Numeri interi relativi 2

2.1 I numeri che precedono lo zero

Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio $5 - 12$. Tuttavia ci sono situazioni in cui una sottrazione di questo tipo deve essere eseguita.

Per esempio, è possibile acquistare un'auto di € 12 000 pur avendo soltanto risparmi in banca di soli € 5 000. In questo caso si tratta di togliere dai € 5 000 i € 12 000 che servono per acquistare l'auto: materialmente non è possibile e si ricorre a un prestito.

Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo: «domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi». Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani? Alcuni diranno: «il liquido contenuto nel termometro si posizionerà al di sotto dello zero», altri «domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero» e altri ancora «la temperatura sarà di -1 grado».

Leggiamo nel testo di geografia: «Il punto più profondo della Terra si trova nella fossa delle Marianne; esso supera di 2 061 metri l'altezza del monte Everest e si trova a 10 916 metri sotto il livello del mare». Se attribuiamo al livello del mare l'altitudine 0, allora potremmo esprimere la profondità della Fossa con il numero $-10\,916$ e l'altezza del monte Everest con il numero $+8\,855$ (figura 2.1).

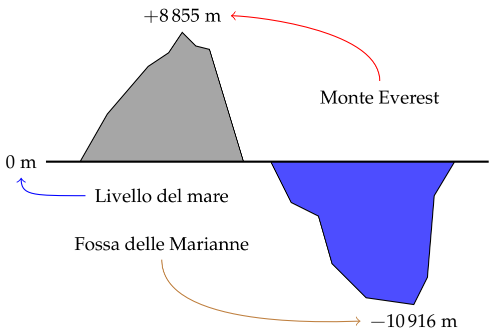


Figura 2.1: Il monte Everest e la fossa delle Marianne.

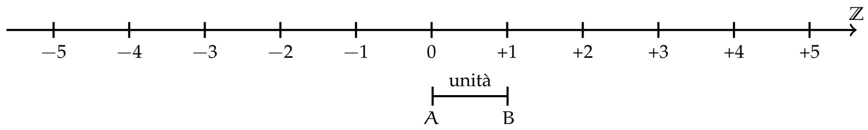
Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperature, crediti e i debiti, latitudine nord e sud, altezze sopra il livello del mare e profondità marine i numeri naturali non bastano. I matematici in queste situazioni usano i *numeri interi relativi* che si scrivono utilizzando gli stessi numeri naturali ma preceduti dal segno "$+$" se sono numeri maggiori di 0 e dal segno "$-$" se sono numeri minori di 0. L'insieme di questi numeri si costruisce raddoppiando i numeri naturali $\mathbb{N}$ e facendo precedere ciascun numero dal segno "$+$" o "$-$", ad eccezione dello 0, al quale non si attribuisce segno.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$$

L'insieme dei numeri relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$. In particolare, l'insieme dei soli numeri interi relativi maggiori o uguali a 0 si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^+$, mentre l'insieme dei numeri interi minori o uguali a 0 si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^-$.

2.2 I numeri relativi e la retta

I numeri relativi possono essere rappresentati su una retta. Disegniamo una retta, su di essa prendiamo un punto di riferimento al quale associamo il numero zero, il verso di percorrenza da sinistra verso destra, un segmento $\overline{AB}$ come unità di misura. Riportiamo questa unità di misura più volte partendo da zero e procedendo nel verso stabilito aggiungiamo ogni volta uno: ai punti trovati associamo gli interi positivi. Ripetiamo l'operazione partendo dallo zero, ma con il verso di percorrenza a sinistra: ai punti trovati associamo gli interi negativi.



Possiamo interpretare questi numeri come il numero di passi da fare sulla retta, partendo dallo zero verso destra se il segno è positivo, verso sinistra se il segno è negativo.

Definizione 2.1. Due numeri relativi si dicono *concordi*, se hanno lo stesso segno; si dicono *discordi* se hanno segni opposti.

Esempio 2.1. Concordi-discordi.

- $+3$ e $+5$ sono concordi;
- $+3$ e -5 sono discordi;
- -5 e -2 sono concordi;
- -3 e $+2$ sono discordi.

