# 多重ゼータ値導入

—定義から正規化まで—

金子昌信

## 1　定義

多重ゼータ値（Multiple Zeta Value, MZV と略す）とは，与えられた自然数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して次の無限級数で定まる実数のことである．

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}. \tag{1.1}$$

和の $m_i$ は自然数をわたっている．$\mathbf{k}$ のことをインデックス (index) とかインデックス集合 (index set) とか言う．一番最後の $k_r$ が 1 だと発散し，$k_r > 1$ であると収束するので，$k_r \geq 2$ と仮定する．この発散，収束は簡単に分かるのであるが，$k_i$ をより一般に複素数とした場合の絶対収束域について小野塚さんの稿の冒頭に述べられており，そのごく特殊な場合と言うことで，ここでは省略する．多重ゼータ「値」と言えばもっぱら $k_i$ が自然数の場合を指す．

定義 (1.1) の右辺の和を $\zeta(k_r, \ldots, k_1)$ のように，$k_i$ を逆に並べて書く流儀もあるので文献にあたる際は注意が必要である．これはそれぞれの流儀について，他の関連対象との整合性や好み，思い入れなどが相俟って，どちらかに段々と統一されていくというものではなさそうである．私自身はどちらの流儀でも論文を書いていて，強い主張はないが，現在は上記の流儀で書くことが多い．

多重ゼータ値は Goldbach と Euler が $r = 2$ の場合（「二重ゼータ値」）を考えたのが始まりで，1742 年から 43 年にかけて，二重ゼータ値に関する二人の間の手紙のやりとりが 5 通残されている．それによれば Goldbach が二重ゼータ値を最初に考えた人となるようである．彼に刺激を受けて，その性質について Euler が格段に研究を進めた．それ以後いろいろな研究がなされてきたわけであるが，様々な分野との関わりから活発に研究されるようになったのは 1990 年代以降である．そのことは，現代の MZV 研究のパイオニアの一人 Hoffman 氏が収集している文献情報の Web ページ [12] を見るとよく分かる．

私事にわたって誠に恐縮であるが，この機会に少し思い出話を差し挟むことをご寛恕願いたい．私自身が多重ゼータ値を初めて知ったのは，恐らく 1992 年，Zagier 氏が京都大学で行った何かの講演（保型形式のシンポジウムでの話だったか，別の何かセミナーでの話だったか，思い出せない）であったと思う．しかしその時は自分の研究対象になるとは夢にも思わず，超特異楕円曲線の $j$ 不変量とか，別のことをやっていた．93 年 3 月から 94 年 9 月までドイツに行って，Zagier 氏と共同研究もするようになるのであるが，ドイツでは彼と多重ゼータ値の話は一切しなかったように思う．私がドイツに行ったのが村上順さんの帰国直前の頃で，順さん（阪大時代の助手仲間，先輩）とは少し彼の地で多重ゼータ値の話をした記憶がある．というのも，丁度その頃順さんが Le-Murakami の関係式として知られる結果を含む，結び目理論における仕事をされた頃で，$\zeta(3)$

の無理性の別証明がこんなところから出来ないか，などという話をビールを飲みながらした．恐らく順さんが日本人で最初に多重ゼータ値を研究対象として扱った人である．ではなぜ私が多重ゼータ値に取り組むようになったかというと，それはその頃戯れに定義をして「遊んで」いた，多重ベルヌーイ数というものを通じての，ある偶然と，故荒川恒男さん（2003 年 10 月 3 日歿）の大いなる導きによる．

私は 1990 年 10 月に大阪大から京都工芸繊維大に移り，半年間はもとの宝塚の住まい（両親の家）から京都の北まで 2 時間以上かけて通っていたので，通勤電車の中は講義準備や読書などに恰好の場であった．ある日（ノートによれば 90 年 12 月 8 日とある．この日は土曜日で，当時土曜の夜間コースのクラスを持っていた），講義の参考にしていた杉浦光夫先生の「解析入門 I」を眺めていて（それはおそらく第 IV 章 §13 末の問題 3) であると思う），dilogarithm

$$Li_2(x)=\int_0^x \frac{-\log(1-x)}{x}dx$$

において $x=1-e^{-t}$ なる変数変換を行うと

$$Li_2(x)=\int_0^{-\log(1-x)} \frac{t}{e^t-1}dt$$

となり，$-\log(1-x)=y$ とおいて両辺を $y$ で微分すると古典的 Bernoulli 数の母関数が現れる，それなら同様の操作を $Li_2(x)$ の代わりに一般の多重対数関数 $Li_k(x)$ を使って行って得られる級数の展開係数として「多重ベルヌーイ数」が定義できるではないか，と考えたのである．

私は大学一年生のとき微積分の講義を杉浦先生から受けた．学生生活を通じて最も印象的な講義の一つであった．この本はその講義の翌年か翌々年に出て，あの内容のほぼ全部を一年間に講義してしまわれたのには今更ながら驚くが，ともかく自分の講義の参考として手元にあった． 杉浦先生の講義を聴いていなかったら，おそらくこの本を購入することもなかったと思われ，多重ベルヌーイ数を定義することもなかったに違いない．しばらくは定義しただけで放ってあったのだが，翌 1991 年 9 月 22 日，九大から阪大に移られて間もない伊吹山さんから，概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊値は「高次ベルヌーイ数」（それがどんなものかは分からないと言われた）で書けて，それが実は通常のベルヌーイ数で書ける，ということになっているのではという話を聞き，もしかしたら以前定義した多重ベルヌーイ数もまんざら無意味ではないかも知れないと思った． ノートによれば 9 月 30 日より少しずつ計算を開始して，1992 年の 4 月頃には，ボルドーの雑誌に出た最初の論文 “Poly-Bernoulli numbers” に書いてあることは大体出来ている．私は当時まだスターリング数を知らなかったので，それにあたる数も自分で定義し性質を調べたりしていて微笑ましい．これを学会などで話したところ，荒川さんが興味を持って下さった．ドイツ滞在中の 93 年の 9 月にボルドーであった Journées Arithmétiques でも発表し，そこに荒川さんも来られていて，いろいろとお話しした（ところで上記の多重ベルヌーイ数の最初の論文は，詳しい事情は書かないが随分出版が遅れ，Journées Arithmétiques 特集号の 2 年後の 97 年にやっと出た）．

帰国後の 95 年，次の偶然が訪れる．私は京都大で非常勤講師をしていて，線形代数を教えていた．講義のあとなどに，当時の教養部の談話室のようなところで新着雑誌を眺めるのが習慣であった．ある日，リーマンゼータ値についてのある公式が載っている論文が目にとまり（タイトルその他，残念ながらもう忘れてしまった），それが何となく多重ベルヌーイ数について得ていた等式に似ていたことからヒントを得て，数値実験をして，しかし結局新しいことは得られなかったという顛末を書いた手紙を荒川さんに書いた．当時は電子メールもあるにはあったが，まだまだ手紙が普通の時代であった．その手紙の当該部分だけを引用すると

95. 7. 28

荒川様

— （略） —

それはともかく，最近少し考えたことを書きます．結局 Zagier さんの “multiple zeta” に帰してしまい新しいことはないのですが．

第 2 種スターリング数 $\widehat{\mathfrak{S}_n^m}$ を（ふつうのやつの $m!$ 倍）

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} \widehat{\mathfrak{S}_n^m} \binom{x}{m}$$

で def すると，poly-Bern. # $B_n^{(k)}$ は

$$B_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{m+n}\widehat{\mathfrak{S}_n^m}}{(m+1)^k} \quad (n \geq 0, \forall k) \tag{*}$$

でした．一方，第一種 $\widehat{S_n^m}$ を

$$\binom{x}{n} = \sum_{m=0}^{n} \widehat{S_n^m}\, x^m$$

とすると，

$$\zeta(n+1) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}\widehat{S_n^m}}{m}$$

というリーマンゼータの公式があります（Jordan の本 p. 166 (6)）． そこで，

$$\zeta_n^{(k)} := \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}\widehat{S_n^m}}{m^k}$$

と def してみます．(*) と何となく似てます．

$B_n^{(k)}$ は $B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}$ $\forall n, k \geq 0$ をみたしました．数値実験の末

$$\zeta_n^{(k)} = \zeta_k^{(n)} \ ? \quad \text{と}$$

$$\zeta_2^{(k)} \text{ を } \zeta(\ell)\text{'s で書き表す式,}$$

を予想しました．

ところが，すぐわかったことは

$$\zeta_n^{(k)} = \zeta(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}, k+1)$$

（Zagier's multiple zeta value, cf. ECM volume, Birkhäuser）で，上の予想も Zagier さんの loc. cit. の論文にある式で O.K. となり，何だ，ということですが．

“$B_n^{(k)}$ は良い数である” ことの状況証拠のひとつになればと思います．

— （略） —

すると約2ヶ月後，荒川さんから，“Multiple zeta values, poly-logarithmic functions and poly-Bernoulli numbers” と題した7ページの英文ノートとともに，返事が送られてきた．

金子昌信様

7月28日付お手紙ありがとうございました．お手紙の内容に示唆されて Zagier の Multiple zeta values について考えてみました．

MZV にならって zeta 関数を

$$\zeta(k_1,\ldots,k_r;s)=\sum_{0<n_1<n_2<\cdots<n_r<n_{r+1}}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}n_{r+1}^{s}}$$

として定義する（$\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束）．それを $s$ の関数として解析接続することを考えてみました． poly-Bernoulli #’s が負整数点での特殊値として現れるような，zeta 関数を作りたいというのが願望です． これに関して，ノートを作りましたので同封します．批判的にお読み頂ければ幸いです． p. 4 にあるように，これらの Multiple zeta 関数を使って

$$\zeta_{r+1}(s)=\zeta(\overbrace{2,1,\ldots,1}^{r};s)+\zeta(\overbrace{1,2,1,\ldots,1}^{r};s)+\cdots+\ \text{等々}$$

と定義すると，$\zeta_{r+1}(s)$ は Dirichlet 級数にはなりませんが，これの負整数点での値が poly-Bernoulli # と密接に結びつきます．

お手紙大変おもしろかったです． Multiple zeta value を考えるというのは大変役にたちました，少し，このあたり一緒に考えてみませんでしょうか？ 今後とも情報をお願いします．

