LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Um método de descida para equilíbrio de Nash *

L. F. Bueno
Universidade Federal de São Paulo
Avenida Cesare Mansueto Giulio Lattes, n° 1201 - Eugênio de Mello, São José dos Campos - SP
lfelipebueno@gmail.com.br

G. Haeser e O. Kolossoski
Universidade Federal de São Paulo
Rua do Matão, 1010 - São Paulo - SP
ghaeser@ime.usp.br e oliverkolossoski@gmail.com

RESUMO

Uma estratégia comum para resolver um problema de equilíbrio de Nash para jogadores com variáveis contínuas é aplicar o método de Newton ao sistema obtido pelas correspondentes condições de otimalidade necessárias de primeira ordem. Entretanto, esta ideia não diferencia as soluções de maximizadores e pontos de sela, o que pode ser um inconveniente em problemas não convexos. Neste trabalho, fornecemos uma interpretação para o iterado de Newton da seguinte forma: em vez de minimizar a aproximação quadrática das funções objetivo parametrizadas pela decisão atual do outro jogador (a estratégia do tipo Jacobi), o iterado de Newton corresponde à minimização da função objetivo parametrizada por uma previsão da ação do outro jogador. Esta interpretação permite-nos apresentar um novo algoritmo newtoniano em que é introduzido um procedimento de backtracking de forma a garantir que as direções newtonianas calculadas, para cada jogador, são direções de descida para as respectivas funções parametrizadas. Testes numéricos atestam a eficiência da estratégia proposta, com destaque para um problema não convexo de localização de facilidades.

PALAVRAS CHAVE. Equilíbrio de Nash. Métodos de descida. Localização de instalações.

PM - Programação Matemática; L&T - Logística e Transportes

ABSTRACT

A common strategy for solving a Nash equilibrium problem for players with continuous variables is to apply Newton's method to the system obtained by the first-order necessary optimality conditions. However, this idea does not differentiate between maximizer and saddle point solutions, which can be an inconvenience in non-convex problems. In this work, we provide an interpretation for the Newton iterate as follows: instead of minimizing the quadratic approximation of the objective function parameterized by the other player's current decision (the Jacobi-type strategy), the Newton iterate corresponds to the minimization of the objective function parameterized by a prediction of the other player's action. This interpretation allows us to present a new Newtonian algorithm where a backtracking procedure is introduced in order to guarantee that the calculated Newtonian

*Este trabalho foi apoiado pelos financiamentos FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) 2013/07375-0, 2015/02528-8, 2018/24293-0 e 2021/05007-0, e CNPq.

directions, for each player, are descent directions for the respective parameterized functions. Numerical tests attest to the efficiency of the proposed strategy, with emphasis on a non-convex facility location problem.

KEYWORDS. Nash Equilibrium. Descent methods. Facility location.

MP - Mathematical Programming; L&T - Logistics and Transport

1. O problema de Equilíbrio de Nash

O Problema de Equilíbrio de Nash (NEP), introduzido em Nash [1951], modela um jogo onde cada jogador visa minimizar sua própria função objetivo, mas a decisão tomada por cada jogador influencia o *payoff* dos outros jogadores. Este é um problema fundamental na economia e na teoria do comportamento social que tem sido estudado extensivamente. Veja, por exemplo, Arrow e Debreu [1954] e Myerson [1991]. Neste trabalho, consideramos o NEP irrestrito para dois jogadores dado por

$$\underset{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}}{\text{Minimizar}} \quad f_1(x_1, x_2), \tag{1}$$

e

$$\underset{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}}{\text{Minimizar}} \quad f_2(x_1, x_2), \tag{2}$$

onde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ são funções (possivelmente não convexas) duas vezes continuamente diferenciáveis que descrevem o objetivo de cada jogador a ser minimizado, parametrizado pelo outro jogador decisão. Uma solução (local) para o NEP (1-2) é um ponto $(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ tal que x_1^* é um minimizador (local) para (1) com $x_2 = x_2^*$, e x_2^* é um minimizador (local) para (2) com $x_1 = x_1^*$.

2. Uma interpretação do método de Newton e um algoritmo de descida

Uma solução (x_1, x_2) para o problema de equilíbrio (1-2) deve satisfazer a seguinte condição de otimalidade necessária de primeira ordem:

$$\begin{pmatrix} \nabla_{x_1} f_1(x_1, x_2) \\ \nabla_{x_2} f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

A maioria dos algoritmos para resolver o NEP (1-2) baseia-se em abordar diretamente o sistema não linear de equações (3), desconsiderando a estrutura de minimização do problema (1-2). Isso não apresenta problemas quando f_1 e f_2 são convexas em relação às suas variáveis de decisão, no entanto, na presença de não convexidades, o algoritmo pode encontrar maximizadores locais ou pontos de sela tão frequentemente quanto minimizadores locais. Nosso objetivo neste trabalho é propor um algoritmo que leve em consideração a estrutura de minimização do problema para encontrar minimizadores locais com mais frequência, refletindo assim melhor o comportamento de jogos de dois jogadores na prática.

