Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 35

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 35.1. Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

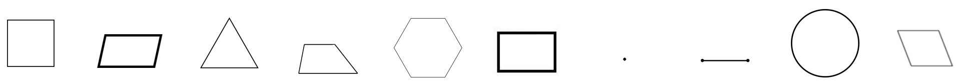
$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 35.2. Welche der folgenden Figuren können als Bild eines Quadrates unter einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auftreten?



Aufgabe 35.3.*

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} , \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 35.4. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass zu $v \in K^n$ die Abbildung

$$K \longrightarrow K^n,\ \lambda \longmapsto \lambda v,$$

linear ist.

Aufgabe 35.5. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass zu $a \in K$ die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K^n,\, v \longmapsto av,$$

linear ist.

Aufgabe 35.6. Es sei K ein Körper und seien $\varphi\colon K^n \to K^m$ und $\psi\colon K^n \to K^\ell$ lineare Abbildungen. Zeige, dass auch die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K^m \times K^\ell,\, v \longmapsto (\varphi(v), \psi(v)),$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 35.7.*

Es sei K ein Körper und sei $\varphi\colon K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Es ist $\varphi(0) = 0$.
(2) Für jede Linearkombination $\sum_{i=1}^k s_i v_i$ in K^n gilt

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k s_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k s_i \varphi\left(v_i\right).$$

Aufgabe 35.8. Es sei K ein Körper und seien $\psi\colon K^p \to K^n$ und $\varphi\colon K^n \to K^m$ lineare Abbildungen. Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Die Hintereinanderschaltung

$$\varphi \circ \psi\colon K^p \longrightarrow K^m$$

ist ebenfalls linear.
(2) Wenn φ bijektiv ist, so ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon K^m \longrightarrow K^n$$

linear.

Aufgabe 35.9.*

Bestimme den Kern der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 35.10.*

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 35.11. Es sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die durch die lineare Gleichung $5x+7y-4z = 0$ gegebene Ebene. Bestimme eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

derart, dass das Bild von φ gleich E ist.

Aufgabe 35.12. Zeige, dass das Bild einer Geraden $G \subseteq K^n$ unter einer linearen Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^m$ entweder eine Gerade oder ein Punkt im K^m ist.

Aufgabe 35.13. Es sei $\varphi\colon K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass das Urbild eines Punktes $Q \in K^m$ ein affiner Unterraum des K^n ist.

Aufgabe 35.14. Es sei M eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K, $\varphi\colon K^n \to K^m$ die zugehörige lineare Abbildung und $Mx = c$ das (vom Störvektor $c \in K^m$ abhängige) zugehörige lineare Gleichungssystem. Zeige, dass die Lösungsmenge des Systems gleich dem Urbild von c unter der linearen Abbildung φ ist.

Aufgabe 35.15.*

Ergänze den Beweis zu Satz 35.10 um die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation.

Aufgabe 35.16. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimme die Anzahl der linearen Abbildungen

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^m.$$

Aufgabe 35.17. Mustafa Müller hat seinen neunten Geburtstag. Für die Feier backt seine Oma drei Himbeerkuchen, zwei Käsekuchen und vier Apfelkuchen. Berechne die insgesamt benötigten Zutaten mit Hilfe von Beispiel 35.12.

Aufgabe 35.18. Beschreibe die Situation aus Beispiel 31.4 mit Hilfe einer linearen Abbildung.

Aufgabe 35.19. In einer Kekspackung befinden sich Schokokekse, Waffelröllchen, Mandelsterne und Nougatringe. Die Kalorien, der Vitamin C-Gehalt und der Anteil an linksdrehenden Fettsäuren werden durch folgende Tabelle (in geeigneten Maßeinheiten) wiedergegeben:

Sorte	Kalorien	Vitamin C	Fett
Schokokeks	10	5	3
Waffelröllchen	8	7	6
Mandelstern	7	3	1
Nougatring	12	0	5

a) Beschreibe mit einer Matrix die Abbildung, die zu einem Verzehrtupel (x, y, z, w) das Aufnahmetupel (K, V, F) berechnet.

b) Heinz isst 100 Schokokekse. Berechne seine Vitaminaufnahme.

c) Ludmilla isst 10 Nougatringe und 11 Waffelröllchen. Berechne ihre Gesamtaufnahme an Nährstoffen.

d) Peter isst 5 Mandelsterne mehr und 7 Schokokekse weniger als Fritz. Bestimme die Differenz ihrer Kalorienaufnahme.