9月19日　　　　荒川恒男

この手紙にある $\zeta_{r+1}(s)$（の $(-1)^r$ 倍）が現在 $\xi_{r+1}(s)$ と書かれる関数であって，私はこれは Arakawa zeta 関数と呼ばれるべきものであると思っている．

これ以後，荒川さんとの共同研究がはじまり，自分でも本格的に多重ゼータ値の研究をするようになった．そうして自然と Zagier さんとも多重ゼータ値について議論をするようになる．その後の話はまた膨大なことになるし，いつか機会があればということにして，本論に戻るとする．（個人的なことで紙幅を費やし済みません．）

**定義 1.1.** インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}^r$ にたいし，量 $|\mathbf{k}|:=k_1+\cdots+k_r$ および $\mathrm{dep}(\mathbf{k}):=r$ をそれぞれ重さ（weight），深さ（depth）という．$k_r>1$ であるようなインデックスを許容的（admissible）もしくは収束インデックスという．収束しないインデックスについても何か意味のある量を取り出そう，というのが「正規化」の話である．

重さとか深さはインデックスに対してははっきり定まる量であるが，ときに $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ の重さが $k_1+\cdots+k_r$ であるとか，深さが $r$ であるとか言うこともある．しかしそこには曖昧さが潜んでいることは認識しておく必要がある．実際，例えばあとで出て来る $\zeta(1,2)=\zeta(3)$ という等式があるので，この数の深さは何ですかということになるし，重さについても，異なる重さの多重

ゼータ値は独立だと考えられているが証明はされていないので，$17\zeta(3,2)=12\zeta(7)$ のような等式が成り立たないとは限らず，そうすると「値」の重さが well-defined かも現状では分からない．
重さ 5 までの多重ゼータ値を書き出してみると

| | wt=2 | wt=3 | wt=4 | wt=5 |
|---|---|---|---|---|
| dep=1 | $\zeta(2)$ | $\zeta(3)$ | $\zeta(4)$ | $\zeta(5)$ |
| dep=2 | | $\zeta(1,2)$ | $\zeta(1,3),\zeta(2,2)$ | $\zeta(1,4),\zeta(2,3),\zeta(3,2)$ |
| dep=3 | | | $\zeta(1,1,2)$ | $\zeta(1,1,3),\zeta(1,2,2),\zeta(2,1,2)$ |
| dep=4 | | | | $\zeta(1,1,1,2)$ |

この表を見るとすぐ見当がつくことと思うが，重さが $k$ で深さが $r$ の多重ゼータ値（インデックス）の個数は二項係数 $\binom{k-2}{r-1}$ に等しい．そして重さ $k$ の総数は $2^{k-2}$ である．

## 2 多重ゼータ値の代数

多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間というものが一つの考察の対象である．

**定義 2.1.** 重さが $k$ の多重ゼータ値で張られる $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ と書く．重さ 0 のインデックスとして空インデックスを考え，$\zeta(\emptyset)=1$ としておくと何かと都合がよい．この約束の下，

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0 &= \mathbb{Q},\quad \mathcal{Z}_1=\{0\},\\ \mathcal{Z}_k &= \sum_{\substack{1\le r\le k-1\\ k_1,\ldots,k_{r-1}\ge 1,k_r\ge 2\\ k_1+\cdots+k_r=k}} \mathbb{Q}\cdot\zeta(k_1,\ldots,k_r)\quad (k\ge 2).\end{aligned}$$

さらに

$$\mathcal{Z}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{Z}_k$$

と定義する．

重さが 2 の元は $\zeta(2)$ しかないから，$\mathcal{Z}_2=\mathbb{Q}\cdot\zeta(2)$ (一次元) である．重さ 3 には $\zeta(3)$ と $\zeta(1,2)$ の二つがあるが，さきにも書いた Euler による有名な関係 $\zeta(1,2)=\zeta(3)$ があるので，$\mathcal{Z}_3=\mathbb{Q}\cdot\zeta(1,2)+\mathbb{Q}\cdot\zeta(3)=\mathbb{Q}\cdot\zeta(3)$ (一次元) である．あとで $\mathcal{Z}_4$ もまた $\zeta(4)$ で張られる一次元空間であることを示す．現状では，5 以上の $k$ で $\mathcal{Z}_k$ の次元が真に 1 より大きいことが示せているものは一つもない．これは例えば $\zeta(5)$ と $\zeta(2,3)$ が $\mathbb{Q}$ 上独立であるというようなことを示す必要があるが，その手の結果が全くないことによる．そのような現状ではあるが，$\mathcal{Z}_k$ の次元については Zagier による，今では非常によく知られたはっきりとした予想がある．
数列 $d_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ を次の漸化式で定める．

$$d_0=1,\ d_1=0,\ d_2=1,\quad d_k=d_{k-2}+d_{k-3}\quad (k\ge 3). \tag{2.1}$$

Fibonacci 数列に似ているが，二つ前と三つ前の和をとっている．予想は次の通り．

**予想 2.2** (Zagier [19]). $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k=d_k$ であろう．

この予想についての決定的な結果が Goncharov や寺杣さんによって知られている．

**定理 2.3** (Goncharov [9], Terasoma [16], Deligne-Goncharov [7])**.** 不等式 $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k \le d_k$ が成り立つ．

上に述べたように，逆向きの不等式について分かっていることは $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k \ge 1$ という自明なものに過ぎない．

ここで数列 $d_k$ と，各重さの収束インデックス総数 $(= 2^{k-2})$ を表にしてみる．

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_k$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 12 | 16 | 21 | 28 |
| $2^{k-2}$ | – | – | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 | 8192 |

これを見ると，$d_k$ の大きさが $2^{k-2}$ に比してずっと小さいことが分かる.（実際の大きさも漸化式から分かる.）ということは，次元を $d_k$ 以下に落とすだけの沢山の関係式があるということになる．実際に様々な背景を持つ関係式族が（非常に！）多く知られており，また今なお見つかり続けていて，それらの間の包含関係や，どれを使えば全部の関係式が出てきそうか，という予想もいくつかある．これらの一部はこのサマースクール報告集の中で述べられるであろう．

本稿では，定義から自然に出てくると言ってよい「複シャッフル関係式」というものと，それを「正規化」という作業によって，非収束インデックスにまで拡張して得られる関係式について紹介する．

まず，ベクトル空間 $\mathcal{Z}$ が $\mathbb{Q}$ 代数の構造を持つことを示す．

**命題 2.4.** $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}$ は通常の実数の積で閉じており $\mathbb{Q}$ 代数となる．またその積は重さについて $\mathcal{Z}_k \cdot \mathcal{Z}_l \subset \mathcal{Z}_{k+l}$ を満たす．

*Proof.* この命題は少なくとも二通りの証明がある．一つは定義級数 (1.1) を用いるもので，その積（を和として書き表す仕方）は調和積とか stuffle 積（訳語は見たことがない）と呼ばれる．もう一つは，後で説明する積分表示を用いる．ここでは前者による証明を行う．

自然数 $N$ を固定し，和を $N-1$ までの範囲で打ち切った有限和 $\zeta_N(k_1,\ldots,k_r)$ を考える：

$$\zeta_N(k_1,\ldots,k_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r<N} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}.$$

有限和であるから $k_i$ は正である必要はないが，ここでは引き続き自然数のみを考える．ただし $k_r = 1$ の場合も許す． この場合も区別なく考慮できることが後々大事になる．$k_r > 1$ であるとき，この有限和は $N \to \infty$ とすると多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ に収束する．

二つのインデックス $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_r)$ と $\mathbf{l} = (l_1,\ldots,l_s)$ に対し，深さの和 $r+s$ に関する帰納法で

積 $\zeta_N(\mathbf{k})\zeta_N(\mathbf{l})$ は，適当なインデックス $\mathbf{m}$ たちによる $\zeta_N(\mathbf{m})$ の一次結合である

ことを証明する．証明から分かるように，$\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ が収束インデックスならば $\mathbf{m}$ たちも収束インデックスに取れて，$N \to \infty$ の極限をとれば，命題の主張の前半がいえる．そしてやはり証明を見れば重さについての言明も証明されていることになることが分かる．

まず $r+s=2$ のとき，つまり $r=s=1$ のときは，

$$\begin{aligned}\zeta_N(k)\zeta_N(l) &= \sum_{0<m<N}\frac{1}{m^k}\sum_{0<n<N}\frac{1}{n^l} = \sum_{0<m,n<N}\frac{1}{m^k n^l}\\ &= \left(\sum_{0<m<n<N}+\sum_{0<n<m<N}+\sum_{0<m=n<N}\right)\frac{1}{m^k n^l}\\ &= \zeta_N(k,l)+\zeta_N(l,k)+\zeta_N(k+l)\end{aligned}$$

と計算されて，確かに正しい．右辺の重さが皆 $k+l$ になっていることに注意しよう．次に $r+s>2$ と仮定し，深さの和が $r+s$ より小さい場合は主張が正しいとする．このとき，同じ考え方，つまり最後の $m_r$ と $n_s$ の大小関係で和を三つに分けて，

$$\begin{aligned}&\zeta_N(\mathbf{k})\zeta_N(\mathbf{l}) = \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r<N\\0<n_1<\cdots<n_s<N}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}\\ &= \left(\sum_{\substack{0<n_s<m_r<N\\0<m_1<\cdots<m_r\\0<n_1<\cdots<n_s}}+\sum_{\substack{0<m_r<n_s<N\\0<m_1<\cdots<m_r\\0<n_1<\cdots<n_s}}+\sum_{\substack{0<m_r=n_s<N\\0<m_1<\cdots<m_r\\0<n_1<\cdots<n_s}}\right)\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}\\ &= \sum_{0<m_r<N}\zeta_{m_r}(\mathbf{k}_-)\zeta_{m_r}(\mathbf{l})\frac{1}{m_r^{k_r}}+\sum_{0<n_s<N}\zeta_{n_s}(\mathbf{k})\zeta_{n_s}(\mathbf{l}_-)\frac{1}{n_s^{l_s}}+\sum_{0<m_r<N}\zeta_{m_r}(\mathbf{k}_-)\zeta_{m_r}(\mathbf{l}_-)\frac{1}{m_r^{k_r+l_s}}\end{aligned}$$