Definizione 2.2. Il *valore assoluto* di un numero relativo è il numero senza il segno; quindi un numero naturale.

Il valore assoluto si indica inserendo il numero relativo tra due barre verticali $|*|$. In linguaggio matematico:

$$\boxed{|a| = a \quad \text{se } a \geqslant 0, \qquad |a| = -a \quad \text{se } a < 0.}$$

Esempio 2.2. Valore assoluto.

- $|+2| = 2$;
- $|-5| = 5$;
- $|-73| = 73$;
- $|+13| = 13$.

Definizione 2.3. Due numeri interi relativi sono *uguali* se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto; si dicono *opposti* se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi.

Sono numeri opposti $+3$ e -3; $+5$ e -5; $+19$ e -19.

❑ **Osservazione** Per indicare un numero positivo è possibile scrivere il numero senza il segno "+". Per esempio si può scrivere indifferentemente $+1$ o 1, $+12$ o semplicemente 12.

2.3 Confronto di numeri relativi

Dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra. In particolare:

a) ogni numero intero positivo è maggiore di 0 e di ogni numero negativo;
b) tra due numeri positivi il più grande è quello che ha valore assoluto maggiore;
c) ogni numero negativo è minore di 0 e di ogni numero positivo;
d) tra due numeri negativi il più grande è quello che ha valore assoluto minore;
e) 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.

In maniera analoga a quanto visto per i numeri naturali $\mathbb{N}$, anche per i numeri relativi $\mathbb{Z}$ si possono usare i simboli di disuguaglianza: per indicare, ad esempio, che un numero è maggiore di un altro si usa separare i due numeri con il simbolo "$>$"; per indicare che il primo è minore del secondo si usa mettere tra i due numeri il simbolo "$<$".

Esempio 2.3. Confronto di numeri relativi.

- ➡ $+4 > +2$: i numeri sono positivi, il maggiore è $+4$ perché ha valore assoluto maggiore;
- ➡ $-1 > -3$: i due numeri sono negativi, il maggiore è -1 perché ha valore assoluto minore;
- ➡ $-2 < +4$: il numero negativo è minore del numero positivo;
- ➡ $+4 > 0$: ogni numero positivo è maggiore di 0;
- ➡ $-2 < 0$: ogni numero negativo è minore di 0.

Usando la rappresentazione dei numeri sulla retta l'ordinamento risulta più facile da verificare: il verso di percorrenza della retta (la freccia) indica la direzione nella quale i numeri crescono.

✍ *Esercizi proposti:* 2.1, 2.2, 2.3, 2.4

2.4 Le operazioni con i numeri relativi

Con i numeri relativi è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni e le sottrazioni. Questo significa che se si addizionano, si sottraggono o si moltiplicano due numeri relativi il risultato si trova sempre nella retta dei numeri relativi.

2.4.1 Addizione

Osserviamo prima di tutto che il simbolo di addizione $(+)$ è lo stesso che si usa per indicare il segno dei numeri positivi, pertanto occorre prestare attenzione quando si incontra il segno "+" al significato che esso ha. Almeno all'inizio è bene usare una scrittura del tipo $(+2) + (+5)$ per indicare la somma tra i numeri $+2$ e $+5$.

L'addizione di due numeri relativi si esegue in due modi diversi a seconda che gli addendi siano concordi o discordi.

La *somma di due numeri relativi concordi* è il numero che ha per valore assoluto la somma dei singoli valori assoluti e come segno lo stesso segno degli addendi.

Esempio 2.4. Somma di numeri relativi concordi.

- $(+3)+(+5)=\ldots$: i due numeri da sommare sono concordi, il loro segno è "+", i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro somma è 8. Pertanto
$$(+3)+(+5)=+8;$$
- $(-2)+(-5)=\ldots$: i due numeri sono entrambi negativi, quindi sono concordi, i loro valori assoluti sono 2 e 5, la somma ha valore assoluto 7, il segno è "−". Pertanto
$$(-2)+(-5)=-7.$$

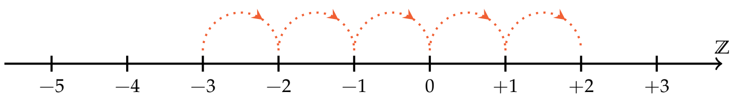
La *somma di due numeri relativi discordi* è il numero che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti e come segno il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.

