УДК 519.1

ПРИВЕДЕНИЕ ГРАФА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ И ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ ЭТОМ АЛГЕБРА

Б. Ю. ВЕЙСФЕЙЛЕР, А. А. ЛЕМАН

Рассматривается алгоритм приведения заданного конечного мультиграфа Г к ка- ноническому виду. В процессе такого приведения возникает новый инвариант графа— алгебра $\mathfrak{A}$ (Г). Изучение свойств алгебры $\mathfrak{A}$ (Г) оказывается полезным при решении некоторых задач теории графов.

Выдвигаются и обсуждаются некоторые предположения относительно связи между свойствами алгебры $\mathfrak{A}$ (Г) и группой автоморфизмов графа Aut (Г). Построен пример неориентированного графа Г, алгебра $\mathfrak{A}$ (Г) которого совпадает с групповой алгеброй некоторой некоммутативной группы.

An algorithm is considered, reducing the specified finite multigraph Г to canonical form. In the course of this reduction, a new invariant of the graph is generated — algebra $\mathfrak{A}$ (Г). Study of the properties of the algebra $\mathfrak{A}$ (Г) proves helpful in solving a nu mber of graph-theoretic problems. Some propositions concerning the relationships between the properties of the algebra $\mathfrak{A}$ (Г) and the graph's automorphism group *Aut* (*Г*) are discussed. An example of non—oriented graph Г is constructed whose algebra $\mathfrak{A}$ (Г) coincides with the group algebra of a non—commutative group.

1. Рассмотрим произвольный конечный граф Г и его матрицу смежности $A(\Gamma)=\{a_{ij}\}$; здесь a_{ij}—число ребер, ведущих из i-й вершины графа в j-ую; $i, j=1, 2, \ldots, n$. В случае неориентированного графа полагаем $a_{ij}=a_{ji}$. Каноническим видом графа мы будем называть его матрицу смежности при канонической нумерации вершин, т. е. при таком частичном упорядочении множества вершин, при котором из того, что a и b несравнимы следует, что существует автоморфизм графа, переводящий вершину a в b и сохраняющий отношение смежности.

В п. 6, 7 описан процесс приведения графа к каноническому виду, состоящий в поэтапном переупорядочении строк и столбцов матрицы $A(\Gamma)$, который, грубо говоря, сводится к следующему.

Рассмотрим для простоты неориентированный граф без кратных связей. Сначала каждой вершине графа сопоставим характеристический вектор, единственная компонента которого равна числу соседей данной вершины. Затем разобьем вершины на классы, так чтобы вершины с одинаковым характеристическим вектором принадлежали одному классу; классы при этом упорядочим в соответствии с естественным порядком в множестве характеристических векторов. Далее, каждой вершине сопоставим характеристический вектор $v_i=\{l, v_{i1}, v_{i2}, \ldots\}$, где v_{ik}—число соседей k-го класса у i-ой вершины, l—номер класса, к которому принадлежит i-ая вершина. Теперь снова разобьем вершины на классы в соответствии с новыми характеристическими векторами, упорядоченными лексикографически, и т. д. Заметим, что если вершины a и b на некотором шаге принадлежали разным классам и было выполнено условие $a<b$, то и в дальнейшем это условие всегда будет выполнено. Отсюда следует, что описанный процесс обрывается не позже, чем через n шагов—и либо все вершины относятся к разным классам (т. е. построена каноническая нумерация), либо дальнейшего разбиения на классы не происходит.

В случае, если Г—ориентированный мультиграф, возьмем в качестве характеристического вектора v_i упорядоченную i-ую строку матрицы $A(\Gamma)$ (считая при этом, что диагональный элемент предшествует всем остальным). Вместо различных элементов a_{ij} введем различные независимые переменные $x_1, x_2, \ldots$, упорядочив их в соответствии с порядком среди a_{ij}. Полученную таким способом матрицу обозначим $X=X(\Gamma)$. При очередном разбиении вершин на классы к одному классу, как и прежде, отнесем вершины с одинаковым характеристическим вектором; при этом k-ая компонента вектора v_i есть по определению сумма элементов i-ой строки матрицы $X(\Gamma)$, соответствующих вершинам k-го класса (предыдущего разбиения). Матрица $X(\Gamma)$ разбивается, таким образом, на блоки, в каждом из которых мы можем ввести свои независимые переменные и т. д. (точное определение этих операций см. п. 6, операции α_1, β_1).

Заметим, что описанная до сих пор процедура аналогична методам, изложенным в [1] и [2].

Для дальнейшего разбиения вершин на классы рассмотрим элемент u_{ij} матрицы $U=X\cdot X'$, где X'—матрица, полученная из X заменой переменных $x_1, x_2, \ldots$ переменными $x_1', x_2', \ldots$, причем все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_1', x_2', \ldots$ независимы. Элемент u_{ij} является многочленом второй степени от $x_1, x_2, \ldots, x_1', x_2', \ldots$ Если теперь обозначить различные многочлены различными новыми независимыми переменными, то к полученной матрице снова можно будет применять все описанные выше операции и т. д., до тех пор, пока и этот процесс не оборвется (см. п. 6, операции α_2, β_2, β_3).

2. Геометрически введение независимых переменных и матрицы $U=X\cdot X'$ означает следующее. Если наряду с ребрами данного графа Г рассматривать ребра дополнительного графа $\overline{\Gamma}$, то на первом же шаге нашей процедуры этим ребрам будут соответствовать наверняка разные переменные—т. е. произойдет раскраска ребер данного и дополнительного графов в разные цвета. В дальнейшем каждое новое введение дополнительных переменных вводит новую раскраску ребер, причем 1) ребра, окрашенные на каком-то шаге по разному, в дальнейшем также будут окрашены по-разному; 2) разбиение вершин на классы производится в соответствии с количеством ребер каждого цвета, исходящих из вершины.