と計算する．ここに $\mathbf{k}_-=(k_1,\dots,k_{r-1}),\mathbf{l}_-=(l_1,\dots,l_{s-1})$ で，$\zeta_\bullet(\emptyset)=1$ と約束している（$\bullet$ は何か自然数）．帰納法の仮定から積 $\zeta_{m_r}(\mathbf{k}_-)\zeta_{m_r}(\mathbf{l})$ は $\zeta_{m_r}(\mathbf{m})$ たちの和であり，

$$\sum_{0<m_r<N}\zeta_{m_r}(\mathbf{m})\frac{1}{m_r^{k_r}}=\zeta_N(\mathbf{m},k_r)$$

である．他の二項も同様．これで主張が証明が出来た． □

この積を純代数的に考えるため，次のような枠組みを用意する．$\mathcal{R}:=\bigoplus_{r\ge 0}\mathbb{Q}[\mathbb{N}^r]$ をインデックス（自然数の組）の $\mathbb{Q}$ 係数形式和のなすベクトル空間とする．すなわちインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{N}^r$ ごとに記号 $[\mathbf{k}]=[k_1,\dots,k_r]$ を用意し，その有理数係数の有限和全体を考える．$\mathbb{Q}[\mathbb{N}^0]=\mathbb{Q}[\emptyset]$ とする．そして $\mathcal{R}^0$ で収束インデックス（すなわち $k_r\ge 2$ であるようなもの）が張る部分空間を表す．$\emptyset$ も収束インデックスの仲間に入れる．この $\mathcal{R}$ 上に，次の帰納的規則で積 $*$ を入れる（調和積，stuffle product）．

- 積は $\mathbb{Q}$ 双線形，
- 任意の $\mathbf{k}$ に対し $[\emptyset]*[\mathbf{k}]=[\mathbf{k}]*[\emptyset]=[\mathbf{k}]$,
- $[\mathbf{k}]*[\mathbf{l}]=\big[[\mathbf{k}_-]*[\mathbf{l}],k_r\big]+\big[[\mathbf{k}]*[\mathbf{l}_-],l_s\big]+\big[[\mathbf{k}_-]*[\mathbf{l}_-],k_r+l_s\big]$，ここに $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$, $\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_s)$ に対し $\mathbf{k}_-=(k_1,\dots,k_{r-1})$ および $\mathbf{l}_-=(l_1,\dots,l_{s-1})$.

これは上の証明中の $\zeta_N(\mathbf{k})$ の積の構造を公理化したもので，Hoffman [11] はこの積が結合的かつ可換（可換性は自明）であることを証明した．$\mathcal{R}$ を積 $*$ による $\mathbb{Q}$ 代数と見ていることを明示するときは $\mathcal{R}_*$ と書く．このとき $\mathcal{R}^0$ は部分 $\mathbb{Q}$ 代数となり，それを $\mathcal{R}^0_*$ と書く．

対応 $[\mathbf{k}] \mapsto \zeta(\mathbf{k})$ を $\mathbb{Q}$ 線形に拡張することで，$\mathbb{Q}$ 線形写像 $\zeta : \mathcal{R}^0 \to \mathbb{R}$ が得られる（同じ文字 $\zeta$ を使う）．命題 2.4 で示したことは，これが $\mathcal{R}^0_*$ から $\mathbb{R}$ への準同型であること，つまり

$$\zeta([\mathbf{k}] * [\mathbf{l}]) = \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) \tag{2.2}$$

が全ての収束インデックス $\mathbf{k}$，$\mathbf{l}$ について成り立つことに他ならない．簡単のため右辺の $\zeta([\mathbf{k}] * [\mathbf{l}])$ をしばしば $\zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l})$ と書く．

## 3 積分表示

まず log のテイラー展開

$$-\log(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

から出発する．これは $|x| < 1$ で収束しているが，$x \to 1$ とすると発散する．見かけは ‘$\zeta(1)$’ である．左辺は

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

と書けることに注意しておく．これを $x$ で割ってからもう一度 0 から $x$ まで積分すると，

$$\int_0^x (-\log(1-t)) \frac{dt}{t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^2}$$

となり，今度は $x \to 1$ としても収束し，$\zeta(2)$ を与える．左辺の積分は

$$\int_0^x \left( \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) \frac{dt_2}{t_2} = \iint_{0<t_1<t_2<x} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2}$$

と書ける．同様のこと（「反復積分」）を繰り返すと，

$$\underset{0<t_1<\cdots<t_k<x}{\int \cdots \int} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \frac{dt_k}{t_k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^k}$$

となり，$x \to 1$ として $\zeta(k)$ が得られることは容易に理解できるであろう．ここで，これを $1-x$ で割って積分してみる．まず $|x| < 1$ の範囲で，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^k} \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^k} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x^{m+n-1}}{m^k}.$$

最後 $n$ を $n-1$ に変えた．これを 0 から $x$ まで項別積分すると，

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x^{m+n}}{m^k(m+n)} = \sum_{0<m<n} \frac{x^n}{m^k n}$$

となる．（$m+n$ を $n$ と置き直した．）これは $x \to 1$ のとき収束しないが，これをまた一度 $x$ で割って積分した

$$\sum_{0<m<n} \frac{x^n}{m^k n^2}$$

は収束し，$\zeta(k,2)$ を与える．この先同様に $x$ で割って積分，$x$ で割って積分，を繰り返すことにより $n$ の冪が増えていき，結局次の積分表示に到達する．

$$\int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_{k_1+k_2}<x} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_k}{t_{k_1}}\cdot\frac{dt_{k_1+1}}{1-t_{k_1+1}}\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\cdots\frac{dt_{k_1+k_2}}{t_{k_1+k_2}} = \sum_{0<m_1<m_2}\frac{x^{m_2}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}}$$

そして，$k_2>1$ であれば（admissible）$x=1$ と出来て，

$$\zeta(k_1,k_2) = \int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_{k_1+k_2}<1} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_k}{t_{k_1}}\cdot\frac{dt_{k_1+1}}{1-t_{k_1+1}}\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\cdots\frac{dt_{k_1+k_2}}{t_{k_1+k_2}}$$

という，二重ゼータ値の積分による表示が得られる．これで一般の場合もお分かりと思うが，$1-t$ で割ることにより深さが一つ増え，そのあとの $dt/t$ の繰り返しが最後のインデックスを 1 ずつ増やしていく．一般の場合はさぼってここには書かないことにするが，川崎さんの稿で出て来る山本さんの積分は，この多重ゼータ値の積分表示を一般化し，かつ簡明な表記を与える．証明は原則，上でやったような，多重積分を順々に積分していく逐次積分である．

この積分表示が，多重ゼータ値の空間に新たな積構造を与える．これを一番簡単な例 $\zeta(2)^2$ で見よう．$\zeta(2)$ の積分表示は

$$\zeta(2) = \int_{0<t_1<t_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$

である．この二つの積は次のように計算される．

$$\begin{aligned}
\zeta(2)^2 &= \int_{0<t_1<t_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\int_{0<s_1<s_2<1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\\
&= \int_{\substack{0<t_1<t_2<1\\0<s_1<s_2<1}}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\\
&= \Bigg(\int_{0<t_1<t_2<s_1<s_2<1}+\int_{0<t_1<s_1<t_2<s_2<1}+\int_{0<t_1<s_1<s_2<t_2<1}+\int_{0<s_1<t_1<t_2<s_2<1}\\
&\qquad +\int_{0<s_1<t_1<s_2<t_2<1}+\int_{0<s_1<s_2<t_1<t_2<1}\Bigg)\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\\
&= \int_{0<t_1<t_2<s_1<s_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}+\int_{0<t_1<s_1<t_2<s_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_2}{s_2}\\
&+\int_{0<t_1<s_1<s_2<t_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\frac{dt_2}{t_2}+\int_{0<s_1<t_1<t_2<s_2<1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_2}{s_2}\\
&+\int_{0<s_1<t_1<s_2<t_2<1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{ds_2}{s_2}\frac{dt_2}{t_2}+\int_{0<s_1<s_2<t_1<t_2<1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\\
&= \zeta(2,2)+\zeta(1,3)+\zeta(1,3)+\zeta(1,3)+\zeta(1,3)+\zeta(2,2)\\
&= 2\zeta(2,2)+4\zeta(1,3).
\end{aligned}$$

これは，要領は級数の積のときと同じで，4 次元空間の中の積分領域

$$\{(t_1,t_2,s_1,s_2)\in[0,1]^4\,|\,0<t_1<t_2<1, 0<s_1<s_2<1\}$$

を，$t_i$, $s_j$ の大小関係に従って六つに分割するのである．そうするとそれぞれの積分が多重ゼータ値を与える．$t_1=s_1$ のような場合は領域の次元が落ちて，測度が 0 となり積分値には寄与しな

いことに注意．この分割は結局，四つの微分形式 $\frac{dt_1}{1-t_1}, \frac{dt_2}{t_2}, \frac{ds_1}{1-s_1}, \frac{ds_2}{s_2}$ があるなかで，$\frac{dt_1}{1-t_1}, \frac{dt_2}{t_2}$ には $\frac{dt_1}{1-t_1}$ が左で $\frac{dt_2}{t_2}$ が右という順序があり，$\frac{ds_1}{1-s_1}, \frac{ds_2}{s_2}$ には $\frac{ds_1}{1-s_1}$ が左で $\frac{ds_2}{s_2}$ が右という順序があって，それぞれの順序は保ちつつ，四つを並べる方法，それはつまり $\binom{4}{2} = 6$ 通りあるが，それぞれごとの積分の和になると言っているのと同じである．この並べ方をトランプカードのシャッフルになぞらえて，$\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}$ と $\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}$ のシャッフルといい（これもカタカナだけで訳語は聞かないですね，切り混ぜ？），こうして得られる多重ゼータ値の積をシャッフル積 (shuffle product) という．(収束インデックスに対する）多重ゼータ値の積分表示に現れる微分形式は $\frac{dt}{1-t}$ か $\frac{dt}{t}$ のいずれかで，一番左は $\frac{dt}{1-t}$，一番右は $\frac{dt}{t}$ となっている．このことはシャッフルをしても変わらないので，各項が収束する多重ゼータ値になるのである．