Esempio 2.5. Somma di numeri relativi discordi.

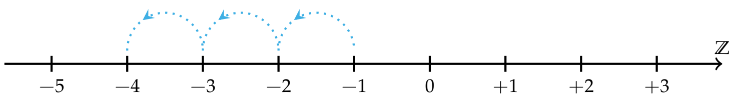
- $(-5)+(+2)=\ldots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è -5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di -5, cioè è negativo. In definitiva
$$(-5)+(+2)=-3;$$
- $(+5)+(-2)=\ldots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la loro differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è $+5$, pertanto il risultato ha lo stesso segno di $+5$, cioè è positivo. In definitiva
$$(+5)+(-2)=+3;$$
- $(+3)+(-7)=\ldots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 3 e 7, la loro differenza è 4, il numero che ha valore assoluto maggiore è -7, quindi il risultato ha segno negativo. In definitiva
$$(+3)+(-7)=-4.$$

L'addizione si può rappresentare sulla retta dei numeri come l'azione di muoversi nel verso indicato dal segno del secondo addendo: se è positivo si va verso destra, se è negativo si va verso sinistra, iniziando dal punto che rappresenta il primo addendo.

$$(-3)+(+5)=2$$



$$(-1)+(-3)=-4$$



✍ *Esercizi proposti:* 2.6, 2.7, 2.8

2.4.2 Sottrazione

La sottrazione tra due numeri relativi si esegue facendo la somma del primo numero con l'opposto del secondo.

Esempio 2.6. Sottrazione di numeri relativi.

- $(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = -1$;
- $(+1) - (+3) = (+1) + (-3) = -2$;
- $(+7) - (-2) = (+7) + (+2) = +9$;
- $(-2) - (-1) = (-2) + (+1) = -1$;
- $(+3) - (-7) = (+3) + (+7) = +10$;
- $(-5) - (+5) = (-5) + (-5) = -10$.

Cambio la sottrazione in addizione

$$(+2) \; - \; (+3) \; = \; (+2) \; + \; (-3)$$

Cambio il numero +3 con il suo opposto −3

Figura 2.2

✍ *Esercizi proposti:* 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13

2.4.3 Somma algebrica

Poiché la sottrazione può essere trasformata in addizione, si può semplificare la scrittura di addizione e sottrazione di numeri relativi utilizzando soltanto l'operazione di addizione e omettendo di scrivere il segno "+" dell'addizione. Questo tipo di addizione tra numeri relativi si chiama *somma algebrica*.

Esempio 2.7. Somma algebrica.

- $(+1) + (-2)$: se omettiamo il segno di addizione $(+)$ e le parentesi otteniamo $1 - 2 = -1$;
- $(+1) - (+3)$: si trasforma la sottrazione in addizione con l'opposto $(+1) + (-3)$ omettendo il segno di addizione $(+)$ ed eliminando le parentesi si ottiene $1 - 3 = -2$;
- $(-1) + (+2) + (-3) + (+2) + (-7) + (-5)$: si scrive in modo sintetico

$$-1 + 2 - 3 + 2 - 7 - 5 = -12.$$

La somma algebrica gode delle proprietà associativa e commutativa, pertanto per sommare più numeri relativi si può procedere senza rispettare l'ordine in cui sono scritti.

Per esempio per calcolare il risultato di $-1 + 2 - 3 + 2 - 7 - 5$ si possono prima sommare tra di loro i numeri positivi e $+2 + 2 = +4$ e poi tra di loro i numeri negativi $-1 - 3 - 7 - 5 = -16$. Quindi $+4 - 16 = -12$.

✍ *Esercizi proposti:* 2.14, 2.15

2.4.4 Moltiplicazione

Dati due interi relativi da moltiplicare si chiamano *fattori* i due numeri e *prodotto* il risultato dell'operazione.