Известно, далее, что элемент $a_{ij}\in A^2$, $A=A(\Gamma)$, где Г—неориентированный граф без кратных связей, равен числу путей длины 2, ведущих из i-й вершины в j-ую. Аналогично, коэффициент при $x_k x_l'$ в многочлене $u_{ij}\in U=X\cdot X'$ равен числу путей, ведущих из i-й вершины в j-ую по ребрам сначала k-го, а затем l-го цвета.

3). Дальнейшая процедура приведения графа к каноническому виду использует применение описанных выше операций к матрице, полученной из $X(\Gamma)$ вычеркиванием некоторого ее столбца и соответствующей строки. Если для матриц порядка $k\leqslant n-1$ приведение к каноническому виду определено, то возникает новая возможность для разбиения вершин на классы: старшей считается та вершина, после вычеркивания которой получается лексикографически старший канонический вид оставшегося графа (см. операции α_3, α_4, β_4, Ы п. 7). Очевидно, что и такое разбиение на некотором шаге оборвется. Доказано, что любые две вершины a и b, отнесенные к одному классу при последнем разбиении, эквивалентны, т. е. существует автоморфизм графа Г, переводящий a в b и сохраняющий отношения смежности.

Рассмотрим снова такую матрицу $X=X(\Gamma)$, что в матрице $U=X\cdot X'$ на месте одинаковых переменных матрицы X стоят одинаковые многочлены. Матрица $X(\Gamma)$ является тогда общей точкой некоторой матричной алгебры $\mathfrak{A}(\Gamma)$, т. е. если задано кольцо K (например, кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ или поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$), то множество матриц, полученных подстановкой в X вместо ее переменных элементов кольца K образует алгебру $\mathfrak{A}_K(\Gamma)=\mathfrak{A}(\Gamma)\otimes K$. Алгебра $\mathfrak{A}(\Gamma)$ является, очевидно, инвариантом графа. Некоторые соотношения между алгеброй $\mathfrak{A}(\Gamma)$ и свойствами графа Γ обсуждаются в п. 8—10.

4. Обозначения. $\mathrm{Aut}\,\Gamma$—группа автоморфизмов графа Γ; $X=(x_{ij})$—матрица, элементами которой являются независимые переменные $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots,$; через y_i обозначаются переменные, стоящие на диагонали. $f_i^{\mathrm{I}}(A)$ и $f_i^{\mathrm{II}}(A)$ — i-я строка и i-й столбец матрицы A соответственно. $X'=(x'_{ij})$—матрица, получающаяся заменой переменных x_i, y_i матрицы X переменными x'_i, y'_i; переменные x_i, y_i, x'_i, y'_i независимы. X_i—матрица, получающаяся из X вычеркиванием i-й строки и i-го столбца. Если $v=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$—вектор, $v_i \in V$, $i=1, 2, \ldots, n$, где V—упорядоченное множество, то через $\overline{v}$ обозначим вектор, полученный из v упорядочением координат.

5. Рассматриваются ориентированные конечные мультиграфы Γ. Графу Γ естественным образом сопоставляется матрица $A=A(\Gamma)$. Построим далее матрицу $X=X(\Gamma)$, элементами которой являются независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots,$ причем

$$x_{k(ij)}=x_{k(i'j')} \Leftrightarrow a_{ij}=a_{i'j'},\ i \neq j;\ i' \neq j',$$

$$y_{q(i)}=y_{q(j)} \Leftrightarrow a_{ii}=a_{jj}.$$

Введем упорядочение в множестве переменных:

$$y_i > x_k; \qquad \begin{matrix} y_{q(i)} > y_{q(j)} \Leftrightarrow a_{ii} > a_{kk} \\ x_{k(ij)} > x_{k(i'j')} \Leftrightarrow a_{ij} > a_{i'j'} \end{matrix}$$

(и занумеруем их в соответствии с этим порядком) и в множестве билинейных форм от x_i, x'_i, y_i, y'_i:

$$x_i x'_j > x_k x'_e \Leftrightarrow (ij) > (ke) \text{ и т. д,}$$

6. Основные операции. $\alpha_0(X)$—такая перестановка строк и столбцов матрицы X, что в матрице $\alpha_0(X)$ $i \leqslant j \Leftrightarrow y_{k(i)} \leqslant y_{k(j)}$, $\alpha_1(X)$—введение новых переменных. На место (ii) в матрицу $\alpha_1(X)$ ставится $y l_{(i)}$, на место (ij)—$x_{l(ij)}$, так что

$$l(i) < l(j) \Leftrightarrow (\overline{f}_i^{\mathrm{I}}(X), \overline{f}_i^{\mathrm{II}}(X)) < (\overline{f}_j^{\mathrm{I}}(X), \overline{f}_j^{\mathrm{II}}(X)),$$

$$l(i,j) < l(i'j') \Leftrightarrow F(i,j) < F(i'j'),$$

где

$$F(i,j)=\left(x_{ij}, j_i, \overline{f}_i^{\mathrm{I}}(X), \overline{f}^{\mathrm{II}}(X), \overline{f}_j^{\mathrm{II}}(X)\right),$$