このシャッフル積を代数的に記述するのに便利なのは，Hoffman 代数とも呼ばれる，非可換多項式環 $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ である．$e_0$ が $\frac{dt}{t}$ に，$e_1$ が $\frac{dt}{1-t}$ に対応していると思って，$\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ の語（word, 単項式）のうち $e_1$ で始まり $e_0$ で終わるものと多重ゼータ値を一対一に対応づける．例えば $\zeta(2)$ に対応するのは $e_1e_0$ であり，これが先の積分表示を表していると思うのである．$\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ のシャッフル積 $\text{ш}$ は帰納的に

- 積は $\mathbb{Q}$ 双線形,
- $1 \text{ш} w = w \text{ш} 1 = w, \forall w : \text{word}$,
- $(uw)\text{ш}(u'w') = u(w\text{ш}u'w') + u'(uw\text{ш}w'),\ \forall u, u' \in \{e_0, e_1\},\ \forall w, w' : \text{words}$

で定義されて，$\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ の部分空間 $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + e_1\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle e_0$ が $\text{ш}$ で閉じた部分代数となる．このとき，$e_1e_0^{k_1-1}\cdots e_1e_0^{k_r-1}$ に $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ を対応させる写像を $\mathbb{Q}$ 線形に拡張したものを $Z$ と書くことにすると，多重ゼータ値のシャッフル積は「$Z$ が $\mathfrak{H}^0$ から $\mathbb{R}$ への準同型である」ということに他ならない．

積分表示を述べたついでに言っておくべきこととして双対性がある．これは，収束インデックスを

$$\mathbf{k} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{a_1-1}, b_1 + 1, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_h-1}, b_h + 1) \quad (a_1, b_i \geq 1)$$

という形に書いて（常にこのように一通りに書ける），$\mathbf{k}$ の双対インデックス $\mathbf{k}^\dagger$ を

$$\mathbf{k}^\dagger = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{b_h-1}, a_h + 1, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_1-1}, a_1 + 1)$$

で定義するとき，等式

$$\zeta(\mathbf{k}^\dagger) = \zeta(\mathbf{k})$$

が成り立つ，というものである．証明は積分表示において変数変換 $t_i \to 1 - s_{k+1-i}$ を行えば直ちに出来る．初めての方はまず一番簡単な例である $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$ について確かめてみられるとよい．この変数変換は $\mathfrak{H}$ の言葉では，$e_0$ と $e_1$ を入れ替えて逆順に並べる，という操作に対応する．

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し $[\mathbf{k}] \in \mathcal{R}$ と $e_1e_0^{k_1-1}\cdots e_1e_0^{k_r-1} \in \mathfrak{H}$ を同一視することで，$\mathfrak{H}$ のシャッフル積を $\mathcal{R}$ に移行してきて，$\mathcal{R}$ にシャッフル積 $\text{ш}$ を入れることが出来る．この積に関して $\mathbb{Q}$ 代数とみた $\mathcal{R}$ を $\mathcal{R}_{\text{ш}}$ と書く．$\mathcal{R}^0$ は $\text{ш}$ に関する部分代数となり，これを $\mathcal{R}^0_{\text{ш}}$ と書く．$\zeta(2)^2$ の例で言うと $[2]\text{ш}[2] = 2[2, 2] + 4[1, 3]$ が対応する $\mathcal{R}$ での積である．$\mathbb{Q}$ 線形写像 $\zeta : \mathcal{R}^0 \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{R}^0_{\text{ш}}$ から $\mathbb{R}$ への準同型になっているわけである：

$$\zeta([\mathbf{k}] \,\text{ш}\, [\mathbf{l}]) = \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}). \tag{3.1}$$

(∗ のときと同様，左辺をしばしば $\zeta(\mathbf{k} ш \mathbf{l})$ と書く．)

二つの積 (2.2) および (3.1) を等号で結んで得られる線形関係式を，(有限) 複シャッフル関係式と呼ぶ.

**定理 3.1** (有限複シャッフル関係式). 任意の収束インデックス $\mathbf{k}$ および $\mathbf{l}$ に対し，

$$\zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k} ш \mathbf{l})$$

が成り立つ.

これは常に非自明な線形関係式を与える．というのも，$\mathbf{k}ш\mathbf{l}$ に現れるインデックスの深さは $\mathbf{k}$ の深さと $\mathbf{l}$ のそれの和であるのに対し，$\mathbf{k}*\mathbf{l}$ には必ず深さがそれよりも落ちた項が現れるからである．例えば $\mathbf{k} = \mathbf{l} = (2)$ と取ると，$\zeta([2] * [2]) = 2\zeta(2,2) + \zeta(4)$ および $\zeta([2]ш[2]) = 2\zeta(2,2) + 4\zeta(1,3)$ であり，これから

$$4\zeta(1,3) = \zeta(4) \tag{3.2}$$

を得る．二つの積から生じる関係式であるから，これが重さ最小で，重さ 5 では $\zeta(2)\zeta(3)$ と $\zeta(2)\zeta(1,2)$ から生じる二つの関係式が独立な線形関係式を与える.

重さ 3 の関係式 $\zeta(1,2) = \zeta(3)$ はこのやり方では出てこない．しかし仮に $\zeta(1)$ が収束していると思って，まず調和積を計算すると，

$$\zeta(1)\zeta(2) = \zeta(1,2) + \zeta(2,1) + \zeta(3)$$

となる．右辺の $\zeta(2,1)$ は発散している．一方シャッフル積は，$\zeta(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ と思って計算すると，

$$\zeta(1)\zeta(2) = 2\zeta(1,2) + \zeta(2,1)$$

となる．この右辺同士が等しいと考えると，発散項 $\zeta(2,1)$ が丁度キャンセルして，有限量の間の等式

$$\zeta(1,2) + \zeta(3) = 2\zeta(1,2),$$

すなわち Euler の $\zeta(1,2) = \zeta(3)$ が得られる．このように，発散するものまで考慮に入れて，そこから有限の量を取り出す操作を正当化するのが正規化と呼ばれるプロセスである.

# 4 正規化

この節で正規化の考え方と，基本的な定理を述べる．重要な役割を果たすのが $\zeta(1)$ であり，またガンマ関数である.

我々はインデックスの空間 $\mathcal{R}$ に，多重ゼータ値の級数表示を用いた積構造，積分表示を用いた積構造の二通りの代数構造を入れ，それぞれの積構造を持った $\mathbb{Q}$ 代数を $\mathcal{R}_*$ および $\mathcal{R}_ш$ と表した．基本的な事実は，これらがともに，収束インデックスの部分代数上，$\zeta(1)$，つまり [1] で生成される多項式代数となっているということである：

$$\mathcal{R}_* \simeq \mathcal{R}_*^0\big[[1]\big] \quad \text{および} \quad \mathcal{R}_ш \simeq \mathcal{R}_ш^0\big[[1]\big].$$

このことは ш については（$\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ の言葉に翻訳すると）古典的な事実で，$*$ については Hoffman が証明した．ここでは証明は与えないで，認めるとする．(右端に並ぶ 1 の個数に関する帰納法で，左程難なく証明出来る．[15], [11] 参照）例としては

$$\begin{aligned}[3,1] &= [3]*[1]-[1,3]-[4]\\ &= [3]ш[1]-2[1,3]-[2,2],\\ [2,1,1] &= \frac{1}{2}[2]*[1]^{*2}-([1,2]+[3])*[1]+[1,1,2]+[1,3]+\frac{1}{2}[4]\\ &= \frac{1}{2}[2]ш[1]^{ш2}-2[1,2]ш[1]+3[1,1,2]\end{aligned}$$

など．ここで $[1]^{*2}=[1]*[1], [1]^{ш2}=[1]ш[1]$ であり，以後 $[1]^{\bullet n}$ （$\bullet = *$ または ш）は $\underbrace{[1]\bullet\cdots\bullet[1]}_{n\text{ 個}}$ を表すものとする．

**定義 4.1.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$ を

$$[\mathbf{k}] = \sum_{i=0}^{m} a_i * [1]^{*i} \in \mathcal{R}_*^0\big[[1]\big] \quad (a_i \in \mathcal{R}^0)$$

および

$$[\mathbf{k}] = \sum_{j=0}^{n} b_j ш [1]^{шj} \in \mathcal{R}_ш^0\big[[1]\big] \quad (b_j \in \mathcal{R}^0)$$

のように（それぞれ一意的に）書く．このとき， $*$- および ш-正規化多項式 $\zeta_*(\mathbf{k};T)$ および $\zeta_ш(\mathbf{k};T) \in \mathbb{R}[T]$ ($T$ は不定元) をそれぞれ

$$\zeta_*(\mathbf{k};T) = \sum_{i=0}^{m}\zeta(a_i)T^i \quad \text{および} \quad \zeta_ш(\mathbf{k};T) = \sum_{j=0}^{n}\zeta(b_j)T^j$$

で定義する．

$\mathbf{k}$ が収束インデックスであれば，$m=n=0$, $a_0=b_0=[\mathbf{k}]$ から $\zeta_*(\mathbf{k};T)=\zeta_ш(\mathbf{k};T)=\zeta(\mathbf{k})$ である．すなわち写像

$$\mathbf{k} \mapsto \zeta_*(\mathbf{k};T) \quad (\text{resp. } \mathbf{k} \mapsto \zeta_ш(\mathbf{k};T))$$

は，$\mathbb{Q}$ 代数準同型

$$\zeta : \mathcal{R}_*^0 \to \mathbb{R} \quad (\text{resp. } \zeta : \mathcal{R}_ш^0 \to \mathbb{R})$$

を，$\zeta_*([1];T)=T$ (resp. $\zeta_ш([1];T)=T$) によって

$$\mathcal{R}_* \to \mathbb{R}[T] \quad (\text{resp. } \mathcal{R}_ш \to \mathbb{R}[T])$$

にまで一意的に拡張したものである．

定義より，それぞれの多項式の係数は多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 係数一次結合で書けていて，$\mathbf{k}$ の重さを $k$ とすると，$T^i$ の係数は重さ $k-i$ の多重ゼータ値の一次結合である．

**例 4.2.** 上記の例より，

$$\zeta_*(3,1;T)=\zeta(3)T-\zeta(1,3)-\zeta(4),\quad \zeta_{ш}(3,1;T)=\zeta(3)T-2\zeta(1,3)-\zeta(2,2),$$

