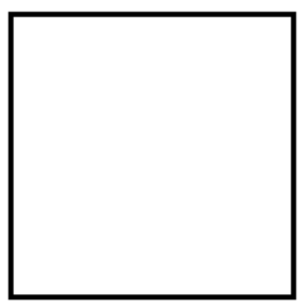
Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2024/2025

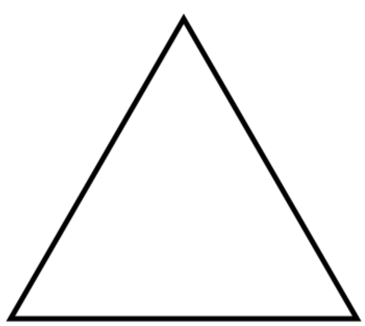
Lineare Algebra

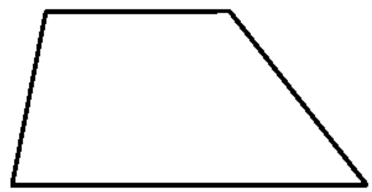
Arbeitsblatt 11

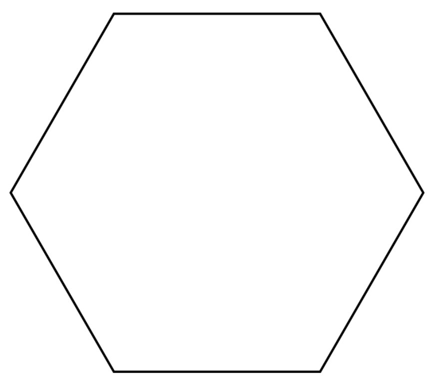
Die Pausenaufgabe

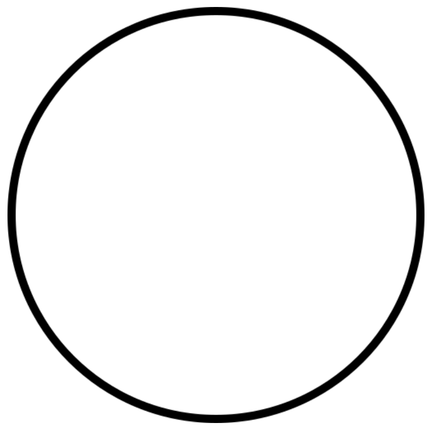
Aufgabe 11.1. Welche der folgenden Figuren können als Bild eines Quadrates unter einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auftreten?

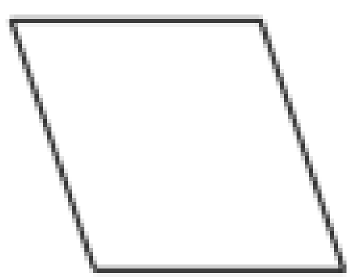












Übungsaufgaben

Aufgabe 11.2.*

Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Untervektorraum von W.
(2) Insbesondere ist das Bild $\operatorname{bild}\varphi = \varphi(V)$ der Abbildung ein Untervektorraum von W.
(3) Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Untervektorraum von V.
(4) Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 11.3.*

Bestimme den Kern der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 11.4.*

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.5. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

(1) Bestimme das Bild der durch die Gleichung

$$5x - 7y = 0$$

gegebenen Geraden.

(2) Bestimme das Urbild der durch die Gleichung

$$6x - 11y = 0$$

gegebenen Geraden.

Aufgabe 11.6.*

Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es einen K-Vektorraum W und eine surjektive K-lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

derart gibt, dass $U = \operatorname{kern} \varphi$ ist.

Aufgabe 11.7. Es sei eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wie in Beispiel 10.11 gegeben, um räumliche Figuren in der Ebene darzustellen. Man stelle sich das Urbild zu einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ vor. Wie sehen die zugehörigen Geradengleichungen aus? Welche Punkte $Q \in \mathbb{R}^3$ besitzen den gleichen Bildpunkt wie der Eckpunkt $(1, 1, 1)$ des Einheitswürfels?

Aufgabe 11.8. Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, x \longmapsto A \cdot x$$

die zugehörige lineare Abbildung.

(1) Bestimme jeweils eine Basis und die Dimension von $\operatorname{kern} f$ und $\operatorname{bild} f$.
(2) Finde einen Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^3$ derart, dass

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus \operatorname{kern} f$$

gilt.
(3) Gibt es auch einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^2$, $U \neq 0$, mit $\mathbb{R}^2 = U \oplus \operatorname{bild} f$?

