(u)$.

Eine reelle C-Folge μ_n ist (§ 3) Differenz total monotoner Folgen: $\mu_n = \alpha_n - \beta_n$; hier sind die α_n, β_n Momente monotoner Funktionen $\alpha(u)$, $\beta(u)$ und daher die μ_n Momente einer Funktion $\chi(u) = \alpha(u) - \beta(u)$ von beschränkter Schwankung. Wenn wir diese Funktionen wieder durch Verschwinden an der Stelle $u = 0$ und durch die Forderung des arithmetischen Mittels präzisieren, so ist auch jetzt $\chi(u)$ eindeutig bestimmt, denn ist $\mu_n = \alpha_n^* - \beta_n^*$ eine zweite Darstellung, so ist die total monotone Folge

$$\alpha_n + \beta_n^* = \alpha_n^* + \beta_n$$

Momentfolge einer eindeutig bestimmten monotonen Funktion

$$\alpha(u) + \beta^*(u) = \alpha^*(u) + \beta(u),$$

also $\chi(u) = \chi^*(u)$. Den in § 3 angegebenen kleinsten total monotonen Folgen α_n, β_n entsprechen offenbar die kleinsten monotonen Funktionen $\alpha(u), \beta(u)$, wobei also $\alpha(u) + \beta(u) = \int_0^u |d\chi(u)|$ die totale Variation von $\chi(u)$ im Intervall $[0, u]$ ist.

Damit ist III für reelle C-Folgen bewiesen und überträgt sich unmittelbar auf komplexe. *C-Folgen und Momentfolgen sind identisch.*

Aus der Bestimmtheit des Momentproblems ziehen wir noch folgenden Schluß. Es ist stets, und zwar nur auf eine einzige Weise, möglich, in eine gegebene C-Folge $\mu_0, \mu_1, \ldots$ solche Zahlen $\mu_{\frac{1}{2}}, \mu_{\frac{3}{2}}, \ldots$ einzuschieben, daß $\mu_0, \mu_{\frac{1}{2}}, \mu_1, \mu_{\frac{3}{2}}, \ldots$ eine C-Folge wird. Denn macht man den Ansatz

$$\mu_{\frac{n}{2}} = \int_0^1 v^n \, d\psi(v) = \int_0^1 u^{\frac{n}{2}} \, d\psi(u^{\frac{1}{2}}) = \int_0^1 u^{\frac{n}{2}} \, d\chi(u),$$

so ist $\chi(u)$, und damit die $\mu_{\frac{n}{2}}$, bereits durch die Momente μ_n mit ganzen Indizes bestimmt, und andererseits liefert dieser Ansatz wirklich eine C-Folge $\mu_{\frac{n}{2}}$; nämlich die Momentfolge der Funktion $\psi(v) = \chi(v^2)$. Ebenso läßt sich μ_n für alle rationalen positiven Indizes eindeutig derart interpolieren, daß $\mu_0, \mu_t, \mu_{2t}, \mu_{3t}, \ldots$ für rationales $t > 0$ eine C-Folge ist.

Nennen wir eine für $t \geqq 0$ definierte, für $t > 0$ stetige Funktion $\mu(t)$ eine (reine) ***C*-Funktion**, speziell eine ***total monotone Funktion***, wenn für jedes rationale positive t die Folge $\mu(0), \mu(t), \mu(2t), \ldots$ eine (reine) C-Folge, speziell eine total monotone Folge ist, so folgt aus dem Gesagten, daß es zu einer C-Folge μ_n höchstens eine einzige C-Funktion $\mu(t)$ mit $\mu(n) = \mu_n$ geben kann. Andererseits gibt es aber wirklich eine, nämlich die ***Momentfunktion***

$$(44)\qquad \mu(t)=\int_0^1 u^t\,d\chi(u)=\mu_{0,0}-\binom{t}{1}\mu_{0,1}+\binom{t}{2}\mu_{0,2}-\cdots,$$

wo $\chi(u)$ die Funktion mit den Momenten μ_n ist[12]); denn offenbar ist $\mu(nt)$ sogar für jedes $t>0$ eine C-Folge, und $\mu(t)$ ist für $t>0$ nicht nur stetig, sondern sogar unbeschränkt differenzierbar (mehr noch: für $\Re t>0$ regulär) mit

$$\mu^{(n)}(t)=\int_0^1 u^t(\log u)^n\,d\chi(u).$$

Einer monotonen Funktion $\chi(u)$ entspricht eine total monotone Funktion $\mu(t)$ und umgekehrt. An der Stelle $t=0$ macht $\mu(t)$ denselben Sprung wie $\chi(u)$ an der Stelle $u=0$:

