Summationsmethoden und Momentfolgen. II.

Von

Felix Hausdorff in Greifswald.

In der vorangehenden, gleichbetitelten Arbeit, die wir als Note I zitieren, haben wir das System *vertauschbarer* linearer Substitutionen

$$A_p = \sum_m \lambda_{p,m} a_m \qquad \text{oder} \qquad A = \lambda a$$

betrachtet, deren Matrix

$$\lambda = \varrho^{-1} \mu \varrho$$

durch eine numerisch feste, aus Binomialkoeffizienten gebildete Matrix ϱ in eine willkürliche Diagonalmatrix μ überführbar ist. Wir ordnen jetzt jeder (geeigneten) Folge reeller Zahlen t_n eine Matrix ϱ und das entsprechende System $S(t_n)$ der Matrizen λ zu; das in Note I behandelte ist das System $S(n)$. Wenn die Elemente μ_n von μ die Momente

$$\mu_n = \mu(t_n), \qquad \mu(t) = \int_0^1 u^t d\chi(u)$$

einer Funktion beschränkter Schwankung sind, ist λ eine C-Matrix, d. h. führt jede konvergente Folge a_m in eine konvergente Folge A_p über; und hiervon gilt unter gewissen Bedingungen auch die Umkehrung. In verschiedenen Systemen $S(t_n)$ entsprechen einander die zu gleichem $\chi(u)$ oder $\mu(t)$ gehörigen Matrizen; es gibt z. B. in jedem System Cesàrosche und Höldersche Matrizen, die bei gleicher Ordnung äquivalent sind, nebst Matrizen logarithmischen und exponentialen Charakters, die die Höldersche Skala ausfüllen und verstärken.

§ 1.

Interpolationsformeln.

Es sei t_p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Folge *paarweise verschiedener* Zahlen,

(1) $$\varphi_p(t) = (t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_p),$$

μ_p eine beliebige Zahlenfolge,

$$(2) \qquad f_p(t) = f\begin{pmatrix} t & \mu_0\,\mu_1 \ldots \mu_p \\ & t_0\;\, t_1 \ldots t_p \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{p} \frac{\mu_m}{\varphi_p'(t_m)} \frac{\varphi_p(t)}{t-t_m}$$

das Polynom vom Grade $\leqq p$, das an den Stellen $t_0, \ldots, t_p$ die Werte $\mu_0, \ldots, \mu_p$ annimmt, und der Differenzenquotient

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} \mu_0\,\mu_1 \ldots \mu_p \\ t_0\;\, t_1 \ldots t_p \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{p} \frac{\mu_m}{\varphi_p'(t_m)}$$

sein höchster Koeffizient. Da $f_p(t) - f_{p-1}(t)$ durch $\varphi_{p-1}(t)$ teilbar, also gleich $\begin{pmatrix} \mu_0 \ldots \mu_p \\ t_0 \ldots t_p \end{pmatrix} \varphi_{p-1}(t)$ ist, folgt

$$(4) \qquad f_p(t) = \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} \mu_0 \ldots \mu_m \\ t_0 \ldots t_m \end{pmatrix} (t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{m-1})$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} \mu_0 \ldots \mu_m \\ t_0 \ldots t_m \end{pmatrix} \varphi_{m-1}(t),$$

wobei $\varphi_{-1}(t) = 1$, $f_0(t) = \mu_0$, $\begin{pmatrix} \mu_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \mu_0$ zu setzen ist. Verwendet man die Wertpaare t_m, μ_m in umgekehrter Reihenfolge, so wird

$$(5) \qquad f_p(t) = \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} \mu_m \ldots \mu_p \\ t_m \ldots t_p \end{pmatrix} (t-t_p)(t-t_{p-1})\ldots(t-t_{m+1})$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} \mu_m \ldots \mu_p \\ t_m \ldots t_p \end{pmatrix} \frac{\varphi_p(t)}{\varphi_m(t)}.$$

Wir setzen nun dauernd, für $m \leqq p$,

$$(6) \qquad \lambda_{p,m} = \begin{pmatrix} \mu_m \ldots \mu_p \\ t_m \ldots t_p \end{pmatrix} (t_0-t_p)(t_0-t_{p-1})\ldots(t_0-t_{m+1})$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_m \ldots \mu_p \\ t_m \ldots t_p \end{pmatrix} \frac{\varphi_p'(t_0)}{\varphi_m'(t_0)},$$

speziell

$$\lambda_{p,p} = \mu_p,$$

hingegen, für $m > p$, $\lambda_{p,m} = 0$; die Matrix

$$\lambda = (\lambda_{p,m}) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & 0 & 0 & \ldots \\ \lambda_{1,0} & \lambda_{1,1} & 0 & \ldots \\ \lambda_{2,0} & \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{pmatrix},$$

auf deren Betrachtung wir hinaus wollen, hängt außer von den μ_p nur von den Differenzenverhältnissen der t_p ab und bleibt ungeändert, wenn man t_p durch $a t_p + b$ $(a \neq 0)$ ersetzt.

Aus (5) folgt für $t = t_0$

(7) $$\sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} = \mu_0 .$$

Sei für den Augenblick $g_p(t) = f\left(t \begin{matrix} \mu_1 \ldots \mu_{p+1} \\ t_1 \ldots t_{p+1} \end{matrix}\right)$ in der obigen durch (2) erklärten Bedeutung. Aus

$$f_{p+1}(t) - f_p(t) = \begin{pmatrix} \mu_0 \ldots \mu_{p+1} \\ t_0 \ldots t_{p+1} \end{pmatrix} (t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_p)$$

$$f_{p+1}(t) - g_p(t) = \begin{pmatrix} \mu_0 \ldots \mu_{p+1} \\ t_0 \ldots t_{p+1} \end{pmatrix} (t - t_1) \ldots (t - t_p)(t - t_{p+1})$$

folgt

$$f_p(t) - g_p(t) = \begin{pmatrix} \mu_0 \ldots \mu_{p+1} \\ t_0 \ldots t_{p+1} \end{pmatrix} (t_0 - t_{p+1})(t - t_1) \ldots (t - t_p),$$

also für den Koeffizienten von t^p

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \ldots \mu_p \\ t_0 \ldots t_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_1 \ldots \mu_{p+1} \\ t_1 \ldots t_{p+1} \end{pmatrix} = (t_0 - t_{p+1}) \begin{pmatrix} \mu_0 \ldots \mu_{p+1} \\ t_0 \ldots t_{p+1} \end{pmatrix},$$

mit anderer Bezeichnung

$$\begin{pmatrix} \mu_m \ldots \mu_p \\ t_m \ldots t_p \end{pmatrix} = (t_m - t_{p+1}) \begin{pmatrix} \mu_m \ldots \mu_{p+1} \\ t_m \ldots t_{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{m+1} \ldots \mu_{p+1} \\ t_{m+1} \ldots t_{p+1} \end{pmatrix}$$

und mit $(t_0 - t_{m+1}) \ldots (t_0 - t_p)(t_0 - t_{p+1})$ multipliziert:

(8) $$(t_{p+1} - t_0)\lambda_{p,m} = (t_{p+1} - t_m)\lambda_{p+1,m} + (t_{m+1} - t_0)\lambda_{p+1,m+1}.$$

Dies nennen wir die *Rekursionsformel*; sie gilt allgemein, auch für $m > p$.