$$\alpha_2(X)=\alpha_1(XX'),$$

$$\beta_1(X)=\alpha_1^s(X),$$

где

$$\alpha_1^{s-1}(X) \neq \alpha_1^s(X)=\alpha_1^{s+1}(X),$$

$$\beta_2(X)=(\alpha_2\beta_1)^s(X),$$

где

$$(\alpha_2\beta_1)^{s-1}(X) \neq (\alpha_2\beta_1)^s(X)=(\alpha_2\beta_1)^{s+1}(X),$$

$$\beta_3(X)=\alpha_0\beta_2(X).$$

7. Приведение к каноническому виду. Пусть для матриц X порядка $k \leqslant n-1$ определена операция Ы(X), являющаяся суперпозицией операций переупорядочения строк и столбцов и операций введения новых переменных, и такая, что в матрице $\hat{X}=$Ы(X) элементы, стоящие на диагонали, попарно различны. Пусть, кроме того, для любой подстановки σ справедливо

$$\text{Ы}(\sigma X \sigma^{-1})=\text{Ы}(X)\,X'.$$

При $k=1$ положим Ы$(X)=X$.

Обозначим через $\beta(X)$ матрицу, получающуюся из $X'=$Ы(X) заменой ее переменных теми переменными матрицы X, из которых они (переменные $\hat{X}$) произошли. Очевидно, что

$$\beta(X)=\beta(Y) \Leftrightarrow \exists\sigma:\ X=\sigma Y \sigma^{-1}. \qquad (1)$$

Введем в множестве матриц одного порядка лексикографическое упорядочение, считая, как и прежде,

$$x_i < x_j \Leftrightarrow i < j,\ y_i < y_j \Leftrightarrow i < j.$$

Операция $\alpha_3(X)$—введение новых переменных. На место (ii) в матрицу $\alpha_3(X)$ ставим $y_{l(i)}$, на место (ij)—$x_{l(i,j)}$, причем

$$l(i) < l(j) \Leftrightarrow (x_{ii}, \beta(X_i)) < (x_{jj}, \beta(X_j)),$$

$$l(ij) < l(i'j') \Leftrightarrow (x_{ij}, \beta(X_i), \beta(X_j) < (x_{i',j'}, \beta(X_{i'}), \beta(X_{j'}))$$

$$\beta_4(X)=(\alpha_3\beta_3)^s(X),$$

где

$$(\alpha_3\beta_3)^{s-1}(X) \neq (\alpha_3\beta_3)^s(X)=(\alpha_3\beta_3)^{s+1}(X). \qquad (2)$$

Лемма. Если в матрице $B=\beta_4(X)$ $b_{ii}=b_{jj}$, то существует такая постановка σ, что $\sigma(i)=j$ и $\sigma B \sigma^{-1}=B$, т. е. $\sigma \in \mathrm{Aut}\,B$.

Доказательство.

1°. Так как $b_{ii}=b_{jj}$, то по (2) $\beta(B_i)=\beta(B_j)$, и согласно (1), существует изоморфизм $\sigma': B_i \to B_j$, т. е. такое отображение $\sigma':(1, 2, \ldots, \hat{i}, \ldots, n) \to (1, 2, \ldots, \hat{j}, \ldots, n)$, что $\sigma' B_i \sigma'^{-1}=Bj$.

2°. Положим $\sigma(i)=j$, $\sigma(k)=\sigma'(k)$, $k \neq i$; обозначим через $\widetilde{X}_i$ матрицу, полученную из X заменой переменных i-й строки и i-го столбца нулями. Очевидно $\sigma\widetilde{B}_i\sigma^{-1}=\widetilde{B}_j$. Покажем, что $\sigma B \sigma^{-1}=B$.

Пусть

$$\sum_i b_{ij}=\sum_s m_{is}x_s+y_{q(j)},$$

$$\widetilde{B}_i=(C_{kl}),\quad \sum_k C_{kl}=\sum_s n_{ls}x_s+y_{q(l)},$$

$$\widetilde{B}_j=(d_{kl}),\quad \sum_k d_{kl}=\sum_s n'_{ls}x_s+y_{q(l)}.$$

При отображении σ элемент $b_{il} \in B$ переходит в $b_{j\sigma(l)} \in B$. Очевидно, имеем

$$b_{il}=\sum_s (m_{ls}-n_{ls})\,x_s+\delta_{il}y_{q(i)},$$

$$b_{j\sigma(l)}=\sum_s (m_{\sigma(l)s}-n'_{\sigma(l)s})\,x_s+\delta_{j\sigma(l)}y_{q(j)}.$$

В силу нашего условия: $y_{q(j)}=y_{q(i)}$ и всегда $\delta_{il}=\delta_{j\sigma(l)}$. Поскольку $\sigma\widetilde{B}_i\,\sigma^{-1}=\widetilde{B}_j$, то $y_{q(l)}=y_{q(\sigma(l))}$; следовательно, $m_{ls}=m_{\delta(l)s}$ для всех s, ибо в противном случае применение операции α_1 к матрице B привело бы к ее изменению, в противоречие с определением $\beta_4(X)$. Наконец, из $\sigma\widetilde{B}_i\,\sigma^{-1}=\widetilde{B}_j$ следует, что $n_{ls}=n'_{\sigma(l)s}$ для всех s.

Итак, $b_{il}=b_{j\sigma(l)}$ при любом l. Лемма доказана.