$$(45)\qquad \mu(0)-\mu(+0)=\chi(+0)-\chi(0).$$

Es genügt, dies für monotones $\chi(u)$ zu zeigen. Für $t>0$, $0<\delta<1$ folgt aus

$$\mu(0)-\mu(t)=\left(\int_0^\delta+\int_\delta^1\right)(1-u^t)\,d\chi(u)$$

einerseits

$$\mu(0)-\mu(t)\geqq(1-\delta^t)[\chi(\delta)-\chi(0)],$$

andererseits

$$\mu(0)-\mu(t)\leqq[\chi(\delta)-\chi(0)]+(1-\delta^t)[\chi(1)-\chi(\delta)].$$

Läßt man in der ersten Ungleichung erst δ, dann t nach 0 konvergieren, in der zweiten umgekehrt, so kommt

$$\mu(0)-\mu(+0)\geqq \quad\text{und}\quad \leqq\chi(+0)-\chi(0).$$

Je nachdem $\chi(+0)-\chi(0)=l_0=\lim\mu_{0,n}$ verschwindet oder nicht, ist die Folge μ_n rein oder unrein, und dies gilt offenbar zugleich für alle Folgen $\mu(nt)$; d. h. wir haben eine reine oder unreine C-Funktion $\mu(t)$, mit lauter reinen oder lauter unreinen C-Folgen $\mu(nt)$, je nachdem $\mu(t)$ an der Stelle $t=0$ stetig oder unstetig ist. Die in § 9 verwendeten total monotonen Funktionen $\mu(t)$, die bei $t=0$ stetig angenommen waren, sind reine C-Funktionen und liefern reine C-Folgen μ_n.

---

[12]) Die Reihe für $\mu(t)$ erhält man durch Integration der gleichmäßig konvergenten Binomialreihe

$$u^t=[1-(1-u)]^t=1-\binom{t}{1}(1-u)+\binom{t}{2}(1-u)^2-\cdots$$

§ 11.

Der Satz III oder das Momentproblem für ein endliches Intervall (das man ja linear auf das Intervall $[0,1]$ transformieren kann) läßt sich auch ohne Berufung auf die etwas verwickelte Stieltjessche Theorie und ihre Vorstufen (Tschebyscheff, Markoff) in nahezu elementarer Weise behandeln. Wir zeigen zuerst, daß eine total monotone Folge Momentfolge einer monotonen Funktion $\chi(u)$ ist, für die wir einen äußerst einfachen Ausdruck geben, sodann, daß diese Funktion eindeutig bestimmt ist.

Aus der Identität

$$\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} (m-pu)^2 = pu(1-u)$$

schließen wir ($0 \leqq u \leqq 1$, $\varepsilon > 0$)

$$pu(1-u) \geqq \sum^{*} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} (m-pu)^2$$

$$\geqq p^2 \varepsilon^2 \sum^{*} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m},$$

$$\sum^{*} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq \frac{u(1-u)}{p\varepsilon^2},$$

wo die Summe $\overset{*}{\Sigma}$ nur über die Werte m mit $|m-pu| \geqq p\varepsilon$ zu erstrecken ist. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist dies die einfachste Aussage des Gesetzes der großen Zahlen: wenn ein Ereignis die Wahrscheinlichkeit u hat, so konvergiert die Wahrscheinlichkeit, daß seine relative Häufigkeit $\frac{m}{p}$ bei p Versuchen sich von u um mindestens (weniger als) ε unterscheide, für $p \to \infty$ nach $0\,(1)$. Hieraus folgt übrigens sehr einfach, daß für eine in $0 \leqq u \leqq 1$ stetige Funktion $g(u)$ das Polynom

$$g_p(u) = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m}\, g\left(\frac{m}{p}\right)$$

gleichmäßig nach $g(u)$ konvergiert[13]).

Nun sei $0 \leqq \xi < \eta \leqq 1$, $\eta - \xi = 2\varepsilon$. In jedem der beiden Fälle

$$m \leqq p\xi, \qquad \xi + \varepsilon \leqq u,$$
$$m \geqq p\eta, \qquad \eta - \varepsilon \geqq u$$

[13]) S. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstraß, fondée sur le calcul des probabilités, Commun. Soc. Math. Charkow (2) 13 (1912), S. 1–2.