Sind die t_p reell, a die kleinste und b die größte unter den Zahlen $t_0, \ldots, t_p$, und ist die reelle Funktion $\mu(t)$ für $a \leqq t \leqq b$ stetig und für $a < t < b$ p-mal differenzierbar, so ist

(9) $$\begin{pmatrix} \mu(t_0)\, \mu(t_1) \ldots \mu(t_p) \\ t_0 \quad t_1 \ldots \quad t_p \end{pmatrix} = \frac{1}{p!} \mu^{(p)}(t),$$

wie man durch wiederholte Anwendung des Rolleschen Satzes auf $f_p(t) - \mu(t)$ erkennt; t ist ein gewisser Wert zwischen a, b.

Wir haben diese bekannten Dinge zur Bequemlichkeit des Lesers und zur Einführung unserer Bezeichnungen hier zusammengestellt.

§ 2.

Total monotone Folgen.

Die reelle Folge μ_p heiße bezüglich der reellen Folge t_p *total monoton*, wenn stets

(10) $$(-1)^{p-m} \begin{pmatrix} \mu_m \ldots \mu_p \\ t_m \ldots t_p \end{pmatrix} \geqq 0 \qquad (0 \leqq m \leqq p)$$

Dies wird mit

$$(11) \qquad \lambda_{p,m} \geqq 0$$

gleichbedeutend, falls $t_p > t_0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, wie wir künftig voraussetzen; ohne Einbuße an Allgemeinheit kann

$$(12) \qquad t_0 = 0, \quad t_p > 0 \qquad\qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

angenommen werden. Insbesondere ist $\lambda_{p,p} = \mu_p \geqq 0$; mit Ausschluß des Falles $\mu_0 = 0$, wo alle $\lambda_{p,m}$ nach (7) verschwinden, werde $\mu_0 > 0$ vorausgesetzt. Wir behaupten nun:

Satz I. *Wenn die Folge t_p den Bedingungen* (12) *genügt und μ_p bezüglich t_p total monoton ist, so existieren die Grenzwerte*

$$(13) \qquad l_m = \lim_p \lambda_{p,m};$$

wenn $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{t_p}$ divergiert, ist $l_1 = l_2 = \ldots = 0$.

Denn aus der Rekursionsformel

$$(14) \qquad \lambda_{p,m} - \lambda_{p+1,m} = (t_{m+1}\lambda_{p+1,m+1} - t_m \lambda_{p+1,m}) : t_{p+1}$$

folgt mit

$$(15) \qquad \Lambda_{p,m} = \lambda_{p,0} + \ldots + \lambda_{p,m}$$

$$(16) \qquad \Lambda_{p,m} - \Lambda_{p+1,m} = t_{m+1}\lambda_{p+1,m+1} : t_{p+1}.$$

Nach (16) ist $\Lambda_{p,m} \geqq \Lambda_{p+1,m} \geqq 0$, also existiert $L_m = \lim\limits_p \Lambda_{p,m}$ und folglich auch $l_m = L_m - L_{m-1}$ $(l_0 = L_0)$. Ferner ist, ebenfalls nach (16), $\sum\limits_p \frac{\lambda_{p+1,m+1}}{t_{p+1}}$ konvergent, und wenn $\sum\limits_p \frac{1}{t_{p+1}}$ divergiert, kann $\lim\limits_p \lambda_{p+1,m+1}$ $= l_{m+1}$ nicht von 0 verschieden sein.

Nehmen wir an, daß t_p den Bedingungen

$$(17) \qquad \begin{cases} t_0 = 0, \quad t_p > 0 & (p \geqq 1) \\ \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{1}{t_p} \text{ divergent}, \ t_p \to \infty \end{cases}$$

genügt (von denen die letzte an verschiedenen Stellen des Folgenden gemildert werden könnte, vgl. Anm.[1])). Nach I ist dann in einer bezüglich t_p total monotonen Folge *jedes Glied* μ_p $(p \geqq 1)$ sowie $\mu_0 - l_0$ *durch die folgenden eindeutig bestimmt*, natürlich bei gegebenen t_p. Denn man hat bei Hervorhebung des Anfangsgliedes in (6)

$$\lambda_{p,m} = (-1)^{p-m} t_{m+1} \ldots t_p \left[\frac{\mu_m}{(t_m - t_{m+1}) \ldots (t_m - t_p)} + \ldots\right],$$

$$\lambda_{p,m}\left(1 - \frac{t_m}{t_{m+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{t_m}{t_p}\right) = \mu_m + \ldots,$$

also für $p \to \infty$

$$0 = \lim [\mu_m + \ldots] \qquad (m \geqq 1)$$

$$l_0 = \lim [\mu_0 + \ldots]$$

was die Behauptung beweist.

§ 3.

Total monotone Funktionen.

Die für $t \geqq 0$ definierte reelle Funktion $\mu(t)$ heiße *total monoton*, wenn für irgend $p+1$ verschiedene Werte $t_0, t_1, \ldots, t_p$ $(\geqq 0)$

$$(-1)^p \begin{pmatrix} \mu(t_0) & \mu(t_1) & \ldots & \mu(t_p) \\ t_0 & t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} \geqq 0$$

oder, was dasselbe ist, wenn jede Folge $\mu(t_p)$ bezüglich t_p total monoton ist.

Satz II. *Wenn die Folge t_p den Bedingungen* (17) *genügt und μ_p bezüglich t_p total monoton ist, so gibt es eine und nur eine total monotone Funktion $\mu(t)$, für die $\mu(t_p) = \mu_p$.*

Zunächst kann es nur eine einzige solche geben. Denn ist $t > 0$ ein von den t_p verschiedener Wert mit $\mu(t) = \mu$, so ist die Folge $\mu_0, \mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ total monoton bezüglich der Folge $t_0, t, t_1, t_2, \ldots$, die ebenfalls den Bedingungen (17) genügt, also μ durch $\mu_1, \mu_2, \ldots$ eindeutig bestimmt (natürlich als Funktion von t).

Um andererseits eine Funktion $\mu(t)$ wirklich nachzuweisen, zeigen wir zuerst, daß die Interpolationsformel (4) sich auf *alle* Wertpaare der Folge ausdehnen läßt, d. h. daß

$$(18) \qquad f(t) = \lim f_p(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \mu_0 & \ldots & \mu_m \\ t_0 & \ldots & t_m \end{pmatrix} (t - t_0) \ldots (t - t_{m-1})$$

für $t \geqq 0$ konvergiert[1]). Man hat für $p > n > 0$

[1]) Solche Reihen sind mehrfach untersucht worden, z. B. J. Bendixson, Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss, Acta math., **9** (1887), S. 1—34; E. Landau, Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Münch. Ber. **36**, (1906), S. 151—221. Unser $f(t)$ ist übrigens für $\Re t > 0$ konvergent und regulär, wie aus leichter Umformung des obigen Konvergenzbeweises hervorgeht. Ersetzt man die letzte Bedingung (17) durch $\lim t_p = \tau > 0$, so liefert (18) eine für $0 < t \leqq \tau$ total monotone, für $|t - \tau| < \tau$ reguläre Funktion; vgl. dazu S. Bernstein, Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d' une variable réelle, Math. Ann., **75** (1914), S. 449—468.

$$f_p(t) - f_n(t) = \sum_{m=n+1}^{p} \binom{\mu_0 \ldots \mu_m}{t_0 \ldots t_m} (t - t_0) \ldots (t - t_{m-1})$$

$$= \sum_{m=n+1}^{p} \lambda_{m,0} \frac{(t_0 - t) \ldots (t_{m-1} - t)}{t_1 \ldots t_m}$$

$$= -\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{t}{t_{n-1}}\right) \sum_{m=n+1}^{p} \lambda_{m,0} \left(1 - \frac{t}{t_n}\right) \ldots \left(1 - \frac{t}{t_{m-1}}\right) \frac{t}{t_m}.$$