Пусть $spX=\sum_i n_i y_i$; пусть далее, $n_i=1$, $i \leqslant l \leqslant n$. В случае $l=n$ положим Ы$(X)=X$. В случае $l<n$, $n_{l+1} \geqslant 2$ определим операцию

$\alpha_4(X)$—«вычеркивание строки и столбца». Именно, положим

$$x_{ii}=y_i;\ i \leqslant l+1,$$

$$x_{ii}=y_{q(i)+1};\ i > l+1.$$

В силу леммы, операция $\alpha_4(X)$ инвариантна, т. е. если σ—подстановка, то из $\sigma X \sigma^{-1}=X$ следует $\sigma\alpha_4(X)\,\sigma^{-1}=\alpha_4(X)$.

Положим, наконец, Ы$(X)=(\alpha_4\beta_4)^{n-l}(X)$; поскольку все операции α_i, β_i инвариантны, то и операция Ы также инвариантна.

Определение. Каноническим видом графа Γ называется матрица, полученная из $\beta(X(\Gamma))$ подстановкой в нее тех чисел матрицы $A(\Gamma)$, из которых произошли соответствующие переменные матрицы $X(\Gamma)$.

Замечание. Канонический вид графа $\bar{\Gamma}$, очевидно, зависит от способа упорядочения, используемого в процессе приведения.

8. Алгебра, порожденная графом Γ. Пусть дан граф Γ. Тогда $Y=\beta_3(X(\Gamma))$ является общей точкой (в смысле алгебраической геометрии) некоторой ассоциативной матричной алгебры $\mathfrak{A}(\Gamma)$. Алгебра $\mathfrak{A}(\Gamma)$ состоит из матриц, получающихся подстановкой в Y вместо переменных произвольных чисел. Из определения операции α_i следует, что алгебра $\mathfrak{A}(\Gamma)$ инвариантна относительно транспонирования, т. е. является полупростой. Алгебра $\mathfrak{A}(\Gamma)$ — инвариант графа Γ и может быть использована для его изучения. Например, группа $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ совпадает с группой таких матриц перестановок σ, что

$$\sigma Y\sigma^{-1}=Y. \tag{3}$$

Этот факт может быть использован при решении следующей задачи: дан граф Γ — найти группу $\mathrm{Aut}\,\Gamma$, а также для решения обратной задачи. Для графов Γ с числом вершин $n(\Gamma)\leqslant 6$ эти задачи были решены Каньо [3]. По-видимому, предлагаемый алгебраический подход позволяет решить их (по крайней мере, прямую задачу) и для графов с большим числом вершин.

9. Гипотезы. 1. Если $spY=ny_0$, то существует такая группа G, что $\mathfrak{A}(\Gamma)\subset \mathrm{Z}_R(G)$. (Здесь $\mathrm{Z}_R(G)$ — матричная алгебра, натянутая на операторы R_g правого умножения на элементы $g\in G$ в стандартном базисе группового кольца); при этом элементы e_i стандартного базиса $\mathfrak{A}(\Gamma)$ $(x_j=\delta_{ij})$ алгебры являются суммами некоторых элементов стандартного базиса R_{gi}.

В случае, если эта гипотеза справедлива, группа $G\subset\mathrm{Aut}\,\Gamma$ и действует транзитивно на множестве вершин Γ.

2. Области транзитивности группы $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ совпадают с множествами вершин, для которых в матрице $Y=\beta_3(X)$ диагональные элементы одинаковы; в случае $spY=ny_0$ это предложение следует из утверждений гипотезы 1.

Если гипотеза 2 справедлива, процесс приведения графа к каноническому виду был бы значительно проще: можно было бы непосредственно применять к матрице $\beta_3(X)$ операцию α_4 и положить $\text{Ы}(X)=(\alpha_4\beta_3)^n(X)$. Косвенным подтверждением высказанных гипотез является следующее.

Предложение. Если группа $G\subset\mathrm{Aut}\,\Gamma$ действует просто транзитивно на множестве вершин графа Γ, то $\mathfrak{A}(\Gamma)\subset\mathrm{Z}_R(G)$, причем это вложение обладает свойствами, сформулированными выше.

Доказательство. Поскольку G действует просто транзитивно, то множество ее элементов может быть отождествлено с множеством вершин графа Γ, а действие — с левым умножением. Так как $G\subset\mathrm{Aut}\,\Gamma$ и в силу (3) $\mathfrak{A}(\Gamma)$ содержится в централизаторе $\mathfrak{B}$ алгебры, натянутой на операторы левого умножения. Поскольку операторы левого умножения, очевидно, коммутируют с операторами правого умножения, то $\mathfrak{B}\supset\mathrm{Z}_R(G)$. Покажем, что $\mathfrak{B}=\mathrm{Z}_R(G)$. Пусть $B\in\mathfrak{B}$. Вычтем из матрицы B такую линейную комбинацию элементов $\mathrm{Z}_R(G)$, чтобы первая строка полученной матрицы B' была нулевой. Поскольку B' перестановочная с G, то и все ее строки нулевые, откуда $B'=0$ и $B\in\mathrm{Z}_R(G)$. Аналогично, существуют такие элементы $g_1, g_2, \ldots, q_s$, что матрица $e_i-\sum\limits_j Rg_j$ имеет нулевую первую строку. Как и выше, отсюда следует, что $e_i=\sum\limits_j Rg_j$.

10. В заключение укажем пример неориентированного графа Γ, (без кратных связей), алгебра $\mathfrak{A}(\Gamma)$ которого совпадает с групповой алгеброй некоторой некоммутативной группы. Пусть X — векторное пространство групповой алгебры симметрической группы S_4 от четырех переменных. Обозначим через A_ω матрицу умножения на $\omega\in Z[S_4]$ относительно естественного базиса в X. Заметим, что если $\omega=\sum a_i\sigma_i$, то $A_\omega=\sum a_iA_{\sigma_i}$ и $A^t_\omega=\sum a_iA_{\sigma_i^{-1}}$.