そして

$$\begin{aligned}\zeta_*(2,1,1;T)&=\frac{1}{2}\zeta(2)T^2-(\zeta(1,2)+\zeta(3))T+\zeta(1,1,2)+\zeta(1,3)+\frac{1}{2}\zeta(4),\\ \zeta_{ш}(2,1,1;T)&=\frac{1}{2}\zeta(2)T^2-2\zeta(1,2)T+3\zeta(1,1,2)\end{aligned}$$

となっている．

ちなみにこれら正規化多項式の次数は，$\zeta_*$, $\zeta_{ш}$ いずれも，インデックス $\mathbf{k}$ を

$$\mathbf{k}=(\mathbf{k}',\underbrace{1,\dots,1}_{m}),\quad \mathbf{k}' \text{ は収束インデックス（}\emptyset\text{ も含む）},\ m\geq 0,$$

の形に書いたとき，$m$ 次となり，その最高次係数はともに $\zeta(\mathbf{k}')/m!$ で与えられることが，証明を追えば直ちに分かる．

この定義は完全に代数的であるが，それぞれの多項式には次のような解析的な意味がある．まず $\zeta_*(\mathbf{k};T)$ であるが，命題 2.4 の証明で用いた有限和 $\zeta_N(k_1,\dots,k_r)$ は，$k_r=1$ ならば $N\to\infty$ のとき発散する．その発散の度合いが，$\zeta_N(1)$ つまり調和級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N-1}$$

の多項式程度の発散で（$\log N$ の多項式オーダーと言ってもよい），その多項式が $\zeta_*(\mathbf{k};\zeta_N(1))$ だというのである．このことは，$\zeta_N(k_1,\dots,k_r)$ が調和積を満たしたことを思い出してみれば納得できるであろう．つまり定義 4.1 にある多項式と全く同じ形で $\zeta_N(k_1,\dots,k_r)$ を，収束する $\zeta_N(\mathbf{m})$ たちの和を係数とする $\zeta_N(1)$ の多項式で書き表すことが出来るのである．

一方の $\zeta_{ш}(\mathbf{k};T)$ は，$k_r=1$ のとき反復積分の上端を $x$ で止めたものが $x\to 1$ のとき発散するが，それが $\int_0^x \frac{dt}{1-t}$ の多項式オーダーの発散で，その多項式が $\zeta_{ш}(\mathbf{k};T)$ （$T=\int_0^x \frac{dt}{1-t}$）で与えられる．このことも，反復積分の上端を $x$ にしたものたちが同じシャッフル積を満たすことから従う．

さてこの二つの「正規化多項式」$\zeta_*(\mathbf{k};T)$ と $\zeta_{ш}(\mathbf{k};T)$ がガンマ関数のテイラー展開式を用いて見事に結びついている，というのが正規化の基本定理である．それを述べるために，多項式環 $\mathbb{R}[T]$ からそれ自身への $\mathbb{R}$ 線形写像（代数準同型ではない）$\rho$ を，形式的べき級数環 $\mathbb{R}[T][[u]]$ における母関数表記を用いて

$$\rho(e^{Tu})=A(u)e^{Tu}$$

で定義する．ここに

$$A(u)=\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right)=1+\zeta(2)\frac{u^2}{2}-2\zeta(3)\frac{u^3}{3!}+(6\zeta(4)+3\zeta(2)^2)\frac{u^4}{4!}+\cdots\in\mathbb{R}[[u]]$$

であり，左辺の $\rho$ は各係数ごとに作用しているとする．つまり，右辺が

$$1+a_1(T)u+a_2(T)\frac{u^2}{2!}+a_3(T)\frac{u^3}{3!}+a_4(T)\frac{u^4}{4!}+\cdots$$

であるとしたとき，$\rho(T^n)=a_n(T)$ によって $\mathbb{R}$ 線形写像 $\rho$ が定まる．べき級数 $A(u)$ の正体は，ガンマ関数の展開，$A(u)=e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$ （$\gamma$ はオイラー定数）である．

**例 4.3.** 実際に積を展開してやると

$$\begin{aligned}\rho(1)&=1,\\ \rho(T)&=T,\\ \rho(T^2)&=T^2+\zeta(2),\\ \rho(T^3)&=T^3+3\zeta(2)T-2\zeta(3),\\ \rho(T^4)&=T^4+6\zeta(2)T^2-8\zeta(3)T+6\zeta(4)+3\zeta(2)^2.\end{aligned}$$

必ず $\rho(T^n)=T^n+$ 低次の項 となって，$\rho$ は可逆である．

さて，二つの正規化多項式はこの $\rho$ により移りあう．この定理—ここでは「正規化基本定理」と呼ぶことにする—は，私の知る限り，Zagier, Butet de Monvel, Écale が独立に得た．Zagier さんは少なくとも 90 年代の初頭には知っていたようなことを言っておられた記憶があるが，私が初めて聞いたのは 99 年の秋，九大（箱崎）で多重ゼータのミニ集会をした折であった．そのときに，当時まだ一般の場合は予想だった「導分関係式」について話したところいたく興味を寄せられ，一緒にやろうと言うことになり，次の年の 2 月の終わりから 3 月にかけて私がドイツを訪問した前後の頃までに [13] の内容はおおかた出来てしまった.（しかし例によって（？）論文は遅れて，[13] が出たのは 2006 年である.）

**定理 4.4** ([5, 6], [8], [13, Theorem 1])**.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{ш}(\mathbf{k};T)=\rho\big(\zeta_*(\mathbf{k};T)\big) \tag{4.1}$$

が成り立つ．

例えば，先の例から，$\rho(\zeta_*(2,1,1;T))=\zeta_{ш}(2,1,1;T)$ より

$$\frac{1}{2}\zeta(2)(T^2+\zeta(2))-(\zeta(1,2)+\zeta(3))T+\zeta(1,1,2)+\zeta(1,3)+\frac{1}{2}\zeta(4)=\frac{1}{2}\zeta(2)T^2-2\zeta(1,2)T+3\zeta(1,1,2).$$

両辺の一次の係数を比べて $\zeta(1,2)=\zeta(3)$ が，定数項を比べて

$$\frac{1}{2}\zeta(2)^2+\zeta(1,1,2)+\zeta(1,3)+\frac{1}{2}\zeta(4)=3\zeta(1,1,2)$$

が得られる．この重さ 4 の関係式には $\zeta(2)^2$ という項があるが，これを調和積で和に直すと

$$\zeta(2,2)+\zeta(1,3)+\zeta(4)=2\zeta(1,1,2)$$

という線形関係式が，またシャッフル積で和に直すと

$$\zeta(2,2)+3\zeta(1,3)+\frac{1}{2}\zeta(4)=2\zeta(1,1,2)$$

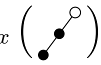
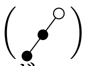
という関係式が得られる．

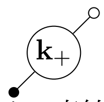
定理の [5, 6] や [13] における証明は，少し触れた正規化多項式の解析的意味をもとにして，反復積分の上端が $x$ のもの（「多重ポリログ」）のテイラー展開係数に有限打ち切りの $\zeta_N(k_1,\dots,k_r)$ が現れていることから，二つの発散を比べることで得るというものである．次節で，川崎さんの稿に出て来る，“integral-series identity” というものを使って証明する方法を紹介する．実はこの “integral-series identity” はある意味で正規化基本定理と等価であって，その等式および等価性は「ほとんど」代数的に証明出来る．

# 5　正規化基本定理と “integral-series identity”

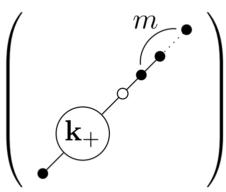
## 5.1　山本積分によるシャッフル正規化の計算法

シャッフル正規化多項式 $\zeta_{ш}(\mathbf{k};T)$ の一つの具体的な表示が [13, (5.2) 式および Cor. 5] で与えられている．それと同等の表示を，川崎さんの稿で紹介されている，山本修司氏が導入した積分（以下「山本積分」と呼ぶことにする）を使って与えてみよう．この考察が山本さんとの論文 [14] の出発点となった．

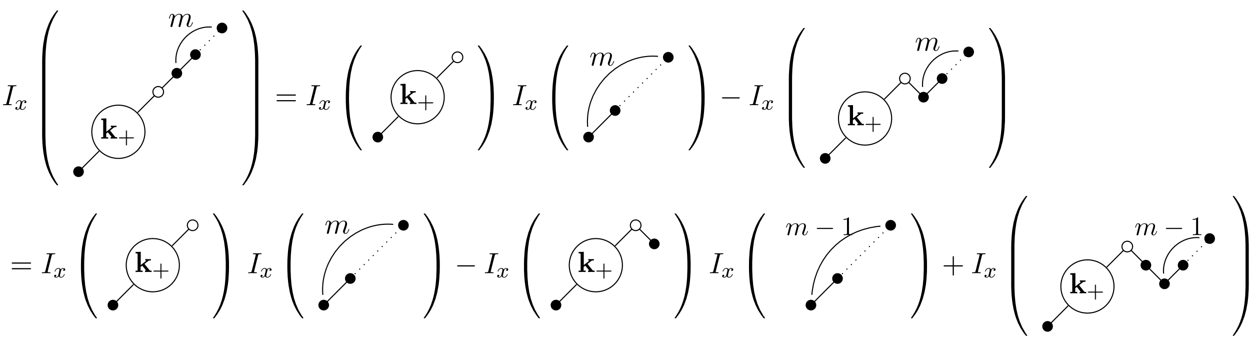
記号の詳しい説明は川崎さんの稿や山本さんの論文 [18] を見てもらうとして，ここではさらに，積分の上端が 1 ではなく，$0<x<1$ なる $x$ であるものを導入し，それをたとえば $I_x$  のように書く．ここで $\bullet$ は $\frac{dt}{1-t}$ に，$\circ$ は $\frac{dt}{t}$ に対応しており，この場合は $x\to 1$ のとき通常の山本積分 $I$  すなわち $\zeta(1,2)$ に収束する．積分の下端は 0 なので，$I_x$ の中身に来るグラフの極小点は必ず $\bullet$ でなければならないが，極大点が $\circ$ である必要はない．極大点に $\bullet$ が来ているようなグラフに対する $I_x$ は $x\to 1$ のとき発散する． この発散の様子を記述するのがシャッフル正規化である．山本積分がグラフの連結や切断，大小順序の変更などに関して満たす基本的な性質は $I_x$ でも同じように成り立っていることに注意する．