Ist $t > 0$ und n so groß gewählt, daß $t < t_n, t_{n+1}, \ldots$, so hat die letzte Summe lauter nichtnegative Glieder und ist mit

$$\tau_m = \left(1 - \frac{t}{t_n}\right) \ldots \left(1 - \frac{t}{t_{m-1}}\right)\left(1 - \frac{t}{t_m}\right) \qquad (m \geqq n)$$

gleich

$$\sum_{m=n+1}^{p} \lambda_{m,0} (\tau_{m-1} - \tau_m) \leqq \mu_0 \sum_{m=n+1}^{p} (\tau_{m-1} - \tau_m)$$
$$= \mu_0 (\tau_n - \tau_p)$$
$$\leqq \mu_0 \tau_n = \mu_0 \left(1 - \frac{t}{t_n}\right),$$

womit ihre Konvergenz für $p \to \infty$ und die von $f_p(t)$ nachgewiesen ist; überdies ist

(19) $$|f(t) - f_n(t)| \leqq \mu_0 \left|\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)\right|$$
(für $t < t_n, t_{n+1}, \ldots$).

Um sodann $f(t)$ als total monoton nachzuweisen, verwenden wir die zweite Darstellung (5)

(20) $$f_p(t) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} \left(1 - \frac{t}{t_{m+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{t}{t_p}\right).$$

Zerlegen wir $\sum\limits_{m=0}^{p}$ in $\sum\limits_{m=0}^{n-1} + \sum\limits_{m=n}^{p}$; bei festem $n \geqq 1$ konvergiert $\sum\limits_{m=0}^{n-1}$ für $p \to \infty$ nach 0 oder l_0, je nachdem $t > 0$ oder $t = 0$, oder nach $l_0 \cdot 0^t$, wie wir mit ersichtlicher Verabredung sagen wollen. Demnach hat auch

$$g_p(t) = \sum_{m=n}^{p} \lambda_{p,m} \left(1 - \frac{t}{t_{m+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{t}{t_p}\right)$$

für $p \to \infty$ einen von n unabhängigen Grenzwert $g(t) = \lim\limits_{p} g_p(t)$. Ist nun $a > 0$ und n so groß, daß $a < t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots$, so ist offenbar $g_p(t)$ ein Polynom in $a - t$ mit nichtnegativen Koeffizienten, woraus für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g_p(t) \geqq 0 \qquad (t \leqq a)$$

folgt; mit Erinnerung an (9) ist also für $k+1$ verschiedene Werte $\tau_0, \ldots, \tau_k$ des Intervalls $0 \leqq t \leqq a$

$$(-1)^k \begin{pmatrix} g_p(\tau_0) & \ldots & g_p(\tau_k) \\ \tau_0 & \ldots & \tau_k \end{pmatrix} \geqq 0$$

und für $p \to \infty$

$$(-1)^k \begin{pmatrix} g(\tau_0) & \ldots & g(\tau_k) \\ \tau_0 & \ldots & \tau_k \end{pmatrix} \geqq 0,$$

d. h. $g(t)$ ist total monoton (für $0 \leqq t \leqq a$, d. h. für $t \geqq 0$). Da auch 0^t total monoton und $l_0 \geqq 0$, so ist $f(t) = l_0 \cdot 0^t + g(t)$ total monoton. Damit ist II bewiesen, die fragliche total monotone Funktion ist durch (18) gegeben.

§ 4.

Momentfunktionen.

Mit einer für $0 \leqq u \leqq 1$ monotonen, für wachsendes u nicht abnehmenden Funktion $\chi(u)$ bilden wir das Stieltjessche Integral

$$\mu(t) = \int_0^1 u^t \, d\chi(u) \qquad (t \geqq 0) \tag{21}$$

und nennen dies eine *Momentfunktion.* u^t ist hierbei als stetige Funktion von u gedacht, auch für $t = 0$, also $u^0 = 1$ auch für $u = 0$, so daß wie vorhin $0^t = {0 \atop 1}$ für $t \geqq 0$ zu setzen ist.

Für $t > 0$ ist $\mu(t)$ unbeschränkt differenzierbar mit

$$\mu^{(k)}(t) = \int_0^1 u^t (\log u)^k \, d\chi(u), \tag{22}$$

so daß $(-1)^k \mu^{(k)}(t) \geqq 0$; an der Stelle $t = 0$ ist die eventuelle Unstetigkeit von $\mu(t)$ dieselbe wie die von $\chi(u)$ an der Stelle $u = 0$, nämlich[2])

$$\mu(0) - \mu(+0) = \chi(+0) - \chi(0). \tag{23}$$

Für die Integralwerte sind die Werte von $\chi(u)$ an den Sprungstellen zwischen 0 und 1 und die Hinzufügung einer additiven Konstanten belanglos; wir präzisieren daher $\chi(u)$ durch die Anfangsbedingung $\chi(0) = 0$ und die Forderung des *arithmetischen Mittels*

$$\chi(u) = \tfrac{1}{2}\chi(u+0) + \tfrac{1}{2}\chi(u-0) \qquad (0 < u < 1)$$

und wir wollen sagen, daß $\chi(u)$ durch irgendwelche Vorschriften eindeutig bestimmt ist, wenn sie durch diese Vorschriften unter Hinzunahme der eben genannten eindeutig bestimmt ist.

---

[2]) Vgl. Note I, Formel (45). Auch das Integral (21) ist oft untersucht worden; es existiert und ist regulär jedenfalls für $\Re t > 0$.

Satz III. *Jede Momentfunktion ist total monoton, und jede total monotone Funktion ist Momentfunktion einer eindeutig bestimmten monotonen Funktion* $\chi(u)$.

Ist die Momentfunktion $\mu(t)$ bei $t=0$ stetig, so ergibt sich ihre totale Monotonie unmittelbar aus dem Vorzeichen der Ableitungen (22); ist sie unstetig, so ist sie gleich einer stetigen Momentfunktion plus $l_0 \cdot 0^t$, wo $l_0 > 0$ der Sprung (23) ist, also ebenfalls total monoton.

Sei umgekehrt $f(t)$ total monoton; dann ist die Folge $f(n)$ bezüglich n total monoton, d. h. im Sinne der vorangehenden Note I schlechthin total monoton, denn für $t_n = n$ ist

$$\lambda_{p,m} = \binom{p}{m} \mu_{m,p-m} = \binom{p}{m} \sum_{n=0}^{p-m} (-1)^n \binom{p-m}{n} \mu_{m+n}.$$

Nach den dortigen Entwicklungen § 10, 11 gibt es also eine, eindeutig bestimmte, monotone Funktion $\chi(u)$ mit

$$f(n) = \int_0^1 u^n \, d\chi(u).$$

Bilden wir mit ihr die Momentfunktion (21), so sind $f(t)$ und $\mu(t)$ beide total monoton und $\mu(n) = f(n)$, und da die Folge $t_n = n$ von der Art (17) ist, so muß nach Satz II $\mu(t) = f(t)$ sein, womit III bewiesen ist.