Пусть $\sigma=(1234)$; $\tau=(123)$, $\rho=(14)$, $\omega=\sigma+\sigma^{-1}+\tau+\tau^{-1}+\rho$ и пусть Γ — граф с матрицей $A(\Gamma)=A_\omega$. Очевидно, что матрица $A(\Gamma)$ симметрична, элементы ее равны 0 либо 1; таким образом, граф Γ неориентированный и не имеет кратных связей.

Положим $\tilde{\omega}=x_1\omega+x_2\hat{\omega}+y\cdot 1$, где $\hat{\omega}=I-\omega$, $I=\sum\limits_{\varphi\in S_4}\varphi$.

Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}\,\tilde{\omega}'&=x_1x_1'\omega^2+x_2x_2'(14I+\omega^2)+yy'\cdot 1+(x_1y'+x_1'y)\,\omega+\\&+(x_2y'+x_2'y)(I-\omega)+(x_1x_2'+x_1'x_2)(5I+\omega^2)=\\&=I(14x_2x_2'+x_2y'+x_2'y+5x_1x_2'+5x_1'x_2)+\alpha(2x_1x_1'+\\&+2x_2x_2'+x_1y'+x_1'y-x_2y'-x_2'y+2x_1x_2'+2x_1'x_2)+\\&+\beta(x_1x_1'+x_2x_2'+x_1y'+x_1'y-x_2y'-x_2'y+x_1x_2'+x_1'x_2)+\\&+\eta(x_1x_1'+x_2x_2'+x_1x_2'+x_1'x_2)+\\&+1(yy'+5x_2x_2'+5x_1x_1'+5x_1x_2'+5x_1'x_2),\end{aligned}$$

где

$$\alpha=\tau+\tau'+\rho,$$

$$\beta=\omega-\alpha=\sigma+\sigma^{-1},$$

$$\eta=(1342)+(1243)+(234)+(243).$$

(отрицательные коэффициенты возникли из-за выделения I в отдельное слагаемое). Далее,

$$\varphi=\alpha_2(\tilde{\omega})=x_1\cdot I+x_2\cdot\alpha+x_3\beta+x_4(\varepsilon+\gamma+\theta)+x_5\eta+y\cdot 1,$$

где

$$\gamma=\sigma^2,\ \varepsilon=(1423)+(1342),\ \theta=(34).$$

Применяя снова операцию α_2, получим

$$\psi=\alpha_2(\varphi)=x_1\cdot I+y\cdot 1+x_2\cdot\rho+x_3\theta+x_4\cdot\gamma+\ \ldots$$

Покажем, наконец, что ρ, θ и γ порождают группу S_4; отсюда будет следовать, что $\mathfrak{A}(\Gamma)=Z[S_4](\rho=(14))$.

$$\gamma\cdot\rho=(13)(24)\cdot(14)=(1342)=\lambda,$$

$$\lambda^2=(14)(23),$$

$$\lambda^2\rho=(23).$$

Известно, что подстановки (14), (23) и (34) порождают S_4.

11. Исследуем подробнее строение алгебры $\mathfrak{A}(\Gamma)$ в случае, когда $SpY=ny_0$. Мы будем при этом пользоваться только следующим априорным описанием рассматриваемых алгебр.

Определения.

а. Клеткой *называется матричная алгебра* $\mathfrak{A}$, *инвариантная относительно транспонирования и такая, что ее общая точка* $X=(x_{ij})$ *удовлетворяет условиям:*

$$\sum_i x_{ij}=\sum_i x_{ji}=\sum_k n_kx_k, \tag{k}$$

где x_k — *различные независимые переменные (Фиксация матричного представления означает фиксацию базиса* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *в соответствующем векторном пространстве).*

б. Подклеткой *называется подалгебра клетки* $\mathfrak{A}$, *являющаяся клеткой в том же матричном представлении.*

в. Нормальной подклеткой *называется подклетка* $\mathfrak{N}$, *сохраняющая подпространство, натянутое на некоторое собственное подмножество* $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_s}$ *векторов фиксированного базиса (это означает, что некоторая перестановка векторов базиса приводит матрицы из* $\mathfrak{N}$ *к клеточно-диагональному виду).*

г. *Клетка, (не) имеющая нормальных подклеток, называется* (примитивной) импримитивной.

12. Простейшие свойства клеток, имеющих единицу. Обозначим через e_i матрицу из $\mathfrak{A}$, полученную из X заменой: $x_j=\delta_{ij}$. Положим $e_ie_j=\sum\limits_k a^k_{ij}e_k$, $\hat{e}=\sum\limits_i e_i$, $e_{i'}=e_i'$ (последнее

корректно, ибо $\mathfrak{A}$ инвариантна относительно транспонирования). Мы считаем, что x_0 — переменная, стоящая на диагонали и, следовательно, e_0 — единичная матрица. Матрицы e_i образуют базис в $\mathfrak{A}$, который мы будем называть стандартным.

C1. a_{ij}^k — натуральное число (ибо $\mathfrak{A}$ — алгебра и ввиду (k)).

C2. $\sum\limits_s a_{ij}^s a_{se}^k = \sum\limits_s a_{is}^k a_{je}^s$ (ассоциативность алгебры $\mathfrak{A}$).