Il *prodotto di due numeri interi relativi* è il numero intero avente come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e come segno il segno "+" se i fattori sono concordi, il segno "−" se i fattori sono discordi.

Esempio 2.8. Prodotto di numeri relativi.

- $(+3) \cdot (-2) = -6$: il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi;
- $(-2) \cdot (-3) = +6$: il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi;
- $(+5) \cdot (+3) = +15$: il numero 15 si ottiene da $5 \cdot 3$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi;
- $(-1) \cdot (+2) = -2$: il numero 2 si ottiene da $1 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.

Per determinare il segno di un prodotto si può ricorrere alla seguente regola dei segni: nella prima riga e nella prima colonna sono collocati i segni dei fattori, all'incrocio tra la riga e la colonna c'è il segno del risultato.

·	+	−
+	+	−
−	−	+

Nel caso si debbano eseguire più moltiplicazioni il segno del prodotto è negativo se il segno meno è presente in un numero dispari di fattori; se il segno negativo non è presente oppure è presente un numero pari di volte il prodotto è positivo.

Perché "meno" per "meno" fa "più"? Una possibile spiegazione.

$$0 = 0 \cdot (-2) = (-3+3) \cdot (-2) = (-3) \cdot (-2) + (+3) \cdot (-2) = (-3) \cdot (-2) - 6.$$

Quale valore dobbiamo assegnare a $(-3) \cdot (-2)$ affinché il numero ottenuto sommato a -6 dia 0? Evidentemente il numero $+6$.

Esempio 2.9. La regola dei segni.

- $(+3) \cdot (+2) \cdot (-2) = -12$: il risultato è negativo perché vi è un solo segno "−" tra i fattori;
- $(-2) \cdot (-3) \cdot (+5) \cdot (-2) \cdot (-1) = +60$: il risultato è positivo perché ci sono quattro segni "−";
- $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (+2) \cdot (-3) = -72$: il risultato è negativo poiché ci sono cinque "−".

✍ *Esercizi proposti:* 2.16, 2.17, 2.18

2.4.5 Divisione

La regola della divisione è del tutto analoga a quella della moltiplicazione. Per dividere due numeri relativi si dividono i valori assoluti e si attribuisce al risultato il segno "+" se i numeri da dividere sono concordi, il segno "−" se i numeri sono discordi.

Osserva che mentre addizione, sottrazione e moltiplicazione sono operazioni sempre possibili tra numeri interi relativi, ossia il risultato di queste operazioni è sempre un numero intero relativo, il risultato della divisione non sempre è un numero intero relativo. La divisione tra numeri relativi è possibile se è possibile la divisione tra i loro valori assoluti, ossia se il divisore è diverso da zero ed è un sottomultiplo del dividendo.

Esempio 2.10. Divisione di numeri relativi.

- $(+8) : (+2) = +4$: il risultato è 4 perché $8 : 2 = 4$, il segno è "+" perché sono concordi;
- $(+9) : (-3) = -3$: il risultato è 3 perché $9 : 3 = 3$, il segno è "−" perché sono discordi;
- $(-12) : (-4) = +3$: il risultato è 3 poiché $12 : 4 = 3$, il segno è "+" perché sono concordi.

✍ *Esercizi proposti:* 2.19, 2.20, 2.21

2.4.6 Potenza di un numero relativo

La definizione di potenza per un numero relativo è la stessa di quella data per i numeri naturali (in questo caso la base è un numero relativo ma l'esponente è un numero naturale). Si moltiplicano tra di loro tanti fattori uguali alla base quante volte è indicato dall'esponente. L'unica attenzione che dobbiamo avere è quella relativa al segno:

- se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;
- se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari il risultato è negativo, se l'esponente è pari il risultato è un numero positivo.

Esempio 2.11. Potenze di numeri relativi.

- $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$;
- $(+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27$;
- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$;
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;
- $(-2)^4 = +16$;
- $(-2)^5 = -32$;
- $(-1)^6 = +1$;
- $(-1)^7 = -1$.