Aus II und III folgt nun unmittelbar:

Satz IV. *Wenn die Folge* t_n *den Bedingungen* (17) *genügt und* μ_n *bezüglich* t_n *total monoton ist, so ist*

$$\mu_n = \int_0^1 u^{t_n} \, d\chi(u) \tag{24}$$

die Momentfolge (mit den Exponenten t_n*) einer eindeutig bestimmten monotonen Funktion* $\chi(u)$.

Umgekehrt ist natürlich jede Momentfolge (24) bezüglich der Exponentenfolge total monoton, auch wenn diese nur den Bedingungen (12) genügt.

Für den mit (24) gebildeten Grenzwert $l_0 = \lim \lambda_{p,0}$ folgt

$$l_0 = \mu(0) - \mu(+0) = \chi(+0) - \chi(0). \tag{25}$$

Denn nennt man den Sprung (23) zunächst λ_0, so kann man so schließen:

Einerseits ist $\mu_0 - l_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ noch eine total monotone Folge (die zugehörigen λ sind $\lambda_{p,0} - l_0$, $\lambda_{p,m}$ für $m \geqq 1$, also nichtnegativ); sie gehört zu einer monotonen Funktion $\chi(u) - l_0 \operatorname{sg} u$ und diese macht an der Stelle $u = 0$ den Sprung $\lambda_0 - l_0 \geqq 0$, oder auch: sie gehört zu einer total monotonen Funktion $\mu(t) - l_0 \cdot 0^t$ und diese macht an der Stelle $t = 0$ den Sprung $\lambda_0 - l_0 \geqq 0$.

Andererseits ist $\chi(u) - \lambda_0 \operatorname{sg} u$ noch eine monotone (bei $u = 0$ stetige) Funktion; ihr entspricht eine total monotone Folge $\mu_0 - \lambda_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ und für diese ist der dem l_0 entsprechende Grenzwert $l_0 - \lambda_0 \geqq 0$. Zusammen ergibt dies: $l_0 = \lambda_0$.

§ 5.

Umformungen; Bestimmung von $\chi(u)$.

t_n genüge den Bedingungen (17) und μ_n sei bezüglich t_n total monoton, so daß (18) die zugehörige Momentfunktion darstellt. Betrachten wir insbesondere, bei festem u $(0 \leqq u \leqq 1)$, die Momentfunktion $\mu(t) = u^t$ (das zugehörige $\chi(u)$ macht an der Stelle u den Sprung 1 und ist sonst konstant); die zugehörigen $\lambda_{p,m}$ und $f_p(t)$ seien

$$\lambda_{p,m}(u) = (-1)^{p-m}\, t_{m+1} \dots t_p \begin{pmatrix} u^{t_m} & \dots & u^{t_p} \\ t_m & \dots & t_p \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} f_p(t,u) &= \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}(u) \left(1 - \frac{t}{t_{m+1}}\right) \dots \left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} u^{t_0} & \dots & u^{t_m} \\ t_0 & \dots & t_m \end{pmatrix} (t - t_0) \dots (t - t_{m-1}). \end{aligned} \tag{27}$$

Es ist also $\lim\limits_p f_p(t,u) = u^t$, und aus (19)

$$|u^t - f_p(t,u)| \leqq \left| \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \dots \left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \right|,$$

was für hinreichend großes p $(t < t_p, t_{p+1}, \dots)$ gilt, schließen wir, daß diese Konvergenz, für gegebenes $t > 0$, in $0 \leqq u \leqq 1$ gleichmäßig ist, oder daß die Reihe

$$u^t = u^{t_0} + \begin{pmatrix} u^{t_0} & u^{t_1} \\ t_0 & t_1 \end{pmatrix} (t - t_0) + \begin{pmatrix} u^{t_0} & u^{t_1} & u^{t_2} \\ t_0 & t_1 & t_2 \end{pmatrix} (t - t_0)(t - t_1) + \dots$$

bei gegebenem $t > 0$ in $0 \leqq u \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert (für $t = 0$ erhält man $1 = 1 + 0 + 0 + \dots$). Es läßt sich also u^t, insbesondere $1, u, u^2, \dots$ und daher jede in $[0, 1]$ stetige Funktion $g(u)$ durch lineare Aggregate von $u^{t_0} (= 1), u^{t_1}, u^{t_2}, \dots$ gleichmäßig approximieren[3]).

[3]) Ch. H. Müntz, Über den Approximationssatz von Weierstraß, Math. Abh., H. A. Schwarz gewidmet, Berlin 1914, S. 303–312; O. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Ann., 77 (1916), S. 482—496. — Für $t_n = n$ wird $u^t = 1 - (1-u)\binom{t}{1} + (1-u)^2\binom{t}{2} - \dots$ einfach die Binomialreihe für $[1 - (1-u)]^t$.

Wir wollen noch die nach $\mu(t)$ konvergierenden Funktionen $f_p(t)$ durch andere, teilweise bequemere ersetzen. Sei zunächst (nur in diesem Paragraphen, abweichend von (1))

$$\varphi_p(t) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}\, e^{-t\left(\frac{1}{t_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{t_p}\right)}.$$

Bei festem $t > 0$ sind diese Funktionen für alle p *in gleichem Grade stetig* (également continues); denn für $t > h > 0$, $\alpha > 0$ ist

$$0 < e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(t+h)} < e^{-\alpha t}\alpha h < \frac{h}{t},$$

$$0 < e^{-\alpha(t-h)} - e^{-\alpha t} < \frac{h}{t-h},$$

also

$$|\varphi_p(t \pm h) - \varphi_p(t)| \leqq \mu_0 \frac{h}{t-h}.$$

Hieraus folgt, daß

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\lim}\, \varphi_p(t), \qquad \overline{\varphi}(t) = \overline{\lim}\, \varphi_p(t)$$

(die, wie $\varphi_p(t)$, zwischen 0 und μ_0 liegen), für $t > 0$ stetig sind.

Allgemeiner sei

$$\Phi_p = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}\, \varepsilon_{m+1} \cdots \varepsilon_p,$$

worin $\varepsilon_p = e^{-\tau_p : t_p}$ (wenigstens schließlich, so daß endlich viele $\varepsilon_p \leqq 0$ zugelassen werden) und $\tau_p \to t > 0$. Dann ist

$$\underline{\Phi} = \underline{\lim}\, \Phi_p = \underline{\varphi}(t), \qquad \overline{\Phi} = \overline{\lim}\, \Phi_p = \overline{\varphi}(t).$$

Denn wählen wir, $t > h > 0$ gegeben, n so groß, daß für $p > n$ $\varepsilon_p = e^{-\tau_p : t_p}$ ist und τ_p zwischen $t \pm h$ liegt. Sei

$$\Phi_p^* = \sum_{m=n}^{p} \lambda_{p,m}\, \varepsilon_{m+1} \cdots \varepsilon_p, \qquad \varphi_p^*(t) = \sum_{m=n}^{p} \lambda_{p,m}\, e^{-t\left(\frac{1}{t_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{t_p}\right)}.$$

$\Phi_p - \Phi_p^*$ und $\varphi_p(t) - \varphi_p^*(t)$ konvergieren nach 0, ferner ist

$$\varphi_p^*(t+h) \leqq \Phi_p^* \leqq \varphi_p^*(t-h),$$

also

$$\underline{\varphi}(t+h) \leqq \underline{\Phi} \leqq \underline{\varphi}(t-h)$$

und, für $h \to 0$, $\underline{\Phi} = \underline{\varphi}(t)$, ebenso $\overline{\Phi} = \overline{\varphi}(t)$.