C3. $(\sum b_i e_i)\hat{e} = \hat{e}(\sum b_i e_i) = (\sum b_i n_i)\hat{e}$.

C4. $\sum\limits_i a_{kl}^j = \sum\limits_i a_{ik}^j = n_k$; $\sum\limits_k n_k = n$ (ибо $\hat{e}e_k = e_k \cdot \hat{e} = n_k \hat{e}$).

C5. $\sum\limits_s a_{ij}^s n_s = n_i n_j$ (ибо $(e_i e)_j \hat{e} = (\sum\limits_s a_{ij}^s n_s)\hat{e} = n_i n_j \hat{e}$).

C6. $a_{ij}^0 = \delta_{i'j} n_i$ (ибо $e_0 = Id$, $a_{ii'}^0 = n_i$ по определению $e_{i'}$, и в силу C4); $a_{0l}^s = \delta_{ls}$.

C7. $a_{ij}^s = a_{j'i'}^{s'}$ (ибо $\sum a_{ij}^s e_s' = (e_i c_j)' = e_j' e_i' = e_{j'} e_{i'} = \sum a_{j'i'}^{s'} e_{s'}$).

C8. $n_i a_{jk}^{i'} = n_j a_{ki}^{j'} = n_k a_{ij}^{k'}$ (следует из C2 при $k=0$ с использованием C6:: $\sum\limits_s a_{ij}^s a_{se}^0 = \sum\limits_s a_{ij}^s \delta_{se'} n_e = n_e a_{ij}^{e'} = \sum\limits_s a_{is}^0 a_{je}^s = \sum\limits_s n_i \delta_{i's} a_{je}^s = n_i a_{je}^{i'}$).

C9. $a_{kj}^{i'}$ делится на $M = \left[\frac{n_j}{(n_i, n_j)}, \frac{n_k}{(n_i, n_k)}\right]$, где (a, b) — Н. О. Д. чисел a и b, $[a, b]$ — их Н. О. К.; $M \leqslant n_k$, $M \leqslant n_j$ при $a_{kj}^{i'} \neq 0$.

Действительно, ввиду C8, $\frac{n_i}{n_j} a_{kj}^{i'} = a_{ik}^{j'}$. Если $c_{ik}^{j'} = 0$, то C9 очевидно; в противном случае, $a_{ik}^{j'}$ — целое положительное число и, следовательно, $a_{kj}^{i'}$ делится на $\frac{n_j}{(n_i, n_j)}$, аналогично на $\frac{n_k}{(n_i, n_k)}$, откуда следует первое утверждение C9. Второе утверждение C9 следует из первого и C4, так как $M \leqslant a_{kj}^{i'} \leqslant n_k, n_j$.

Предложение C10. *Алгебра $\mathfrak{A}$ разлагается над Q в прямую сумму алгебр $\{\lambda\hat{e}\}$ и $\mathfrak{A}^0 = \{\sum a_i e_i : \sum n_i a_i = 0\}$.*

Доказательство. Алгебра $\{\lambda\hat{e}\}$ является идеалом (ввиду C3), и отображение $\varphi: \mathfrak{A} \to Q$ $(\varphi(\sum a_i e_i) = \sum n_i a_i)$ является гомоморфизмом. Поэтому $\mathfrak{A}^0$ — идеал и, так как $\mathfrak{A}^0$ и $\{\lambda\hat{e}\}$ — подалгебры в $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \dotplus \{\lambda\hat{e}\}$.

Определение. *Ориентированный граф Г называется слабо* (соответственно, сильно) связным, *если для любых двух его вершин a и b существует либо ориентированный путь* из a в b, *либо ориентированный путь из b* в a *(соответственно оба пути).*

Мы будем иногда отождествлять e_i $\left(\text{или } \sum\limits_{i \in I} e_i\right)$ с графом, имеющим соответствующую матрицу смежности.

Предложение C11. *Если граф $\Gamma = \sum\limits_{i \in I} e_i$ слабосвязен, то он сильносвязен.*

Доказательство. Пусть a, b — вершины графа; будем писать $a \to b$, если в Г есть ориентированный путь из a в b, и $a \nrightarrow b$ в противном случае. Положим $A_a = \{b: b \neq a, b \to a \nrightarrow b)$, $B_a = \{b: b \neq a, b \to a \to b\}$, $C_a = \{b: b \neq a, a \to b \nrightarrow a\}$. Очевидно, множества A_a, B_a, C_a попарно не пересекаются.

Из вершины a есть пути только в вершины множества $B_a \cup C_a$; из вершины $b \in A_a$ есть пути в вершины множества $B_a \cup C_a \cup a$ и, быть может, еще в некоторые вершины.

Таким образом, множества вершин, в которые есть пути из вершин a и b, имеют разную мощность, что противоречит C2 и C4. 13. Импримитивные клетки и фактор-клетки. Пусть $\mathfrak{A}$ — клетка с единицей и $\mathfrak{B}$ — нормальная подклетка в $\mathfrak{A}$; пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — стандартный базис $\mathfrak{B}$, $\overline{e} = \sum\limits_{i=1}^k f_i$. По определению подклетки, $\overline{e} = \sum\limits_{i \in I} e_i$. Очевидно, $i \in I \Leftrightarrow e_i \overline{e} = \overline{e} e_i = n_i \overline{e}$; отсюда следует, что множество $\{e_i : i \in I\}$ порождает нормальную подклетку.

Из условия нормальности $\mathfrak{B}$ следует, что граф $\overline{e}$ несвязен; можно считать, что $\overline{e}$ приведена к клеточно-диагональному виду (по компонентам связности) без нулей в диагональных блоках.

