Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Lineare Algebra

Vorlesung 11

So gerne Vorli als Vorlesungshund arbeitet, hinterher ist sie doch ganz schön ausgepowert von all der Energie, die sie zum Fließen gebracht hat. Da braucht sie erstmal ein Nickerchen um zu regenerieren.

Untervektorräume unter linearen Abbildungen

Eine typische und wohl auch namensgebende Eigenschaft einer linearen Abbildung ist, dass sie Geraden wieder auf Geraden (oder Punkte) abbildet. Allgemeiner ist folgende Aussage.

Lemma 11.1. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung.Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S) = \{\varphi(v) \mid v \in S\}$ ein Untervektorraum von W.*
(2) *Insbesondere ist das Bild* $\operatorname{bild} \varphi = \varphi(V)$ *der Abbildung ein Untervektorraum von W.*
(3) *Für einen Untervektorraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in T\}$ ein Untervektorraum von V.*
(4) *Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von V.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.2. □

Definition 11.2. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\operatorname{kern} \varphi := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.

Der Kern ist also nach der obigen Aussage ein Untervektorraum von V.

Bemerkung 11.3. Zu einer $m \times n$-Matrix M ist der Kern der durch M gegebenen linearen Abbildung

$$K^n \longrightarrow K^m,\, x \longmapsto Mx,$$

einfach der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$Mx = 0.$$

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium*.

Lemma 11.4. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung.Dann ist φ genau dann injektiv, wenn $\operatorname{kern}\varphi = 0$ *ist.*

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen weiteren Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$. Es sei umgekehrt $\operatorname{kern}\varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern}\varphi$ und damit $v_1 = v_2$.

$\square$

Die Dimensionsformel

Die folgende Aussage heißt *Dimensionsformel*.

Satz 11.5. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung undV sei endlichdimensional.Dann gilt

$$\dim_K(V) = \dim_K(\operatorname{kern}\varphi) + \dim_K(\operatorname{bild}\varphi).$$

Beweis. Es sei $n = \dim_K(V)$. Es sei $U = \operatorname{kern}\varphi \subseteq V$ der Kern der Abbildung und $k = \dim_K(U)$ seine Dimension ($k \leq n$). Es sei

$$u_1, \ldots, u_k$$

eine Basis von U. Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es Vektoren

$$v_1, \ldots, v_{n-k}$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k,\, v_1, \ldots, v_{n-k}$$

eine Basis von V ist. Wir behaupten, dass

$$w_j = \varphi(v_j),\, j = 1, \ldots, n-k\,,$$

eine Basis des Bildes ist. Es sei $w \in W$ ein Element des Bildes $\varphi(V)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Dieses v lässt sich mit der Basis als

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$$

schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned} w &= \varphi(v) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_i \varphi(u_i) + \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j, \end{aligned}$$

sodass sich w als Linearkombination der w_j schreiben lässt. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit der w_j, $j = 1, \ldots, n-k$, sei eine Darstellung der Null gegeben,

$$0 = \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j.$$

Dann ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi(v_j) = 0.$$

Also gehört $\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$ zum Kern der Abbildung und daher kann man

$$\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i$$

schreiben. Da insgesamt eine Basis von V vorliegt, folgt, dass alle Koeffizienten 0 sein müssen, also sind insbesondere $t_j = 0$.

$\square$

Definition 11.6. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\operatorname{rang} \varphi := \dim_K (\operatorname{bild} \varphi)$$

den *Rang* von φ.

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim_K (V) = \dim_K (\operatorname{kern} \varphi) + \operatorname{rang} \varphi$$

ausdrücken.

Bemerkung 11.7. Es sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit V endlichdimensional. Die Dimensionsformel besitzt die folgenden Spezialfälle. Wenn φ die Nullabbildung ist, so ist $\operatorname{kern}\varphi = V$ und

$$\operatorname{rang} \varphi = 0.$$

Wenn φ injektiv ist, so ist $\operatorname{kern}\varphi = 0$ und

$$\operatorname{rang} \varphi = \dim_K(V).$$

Der Rang liegt stets zwischen 0 und der Dimension des Ausgangsraumes V. Wenn φ surjektiv ist, so ist

$$\operatorname{rang} \varphi = \dim_K(W)$$

und

$$\dim_K(V) = \dim_K(\operatorname{kern}\varphi) + \dim_K(W).$$

Beispiel 11.8. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Kerns müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Der Lösungsraum ist

$$L = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

und dies ist der Kern von φ. Der Kern ist also eindimensional und daher ist die Dimension des Bildes nach der Dimensionsformel gleich 2.

Korollar 11.9. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Beweis. Dies folgt aus der Dimensionsformel und Lemma 11.4.