Aufgabe 11.9. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $\operatorname{kern} f = \operatorname{kern} (f \circ f)$,
(2) $\operatorname{kern} f \cap \operatorname{bild} f = \{0\}$,
(3) $V = \operatorname{kern} f \oplus \operatorname{bild} f$,
(4) $\operatorname{bild} f = \operatorname{bild} (f \circ f)$.

Aufgabe 11.10. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2 - 1.$$

Zeige, dass für diese Abbildung weder Bilder von Untervektorräumen $U \subseteq \mathbb{R}$ wieder Untervektorräume noch Urbilder von Untervektorräumen wieder Untervektorräume sind.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einem Vektor $v \in V$ nennt man die Abbildung

$$V \longrightarrow V,\, x \longmapsto x + v,$$

die *Verschiebung* (oder die *Translation*) um den Vektor v.

Eine Verschiebung ist im Allgemeinen keine lineare Abbildung, da 0 nicht auf 0 abgebildet wird. Man spricht von einer affin-linearen Abbildung, worauf wir später zurückkommen werden.

Aufgabe 11.11. Es sei $F \subseteq \mathbb{R}^n$ eine „geometrische Figur", beispielsweise ein Kreis oder ein Rechteck in der Ebene. Es sei

$$\theta_w \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, x \longmapsto x + w,$$

die Verschiebung um den Vektor w und es sei $F' = \theta_w(F)$ die verschobene Figur. Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass das Bild $\varphi(F')$ aus dem Bild $\varphi(F)$ durch eine Verschiebung hervorgeht.

Aufgabe 11.12. Wie sieht der Graph einer linearen Abbildung

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$h \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus? Wie sieht man in einer Skizze des Graphen den Kern der Abbildung?

Aufgabe 11.13. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die nicht injektiv ist, deren Einschränkung

$$\mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

aber injektiv ist.

Aufgabe 11.14.*

Es sei $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (bezüglich der Standardbasis) festgelegte lineare Abbildung. Bestimme die beschreibende Matrix zu φ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11.15. Die Telefonanbieter A, B und C kämpfen um einen Markt, wobei die Marktaufteilung im Jahr j durch das Kundentupel $K_j = (a_j, b_j, c_j)$ ausgedrückt wird (dabei steht a_j für die Anzahl der Kunden von A im Jahr j usw.). Es sind regelmäßig folgende Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres zu beobachten.

(1) Die Kunden von A bleiben zu 80% bei A und wechseln zu je 10% zu B bzw. zu C.
(2) Die Kunden von B bleiben zu 70% bei B und wechseln zu 10% zu A und zu 20% zu C.
(3) Die Kunden von C bleiben zu 50% bei C und wechseln zu 20% zu A und zu 30% zu B.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die das Kundentupel K_{j+1} aus K_j berechnet. b) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(12000, 10000, 8000)$ innerhalb eines Jahres? c) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(10000, 0, 0)$ in vier Jahren?

Aufgabe 11.16.*

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt. b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus? c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe 11.17. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^3 \longrightarrow K^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sei $U \subseteq K^3$ der durch die lineare Gleichung $2x + 3y + 4z = 0$ definierte Untervektorraum von K^3, und ψ sei die Einschränkung von φ auf U. Zu U gehören Vektoren der Form

$$u = (0, 1, a),\ v = (1, 0, b) \text{ und } w = (1, c, 0)\,.$$

Berechne a, b, c und die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$\mathfrak{b}_1 = v, w,\ \mathfrak{b}_2 = u, w \text{ und } \mathfrak{b}_3 = u, v$$

von U sowie die beschreibenden Matrizen für ψ bezüglich dieser drei Basen (und der Standardbasis auf K^2).

Aufgabe 11.18. Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Die Standardbasen seien mit $\mathfrak{e}_4$ und $\mathfrak{e}_3$ bezeichnet. Die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

sei durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen gegeben. Bestimme die beschreibenden Matrizen von f bezüglich der Basen

a) $\mathfrak{e}_4$ und $\mathfrak{v}$,

b) $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{e}_3$,

c) $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$.

Aufgabe 11.19. Beweise Satz 9.7 mit Hilfe von Satz 11.5.

Aufgabe 11.20. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn die beschreibende Matrix unabhängig von den gewählten Basen ist.