さて，与えられたインデックス $(k_1,\dots,k_r)$ を，$(k_1,\dots,k_r)=(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\dots,1}_{m})$ と表す．ここで $\mathbf{k}=(l_1,\dots,l_s)$ に対し $\mathbf{k}_+=(l_1,\dots,l_{s-1},l_s+1)$ とする．つまり，もとの $(k_1,\dots,k_r)$ において，右から 1 が並ぶ個数を $m\geq 0$ とし，残りの部分を $\mathbf{k}_+$ とする．$\mathbf{k}_+$ は収束インデックスである．$\mathbf{k}_+$ に対応するグラフを  で表すことにする．これは，$\mathbf{k}_+$ が収束インデックスなので，極小点 $\bullet$ から極大点 $\circ$ に至る一直線のグラフである．すると，$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(x)$ の積分表示は，

$$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(x) = I_x$$

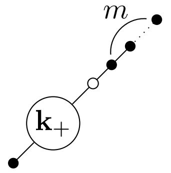


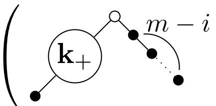
と書くことが出来る．これの $x\to 1$ のときの発散挙動を $\mathrm{Li}_1(x)=I_x(\bullet)$ で計ったものがシャッフル正規化多項式 $\zeta_{ш}(k_1,\dots,k_r;T)$ である．山本積分の性質を使って変形



$$=\cdots$$

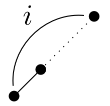
を行うことにより，

$$I_x\left(\right.$$ 

$$\left.\right) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i}\, I_x \left(\right.$$ 

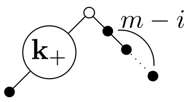
$$\left.\right) \frac{\mathrm{Li}_1(x)^i}{i!} \tag{5.1}$$

を得る．ここで，

$$I_x\left(\right.$$ 

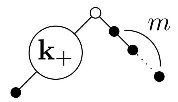
$$\left.\right) = \frac{I_x(\bullet)^i}{i!} = \frac{\mathrm{Li}_1(x)^i}{i!}$$

を用いた．式 (5.1) の右辺の $\mathrm{Li}_1(x)^i/i!$ の係数に表れている積分は $x \to 1$ のときに収束する積分であり，$\zeta_{\text{ш}}(k_1,\ldots,k_r;T) = \zeta_{\text{ш}}(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{m};T)$ のシャッフル代数による定義に鑑みれば，この正規化多項式の $T^i$ の係数は

$$\frac{(-1)^{m-i}}{i!} I\left(\right.$$ 

$$\left.\right)$$

に他ならないことが分かる． 特に $i=0$ のとき

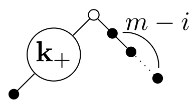
$$\zeta_{\text{ш}}(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{m}) := \zeta_{\text{ш}}(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{m};0) = (-1)^m\, I\left(\right.$$ 

$$\left.\right)$$

が分かるが，この右辺の積分はすなわち

$$\int_0^1 \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(x)\,\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\ldots,1}_{m}}(x)\,\frac{dx}{x}$$

に他ならない．これがつまり [13, (5.2)] の regularization formula であって，シャッフル正規化多項式は

$$\zeta_{\text{ш}}(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{m};T) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\, I\left(\right.$$ 

$$\left.\right)\frac{T^i}{i!}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \zeta_{\text{ш}}(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-i})\frac{T^i}{i!} \tag{5.2}$$

で与えられる．また [14] の “integral-series identity” の特別な場合として，$(-1)^j\zeta_{\text{ш}}(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{j})$ の級数表示（ここで改めて $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ とする）

$$(-1)^j\zeta_{\text{ш}}(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{j}) = \zeta(\mathbf{k} \circledast (\underbrace{1,\ldots,1}_{j+1})^{\star}) \tag{5.3}$$

$$= \sum_{0<m_1<\cdots<m_{r-1}<m_r\geq n_j\geq\cdots\geq n_1>0} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_{r-1}^{k_{r-1}} m_r^{k_r+1} n_j\cdots n_1}$$

が得られる．記号については [14] をご参照頂きたいが，$\circledast$ は調和積に現れる項のうち，最後の成分同士が足される項だけを拾ったもの，$\mathbf{l}^{\star}$ は，多重ゼータスター値 $\zeta^{\star}(\mathbf{l})$ を通常の多重ゼータ値の和として書く際に現れるインデックスの形式和である．

### 5.2　正規化基本定理の導出

正規化基本定理と “integral-series identity” の等価性の基礎となるのが，$\mathcal{R}_*$ における次の等式である．

**定理 5.1.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$，および $m \geq 0$ に対し，$\mathcal{R}_*$ における等式

$$[\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m}] = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \big(\mathbf{k} \circledast [\underbrace{1, \ldots, 1}_{m+1-i}]^{\star}\big) * [\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}] \tag{5.4}$$

が成り立つ．

これは，調和積代数 $\mathcal{R}_*$ において任意の元を，($\mathcal{R}_*^0$ 上の）基底として $[1]^{*i}$ ではなく $[\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}]$ を取ったときの係数を具体的に与えるものである．その係数がシャッフル正規化 (5.2) を与える (5.3) の右辺（に対応するインデックス）になっている点がポイントで，それによって次に述べるようにこの定理から正規化の基本定理が導かれる．この定理ははじめ帰納法を使って結構面倒な計算をしていたのであるが，山本さんにより [14, Lemma 5.2] ($A_*$) の形に一般化され，簡明で見通しの良い証明が与えられた．私は $(1, 1, \ldots, 1)$ だけを考えていたので分からなかったが，(5.4) における 1 の並びは，一部は逆順にしたものと見るのが正しいのであった！（山本さんには何度も感心させられているがこれもその 1 つである．）

この等式を使って正規化基本定理を導こう． まず，$\mathcal{R}_*[[u]]$ の中で純代数的に得られる式

$$\exp_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} [n] u^n\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}]\, u^n \tag{5.5}$$

に注意する．これは [3, §1.5.2] で証明しているが，両辺の対数微分は調和積のほぼ自明な式になる．また，[11] に説明されているように，各種の対称式の間の関係式と見なすことも出来る．いずれにせよ全く代数的な式であることを強調しておく．この式の両辺の係数に，$*$-準同型である写像

$$\zeta_* : \mathcal{R}_* \ni \mathbf{k} \mapsto \zeta_*(\mathbf{k}; T) \in \mathbb{R}[T]$$

を施すことを考えると，定義から直ちに，

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_*(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}; T)\, u^i = A(u)^{-1} e^{Tu} \tag{5.6}$$

($A(u) = \Gamma(1+u) e^{\gamma u} = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) u^n\right)$ であった）が分かる．

さて，任意のインデックス $(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m})$ を取ったときに $\zeta_*(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m}; T)$ は，(5.4) より，

$$\zeta_*(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m}; T) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \zeta(\mathbf{k} \circledast (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m+1-i})^{\star})\, \zeta_*(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}; T) \tag{5.7}$$

で与えられる．式 (5.6) に基本定理の写像 $\rho$ を施すと，

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho\big(\zeta_*(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}; T)\big) u^i = A(u)^{-1} \rho\big(e^{Tu}\big) = A(u)^{-1} A(u) e^{Tu} = e^{Tu},$$

つまり $\rho\big(\zeta_*(\underbrace{1,\ldots,1}_{i};T)\big)=T^i/i!$ である．従って (5.7) に $\rho$ を施して，

$$\rho\big(\zeta_*(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{m};T)\big)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\zeta(\mathbf{k}\circledast(\underbrace{1,\ldots,1}_{m+1-i})^{\star})\,\frac{T^i}{i!} \tag{5.8}$$

を得る．この式と，(5.2), (5.3) から，正規化の基本定理

$$\rho\big(\zeta_*(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{m};T)\big)=\zeta_{ш}(\mathbf{k}_+,\underbrace{1,\ldots,1}_{m};T)$$

が導かれる．

また逆にこの基本定理を仮定すれば，(5.8) と (5.2) を比べることで (5.3) が得られることになる．(5.3) は “integral-series identity” の特別な場合であるが，一般の場合も同じようなからくりで出来て，さらには「スター版」の正規化の基本定理との等価性も証明できる．詳しくは [14] をご覧頂きたい．

この正規化の基本定理の証明方法は，ほぼ代数的であると言ってよく，なかなか興味深いものと思うのであるがいかがであろうか．

### 5.3 正規化複シャッフル関係式

関係式 (4.1) の係数を比べて得られる式と，二通りの積

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})=\zeta(\mathbf{k}*\mathbf{l})=\zeta(\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l}) \tag{5.9}$$

を合わせれば，多重ゼータ値のすべての $\mathbb{Q}$ 上の関係式が得られるのではないか，と思われている．多重ゼータ値の積は (5.9) のいずれかにより和に書き換えられるので，すべての線形関係式が記述できればよいが，その候補の一つが，[13] にある

$$\zeta_*(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};0)=0\quad(\forall\mathbf{k}\in\mathcal{R}^0\text{ and }\forall\mathbf{l}\in\mathcal{R})$$

または

$$\zeta_{ш}(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};0)=0\quad(\forall\mathbf{k}\in\mathcal{R}^0\text{ and }\forall\mathbf{l}\in\mathcal{R})$$

からすべての線形関係式が出るのではないか，という予想で，これらの関係式を正規化複シャッフル関係式，または拡張複シャッフル関係式と呼んでいる．これらは (4.1) からほぼ直ちに出て来る．

例えば，$\mathbf{k}=(2),\mathbf{l}=(1)$ と取ると，

$$\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l}=[3]-[1,2]$$

であり，従って

$$\zeta_*(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};T)=\zeta_{ш}(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};T)=\zeta(3)-\zeta(1,2).$$

これはすなわち $\zeta(3)=\zeta(1,2)$ を与える．また $\mathbf{k}=(3),\mathbf{l}=(1)$ と取ると，

$$\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l}=[4]-[1,3]-[2,2]$$

であり，

$$\zeta_{ш}(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};T)=\zeta(4)-\zeta(1,3)-\zeta(2,2)$$