ist auch $|m - pu| \geqq p\varepsilon$, also

$$(46)\quad \begin{cases} \sum\limits_{m \leqq p\xi} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq \dfrac{u(1-u)}{p\varepsilon^2} & (\xi + \varepsilon \leqq u \leqq 1), \\ \sum\limits_{m \geqq p\eta} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq \dfrac{u(1-u)}{p\varepsilon^2} & (0 \leqq u \leqq \eta - \varepsilon), \end{cases}$$

und wenn wir in der zweiten Gleichung die natürliche Zahl p durch eine andere q ersetzen und $r = \min[p, q]$ nehmen, so ist *im ganzen Intervall* $0 \leqq u \leqq 1$

$$\sum_{m \leqq p\xi} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} + \sum_{m \geqq q\eta} \binom{q}{m} u^m (1-u)^{q-m} \leqq 1 + \frac{u(1-u)}{r\varepsilon^2}$$

oder

$$(47)\quad \sum_{m \leqq p\xi} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} - \sum_{m < q\eta} \binom{q}{m} u^m (1-u)^{q-m} \leqq \frac{u(1-u)}{r\varepsilon^2}.$$

Wir machen nun wie in § 10 den Übergang von einem Polynom $f(u) \geqq 0$ zu dem Ausdruck $Mf \geqq 0$. Setzen wir

$$(48)\quad \begin{cases} \varphi_p(u) = \sum\limits_{m < pu} \binom{p}{m} \mu_{m, p-m}, & \varphi(u) = \underline{\lim}\, \varphi_p(u), \\ \psi_p(u) = \sum\limits_{m \leqq pu} \binom{p}{m} \mu_{m, p-m}, & \psi(u) = \overline{\lim}\, \psi_p(u), \end{cases}$$

so liefert (47)

$$\psi_p(\xi) - \varphi_q(\eta) \leqq \frac{\mu_{11}}{r\varepsilon^2}.$$

Hieraus folgt für $q \to \infty$

$$\psi_p(\xi) \leqq \varphi(\eta) + \frac{\mu_{11}}{p\varepsilon^2}$$

und sodann für $p \to \infty$

$$\psi(\xi) \leqq \varphi(\eta) \qquad (0 \leqq \xi < \eta \leqq 1),$$

also offenbar

$$\varphi(\xi) \leqq \psi(\xi) \leqq \varphi(\eta) \leqq \psi(\eta).$$

Beide Funktionen sind monoton; läßt man η nach ξ oder ξ nach η konvergieren, so kommt

$$\varphi(\xi) \leqq \psi(\xi) \leqq \varphi(\xi + 0), \quad \psi(\eta - 0) \leqq \varphi(\eta) \leqq \psi(\eta),$$

und durch Wiederholung

$$\varphi(\xi + 0) = \psi(\xi + 0), \quad \varphi(\eta - 0) = \psi(\eta - 0).$$

Beide Funktionen haben also im Intervall $[0, 1]$ dieselben Stetigkeitsstellen und an ihnen die gleichen Werte. Da, wo $\varphi(u) = \psi(u)$, also mindestens an den Stetigkeitsstellen, ist nach (48)

$$(49)\quad \varphi(u) = \lim \varphi_p(u), \quad \psi(u) = \lim \psi_p(u);$$

wir wollen noch zeigen, daß diese Beziehungen im ganzen Intervall gelten und daß $\varphi(u) = \psi(u)$ für $0 < u < 1$, auch an den Unstetigkeitsstellen. Zunächst ist an den Intervallgrenzen

$$\begin{aligned} &\varphi_p(0) = 0, && \varphi(0) = 0, \\ &\varphi_p(1) = \mu_0 - \mu_{p,0}, && \varphi(1) = \mu_0 - \lim \mu_{p,0}, \\ &\psi_p(0) = \mu_{0,p}, && \psi(0) = \lim \mu_{0,p}, \\ &\psi_p(1) = \mu_0, && \psi(1) = \mu_0. \end{aligned}$$

Sei sodann $0 < \xi < 1$ und $f(u)$ ein für $0 \leqq u \leqq 1$ nicht negatives Polynom; ε sei so klein gewählt, daß, bei vorgeschriebenem $\sigma > 0$, $f(u) \geqq f(\xi) - \sigma$ für $|u - \xi| \leqq 2\varepsilon$. Dann ist, wenn die Summe $\overset{*}{\Sigma}$ über die Werte m mit $|m - p\xi| < p\varepsilon$ erstreckt wird, im ganzen Intervall

$$f(\xi) \overset{*}{\sum} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq f(u) + \sigma + f(\xi) \frac{u(1-u)}{p\varepsilon^2};$$