Wir bemerken noch folgende Abschätzung:

$$|\Phi_p - \Phi_p^*| \leqq \mu_0 \sum_{m=0}^{n-1} |\varepsilon_{m+1} \cdots \varepsilon_p|$$

$$|\varphi_p(t) - \varphi_p^*(t)| \leqq \mu_0 \sum_{m=0}^{n-1} e^{-t\left(\frac{1}{t_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{t_p}\right)}$$

$$|\Phi_p^* - \varphi_p^*(t)| \leqq \mu_0 \frac{h}{t-h};$$

Wenn die ε_p nicht von den μ_n abhängen (sondern nur von den t_n und t), so kann man also, *von den* μ_n *unabhängig*, erst h so klein, dann das zugehörige n und dann p_0 so groß wählen, daß bei vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$

$$(28) \qquad |\Phi_p - \varphi_p(t)| < \mu_0 \varepsilon \qquad (p \geqq p_0)$$

Unter den Φ_p befindet sich, nach (20), insbesondere $f_p(t)$ mit $\varepsilon_p = 1 - \frac{t}{t_p}$, und da hier $\lim f_p(t) = \mu(t)$ existiert, so existiert allgemein $\Phi = \lim \Phi_p$ und $\varphi(t) = \lim \varphi_p(t)$, immer gleich $\mu(t)$. Ein anderes, für uns zweckmäßigeres Φ_p wird durch

$$\varepsilon_p = \left(1 + \frac{1}{t_p}\right)^{-t},$$

also mit Einführung der Bezeichnung

$$(29) \qquad D_p = d_0 + \ldots + d_p = \left(1 + \frac{1}{t_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{t_p}\right) \qquad (D_0 = 1),$$

aus der umgekehrt

$$(30) \qquad t_p = D_{p-1} : d_p \qquad (D_{-1} = 0)$$

folgt, durch

$$(31) \qquad \Phi_p(t) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} \left(\frac{D_m}{D_p}\right)^t$$

erhalten; indessen könnte man allgemeiner

$$\varepsilon_p = \left(1 + \frac{\beta}{t_p}\right)^{-\frac{t}{\beta}} \qquad (\beta > 0)$$

$$\varepsilon_p = \left(1 + \frac{\beta_p}{t_p}\right)^{-t} \qquad (\beta_p > 0, \quad \beta_p \to 1)$$

u. dgl., also in (31)

$$D_p = \left[\left(1 + \frac{\beta}{t_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{\beta}{t_p}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}},$$

$$D_p = \left(1 + \frac{\beta_1}{t_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{\beta_p}{t_p}\right)$$

u. dgl. setzen. Alle diese $\Phi_p(t)$ konvergieren nach $\mu(t)$ für $t > 0$, aber auch für $t = 0$.

Nimmt man wieder die Momentfunktion u^t, so wird aus (31)

$$(32) \qquad \Phi_p(t, u) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}(u) \left(\frac{D_m}{D_p}\right)^t$$

und dies konvergiert nach u^t; aus (28) folgt, daß $\Phi_p(t,u) - f_p(t,u)$, bei gegebenem $t > 0$, gleichmäßig in u nach Null und daher $\Phi_p(t,u)$ gleichmäßig nach u^t konvergiert. (Für $t = 0$ wird $\Phi_p(t,u) = 1$.) Hieraus erhält man, mit Durchgang über Polynome in u, für jede in $[0,1]$ stetige Funktion $g(u)$ die gleichmäßig gültige Darstellung

$$(33) \qquad g(u) = \lim_p \sum_{m=0}^{p}{}' \lambda_{p,m}(u)\, g\left(\frac{D_m}{D_p}\right)$$

und daher durch Integration

$$(34) \qquad \int_0^1 g(u)\, d\chi(u) = \lim_p \sum_{m=0}^{p}{}' \lambda_{p,m}\, g\left(\frac{D_m}{D_p}\right).$$

Das gibt eine, zu I § 11 analoge, Darstellung von $\chi(u)$ bei gegebenen Momenten (24). Sei

$$\psi_p(u) = \sum_{D_m \leqq D_p u}{}' \lambda_{p,m}$$

$$\underline{\psi}(u) = \varliminf \psi_p(u), \qquad \overline{\psi}(u) = \varlimsup \psi_p(u).$$

Wählen wir, $0 \leqq \xi < \eta \leqq 1$ angenommen, die Funktion $g(u)$ gleich

$$1, \frac{\eta - u}{\eta - \xi}, 0 \text{ in den Intervallen } [0,\xi], [\xi,\eta], [\eta,1],$$

so liegt die linke Seite von (34) zwischen $\chi(\xi)$ und $\chi(\eta)$, die Summe rechts zwischen $\psi_p(\xi)$ und $\psi_p(\eta)$, also ihr Grenzwert zwischen $\overline{\psi}(\xi)$ und $\underline{\psi}(\eta)$, so daß wir

$$\chi(\xi) \leqq \underline{\psi}(\eta), \qquad \chi(\eta) \geqq \overline{\psi}(\xi)$$

erhalten. Hieraus leitet man leicht ab, daß alle drei monotonen Funktionen $\chi(u)$, $\underline{\psi}(u)$, $\overline{\psi}(u)$ dieselben Stetigkeitsstellen zwischen 0, 1 und an ihnen gleiche Werte

$$\chi(u) = \lim \psi_p(u) = \psi(u)$$

haben.

§ 6.

C-Matrizen und *C*-Folgen.

Zwischen zwei Zahlenfolgen a_n, b_n nehmen wir die Beziehung an — indem wir zur Bezeichnung (1) zurückkehren —

$$(35) \qquad a_n = \varphi_n'(t_0) \begin{pmatrix} b_0 \dots b_n \\ t_0 \dots t_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{n}{}' b_m \frac{\varphi_n'(t_0)}{\varphi_n'(t_m)}.$$

Da dann nach (4)

$$f\left(t \begin{matrix} b_0 \dots b_n \\ t_0 \dots t_n \end{matrix}\right) = \sum_{m=0}^{n}{}' a_m \frac{\varphi_{m-1}(t)}{\varphi_m'(t_0)}$$

ist, so folgt

$$(36) \qquad b_n = \sum_{m=0}^{n} a_m \frac{\varphi_{m-1}(t_n)}{\varphi_m'(t_0)}.$$

Dieses Gleichungssystem schreiben wir in Matrizenform (vgl. hier und zum Folgenden den § 1 der vorigen Note)

$$b = \varrho a, \quad a = \varrho^{-1} b;$$

die Matrix ϱ hängt nur von den t_n, genauer von ihren Differenzenquotienten ab. Mit dieser festen Matrix ϱ und einer willkürlichen Diagonalmatrix μ bilden wir

$$\lambda = \varrho^{-1} \mu \varrho,$$

so daß die lineare Substitution $A = \lambda a$ vermöge der Hilfsmatrizen $b = \varrho a$, $B = \varrho A$ die rein multiplikative Form $B = \mu b$ $(B_n = \mu_n b_n)$ annimmt.

Diese Matrix λ ist nun mit der bisher betrachteten gleichen Namens identisch. Denn die Rechnung ergibt:

$$A_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{\varphi_p'(t_0)}{\varphi_p'(t_n)} \mu_n \sum_{m=0}^{n} \frac{\varphi_{m-1}(t_n)}{\varphi_m'(t_0)} a_m$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \frac{\varphi_p'(t_0)}{\varphi_m'(t_0)} a_m \sum_{n=m}^{p} \frac{\varphi_{m-1}(t_n)}{\varphi_p'(t_n)} \mu_n,$$

wo nun die innere Summe $= \begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix}$, also

$$\lambda_{p,m} = \frac{\varphi_p'(t_0)}{\varphi_m'(t_0)} \begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix}$$

ist, mit (6) übereinstimmend.