Aufgabe 11.21. Zeige Korollar 8.10 mit Hilfe von Korollar 11.9 und Aufgabe 10.23.

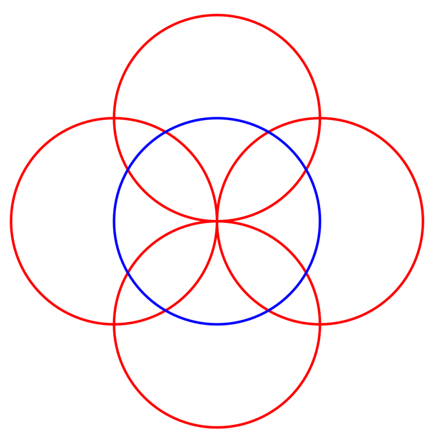
Aufgabe 11.22. Beweise Lemma 9.5 mit Hilfe von Lemma 11.10 und Beispiel 10.13.

Die folgende Aufgabe verwendet den Isomorphiebegriff für Gruppen. Die Bearbeitung der Frage erfordert den Mächtigkeitsbegriff, das Ergebnis mag etwas verwirrend sein.

Aufgabe 11.23. Es seien V und W vom Nullraum verschiedene, endlichdimensionale reelle Vektorräume. Sind sie als kommutative Gruppen isomorph?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.24. (3 Punkte)



Skizziere das Bild der dargestellten Kreise unter der durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung vom $\mathbb{R}^2$ in sich.

Aufgabe 11.25. (3 Punkte)

Bestimme das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.26. (3 Punkte)

Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die durch die lineare Gleichung $5x + 7y - 4z = 0$ gegebene Ebene. Bestimme eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

derart, dass das Bild von φ gleich E ist.

Aufgabe 11.27. (3 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum

$$G = \mathbb{R}^4$$

der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 8z + 9n + 5r + s,$$

und

$$\kappa\colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 2z + n + 4r + 8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für $\operatorname{kern} \pi$, für $\operatorname{kern} \kappa$ und für $\operatorname{kern}(\pi \times \kappa)$.[1]

Aufgabe 11.28. (6 (3+1+2) Punkte)

Eine Tierpopulation besteht aus Traglingen (erstes Lebensjahr), Frischlingen (zweites Lebensjahr), Halbstarken (drittes Lebensjahr), Reifen (viertes Lebensjahr) und alten Hasen (fünftes Lebensjahr), älter können diese Tiere nicht werden. Der Gesamtbestand dieser Tiere in einem bestimmten Jahr j wird daher durch ein 5-Tupel

$$B_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}, b_{4,j}, b_{5,j})$$

angegeben. Von den Traglingen erreichen 7/8-tel das Frischlingsalter, von den Frischlingen erreichen 9/10-tel das Halbstarkenalter, von den Halbstarken erreichen 5/6-tel das reife Alter und von den Reifen erreichen 2/3-tel das fünfte Jahr. Traglinge und Frischlinge können sich noch nicht vermehren, dann setzt die Geschlechtsreife ein und 10 Halbstarke zeugen 5 Nachkommen

[1] Man störe sich nicht daran, dass hier negative Zahlen vorkommen können. In einem trinkbaren Glühwein kommen natürlich die Zutaten nicht mit einem negativen Koeffizienten vor. Wenn man sich aber beispielsweise überlegen möchte, auf wie viele Arten man eine bestimmte Rezeptur ändern kann, ohne dass sich der Gesamtpreis oder die Energiemenge ändert, so ergeben auch negative Einträge einen Sinn.

und 10 Reife zeugen 8 Nachkommen, wobei die Nachkommen ein Jahr später geboren werden.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die den Gesamtbestand B_{j+1} aus dem Bestand B_j berechnet.

b) Was wird aus dem Bestand (200, 150, 100, 100, 50) im Folgejahr?

c) Was wird aus dem Bestand (0, 0, 100, 0, 0) in fünf Jahren?

Aufgabe 11.29. (3 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und es sei

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, w \longmapsto zw,$$

die dadurch definierte Multiplikation, die eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist. Wie sieht die Matrix zu dieser Abbildung bezüglich der reellen Basis 1 und i aus? Zeige, dass zu zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 mit den beiden reellen Matrizen M_1 und M_2 die Produktmatrix $M_2 \circ M_1$ die beschreibende Matrix zu $z_1 z_2$ ist.

Abbildungsverzeichnis