財團法人大學入學考試中心基金會
113學年度分科測驗試題
數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

  例：若答案格式是 $\dfrac{18\text{-}1}{18\text{-}2}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 3 與第 18-2 列的 8 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18-1	▭	▭	■	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭
18-2	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	■	▭	▭	▭	▭

  例：若答案格式是 $\dfrac{(19\text{-}1)(19\text{-}2)}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 − 與第 19-2 列的 7 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19-1	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	■	▭
19-2	▭	▭	▭	▭	▭	▭	■	▭	▭	▭	▭	▭

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

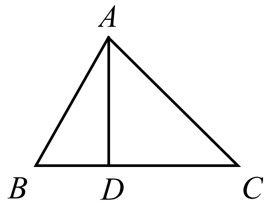
※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占76分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第1題至第3題，每題6分。

1. 如右圖所示，有一 ΔABC，已知 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}=12$，且 $\tan\angle B=\frac{3}{2}$、$\tan\angle C=\frac{2}{3}$。試問 $\overline{BC}$ 的長度為何？

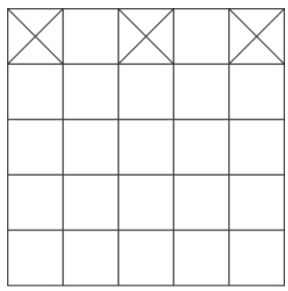


(1) 20　(2) 21　(3) 24
(4) 25　(5) 26

2. 坐標平面上，橢圓 Γ 的方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$（其中 a 為正實數）。若將 Γ 以原點 O 為中心，沿 x 軸方向伸縮為 2 倍、沿 y 軸方向伸縮為 3 倍後，所得到的新圖形會通過點 $(18,0)$。試問下列哪一個選項是 Γ 的焦點？

(1) $(0,3\sqrt{3})$　(2) $(-3\sqrt{5},0)$　(3) $(0,6\sqrt{13})$　(4) $(-3\sqrt{13},0)$　(5) $(9,0)$

3. 想在 5×5 的棋盤上擺放 4 個相同的西洋棋的城堡棋子。由於城堡會將同一行或是同一列的棋子吃掉，故擺放時規定每一行與每一列最多只能擺放一個城堡。在第一列的第一、三、五格（如圖示畫叉的格子）不擺放的情況下，試問共有多少種擺放方式？



(1) 216
(2) 240
(3) 288
(4) 312
(5) 360

二、多選題（占 40 分）

說明：第4題至第8題，每題8分。

4. 一遊戲廠商將舉辦抽獎活動，廠商公告每次抽獎需使用掉一個代幣，且每次抽獎的中獎機率皆為 $\frac{1}{10}$。某甲決定先存若干個代幣，並在活動開始後進行抽獎，直到用完所有代幣才停止。試選出正確的選項。

   (1) 某甲中獎一次所需要抽獎次數的期望值為10
   (2) 某甲抽獎兩次就中獎一次以上的機率為 0.2
   (3) 某甲抽獎10次都沒中獎的機率小於抽獎1次就中獎的機率
   (4) 某甲至少要存22個代幣，才能保證中獎的機率大於 0.9
   (5) 某甲只要存足夠多的代幣，就可以保證中獎的機率為1

5. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式。已知 $f(-2-3i)=0$（其中 $i=\sqrt{-1}$），且 $f(x)$ 除以 x^2+x-2 的餘式為18。試選出正確的選項。

   (1) $f(2+3i)=0$
   (2) $f(-2)=18$
   (3) $f(x)$ 的三次項係數為負
   (4) $f(x)=0$ 恰有一正實根
   (5) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心在第一象限

6. 坐標空間中，考慮滿足內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{15}$ 與外積 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-1,0,3)$ 的兩向量 $\overrightarrow{u}$ 、 $\overrightarrow{v}$ 。試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角 θ（其中 $0\le\theta\le\pi$ ， π 為圓周率）大於 $\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\overrightarrow{u}$ 可能為 $(1,0,-1)$

(3) $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|\ge 2\sqrt{5}$

(4) 若已知 $\overrightarrow{v}$ ，則 $\overrightarrow{u}$ 可以被唯一決定

(5) 若已知 $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|$ ，則 $|\overrightarrow{v}|$ 可以被唯一決定

7. 坐標平面上，考慮兩函數 $f(x)=x^5-5x^3+5x^2+5$ 與 $g(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的函數圖形（其中 π 為圓周率）。試選出正確的選項。