C12. *Степени диагональных блоков нормальной подклетки равны* (ибо эти степени равны $m = \sum\limits_l \overline{e}_{lj} = \sum\limits_{i \in I} n_i$, где $(\overline{e}_{ij}) = \overline{e}$).

Приведение $\overline{e}$ к клеточно-диагональному виду определяет разбиение матрицы X (общей точки алгебры $\mathfrak{A}$) на $m \times m$-блоки X_{ij}. Назовем блоки X_{ij} и X_{kl} похожими ($X_{ij} \sim X_{kl}$), если

$$\forall a \in [m(i-1)+1, mi] \quad \exists b \in [m(k-1)+1, mk]:$$

$$\sum_{S=m(j-1)+1}^{mj} x_{as} = \sum_{S=m(l-1)+1}^{ml} x_{bs} \qquad (\Pi)$$

и аналогичные условия выполнены для столбцов.

C13. $X_{ll} \sim X_{kk}\ \forall l, \forall k$ (ибо $\mathfrak{B}$ — клетка), и $X_{ij} \nsim X_{kk}$ при $i \neq j$, ибо переменные из диагональных блоков вне них не встречаются (поскольку блоки определены компонентами связности).

C14. *Если $X_{ij} \nsim X_{ls}$, то любая переменная из X_{ij} не встречается в X_{ls} и обратно* (т. е. если матрица e_q имеет единицы в блоке X_{ij}, то она имеет только нули в блоке X_{ls}).

Доказательство. Рассмотрим некоторую строку S_1 из X_{ij} и любую строку S_2 из X_{ls}. Так как $X_{ij} \nsim X_{ls}$, то существует такое r, что переменная x_r в строке S_1 встречается $p_1 \neq 0$ раз, а в строке S_2 — $p_2 \neq p_1$ раз. В произведении $e_r \cdot \overline{e}$ в строке S_1 на каждом месте будет стоять p_1, а в строке S_2 — p_2. Из определения клетки следует, что в этом случае строки S_1 и S_2 не имеют общих переменных, что и требуется.

C15. *Две строки одного блока X_{ij}, различные по составу переменных, вообще не имеют общих переменных* (доказательство аналогично C14).

Определение. *Пусть $n = m \cdot k$.* Фактор-клеткой $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *называется множество $k \times k$-матриц с общей точкой Z, определенной условием:*

$$z_{ij} = z_{ls} \Leftrightarrow X_{ij} \sim X_{ls}.$$

Теорема C16. *Фактор-клетка $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ является клеткой.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_C$ с общей точкой X_C, полученной из матрицы X заменой всех элементов похожих блоков одной переменной, а непохожих — разными. Имеем: $X_C = Z \otimes M$, где M — $m \times m$-матрица из единиц. Ввиду C14, $X_C X_C' \in \mathfrak{A}_C$. Это означает, что Z — общая точка матричной алгебры; то, что эта алгебра является клеткой — очевидно.

Теорема C17. *Клетка $\mathfrak{A}$ является импримитивной если и только если она содержит идеал $\mathfrak{L}$, являющийся подклеткой; если $\mathfrak{L}$ — нормальная подклетка в $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}$ содержит идеал $\mathfrak{L}$, изоморфный $\mathfrak{L}$, как алгебра.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — импримитивная клетка с единицей, $\mathfrak{B}$ — ее нормальная подклетка, $\mathfrak{A}_C$ — алгебра, определенная в доказательстве C16. Ввиду C14, $\mathfrak{A}_C$ является идеалом в $\mathfrak{A}$. Пусть, наоборот, $\mathfrak{L}$ — идеал в $\mathfrak{A}$, являющийся подклеткой. Пусть $f_i = \sum\limits_{i \in G_i} e_j$ — стандартный базис $\mathfrak{L}$. Покажем, что $\exists i : 0 \in J_i$. Действительно, если $s \in J_k$, то существует такое m, что $e_s^m \cdot f_k$ имеет нетривиальную проекцию на e_0. (Поскольку в любой связной компоненте e_s есть ориентированные циклы — см. C11). Так как $\mathfrak{L}$ — идеал, то $e_s^m f_k = \Sigma d_i f_i$, т. е. e_0 содержится в некотором f_i, — и только в одном, ибо $\mathfrak{L}$ — подклетка; обозначим этот f_i через f_0. Рассмотрим $f_0' \cdot f_0$. Если $q = \sum\limits_{i \in J_0} n_i$, то $f_0' \cdot f_0 = q f_0 + g$. Так как $\mathfrak{L}$ — подклетка и поскольку количество единиц в строке матриц f_0 и f_0' равно q, то $g=0$, т. е. граф f_0 несвязен, и его связные компоненты определяют искомую нормальную подклетку. Тем самым C17 полностью доказана.

14. Примитивные клетки. Пусть $\mathfrak{A}$—примитивная клетка с единицей. Тогда все графы e_i и, следовательно, их суммы, сильно связны (см. C11 и п. 13).

Положим $e_J=\sum_{i\in J} e_i$, $n_J=\sum_{i\in J} n_i$ и пусть $n_J<n-1$.

C18. *Никакие две строки матрицы e_I не равны.*

Действительно, можно считать, что первые q строк в e_I попарно равны и отличны от всех остальных строк. В матрице $f=e_J\cdot e_J'$ элементы верхнего левого минора M порядка q равны n_J, а в каждой из первых q строк вне этого минора стоят числа, меньшие n_J. По определению клетки это означает, что если e_i имеет единицы в M, то вне M в первых q строках у e_i стоят только нули, т. е. e_i несвязна.

