QUESTÃO 8

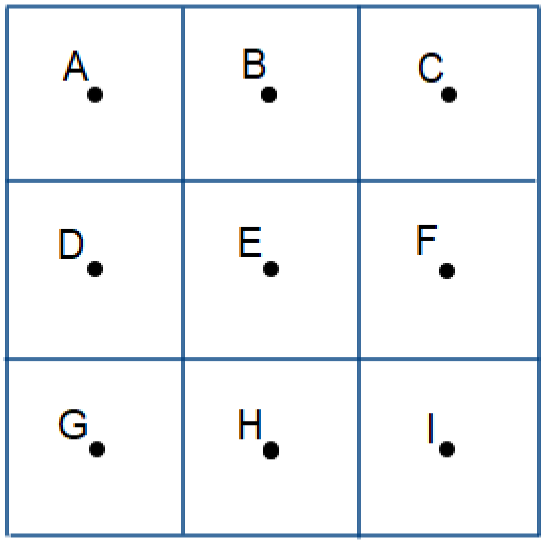
8. Seja Q um quadrado de lado medindo 21 cm.

a) Considere que Q foi subdividido em 9 quadrados $Q_1,\ldots,Q_9$, cujos lados medem 7 cm. Quantos triângulos distintos podem ser formados de modo que seus vértices sejam os centros dos quadrados $Q_1,\ldots,Q_9$ dessa subdivisão? Lembre-se de que dois triângulos são distintos quando seus vértices não coincidem.

b) É possível escolhermos 10 pontos em Q de modo que a distância entre quaisquer dois desses pontos seja maior do que 10 centímetros? Justifique.

RESOLUÇÃO

a) Do enunciado, temos os pontos de A a I como centros dos nove quadrados criados.



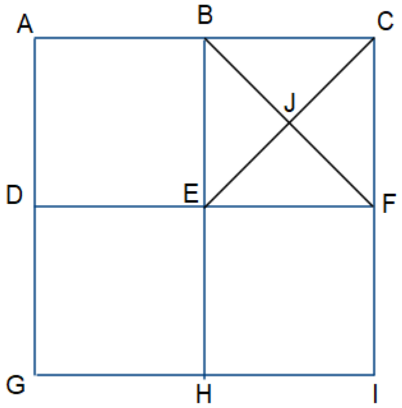
Logo, os possíveis triângulos são as combinações de nove pontos escolhendo 3, excluindo a combinação de três pontos colineares que, no caso, são 8. Logo,

$$C_{9;3} - 8 = \frac{9!}{3!(9-3)!} - 8 = 84 - 8 = 76.$$

Portanto são 76 os triângulos distintos.

b) Considerando apenas os pontos do quadrado Q, é possível tomar, no máximo, 8 pontos que satisfazem as condições do problema, sendo uma possibilidade os quatro vértices de Q e os quatro pontos médios de seus lados.

Agora, considerando o quadrado Q e a região delimitada por ele, conseguimos tomar, no máximo, 9 pontos. Consideremos a seguinte situação, onde B, D, H e F são pontos médios do lado do quadrado, sendo E seu centro.



Nesta situação, a distância entre quaisquer 2 destes 9 pontos é maior que 10. Agora, o ponto com a maior distância, no interior de cada um dos quadrados está a $\frac{10,5\sqrt{2}}{2} \cong 7,5cm$ de cada vértice, sendo tal distância menor que 10 cm.
Portanto, não há como tomarmos um décimo ponto que satisfaça as condições do problema.