(1) $f'(1)=0$

(2) $y=f(x)$ 在閉區間 $[0,2]$ 為遞增

(3) $y=f(x)$ 在閉區間 $[0,2]$ 為凹向上

(4) 對任意實數 x ， $g(x+6\pi)=g(x)$

(5) $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在閉區間 $[3,4]$ 皆為遞增

8. 設 z 為非零複數，且設 $\alpha=|z|$、β 為 z 的輻角，其中 $0\le\beta<2\pi$（其中 π 為圓周率）。對任一正整數 n，設實數 x_n 與 y_n 分別為 z^n 的實部與虛部。試選出正確選項。

(1) 若 $\alpha=1$ 且 $\beta=\dfrac{3\pi}{7}$，則 $x_{10}=x_3$

(2) 若 $y_3=0$，則 $y_6=0$

(3) 若 $x_3=1$，則 $x_6=1$

(4) 若數列 $\langle y_n\rangle$ 收斂，則 $\alpha\le1$

(5) 若數列 $\langle x_n\rangle$ 收斂，則數列 $\langle y_n\rangle$ 也收斂

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 設 a,b,c,d 為實數。已知兩聯立方程組 $\begin{cases}ax+by=2\\cx+dy=1\end{cases}$、$\begin{cases}ax+by=-1\\cx+dy=-1\end{cases}$ 的增廣矩陣經過相同的列運算後，分別得到 $\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&3\\0&1&2\end{array}\right]$、$\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&2\\0&1&-1\end{array}\right]$，則聯立方程組 $\begin{cases}ax+by=0\\cx+dy=1\end{cases}$ 的解為 $x=$ ⑨-1 ⑨-2，$y=$ ⑨-3。

10. 坐標平面上，設 Γ 為以原點為圓心的圓，P 為 Γ 與 x 軸的其中一個交點。已知通過 P 點且斜率為 $\dfrac{1}{2}$ 的直線交 Γ 於另一點 Q，且 $\overline{PQ}=1$，則 Γ 的半徑為 $\dfrac{\sqrt{\text{⑩-1}}}{\text{⑩-2}}$。（化為最簡根式）

11. 設實數 $a_1,a_2,\ldots,a_9$ 是公差為 2 的等差數列，其中 $a_1 \neq 0$ 且 $a_3 > 0$。若 $\log_2 a_3, \log_2 b, \log_2 a_9$ 三數依序也成等差數列，其中 b 為 a_4,a_5,a_6,a_7,a_8 其中一數，則 $a_9 = \dfrac{\text{(11-1)(11-2)}}{\text{(11-3)}}$。

（化為最簡分數）

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選擇題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。
選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

坐標空間中，考慮三個平面 $E_1: x+y+z=7$、$E_2: x-y+z=3$、$E_3: x-y-z=-5$。令 E_1 與 E_2 相交的直線為 L_3；E_2 與 E_3 相交的直線為 L_1；E_3 與 E_1 相交的直線為 L_2。根據上述，試回答下列問題。

12. 已知三直線 L_1、L_2、L_3 有共同交點，試求此共同交點 P 的坐標。（非選擇題，4 分）

13. 試說明 L_1、L_2、L_3 中，任兩直線所夾的銳角皆為 $60°$。（非選擇題，4 分）
（註：令 L_1 與 L_2 所夾的銳角為 α，L_2 與 L_3 所夾的銳角為 β，L_3 與 L_1 所夾的銳角為 γ）

14. 若坐標空間中第四個平面 E_4 與 E_1、E_2、E_3 圍出一個邊長為 $6\sqrt{2}$ 的正四面體，試求出 E_4 的方程式（寫成 $x+ay+bz=c$ 的形式）。（非選擇題，4 分）

15-17 題為題組

坐標平面上，設 Γ 為三次函數 $f(x)=x^3-9x^2+15x-4$ 的函數圖形。根據上述，試回答下列問題。

15. 試問下列何者為 $f(x)$ 的導函數？（單選題，2 分）

(1) $x^2-9x+15$

(2) $3x^3-18x^2+15x-4$

(3) $3x^3-18x^2+15x$

(4) $3x^2-18x+15$

(5) $x^2-18x+15$

16. 試說明 $P(1,3)$ 為 Γ 上之一點，並求 Γ 在 P 點的切線 L 的方程式。（非選擇題，4 分）

17. 承 16，試求 Γ 和 L 所圍成有界區域的面積。（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 r $(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 $X:x_1,x_2,\cdots,x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\mu_X^{\,2}\right)}$

6. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線（迴歸直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\sqrt{5}\approx 2.236$, $\sqrt{6}\approx 2.449$, $\pi\approx 3.142$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$，變異數 $Var(X)=np(1-p)$；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，變異數 $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$。