Ist λ eine (reine, normierte) C-Matrix, so heiße die Folge μ_n bezüglich der Folge t_n eine (reine, normierte) C-Folge. Für $t_n = n$ haben wir den in der vorangehenden Note ausführlich behandelten Spezialfall. Die **Toeplitz**schen Bedingungen für eine C-Matrix sind

$$(\alpha) \qquad \mathsf{M}_p = \sum_{m=0}^{p} |\lambda_{p,m}| \leq \mathsf{M},$$

$$(\beta) \qquad l_m = \lim_p \lambda_{p,m} \text{ existiert.}$$

Die dritte Bedingung $\lim\limits_p \sum\limits_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} = l$ ist wegen (7) von selbst erfüllt. Den Bedingungen (α) (β) genügt nun, falls wieder (12) angenommen wird, nach Satz I jede bezüglich t_n total monotone Folge μ_n, insbesondere jede Momentfolge (24) einer monotonen Funktion $\chi(u)$; wenn überdies $\sum_1^\infty \frac{1}{t_n}$ divergiert, ist $l_1 = l_2 = \ldots = 0$. Aus $a_m \to a$ folgt dann

$$A_p \to (\mu_0 - l_0) a + l_0 a_0$$

und wir erhalten eine reine C-Folge für $l_0 = 0$, d. h. wenn $\chi(u)$ an der Stelle $u = 0$ stetig ist; eine normierte C-Folge, wenn überdies $\mu_0 = 1$. Das überträgt sich unmittelbar auf Funktionen $\chi(u)$ von beschränkter Schwankung und gibt den

Satz V. *Wenn die Folge t_n den Bedingungen* (12) *genügt, so ist die Momentfolge* (24) *einer Funktion $\chi(u)$ von beschränkter Schwankung stets eine C-Folge; falls $\sum_1^\infty \frac{1}{t_n}$ divergiert und $\chi(u)$ bei $u = 0$ stetig ist, ist sie eine reine, falls $\mu_0 = 1$, eine normierte C-Folge.*

Bei festen t_n, also fester Matrix ϱ, haben wir das System $S(t_n)$ der paarweise vertauschbaren Matrizen $\lambda = \varrho^{-1} \mu \varrho$, wo μ alle Diagonalmatrizen durchläuft; in ihm werden durch

$$\mu_n = \mu(t_n), \quad \mu(t) = \int_0^1 u^t d\chi(u)$$

gewisse (unter Umständen alle, vgl. Satz VII) C-Matrizen geliefert. Andererseits werden durch gleiche $\chi(u)$ oder $\mu(t)$ diese C-Matrizen verschiedener Systeme $S(t_n)$ einander zugeordnet, und wir können sie, genauere Bezeichnung im Bedarfsfalle vorbehalten, so wie die C-Matrizen des speziellen Systems $S(n)$ bezeichnen, also als Cesàrosche, Höldersche Matrizen usw.

Nehmen wir die Momentfunktion in der Form

$$\mu(t) = \int_0^1 u^t \varphi(u)\, du$$

an. Der Annahme

$$\varphi(u) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

mit Spezialisierungen ($\beta = 1$ oder $\alpha = 1$ oder $\alpha = \beta = 1$) entsprechen die folgenden Momentfunktionen und normierten C-Matrizen:

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(t+\beta)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(t+\alpha+\beta)} \qquad C_{\alpha+\beta-1} : C_{\beta-1}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+\alpha+1)} \qquad C_\alpha$$

$$\frac{\beta}{t+\beta} \qquad \Gamma_\beta = C_\beta : C_{\beta-1}$$

$$\frac{1}{t+1} \qquad \Gamma_1 = C_1 = C$$

C_α ist die *Cesàrosche Matrix* der Ordnung α des Systems $S(t_n)$; die Ordnung kann übrigens > -1 angenommen werden, aber nur $\alpha \geqq 0$ gibt eine C-Matrix.

Für die Matrix $\lambda = \Gamma_\beta$ ($\beta > 0$) ist, wie man leicht findet,

$$\lambda_{p,m} = \beta\, t_{m+1} \ldots t_p : (t_m + \beta) \ldots (t_p + \beta)$$

oder, wenn man

$$D_p(\beta) = \sum_{m=0}^{p} d_m(\beta) = \left(1 + \frac{\beta}{t_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{\beta}{t_p}\right) \qquad (D_0(\beta) = 1)$$

setzt:

$$\lambda_{p,m} = d_m(\beta) : D_p(\beta).$$

Im Fall $\beta = 1$ erhält man für die Matrix $\lambda = C$

$$\lambda_{p,m} = d_m : D_p$$

mit der Bezeichnung (29), die Substitution $A = Ca$ lautet also

(37) $$A_p = (d_0 a_0 + \ldots + d_p a_p) : D_p.$$

Auf den hierdurch hergestellten Zusammenhang unserer C_α mit den „typischen Mitteln" des Herrn M. Riesz[4]) werde ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen. *$S(t_n)$ ist das System der mit C vertauschbaren Matrizen.*

Will man eine *gegebene* Substitution (37) als $A = Ca$ in das zugehörige System einreihen, so hat man aus gegebener divergenter Reihe Σd_n die $t_p = D_{p-1} : d_p$ zu bestimmen; daß diese, wie bisher vorausgesetzt (vgl. aber § 8), paarweise verschieden ausfallen, kann man erreichen, indem man nötigenfalls (37) durch eine äquivalente Substitution gleicher Form ersetzt[5]).

Die Annahme

$$\varphi(u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\beta-1} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} \qquad (\alpha, \beta > 0),$$

sodann mit $\beta = 1$ gibt die Momentfunktionen und normierten C-Matrizen

$$\left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha \qquad \Gamma_\beta^\alpha$$

$$\left(\frac{1}{t+1}\right)^\alpha \qquad C^\alpha = H^\alpha$$

wobei α die Rolle eines Exponenten spielt und beliebig sein kann, aber nur $\alpha \geqq 0$ eine C-Matrix liefert. H^α ist die *Höldersche Matrix* der Ordnung α im System $S(t_n)$.

[4]) M. Riesz, Sur la sommation des séries de Dirichlet, Compt. rend. 5. Juli 1909; Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, ib. 22. Nov. 1909.

[5]) G. H. Hardy, On certain oscillating series, Quart. Journ., **38** (1907), S. 269—288; I. Schur, Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Ann., **74** (1913), S. 447—458, § 4.

Der Äquivalenzsatz $C_\alpha \approx H^\alpha$ $(\alpha > -1)$, darauf beruhend, daß

$$\mu(t) = \left(1 + \frac{t}{\alpha}\right) : \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$$

und

$$\mu(t) = \frac{\Gamma(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+\alpha+\beta)} - (t+1)^{1-\beta}$$

für $\alpha, \beta > 0$ Momentfunktionen sind (Note I, § 5, 6), überträgt sich unverändert vom System $S(n)$ auf jedes andere, ebenso die Ausfüllung der Hölderschen Skala zu einer logarithmischen und ihr Überbau durch stärkere Exponentialskalen entsprechend den total monotonen Funktionen

$$\mu(t) = e^{-A(t+a)^\alpha} \quad (A > 0,\ a \geqq 0,\ 0 < \alpha < 1).$$

Man hat in allen zum Spezialfall gehörigen Multiplikatorenfolgen μ_n einfach n durch t_n zu ersetzen.