となるから，

$$\zeta(4)=\zeta(1,3)+\zeta(2,2)$$

を得る．次に $\mathbf{k}=(2),\mathbf{l}=(1,1)$ と取ると，

$$\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l}=[1,3]+[3,1]-2[1,1,2]-[1,2,1].$$

少し計算すれば

$$\zeta_{ш}(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};T)=(\zeta(3)-\zeta(1,2))\,T-\zeta(1,3)-\zeta(2,2)+\zeta(1,1,2)$$

となり，定数項から

$$\zeta(1,3)+\zeta(2,2)=\zeta(1,1,2)$$

を得る． これら二つの関係式と，すでに有限複シャッフル関係式として得ている (3.2) を合わせると重さ 4 の三つの独立な線形関係式が得られて，

$$\zeta(1,3)=\frac{1}{4}\zeta(4),\ \zeta(2,2)=\frac{3}{4}\zeta(4),\ \zeta(1,1,2)=\zeta(4)$$

を得る．すなわち $\mathcal{Z}_4=\mathbb{Q}\cdot\zeta(4)$ （一次元）である．

また，[14] では，上で述べた正規化基本定理との等価性に鑑みて，“integral-series identity” からも線形関係式がすべて従うのではないか，と予想している．この “integral-series identity” の証明はただの逐次積分の計算で至って初等的であり，それが豊富な関係を生むというのは何とも愉快な感じがして，気に入っている．

## 6 別の正規化

荒川さんが考え始められた一変数関数（ここでは最後のべきを $k_r+s$ として変数を入れる）

$$\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+s)\ :=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}m_r^{k_r+s}}$$

を用いても「正規化」が自然に考えられる．すなわち，$\Re(s)>0$ で絶対収束する右辺の級数（$k_i$ はすべて自然数）を [1] で行ったように全平面に有理型に解析接続したとき，$k_r=1$ であれば $s=0$ は極になるが，その極での主要部を見るのである．すると実はこの主要部が先に解説した正規化多項式を用いて記述される．これは [1] の最後で問題としたことで，[2, Th. 4.1] でより一般の（一変数）多重 $L$ 関数の場合に結果を与えた．他の極での様子を調べることも問題としてあるが，私はさぼってやっておらず，またすでに極の主要部まで調べられているのかどうか，不勉強でよく知らない．

インデックス $\mathbf{k}$ が

$$\mathbf{k}=(\mathbf{k}',\underbrace{1,\ldots,1}_{m}),\quad \mathbf{k}'\ \text{は収束インデックス（}\emptyset\text{ も含む）},\ m\geq 0,$$

の形だとし，$\mathbf{k}$ に対応する二つの正規化多項式を

$$\zeta_{ш}(\mathbf{k};T)=\sum_{i=0}^{m}a_i(\mathbf{k})\frac{T^i}{i!},\quad \zeta_*(\mathbf{k};T)=\sum_{i=0}^{m}b_i(\mathbf{k})\frac{(T-\gamma)^i}{i!}$$

とする．調和積正規化多項式は $T-\gamma$（$\gamma$ はオイラー定数）で展開していることに注意．このとき

**定理 6.1.** 関数 $\Gamma(s+1)\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+s)$ および $\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+s)$ の $s=0$ での主要部は

$$\Gamma(s+1)\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+s) = \sum_{i=0}^{m}\frac{a_i(\mathbf{k})}{s^i}+O(s)\quad(s\to 0) \tag{6.1}$$

$$\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+s) = \sum_{i=0}^{m}\frac{b_i(\mathbf{k})}{s^i}+O(s)\quad(s\to 0) \tag{6.2}$$

で与えられる．

*Proof.* 証明の鍵になるのは，(6.1) の特別な場合でもある，[1, Proposition 4 (ii)] の式

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},1+s)=\frac{1}{s^r}+O(s)\quad(s\to 0) \tag{6.3}$$

である．$\zeta_{ш}(\underbrace{1,\ldots,1}_{r};T)=T^r/r!$ に注意．これが分かると，あとはシャッフル積と簡単な評価で (6.1) が得られ，それと正規化の基本定理から (6.2) が従う仕組みである．丁度 $\rho^{-1}$ が $\Gamma(s+1)^{-1}$ を掛けることに対応していて，さもありなんという式である．ところで [2] やそれを引き写した [3] の証明にはミスがあり，収束しない積分項が現れてしまっている．以下に証明を書く（今度は大丈夫?）．

(6.3) の [1] での証明はやや ad hoc な感じのものであるが，ここで別証明を与えてみよう．これは，第一種スターリング数の漸近挙動から，$\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},1+s)$ の主要部を $O(1)$ で決めて，そこから (6.3) が導かれる，というものである．

第一種スターリング数を $\left[{n \atop r}\right]$ と書く．いろいろな慣用があるが，本 [4] の流儀（というか Knuth の流儀）に従ったものとする．$r>1$ を固定したとき，次の漸近挙動が知られている．

**定理 6.2** (Wilf [17])**.** $n\to\infty$ のとき，

$$\frac{1}{(n-1)!}\left[{n \atop r}\right]=\gamma_0\frac{(\log n)^{r-1}}{(r-1)!}+\gamma_1\frac{(\log n)^{r-2}}{(r-2)!}+\cdots+\gamma_{r-1}+O\left(\frac{(\log n)^{r-2}}{n}\right).$$

ここに，$\gamma_i$ は $\Gamma(s+1)^{-1}$ の $s=0$ でのテイラー展開係数：

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)}=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i\,s^i=1+\gamma\,s+\frac{1}{2}(\gamma^2-\zeta(2))\,s^2+\frac{1}{6}(\gamma^3-3\gamma\zeta(2)+2\zeta(3))\,s^3+\cdots.$$

ちなみにこの $\gamma_i$ は $\zeta_*(\underbrace{1,\ldots,1}_{i};\gamma)$ に等しい．これは (5.6) で $T=\gamma$ とすれば直ちに分かる．

実は私はこの Wilf の結果を 2015 年，サバティカルで IHES に滞在中に初めて知ったのだが，これが $\zeta(1,\dots,1)$ の調和積正規化そのものなのである．なぜなら，スターリング数の一つの定義でもある $x(x+1)\cdots(x+n-1)=\sum_{r=0}^{m}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}x^r$ からすぐ分かるように，

$$\frac{1}{(n-1)!}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}=\sum_{0<m_1<\cdots<m_{r-1}<n}\frac{1}{m_1\cdots m_{r-1}}$$

であり（この式はまた，荒川さんに宛てた 1995 年の手紙にある $\zeta_n^{(k)}=\zeta(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-1},k+1)$ を導く基となる），(5.6) 式を

$$1+\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_*(\underbrace{1,\dots,1}_{i};T)u^i=\Gamma(u+1)^{-1}e^{(T-\gamma)u} \tag{6.4}$$

と書いてみれば，

$$\zeta_*(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1};T)=\sum_{i=0}^{r-1}\gamma_{r-1-i}\frac{(T-\gamma)^i}{i!} \tag{6.5}$$

であることが分かるので，結局 Wilf の定理は $\frac{1}{(n-1)!}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}$ の漸近式が $\zeta_*(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1};\log n+\gamma)$ で与えられると言うに等しい（ビッグ $O$ の中身もすぐ特定できる）．これは多項式 $\zeta_*(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1};T)$ の特徴付けそのものである．

Wilf による定理の証明は，

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{(n-1)!}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}x^{r-1}&=\exp\log\bigl(1+\frac{x}{1}\bigr)\cdots\bigl(1+\frac{x}{n-1}\bigr)\\&=\exp\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{kl^k}\right)\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\exp\left((-1)^{k-1}\frac{\zeta_n(k)}{k}x^k\right),\quad \text{ただし }\zeta_n(k)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^k},\end{aligned}$$

として，$\zeta_n(k)$ のところに Euler-Maclaurin からくる漸近式を代入して計算するもの．我々のやり方では調和積の性質を使い，帰納的に一般の多重ゼータ値の有限和の漸近式を証明するので，証明方法も別であるが，丁度 Hoffman, Zagier の最初の多重ゼータ値論文が出たのと同じ頃のこの Wilf の論文は歴史的にも興味深いと思う．この論文にはさらに漸近展開の高次の項を求める方法も書いてあり，それが（我々の言葉では）正規化多項式 $\zeta_*(1,\dots,1;T)$ を使ってなされているのも注目に値する．

さて，(6.3) の証明に戻る．この Wilf の漸近式（あるいは同じことだが調和積正規化多項式 $\zeta_*(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1};T)$ の記述 (6.5)）を出発点に取ると，$r\geq 1$ として，$\Re(s)>0$ で

$$\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_{r-1}<n}\frac{1}{m_1\cdots m_{r-1}n^{1+s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{(n-1)!}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}}{n^{1+s}}$$

であるから，

$$\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\sum_{i=0}^{r-1}\gamma_{r-1-i}\frac{1}{i!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^i}{n^{1+s}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{1+s}}.$$

ここに

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}-\sum_{i=0}^{r-1}\gamma_{r-1-i}\frac{(\log n)^i}{i!}$$

で，$n\to\infty$ のとき $a_n=O((\log n)^{r-2}/n)$．よって Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/n^{1+s}$ は $\Re(s)>-1$ で絶対収束し，特に $s=0$ で正則．また，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^i}{n^{1+s}}=(-1)^i\frac{\partial^i}{\partial s^i}\zeta(s+1)$$

なので，$s\to 0$ での様子は $i!/s^{i+1}+O(1)$．よって，$s\to 0$ のとき，

$$\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\gamma_{r-1-i}}{s^{i+1}}+O(1)=\frac{1}{s^r}\Gamma(s+1)^{-1}+O(1).$$

これより

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\frac{1}{s^r}+O(1)$$

が分かるが，[1, p. 196] にあるように，これが言えると実は $O(1)$ を $O(s)$ に置き換えた

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\frac{1}{s^r}+O(s)$$

が言えるのである．それはどういう議論だったかというと，[1, Proposition 2 (i)] の式

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\int_0^{\infty}\frac{t^s}{e^t-1}\,\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{r-1}}(e^{-t})\,dt$$

において，$1/(e^t-1)=(1/(e^t-1)-1/t)+1/t$ と書いて

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\int_0^{\infty}t^s\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{r-1}}(e^{-t})\,dt+\int_0^{\infty}t^{s-1}\,\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{r-1}}(e^{-t})\,dt$$