denn für $0 \leqq u \leqq \xi - 2\varepsilon$ und $\xi + 2\varepsilon \leqq u \leqq 1$ ist $\overset{*}{\Sigma} \leqq u(1-u) : p\varepsilon^2$, und für $\xi - 2\varepsilon \leqq u \leqq \xi + 2\varepsilon$ ist $\overset{*}{\Sigma} \leqq 1$ und $f(\xi) \leqq f(u) + \sigma$. Aus dieser Relation erhalten wir durch die Operation M

$$f(\xi)\left[\varphi_p(\xi + \varepsilon) - \psi_p(\xi - \varepsilon)\right] \leqq Mf + \sigma\mu_0 + f(\xi) \frac{\mu_{11}}{p\varepsilon^2},$$

also für $p \to \infty$

$$f(\xi)\left[\varphi(\xi + \varepsilon) - \psi(\xi - \varepsilon)\right] \leqq Mf + \sigma\mu_0$$

und also, wenn $\varphi(u)$ an der Stelle ξ den Sprung

$$\delta = \varphi(\xi + 0) - \varphi(\xi - 0) = \varphi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$$

macht:

$$f(\xi)\,\delta \leqq Mf$$

für jedes Polynom $f(u) \geqq 0$. Insbesondere für $f(u) = u^m (1-u)^n$:

(50) $$\delta\xi^m (1-\xi)^n \leqq \mu_{m,n},$$

und dies besagt, daß die Folge

$$\mu_n - \delta\xi^n$$

total monoton ist. Ihr entspricht an Stelle von $\varphi_p(u)$ die monotone Funktion

$$\varphi_p(u) - \delta \sum_{m < pu} \binom{p}{m} \xi^m (1-\xi)^{p-m}.$$

Die mit δ multiplizierte Summe konvergiert für $p \to \infty$, wie wir bereits wissen, nach $\frac{0}{1}$ für $u \lessgtr \xi$; überdies aber konvergiert sie nach $\frac{1}{2}$ für $u = \xi$, denn die Wahrscheinlichkeit, daß bei p Versuchen die relative Häufigkeit eines Ereignisses, von der Wahrscheinlichkeit ξ, unter oder über ξ liege, konvergiert nach

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}$$

$\Big($dasselbe gilt von der Summe $\sum\limits_{m \leqq pu}'$ statt $\sum\limits_{m<pu}'\Big)$. An Stelle von $\varphi(u)$, $\psi(u)$ treten also die monotonen Funktionen

$$\begin{array}{lll} \varphi(u), & \varphi(\xi)-\frac{1}{2}\delta, & \varphi(u)-\delta, \\ \psi(u), & \psi(\xi)-\frac{1}{2}\delta, & \psi(u)-\delta \end{array}$$

für $u<\xi$, $u=\xi$, $u>\xi$. Diese aber sind an der Stelle ξ stetig, da der linke Grenzwert $\varphi(\xi-0)$ mit dem rechten $\varphi(\xi+0)-\delta$ übereinstimmt, und sind also auch an dieser Stelle gleich; demnach $\varphi(\xi)=\psi(\xi)$; zugleich erkennt man, daß

$$\varphi(\xi)=\tfrac{1}{2}\varphi(\xi-0)+\tfrac{1}{2}\varphi(\xi+0).$$

Also: die Gleichungen (49) gelten für $0 \leqq u \leqq 1$, und für $0<u<1$ ist

$$\varphi(u)=\psi(u)=\tfrac{1}{2}\varphi(u-0)+\tfrac{1}{2}\varphi(u+0). \tag{51}$$

Da nun die (monotonen, also im Riemannschen Sinne) integrablen Funktionen $\varphi_p(u)$ *gleichmäßig beschränkt* sind $(0 \leqq \varphi_p(u) \leqq \mu_0)$ und nach der integrablen Funktion $\varphi(u)$ konvergieren, so konvergiert bekanntlich $\int\limits_0^1 \varphi_p(u)\,du$ nach $\int\limits_0^1 \varphi(u)\,du$, ferner

$$\int_0^1 \varphi_p(u)\,u^{k-1}\,du \to \int_0^1 \varphi(u)\,u^{k-1}\,du \qquad (k=1,2,\ldots)$$

und wegen

$$\int_0^1 u^k\,d\varphi(u) = \varphi(1) - k\int_0^1 \varphi(u)\,u^{k-1}\,du$$

$$\int_0^1 u^k\,d\varphi_p(u) \to \int_0^1 u^k\,d\varphi(u) \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Die linke Seite ist leicht zu ermitteln: die streckenweise konstante Funktion $\varphi_p(u)$ macht an den Stellen $\frac{m}{p}$ die Sprünge $\binom{p}{m}\mu_{m,p-m}$ $(m=0,1,\ldots,p-1)$ und es ist

$$\int_0^1 u^k d\,\varphi_p(u) = \sum_{m=0}^{p-1}\binom{p}{m}\left(\frac{m}{p}\right)^k \mu_{m,p-m} = \sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\left(\frac{m}{p}\right)^k \mu_{m,p-m} - \mu_{p,0}.$$