§ 7.

Identität von C-Folgen und Momentfolgen.

Satz VI. *Wenn* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, *so ist jede reelle, der Bedingung*

$$(\alpha) \qquad \mathsf{M}_p = \sum_{m=0}^{p} |\lambda_{p,m}| \leqq \mathsf{M}$$

genügende Folge μ_n *Differenz zweier total monotoner Folgen.*

Beweis. Die Rekursionsformel

$$t_{p+1}\lambda_{p,m} = (t_{p+1} - t_m)\lambda_{p+1,m} + t_{m+1}\lambda_{p+1,m+1}$$

hat hier $(m \leqq p)$ positive Koeffizienten. Drücken wir mittels wiederholter Anwendung $\lambda_{p,m}$ durch $\lambda_{p+2,m}$, $\lambda_{p+2,m+1}$, $\lambda_{p+2,m+2}$ aus usw., so kommt allgemein

$$\lambda_{p,m} = \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} \lambda_{q,n} \qquad (q \geqq p),$$

wo n die Werte $m, \ldots, m+q-p$ durchläuft und die Koeffizienten positiv sind, oder n die Werte $0, \ldots, q$ durchläuft und $\binom{p\,m}{q\,n} \geqq 0$.

Die aus (20) für $t = t_n$, $n \leqq p$ hervorgehende Formel

$$\mu_n = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}\left(1 - \frac{t_n}{t_{m+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{t_n}{t_p}\right),$$

wo man $\sum_{m=0}^{p}$ durch $\sum_{m=n}^{p}$ ersetzen kann, ist ein spezieller Fall dieser verallgemeinerten Rekursionsformel und zeigt überdies: da $\lambda_{p,0} \ldots \lambda_{p,p}$ durch

$\mu_0 \dots \mu_p$ und diese wieder durch jene linear homogen ausdrückbar sind, so sind $\lambda_{p,0} \dots \lambda_{p,p}$ *linear unabhängig*, d. h. in jeder Relation $\sum_{m=0}^{p} c_m \lambda_{p,m} = 0$, wo die c_m Konstanten (von den μ_n unabhängig) sind, muß $c_0 = \dots = c_p = 0$ sein, und es können also darin die $\lambda_{p,m}$ durch beliebige Größen, insbesondere durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden.

Für $p \leqq q \leqq s$ folgt nun

$$\lambda_{p,m} = \sum_r \binom{p\,m}{s\,r} \lambda_{s,r} = \sum_{n,r} \binom{p\,m}{q\,n} \binom{q\,n}{s\,r} \lambda_{s,r}$$

und demnach wegen der linearen Unabhängigkeit der $\lambda_{s,r}$ $(r = 0, 1, \dots, s)$

$$(38) \qquad \sum_r \binom{p\,m}{s\,r} |\lambda_{s,r}| = \sum_{n,r} \binom{p\,m}{q\,n} \binom{q\,n}{s\,r} |\lambda_{s,r}| \geqq \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} \left| \sum_r \binom{q\,n}{s\,r} \lambda_{s,r} \right| = \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} |\lambda_{q,n}|,$$

d. h. die Ausdrücke

$$\binom{p\,m}{q} = \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} |\lambda_{q,n}|$$

haben die Eigenschaft

$$\binom{p\,m}{q} \leqq \binom{p\,m}{s}$$

für $q \leqq s$.

Ferner war

$$\mu_0 = \sum_m \lambda_{p,m} = \sum_{m,n} \binom{p\,m}{q\,n} \lambda_{q,n} = \sum_n \lambda_{q,n},$$

woraus wir wieder auf

$$\sum_{m,n} \binom{p\,m}{q\,n} |\lambda_{q,n}| = \sum_n |\lambda_{q,n}|$$

oder

$$\sum_m \binom{p\,m}{q} = \mathsf{M}_q$$

schließen. Aus (α) folgt also, daß die mit wachsendem $q = p, p+1, \dots$ aufsteigenden Größen $\binom{p\,m}{q}$ beschränkt bleiben und folglich einen Grenzwert

$$l_{p,m} = \lim_q \binom{p\,m}{q} \geqq \binom{p\,m}{p} = |\lambda_{p,m}|$$

haben; aus (38) oder

$$\binom{p\,m}{s} = \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} \binom{q\,n}{s}$$

folgt dann für $s \to \infty$

$$l_{p,m} = \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} l_{q,n},$$

also bestehen zwischen den $l_{p,m}$ dieselben Rekursionsformeln wie zwischen den $\lambda_{p,m}$ und es muß sich $l_{p,m}$ aus den $l_{n,n} = m_n$ ebenso bilden, wie $\lambda_{p,m}$ aus den $\lambda_{n,n} = \mu_n$ (Gleichungen (6)). Nun war $l_{p,m} \geqq |\lambda_{p,m}|$, also bei reellen μ_n

$$\lambda'_{p,m} = \tfrac{1}{2} l_{p,m} + \tfrac{1}{2} \lambda_{p,m} \geqq 0$$
$$\lambda''_{p,m} = \tfrac{1}{2} l_{p,m} - \tfrac{1}{2} \lambda_{p,m} \geqq 0$$

und $\lambda_{p,m} = \lambda'_{p,m} - \lambda''_{p,m}$, d. h. es ist $\mu_n = \mu'_n - \mu''_n$ Differenz total monotoner Folgen. Beiläufig sind μ'_n, μ''_n die kleinsten total monotonen Folgen dieser Art, d. h. jedes andere Paar entsteht hieraus durch Addition einer und derselben willkürlichen, total monotonen Folge.

Aus IV und VI ergibt sich schließlich:

Satz VII. *Wenn die Folge t_n den Bedingungen* (17) *und $t_n < t_{n+1}$ genügt, so ist jede zugehörige C-Folge die Momentfolge* (24) *einer eindeutig bestimmten Funktion $\chi(u)$ von beschränkter Schwankung.*

Im Fall reeller μ_n liefert die zu $\mu_n = \mu'_n - \mu''_n$ gehörige Darstellung $\chi(u) = \chi'(u) - \chi''(u)$ die kleinsten monotonen Funktionen dieser Art, d. h. jedes andere Paar entsteht aus $\chi'(u)$, $\chi''(u)$ durch Addition einer und derselben, willkürlichen, monotonen Funktion; demnach ist

$$\chi'(u) + \chi''(u) = \int_0^u |d\chi(u)|$$

die totale Variation von $\chi(u)$ im Intervall $[0, u]$.

§ 8.

Verallgemeinerung.

Bisher hatten wir die t_n als paarweise verschieden angenommen; die Modifikationen, die bei Preisgabe dieser Voraussetzung eintreten, mögen noch kurz erwähnt und zwar durch *Grenzübergang* hergeleitet werden. Wir fassen diejenigen Indizes $i < k < l < \ldots$, deren zugehörige t zusammenfallen sollen, mögen es endlich viele (eventuell nur einer) oder unendlich viele sein, zu einer *Gruppe* zusammen, die wir nach ihrem kleinsten Element die Gruppe G_i nennen. Die Voraussetzung (12) bleibe bestehen, so daß G_0 nur den einen Index 0 enthält.