C19. *Если* $a_{ij}^k=n_j$, то $n_i>n_j$.

В самом деле, $n_j=a_{ij}^k\leqslant n_i$ (см. C4). Пусть $u(f)$—первая строка матрицы f. Можно считать, что $u(e_k)=(0111\ldots \ldots 100\ldots 0)$, $u(e_i)=(00\ldots 01\ldots 1)$. Тогда $u(e_ie_j)=(*n_jn_j\ldots \ldots n_j**\ldots *)$ (n_j встречается n_k раз). Если $n_i=n_j$, то 2-й, 3-й, …, n_k+1-й столбцы матрицы e_j равны, что противоречит C18.

Пусть $q_1<q_2<\ldots<q_m$, $J_k=\{i:n_i=q_k\}$, $i\in\bigcup_k J_k\ \forall i$.

C20. $\forall i,\ \forall j\ \exists s\neq j: a_{is}^j\neq 0$

C21. $\forall l,\ \forall i\notin J_l\ \exists j\notin J_l: a_{ij}^k\neq 0,\ k\in J_l$.

Действительно, в силу связности e_i, e_i^n имеет проекцию на все e_s в том числе на e_j; поэтому $\exists s: a_{is}^j\neq 0$, откуда C20. Пусть $r=\min(t: e_i^t$ имеет проекцию на $\bigcup_{s\in G_l} e_s)$. Так как $e_l^{r-1}=\sum_{i\notin J_l} b_ie_i$, то $\exists j\notin I_l: a_{ij}^k\neq 0$, $k\in I_l$; C21 доказано.

C22. $\forall i\ (q_i, q_m)\geqslant \dfrac{q_m}{q_{m-1}}>1$.

Ввиду C21, $\forall i\ \exists j: n_j\leqslant q_{m-1}$, $\exists k: n_k=q_m$, $a_{ij}^k\neq 0$. В силу C9, $n_j\geqslant \dfrac{q_m}{(n_i, q_m)}$, откуда следует C22.

C23. *Если* $q_m=p^k$, *p—простое, то* $p^{k-[\log_p q_{m-1}]}|q_i\ \forall i$.

C24. *Если* q_m—*простое, то* $m=1$ (*т. е. все* n_i *равны*)

Это простые следствия C22.

C25. $q_{k+1}\leqslant q_k\cdot q_1$; $q_m\leqslant q_1^{\dim\mathfrak{A}-2}$.

Действительно, пусть $e_{g_1}^t=\sum_i b_{it}e_i$, $q(t)=\max(n_i: b_{is}\neq 0, s\leqslant t)$. Очевидно, $q(t+1)\leqslant q(t)\cdot q_1$ и $q(t_0)=q_m$, где $t_0=\dim\mathfrak{A}-|J_1\cup O|$; отсюда следует C25.

C26. *Если* $q_1=1$, то $\mathfrak{A}=Z[Z_p]$, *p простое*.

Действительно, если $n_i=1$, то e_i—матрица подстановки. Множество $\left\{\sum_{i\in J_1} a_ie_i\right\}$ образует нормальную подклетку и изоморфно групповой алгебре группы $G=\{e_i: i\in J_1\}$. Эта клетка примитивна, только если $G=Z_p$.

C27. *Если* $q_1=2$, то $\mathfrak{A}=Z[\sigma+\sigma^{-1}]$, *где* $\sigma^p=1$, *p простое.*

Действительно, если $n_i=2$, то по теореме Холла существуют такие матрицы подстановок σ и τ, что $e_i=\sigma+\tau$. Тогда $e_i'=\sigma^{-1}+\tau^{-1}$ и $e_i\cdot e_i'=2+\sigma\tau^{-1}+\tau\sigma^{-1}=2+\varphi+\varphi^{-1}=2+e_k$. Отсюда $e_k=e_k'$, $n_k=2$, т. е. e_k—неориентированный цикл. Те же рассуждения, что в C26, приводят к нашему утверждению.

15. Построение примеров. Пусть G—конечная группа, H—подгруппа группы Aut G, $Z[G]$—групповая алгебра G со стандартным базисом—элементами G. Пусть $\mathfrak{A}=\{a\in Z[G]: :h(a)=a\ \forall h\in H\}$; тогда $\mathfrak{A}$—клетка со стандартным базисом $\sum_{h\in H} h(g)$, $g\in G$. Клетка $\mathfrak{A}$ примитивна, например, в следующих случаях; G—простая группа, H—ее внутренние автоморфизмы; $G=(Z_p)^n$, H—неприводимая подгруппа группы $GL(n, Z_p)$.

* * *

Авторы выражают благодарность Г. Э. Влэдуцу за постановку задачи и полезное обсуждение и Г. М. Адельсону-Вельскому за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bouman H. Computer program for the LINCO System. «J. Chem. Docum.», 1965(5), № 1, 14—23.
2. Morgan H. L. The generation of a unique machine description for chemical structures. «J. Chem. Docum.», 1965(5), № 2, 107—112.
3. Kagno J. N. Linear grahs of Degree ≤6 and their groups. «Amer. J. Math.», 1946(68), № 3, 505—520.
4. Higman D. G. Intersection matrices for jinite permutations groups. «J. algebra», 1967(6), № 1, 22—42.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 1967 г.

Москва, Г-21,
Языковский переулок № 5, кв. 162
тел. 2-45-03-95
р. индекс Москва, Профсоюзная, 81, ИАТ Лаб. 55
р.т. 120-44-51