Hier konvergiert der Minuend nach μ_k; denn es ist

$$\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m}\binom{m}{k} \mu_{m,p-m} = \sum_{m=k}^{p} \binom{p}{k}\binom{p-k}{m-k} \mu_{m,p-m}$$

$$= \binom{p}{k} \sum_{m=0}^{p-k} \binom{p-k}{m} \mu_{k+m,p-k-m} = \binom{p}{k} \mu_k,$$

$$\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{p^k} \mu_{m,p-m} \to \mu_k,$$

woraus die Behauptung der Reihe nach für $k = 0, 1, 2, \dots$ folgt. Also ist

$$\int_0^1 u^k \, d\varphi(u) = \mu_k - \lim \mu_{p,0} = \mu_k - [\psi(1) - \varphi(1)]$$

und definiert man daher die Funktion $\chi(u)$ durch

$$(52) \qquad \begin{cases} \chi(u) = \varphi(u) \quad \text{für} \quad 0 \leqq u < 1, \quad \chi(1) = \psi(1) \quad \text{oder} \\ \chi(0) = \varphi(0), \quad \chi(u) = \psi(u) \quad \text{für} \quad 0 < u \leqq 1, \end{cases}$$

so ist $\int_0^1 u^k \, d\chi(u) = \mu_k$, $\chi(u)$ eine Lösung des Momentproblems. Nun ist noch umgekehrt die Einzigkeit der Lösung zu zeigen. Setzen wir dazu $\mu_n = \int_0^1 u^n \, d\chi(u)$ voraus, so folgt aus der ersten Gleichung (46)

$$\psi_p(\xi) = \left(\int_0^{\xi+\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^1\right) \sum_{m \leqq p\xi} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \, d\chi(u)$$

$$\leqq \int_0^{\xi+\varepsilon} d\chi(u) + \int_{\xi+\varepsilon}^1 \frac{u(1-u)}{p\varepsilon^2} \, d\chi(u) \leqq \chi(\xi+\varepsilon) + \frac{\mu_{11}}{p\varepsilon^2}$$

($\chi(0) = 0$ angenommen) und daraus für $p \to \infty$, sodann $\varepsilon \to 0$

$$\psi(\xi) \leqq \chi(\xi + 0);$$

ebenso aus der zweiten Gleichung (46)

$$\varphi(\eta) \geqq \chi(\eta - 0).$$

Also

$$\chi(u-0) \leqq \varphi(u) \leqq \psi(u) \leqq \chi(u+0)$$

und hieraus wie früher

$$\chi(u-0) = \varphi(u-0) = \psi(u-0), \quad \chi(u+0) = \varphi(u+0) = \psi(u+0),$$

wegen (51) auf Grund der Forderung des arithmetischen Mittels also $\chi(u) = \varphi(u) = \psi(u)$ für $0 < u < 1$, während $\chi(0) = 0 = \varphi(0)$ und $\chi(1) = \mu_0 = \psi(1)$ ist; $\chi(u)$ ist mit der oben gefundenen Lösung (52) identisch. Also: *das zu einer total monotonen Folge* (oder C-Folge) *gehörige Momentproblem hat, durch* $\chi(0)=0$ *und die Bedingung des arithmetischen Mittels präzisiert, eine und nur eine Lösung, nämlich*

$$\chi(0)=0, \quad \chi(1)=\mu_0,$$

$$\chi(u)=\lim_{p}\sum_{m<pu}\binom{p}{m}\mu_{m,p-m}=\lim_{p}\sum_{m\leq pu}\binom{p}{m}\mu_{m,p-m}$$

für $0<u<1$.

Etwas allgemeiner ist

$$\chi(u)=\lim\varphi_p(u_p) \qquad (0<u<1),$$

wenn u_p derart nach u konvergiert, daß $\sqrt{p}(u_p-u)\to 0$; ferner gilt

$$\chi(u+0)-\chi(u-0)=\sqrt{2\pi u(1-u)}\lim\sqrt{p}\binom{p}{m}\mu_{m,p-m} \qquad (0<u<1),$$

wenn m mit p so nach ∞ divergiert, daß $\sqrt{p}\left(\frac{m}{p}-u\right)\to 0$. Den Beweis dieser Behauptungen, mit Benutzung der Stirlingschen Formel, wollen wir dem Leser überlassen.

(Eingegangen am 11. Februar 1920.)