Statt der Zahlenfolgen μ_n, b_n, B_n führen wir neue ν_n, c_n, C_n ein, indem wir für jede Gruppe G_i setzen

$$\nu_i = \mu_i, \qquad \nu_k = \lim \begin{pmatrix} \mu_i\, \mu_k \\ t_i\; t_k \end{pmatrix}, \qquad \nu_l = \lim \begin{pmatrix} \mu_i\, \mu_k\, \mu_l \\ t_i\; t_k\; t_l \end{pmatrix}, \ldots$$
$$c_i = b_i, \qquad c_k = \lim \begin{pmatrix} b_i\, b_k \\ t_i\; t_k \end{pmatrix}, \qquad c_l = \lim \begin{pmatrix} b_i\, b_k\, b_l \\ t_i\; t_k\; t_l \end{pmatrix}, \ldots$$
$$C_i = B_i, \qquad C_k = \lim \begin{pmatrix} B_i\, B_k \\ t_i\; t_k \end{pmatrix}, \qquad C_l = \lim \begin{pmatrix} B_i\, B_k\, B_l \\ t_i\; t_k\; t_l \end{pmatrix}, \ldots$$

wobei sich das Limeszeichen auf $t_k \to t_i$, $t_l \to t_i$, ... bezieht.

Die Formeln (36), worin wir m alle ganzen Zahlen $\leqq 0$ durchlaufen lassen können, da $\varphi_{m-1}(t_n)$ für $m > n$ verschwindet, geben dann

$$c_i = \sum_m a_m \frac{\varphi_{m-1}(t_i)}{\varphi'_m(t_0)}$$

$$c_k = \sum_m a_m \frac{\varphi'_{m-1}(t_i)}{\varphi'_m(t_0)}$$

$$c_l = \frac{1}{2!}\sum_m a_m \frac{\varphi''_{m-1}(t_i)}{\varphi'_m(t_0)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Diese, für jede Gruppe G_i aufzustellenden, Gleichungen drücken die c_n durch die a_m (und zwar c_n durch $a_0, a_1, \ldots, a_n$) aus; wir schreiben

$$c = \sigma a,$$

welche Matrizengleichung also an Stelle von $b = \varrho a$ tritt.

Die Umkehrung

$$a = \sigma^{-1} c$$

kann durch direkte Auflösung, oder durch Grenzübergang aus (35), gewonnen werden. Das Polynom $f\left(t \begin{matrix} b_0 \ldots b_n \\ t_0 \ldots t_n \end{matrix}\right)$ resp. sein Grenzwert ist nur jetzt nicht mehr durch die Lagrangesche, sondern durch die Hermitesche Interpolationsformel, nämlich durch die Forderung zu bestimmen, an vorgeschriebenen Stellen vorgeschriebene Werte und Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung zu besitzen. Wenn sich z. B. unter den Ziffern $0, \ldots, n$ die ersten drei Indizes i, k, l der Gruppe G_i befinden, so ist

$$f\left(t \begin{matrix} b_0 \ldots b_n \\ t_0 \ldots t_n \end{matrix}\right) = b_i + \begin{pmatrix} b_i\, b_k \\ t_i\, t_k \end{pmatrix}(t - t_i) + \begin{pmatrix} b_i\, b_k\, b_l \\ t_i\, t_k\, t_l \end{pmatrix}(t - t_i)(t - t_k)$$

$\operatorname{mod}(t - t_i)(t - t_k)(t - t_l)$, also

$$\lim f\left(t \begin{matrix} b_0 \ldots b_n \\ t_0 \ldots t_n \end{matrix}\right) = c_i + c_k(t - t_i) + c_l(t - t_i)^2$$

$\operatorname{mod}(t - t_i)^3$, d. h. unser Polynom hat an der Stelle t_i den Wert c_i und die ersten beiden Ableitungen c_k, $2!\, c_l$. Durch diese für jede Gruppe anzusetzenden Bedingungen ist das Polynom und sein höchster Koeffizient $\lim \begin{pmatrix} b_0 \ldots b_n \\ t_0 \ldots t_n \end{pmatrix} = a_n : \varphi'_n(t_0)$ bestimmt.

Ebenso ist

$$C = \sigma A, \qquad A = \sigma^{-1} C.$$

Um nun die Beziehungen $B_n = \mu_n b_n$ umzuformen, benutzen wir, etwa wieder für die ersten drei Indizes von G_i, die $\operatorname{mod}(t - t_i)(t - t_k)(t - t_l)$ gültige Kongruenz

$$f\left(t \begin{matrix} B_i\, B_k\, B_l \\ t_i\;\, t_k\;\, t_l \end{matrix}\right) = f\left(t \begin{matrix} \mu_i\, \mu_k\, \mu_l \\ t_i\;\, t_k\;\, t_l \end{matrix}\right) f\left(t \begin{matrix} b_i\, b_k\, b_l \\ t_i\;\, t_k\;\, t_l \end{matrix}\right)$$

und erhalten durch Grenzübergang die Kongruenz $\bmod (t-t_i)^3$

$$C_i + C_k(t-t_i) + C_l(t-t_i)^2 = [\nu_i + \nu_k(t-t_i) + \nu_l(t-t_i)^2]$$
$$[c_i + c_k(t-t_i) + c_l(t-t_i)^2],$$

also

$$\begin{aligned} C_i &= \nu_i c_i \\ C_k &= \nu_k c_i + \nu_i c_k \\ C_l &= \nu_l c_i + \nu_k c_k + \nu_i c_l \\ &\cdots \end{aligned}$$

Diese, für jedes G_i anzusetzenden Gleichungen drücken die C_n durch die c_n aus; wir haben damit an Stelle von $B = \mu b$ die Matrizengleichung

$$C = \nu c,$$

wo ν aber keine Diagonalmatrix mehr ist, sondern in der angegebenen Weise, den Indexgruppen oder *verschiedenen* t_i entsprechend, in Teilmatrizen zerfällt.

Nunmehr ist $A = \lambda a$ mit

$$\lambda = \sigma^{-1} \nu \sigma,$$

wobei die $\lambda_{p,m}$ auch aus (6) durch Grenzübergang (Hermitesche Interpolationsformel) erhalten werden können. Bei festen t_n, variablen ν_n (oder fester Matrix σ, variabler ν) durchläuft λ ein System $S(t_n)$ vertauschbarer Matrizen.

Ist $\chi(u)$ von beschränkter Schwankung, $\mu(t)$ die zugehörige Momentfunktion (21) und setzt man für jede Gruppe G_i

$$\nu_i = \mu(t_i), \qquad \nu_k = \mu'(t_i), \qquad \nu_l = \frac{1}{2!}\mu''(t_i), \ldots,$$

so wird λ eine C-Matrix, insbesondere eine reine, falls $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{t_n}$ divergiert und $\chi(u)$ an der Stelle $u = 0$ stetig ist.

(Eingegangen am 8. September 1920.)

Zusatz bei der Korrektur. Dem im Text gegebenen Beweise von (25), dessen erste Hälfte auf (17) beruht, ist ein anderer vorzuziehen, der ohne die Annahme $t_n \to \infty$ auskommt und die aus (26) für $u > 0$ folgende Formel

$$\frac{d}{du}[u^{-t_m} \lambda_{p,m}(u)] = -t_{m+1} u^{-1-t_m} \lambda_{p,m+1}(u)$$

benutzt. Die Fassung des Satzes V, ohne die Voraussetzung $t_n \to \infty$, erhält erst hierdurch ihre Rechtfertigung (d. 26. 11. 20).