Ricordiamo che un qualsiasi numero, diverso da 0, elevato a 0 dà come risultato il numero 1 e che qualsiasi numero elevato a 1 rimane invariato.

$$a^0 = 1 \text{ con } a \neq 0, \qquad a^1 = a.$$

Esempio 2.12. Potenze di numeri relativi, con esponente 0 o 1.

$$(-3)^0 = 1, \qquad (+5)^0 = 1, \qquad (-2)^1 = -2, \qquad (+7)^1 = +7.$$

✍ *Esercizi proposti:* 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26, 2.27

2.4.7 Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri relativi

Proprietà commutativa

Un'operazione gode della proprietà *commutativa* se cambiando l'ordine dei termini il risultato non cambia.

Somma algebrica $a + b = b + a$.

Vale la proprietà commutativa: $-3 + 5 = 5 - 3 = +2$.

Moltiplicazione $a \cdot b = b \cdot a$.

Vale la proprietà commutativa: $(-3) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-3) = +15$.

Potenza $a^b \neq b^a$.

Non vale la proprietà commutativa: $3^2 = 9 \neq 2^3 = 8$.

Proprietà associativa

Un'operazione gode della proprietà *associativa* se presi tre numeri si ottiene sempre lo stesso risultato indipendentemente da come si raggruppano i numeri per eseguire l'operazione.

Somma algebrica $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Dovendo sommare $+3 - 5 - 2$ e raggruppando i primi due numeri si ha

$$(+3 - 5) - 2 = -2 - 2 = -4.$$

Raggruppando gli ultimi due numeri si ha $3 + (-5 - 2) = 3 - 7 = -4$.

Nella somma algebrica tra numeri relativi *vale* la proprietà associativa.

Moltiplicazione $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Dovendo moltiplicare tre o più numeri relativi si può procedere scegliendo a piacere da quale moltiplicazione iniziare. Per esempio, dovendo moltiplicare $(-3) \cdot (-5) \cdot (-2)$, si può cominciare dalla prima moltiplicazione

$$[(-3) \cdot (-5)] \cdot (-2) = (+15) \cdot (-2) = (-30).$$

Oppure si può cominciare dalla seconda moltiplicazione

$$(-3) \cdot [(-5) \cdot (-2)] = (-3) \cdot (+10) = (-30).$$

Nella moltiplicazione tra numeri relativi *vale* quindi la proprietà associativa.

Elemento neutro

Un'operazione su uno specifico insieme numerico ha *elemento neutro* se esiste, ed è unico, un numero che composto con un qualsiasi altro numero lo lascia inalterato.

Nella somma algebrica l'elemento neutro è 0 sia che si trovi a destra sia che si trovi a sinistra dell'operazione:

$$+3 + 0 = +3, \qquad -2 + 0 = -2, \qquad 0 + 5 = +5, \qquad 0 - 4 = -4.$$

Nella moltiplicazione l'elemento neutro è $+1$ sia a destra sia a sinistra:

$$-5 \cdot (+1) = -5, \qquad +3 \cdot (+1) = +3, \qquad +1 \cdot (-3) = -3, \qquad +1 \cdot (+7) = +7.$$

Nella divisione l'elemento neutro è $+1$ solo se si trova a destra:

$$a : (+1) = a, \qquad +1 : a = \dots.$$

Dividendo $+1$ per un numero intero relativo si ottiene un numero intero solo se il divisore è $+1$ o -1.

2.4.8 Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà, detta *distributiva*, vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Esempio 2.13. Verifica della proprietà distributiva nell'espressione: $+3 \cdot (-2 + 5)$.

$$+3 \cdot (-2 + 5) = (+3) \cdot (-2) + (+3) \cdot (+5) = -6 + 15 = +9$$
$$+3 \cdot (-2 + 5) = (+3) \cdot (+3) = +9$$

Otteniamo lo stesso risultato se applichiamo la proprietà distributiva o se eseguiamo per prima la somma algebrica tra parentesi.

✍ *Esercizi proposti:* 2.28, 2.29