Aufgabe 35.20.*

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

	R_1	R_2	R_3
P_1	6	2	3
P_2	4	1	2
P_3	0	5	2
P_4	2	1	5

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Dreiertupel von Produktmengen die benötigten Rohstoffe berechnet.

b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

	P_1	P_2	P_3	P_4
	6	4	7	5

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

	R_1	R_2	R_3
	12	9	13

Welche Produkttupel kann man daraus ohne Abfall produzieren?

Aufgabe 35.21.*

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.

(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe 35.22. Die Telefonanbieter A, B und C kämpfen um einen Markt, wobei die Marktaufteilung im Jahr j durch das Kundentupel $K_j = (a_j, b_j, c_j)$ ausgedrückt wird (dabei steht a_j für die Anzahl der Kunden von A im Jahr j u.s.w.). Es sind regelmäßig folgende Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres zu beobachten.

(1) Die Kunden von A bleiben zu 80% bei A und wechseln zu je 10% zu B bzw. zu C.
(2) Die Kunden von B bleiben zu 70% bei B und wechseln zu 10% zu A und zu 20% zu C.
(3) Die Kunden von C bleiben zu 50% bei C und wechseln zu 20% zu A und zu 30% zu B.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die das Kundentupel K_{j+1} aus K_j berechnet.

b) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(12000, 10000, 8000)$ innerhalb eines Jahres?

c) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(10000, 0, 0)$ in vier Jahren?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 35.23. (3 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 35.24. (2 Punkte)

Es sei $\varphi\colon K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass der Kern von φ ein Untervektorraum des K^n ist.

Aufgabe 35.25. (4 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum $G = \mathbb{R}^4$ der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 8z + 9n + 5r + s,$$

und

$$\kappa\colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 2z + n + 4r + 8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für $\operatorname{kern} \pi$, für $\operatorname{kern} \kappa$ und für $\operatorname{kern}(\pi \times \kappa)$.

Aufgabe 35.26. (4 (2+2) Punkte)

Es sei K ein Körper und sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Familie von Vektoren im K^n. Zeige, dass für die lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^m \longrightarrow K^n, (s_1, \ldots, s_m) \longmapsto \sum_{i=1}^{m} s_i v_i,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

(1) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_m$ ein Erzeugendensystem von K^n ist.
(2) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von K^n ist.

Aufgabe 35.27. (6 (3+1+2) Punkte)

Eine Tierpopulation besteht aus Traglingen (erstes Lebensjahr), Frischlingen (zweites Lebensjahr), Halbstarken (drittes Lebensjahr), Reifen (viertes Lebensjahr) und alten Hasen (fünftes Lebensjahr), älter können diese Tiere nicht werden. Der Gesamtbestand dieser Tiere in einem bestimmten Jahr j wird daher durch ein 5-Tupel $B_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}, b_{4,j}, b_{5,j})$ angegeben.

Von den Traglingen erreichen 7/8-tel das Frischlingsalter, von den Frischlingen erreichen 9/10-tel das Halbstarkenalter, von den Halbstarken erreichen 5/6-tel das reife Alter und von den Reifen erreichen 2/3-tel das fünfte Jahr.

Traglinge und Frischlinge können sich noch nicht vermehren, dann setzt die Geschlechtsreife ein und 10 Halbstarke zeugen 5 Nachkommen und 10 Reife zeugen 8 Nachkommen, wobei die Nachkommen ein Jahr später geboren werden.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die den Gesamtbestand B_{j+1} aus dem Bestand B_j berechnet.

b) Was wird aus dem Bestand $(200, 150, 100, 100, 50)$ im Folgejahr?

c) Was wird aus dem Bestand $(0, 0, 100, 0, 0)$ in fünf Jahren?

Abbildungsverzeichnis