□

Verknüpfung von linearen Abbildungen und Matrizen

In der letzten Vorlesung haben wir unter der Voraussetzung, dass Basen fixiert sind, die Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen besprochen. Diese Korrespondenz berücksichtigt auch Hintereinanderschaltungen und Matrizenmultiplikation, wie das folgenden Lemma zeigt.

LEMMA 11.10. *Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation.Damit ist folgendes gemeint: es seien U,V,W Vektorräume über einem Körper K mit Basen*

$$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m\,.$$

Es seien

$$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ und der Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) \,=\, (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi)).$$

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} K^p & \stackrel{M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi)}{\longrightarrow} & K^n & \stackrel{M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)}{\longrightarrow} & K^m \\ \Psi_{\mathfrak{u}} \downarrow & & \Psi_{\mathfrak{v}} \downarrow & & \downarrow \\ U & \stackrel{\psi}{\longrightarrow} & V & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & W \end{array},$$

wobei die Kommutativität auf der Beziehung

$$\varphi \circ \Psi_{\mathfrak{v}} \,=\, \Psi_{\mathfrak{w}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$$

aus Lemma 10.14 beruht. Dabei sind die (inversen) Koordinatenabbildungen $\psi_{\mathfrak{v}}$ jeweils bijektiv, und somit ist

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \,=\, \Psi^{-1}_{\mathfrak{w}} \circ \varphi \circ \Psi_{\mathfrak{v}}.$$

Also ist insgesamt

$$\begin{aligned} M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) &= \Psi^{-1}_{\mathfrak{w}} \circ (\varphi \circ \psi) \circ \Psi_{\mathfrak{u}} \\ &= \left(\Psi^{-1}_{\mathfrak{w}} \circ \varphi\right) \circ \left(\Psi_{\mathfrak{v}} \circ \Psi^{-1}_{\mathfrak{v}}\right) \circ (\psi \circ \Psi_{\mathfrak{u}}) \\ &= \left(\Psi^{-1}_{\mathfrak{w}} \circ \varphi \circ \Psi_{\mathfrak{v}}\right) \circ \left(\Psi^{-1}_{\mathfrak{v}} \circ \psi \circ \Psi_{\mathfrak{u}}\right) \\ &= M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi), \end{aligned}$$

wobei hier überall die Abbildungsverknüpfung steht. Nach Aufgabe 10.20 stimmt die letzte Verknüpfung mit dem Matrixprodukt überein.

□

Daraus folgt beispielsweise, dass das Produkt von Matrizen assoziativ ist.

Lineare Abbildungen und Basiswechsel

Lemma 11.11. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$ beschrieben werde.Dann wird φ bezüglich der Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ und $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$ beschreiben.

Beweis. Die linearen Standardabbildungen $K^n \to V$ bzw. $K^m \to W$ zu den Basen seien mit $\Psi_{\mathfrak{v}}$, $\Psi_{\mathfrak{u}}$, $\Psi_{\mathfrak{w}}$, $\Psi_{\mathfrak{z}}$ bezeichnet. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)"] \arrow[dr, "\Psi_{\mathfrak{v}}"] \arrow[dd, "M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}"'] & & & K^m \arrow[dl, "\Psi_{\mathfrak{w}}"'] \arrow[dd, "M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}}"] \\
& V \arrow[r, "\varphi"] & W & \\
K^n \arrow[rrr, "M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{z}}(\varphi)"] \arrow[ur, "\Psi_{\mathfrak{u}}"'] & & & K^m, \arrow[ul, "\Psi_{\mathfrak{z}}"]
\end{tikzcd}$$

wobei die Kommutativität auf Lemma 9.1 und Lemma 10.14 beruht. In dieser Situation ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{z}}(\varphi) &= \Psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \varphi \circ \Psi_{\mathfrak{u}} \\
&= \Psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ (\Psi_{\mathfrak{w}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ \Psi_{\mathfrak{v}}^{-1}) \circ \Psi_{\mathfrak{u}} \\
&= (\Psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \Psi_{\mathfrak{w}}) \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (\Psi_{\mathfrak{v}}^{-1} \circ \Psi_{\mathfrak{u}}) \\
&= (\Psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \Psi_{\mathfrak{w}}) \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (\Psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \circ \Psi_{\mathfrak{v}})^{-1} \\
&= M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 11.12. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Basen von V.Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bezüglich $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{u}}(\varphi) = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 11.11.

□

Es ist eine wichtige Zielsetzung der linearen Algebra, zu einer gegebenen linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ eine Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ derart zu finden, dass die beschreibende Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(\varphi)$ „möglichst einfach“ wird.

Abbildungsverzeichnis