Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 21

Übungsaufgaben

Aufgabe 21.1. In einer Familie leben M, P, S und T. Dabei ist M dreimal so alt wie S und T zusammen, M ist älter als P und S ist älter als T, wobei der Altersunterschied von S zu T doppelt so groß wie der von M zu P ist. Ferner ist P siebenmal so alt wie T und die Summe aller Familienmitglieder ist so alt wie die Großmutter väterlicherseits, nämlich 83.

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das die beschriebenen Verhältnisse ausdrückt.

b) Löse dieses Gleichungssystem.

Aufgabe 21.2.*

Kevin zahlt für einen Winterblumenstrauß mit 3 Schneeglöckchen und 4 Mistelzweigen 2,50 € und Jennifer zahlt für einen Strauß aus 5 Schneeglöckchen und 2 Mistelzweigen 2,30 €. Wie viel kostet ein Strauß mit einem Schneeglöckchen und 11 Mistelzweigen?

Aufgabe 21.3. Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x + 6y &= 0 \\ 5x + 8y &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $(0, 0)$ besitzt.

Aufgabe 21.4. Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, so dass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wie viel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

Aufgabe 21.5. Löse das lineare Gleichungssystem

$$x + y + z = 0.$$

Aufgabe 21.6. Löse das lineare Gleichungssystem

$$x = 5,\ 2y = 3,\ 4z + w = 3\,.$$

Aufgabe 21.7.*

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} 3x & & +z & +4w & = & 4 \\ 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ x & +3y & +5z & & = & 3\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.8. Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2y & +3z & +4w & = & 1 \\ 2x & +3y & +4z & +5w & = & 7 \\ x & & +z & & = & 9 \\ x & +5y & +5z & +w & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.9. Gibt es eine Lösung $(a,b,c) \in \mathbb{Q}$ für das lineare Gleichungssystem

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 21.1?

Aufgabe 21.10. Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass alle Koeffizienten ganzzahlig sind.

Aufgabe 21.11. Bringe das lineare Gleichungssystem

$$3x - 4 + 5y = 8z + 7x,$$

$$2 - 4x + z = 2y + 3x + 6,$$

$$4z - 3x + 2x + 3 = 5x - 11y + 2z - 8$$

in Standardgestalt und löse es.

Aufgabe 21.12.*

Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2,3)$ und $(5,-7)$ verläuft.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an den Begriff der Sekante, der schon im Kontext der Differentialrechnung aufgetaucht ist.

Zu einer auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

und zwei verschiedenen Punkten $a, b \in T$ heißt die Gerade durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ die *Sekante* von f an a und b.

Aufgabe 21.13. Bestimme eine Geradengleichung der Sekante der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto -x^3 + x^2 + 2,$$

zu den Stellen 3 und 4.

Aufgabe 21.14. Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1,0,0),(0,1,2) \text{ und } (2,3,4)$$

liegen.

Aufgabe 21.15. Finde zu einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i} \neq 0$ die inverse komplexe Zahl mit Hilfe eines reellen linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen.

Aufgabe 21.16. Löse über den komplexen Zahlen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{i}x & +y & +(2-\mathrm{i})z & = & 2 \\ & 7y & +2\mathrm{i}z & = & -1+3\mathrm{i} \\ & & (2-5\mathrm{i})z & = & 1\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.17. Es sei K der in Beispiel 4.4 eingeführte Körper mit zwei Elementen. Löse in K das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & & = & 1 \\ & y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.18. Zeige durch ein Beispiel, dass das durch die drei Gleichungen I,II,III gegebene lineare Gleichungssystem nicht zu dem durch die drei Gleichungen I-II, I-III, II-III gegebenen linearen Gleichungssystem äquivalent sein muss.

In den folgenden vier Aufgaben geht es insbesondere darum, ein für die Aufgabenstellung angemessenes Lösungsverfahren zu finden und durchzuführen.

Aufgabe 21.19. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} & +7y & +3z & & = & 4 \\ x & & & +4w & = & 9 \\ & -3y & -5z & & = & 2 \\ -2x & & & +3w & = & 3 \end{array}.$$

Aufgabe 21.20. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7y &= 5, \\ 4z &= 8, \\ 2u - 3v &= 0, \\ 5w &= 0, \\ 6x - 3y + 2z - 11u - v + 5w &= 17, \\ 4u - 5v &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 21.21.*

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - 5y + 7z &= -3, \\ -2x + 4y + 3z &= 9, \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Aufgabe 21.22. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 67y + 14z - 123u - 51w &= 5, \\ 8x - 11y + 12z - 27u - 65w &= 51, \\ 66x - 67y - 77z - u + 100w &= 0, \\ 8x - 11y + 12z - 27u - 65w &= -15, \\ -301x + 44y + 33z - 31u - 18w &= 571. \end{aligned}$$

Aufgabe 21.23.*

Bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $L_a \subseteq \mathbb{R}^3$ der linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5x + ay + (1-a)z &= 0, \\ 2ax + a^2y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 21.24. Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

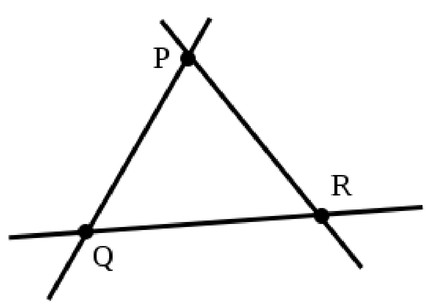
$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ x + y &\leq 1, \end{aligned}$$

gegeben. Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

Aufgabe 21.25. Es sei

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geq c_1, \\ a_2x + b_2y &\geq c_2, \\ a_3x + b3y &\geq c_3, \end{aligned}$$

ein lineares Ungleichungssystem, dessen Lösungsmenge ein Dreieck sei. Wie sieht die Lösungsmenge aus, wenn man in jeder Ungleichung $\geq$ durch $\leq$ ersetzt?



Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.26. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & +2y & +3z & +4w & = & 1 \\ 2x & +3y & +4z & +5w & = & 7 \\ x & & +z & & = & 9 \\ x & +5y & +5z & +w & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.27. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, das durch die beiden Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 0$$

und

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 + x_9 - x_{10} = 0$$

gegeben ist.

Aufgabe 21.28. (3 Punkte)

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y + 5z = 2\} \text{ und}$$
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = -1\}.$$

Bestimme die Schnittgerade $E \cap F$.

Aufgabe 21.29. (3 Punkte)

Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1, 0, 2), (4, -3, 2) \text{ und } (2, 1, -1)$$

liegen.

Aufgabe 21.30. (4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} 2x & -ay & & = & -2 \\ ax & & +3z & = & 3 \\ -\frac{1}{3}x & +y & +z & = & 2 \end{array}$$

über den reellen Zahlen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Für welche a besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

AUFGABE 21.31. (4 Punkte)

Zeige, dass ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

genau dann nur die triviale Lösung $(0, 0)$ besitzt, wenn $ad - bc \neq 0$ ist.

AUFGABE 21.32. (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y + x &\geq 0, \\ -1 - y &\leq -x, \\ 5y - 2x &\geq 3, \end{aligned}$$

gegeben.

a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.

Abbildungsverzeichnis