とすると，第一の積分は $s=0$ で正則であり，第二の積分は [1, Proposition 2 (ii)]，または Li の級数表示を代入して項別積分すれば分かるように $\Gamma(s)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-2},1+s)$ に等しいので，

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=(s=0\ \text{で正則な項})\ +\ \Gamma(s)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-2},1+s)$$

を得る．そこで

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\frac{1}{s^r}+c_0^{(r)}+O(s)$$

とすると，

$$\Gamma(s)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-2},1+s)=\frac{1}{s^r}+\frac{c_0^{(r-1)}}{s}+O(1)$$

で，

$$\frac{1}{s^r}+c_0^{(r)}+O(s)=O(1)+\frac{1}{s^r}+\frac{c_0^{(r-1)}}{s}+O(1)$$

より $c_0^{(r-1)}=0$ が出る．$\forall r\geq 2$ に対してこれが言えるので，主張

$$\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\frac{1}{s^r}+O(s)$$

が言えた．そしてこれから，

$$\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},1+s)=\sum_{i=0}^{r}\frac{\gamma_{r-i}}{s^i}+O(s)$$

が出る（$\Gamma(s+1)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i\,s^i$）．

(6.3) を用いて (6.1) を証明する．$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(x)$ はシャッフル積に従っており，$\mathbf{k}$ を前述のように $(\mathbf{k}',\underbrace{1,\dots,1}_{m})$ とするとき，

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(x)=\sum_{i=0}^{m}g_i(x)\ \mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{i}}(x)$$

と書ける． ここに $g_i(x)$ は収束インデックス $\mathfrak{l}$ についての $\mathrm{Li}_{\mathfrak{l}}(x)$ の $\mathbb{Q}$ 線形和である．そして，シャッフル正規化多項式 $\zeta_{ш}(\mathbf{k};T)$ は

$$\zeta_{ш}(\mathbf{k};T)=\sum_{i=0}^{m}g_i(1)\frac{T^i}{i!}$$

で与えられる．$g_i(x)$ と $g_i(1)$ の差について，

$$|g_i(x)-g_i(1)|=O\big((1-x)\log^J(1-x)\big)\quad(x\to 1,\ {}^{\exists}J>0)$$

が成り立っている（[3, 命題 1.4.15]）．そこで，[1, Proposition 2 (ii)] を使って

$$\begin{aligned}
&\Gamma(s+1)\zeta(k_1,\dots,k_{r-1},k_r+s)\\
&=s\int_0^\infty t^{s-1}\,\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(e^{-t})\,dt\\
&=s\int_0^\infty t^{s-1}\sum_{i=0}^{m}g_i(e^{-t})\,\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{i}}(e^{-t})\,dt\\
&=\sum_{i=0}^{m}s\int_0^\infty t^{s-1}g_i(e^{-t})\,\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{i}}(e^{-t})\,dt\\
&=s\int_0^\infty t^{s-1}g_0(e^{-t})\,dt\ +\sum_{i=1}^{m}s\int_0^\infty t^{s-1}\big(g_i(e^{-t})-g_i(1)+g_i(1)\big)\,\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{i}}(e^{-t})\,dt
\end{aligned}$$

とすると，(6.3) より

$$\sum_{i=1}^{m} s\int_0^\infty t^{s-1} g_i(1)\,\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{i}}(e^{-t})\,dt = \sum_{i=1}^{m} g_i(1)\Gamma(s+1)\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{i-1},1+s) = \sum_{i=1}^{m}\frac{g_i(1)}{s^i}+O(s)$$

であるので，残りの

$$s\int_0^\infty t^{s-1}g_0(e^{-t})\,dt \,+\, \sum_{i=1}^{m} s\int_0^\infty t^{s-1}\bigl(g_i(e^{-t})-g_i(1)\bigr)\,\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{i}}(e^{-t})\,dt$$

が $s\to 0$ のとき $g_0(1)$ に収束することを言えば主張は示される．今

$$g_i(e^{-t})-g_i(1) = O\bigl((1-e^{-t})\log^J(1-e^{-t})\bigr) = O(t\log^J t)\quad (t\to 0)$$

なので，和の中の積分の $t\to 0$ での広義積分は $s=0$ でも収束している．$t\to\infty$ では $\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{i}}(e^{-t})$ が $O\bigl((e^{-t})^i\bigr)$ なので，${}^\forall s$ に対し収束． よってこの広義積分は $s=0$ の近傍で正則なので，$s$ 倍して $s\to 0$ とすると 0 に収束する．また第一項を

$$s\int_0^\infty t^{s-1}g_0(e^{-t})\,dt = s\int_0^1 t^{s-1}g_0(e^{-t})\,dt \,+\, s\int_1^\infty t^{s-1}g_0(e^{-t})\,dt$$

と書くと，$\int_1^\infty$ は $\mathbf{k}$ の重さ（$=g_0$ の重さ）が正である限り ${}^\forall s$ で収束，よって $s$ 倍して $s\to 0$ とすると 0 に収束，また $g_0(e^{-t})=g_0(1)+O(t\log^J t)$ で，$\int_0^1 t^{s-1}\cdot t\log^J t\,dt$ は $s=0$ でも収束して有限の値を与えるから，やはり $s$ 倍して $s\to 0$ とすると 0 に収束する．残るは

$$s\int_0^1 t^{s-1}g_0(1)\,dt = g_0(1).$$

これで (6.1) が証明された．(6.2) は (6.1) の両辺に $\Gamma(s+1)^{-1}$ を掛けて得られるが，これが (6.2) の形になることが正規化基本定理 (4.1) から従う．もう少し説明すると，収束インデックス $\mathbf{k}'$ を固定して，$m\ge 0$ をすべて動かしたときの正規化多項式 $\zeta_\bullet(\mathbf{k}',\underbrace{1,\dots,1}_{m};T)$（$\bullet=ш$ または $*$）の母関数が

$$\sum_{m=0}^\infty \zeta_\bullet(\mathbf{k}',\underbrace{1,\dots,1}_{m};T)\,x^m = e^{Tx}\cdot\sum_{m=0}^\infty \zeta_\bullet(\mathbf{k}',\underbrace{1,\dots,1}_{m})\,x^m \tag{6.6}$$

で与えられる ($\zeta_\bullet(\mathbf{k}',\underbrace{1,\dots,1}_{m}) := \zeta_\bullet(\mathbf{k}',\underbrace{1,\dots,1}_{m};0)$)．これは，[13] の p. 323 の一番上の式（Corollary 5）を母関数の形で書き直したものである（そこでの $w_0$ が $\mathbf{k}'$ に対応している）．$\bullet=ш$ の場合のこの式の両辺に $\rho^{-1}$ を施すと，

$$\sum_{m=0}^\infty \zeta_*(\mathbf{k}',\underbrace{1,\dots,1}_{m};T)\,x^m = \Gamma(x+1)^{-1}e^{(T-\gamma)x}\cdot\sum_{m=0}^\infty \zeta^ш(\mathbf{k}',\underbrace{1,\dots,1}_{m})\,x^m \tag{6.7}$$

を得る． 我々は

$$\zeta_ш(\mathbf{k};T)=\sum_{i=0}^m a_i(\mathbf{k})\frac{T^i}{i!},\quad \zeta_*(\mathbf{k};T)=\sum_{i=0}^m b_i(\mathbf{k})\frac{(T-\gamma)^i}{i!}$$

と書いたのであったが，(6.6) より

$$a_i(\mathbf{k}) = \zeta_{ш}(\mathbf{k}', \underbrace{1, \dots, 1}_{m-i})$$

である．従って，$\Gamma(x+1)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \, x^i$ とするとき，(6.7) より

$$\zeta_*(\mathbf{k}; T) = \sum_{i=0}^{m} \Big( \sum_{j=0}^{m-i} \gamma_j a_{m-i-j}(\mathbf{k}) \Big) \frac{(T-\gamma)^i}{i!}$$

と計算される．この係数すなわち $b_i(\mathbf{k})$ が，(6.1) の右辺に $\Gamma(s+1)^{-1}$ を掛けたものの $s=0$ での展開の $1/s^i$ の係数に他ならない．これで (6.2) が証明された． □

最後になりましたが，サマースクールの世話人の皆さんや，サポートして下さったり盛り上げて下さったりした沢山の方々に，心から御礼申し上げます．

# 参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J., **153** (1999), 189–209.

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, *On multiple L-values*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 967–991.

[3] 荒川恒男，金子昌信，多重ゼータ値入門，COE Lecture Note Vol. 23, Kyushu University, 2010.

[4] 荒川恒男，伊吹山知義，金子昌信， ベルヌーイ数とゼータ関数，牧野書店，2001.

[5] L. Boutet de Monvel, *Remarques sur les séries logarithmiques divergentes*, lecture at the workshop "Polylogarithmes et conjecture de Deligne-Ihara", C.I.R.M. (Luminy), April 2000.

[6] L. Boutet de Monvel, *Remark on divergent multizeta series*, in Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis, RIMS Kôkyûroku **1397** (2004), 1–9.

[7] P. Deligne and A. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) **38** (2005), 1–56.

[8] J. Écalle, *ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas: un premier bilan*, J. Théor. Nombres Bordeux, **5** (2003), 411–478.

[9] A. B. Goncharov, *Periods and mixed motives*, preprint, (2002).

[10] M. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math., **152** (1992), 275–290.

[11] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra, **194** (1997), 477–495.

[12] M. Hoffman, *References on multiple zeta values and Euler sums* (web page), `https://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html`

[13] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math., **142** (2006), 307–338.

[14] M. Kaneko and S. Yamamoto, *A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations*, Selecta Mathematica, **24** (2018), 2499–2521.

[15] C. Reutenauer, Free Lie Algebras, Oxford Science Publications, 1993.

[16] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math., **149** (2002), 339–369.

[17] H. Wilf, The asymptotic behavior of the Stirling numbers of the first kind, Jour. Comb. Th. Ser A **64** (1993), 344–349.

[18] S. Yamamoto, *Multiple zeta-star values and multiple integrals*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B68** (2017), 3–14.

[19] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in ECM volume, Progress in Math., **120** (1994), 497–512.

九州大学数理学研究院
819-0395 福岡市西区元岡 744
e-mail: mkaneko@math.kyushu-u.ac.jp