Dado um iterando atual (x_1^k, x_2^k), o passo newtoniano clássico (d_1^k, d_2^k) para resolver (3) é dado resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{x_1 x_1} f_1(x_1^k, x_2^k) & \nabla^2_{x_1 x_2} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ \nabla^2_{x_1 x_2} f_2(x_1^k, x_2^k) & \nabla^2_{x_2 x_2} f_2(x_1^k, x_2^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^k \\ d_2^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{x_1} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ \nabla_{x_2} f_2(x_1^k, x_2^k) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Seguindo as ideias tradicionais de otimização, vamos substituir $\nabla^2_{x_i x_i} f_i(x_i^k)$ por H_i^k, uma aproximação definida positiva, para gerar algum grau de convexidade em nossos modelos. Fazendo a aproximação

$$\nabla_{x_1} f_1(x_1^k, x_2^k + d_2^k) \approx \nabla_{x_1} f_1(x_1^k, x_2^k) + \nabla^2_{x_1 x_2} f_1(x_1^k, x_2^k) d_2^k, \tag{5}$$

vemos que, para $\|d_2^k\|$ pequeno, a direção de d_1^k é de descida para a função $f_1(x_1^k, x_2^k + d_2^k)$. Situação análoga acontece para o segundo jogador. Isso significa que temos uma direção de descida para uma função que considera a previsão da decisão do outro jogador.

Para garantir que a aproximação do gradiente seja precisa, introduzimos um tamanho de passo t, inicializado com valor um. Depois de resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} H_1^k & t\nabla^2_{x_1 x_2} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ t\nabla^2_{x_1 x_2} f_2(x_1^k, x_2^k) & H_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{x_1} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ \nabla_{x_2} f_2(x_1^k, x_2^k) \end{pmatrix},$$

testamos se valem as condições

$$\begin{aligned} f_1(x_1^k + td_1, x_2^k + td_2) &\leq f_1(x_1^k, x_2^k + td_2) + \alpha t \nabla_{x_1} f_1(x_1^k, x_2^k + td_2)^T d_1, \\ f_2(x_1^k + td_1, x_2^k + td_2) &\leq f_2(x_1^k + td_1, x_2^k) + \alpha t \nabla_{x_2} f_2(x_1^k + td_1, x_2^k)^T d_2. \end{aligned}$$

Caso obtenhamos sucesso, definimos $x^{k+1} = x^k + td$. Caso contrário, fazemos $t = t/2$ e repetimos o processo.

3. Problema de localização de instalações

No problema de localização de instalações pretende-se escolher o melhor local para abrir instalações. Em geral, os servidores buscam estar próximos de seus clientes devido às diversas vantagens comerciais e logísticas que isso pode acarretar. Aqui consideramos o problema de dois jogadores que desejam abrir uma instalação cada, de modo a obter o maior retorno esperado ao negociar com N clientes. As chances de um jogador atender a um determinado cliente dependem da proximidade de sua instalação ao cliente em relação à proximidade do concorrente. Denotando por x_i a posição da instalação i, $i \in \{1, 2\}$, e por z_j a posição do cliente j, $j \in \{1, \cdots, N\}$, consideremos aqui que a probabilidade do jogador i servir o cliente j é de $1 - \frac{\|x_i - z_j\|^2}{\|x_i - z_j\|^2 + \|x_{\neg i} - z_j\|^2}$. Assim, se b_j^i é o lucro do jogador i no atendimento ao cliente j, a função a ser minimizada por cada jogador para obter a melhor receita esperada é

$$f_i(x_i, x_{\neg i}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j^i \|x_i - z_j\|^2}{\|x_i - z_j\|^2 + \|x_{\neg i} - z_j\|^2}, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

resultando em um NEP.

Observe que as funções não são definidas quando ambas as instalações estão localizadas exatamente na posição de um dos clientes, uma situação muito patológica que nunca foi encontrada por nenhum dos algoritmos que executamos. De qualquer forma, esses problemas são complexos, pois as funções são não convexas. Na Figura 1 ilustramos a função objetivo do primeiro jogador em um problema unidimensional, com a decisão do segundo jogador fixada em $0,915$ e três clientes localizados em $z_1 = 1, z_2 = -1$ e $z_3 = 3$, com lucro uniforme de 1. Para este problema uma solução de equilíbrio é $(1.901, 0.915)$, que é encontrada pelo algoritmo proposto a partir do ponto inicial $(2, 1)$.

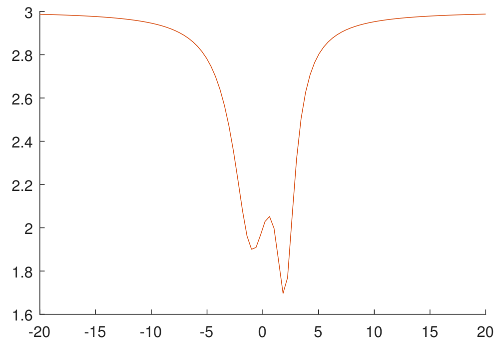

Figura 1: Função objetivo unidimensional para o problema de localização de instalações.

Para uma análise mais detalhada, consideremos agora um problema bidimensional. Para nosso teste selecionamos um problema na forma (6) com as coordenadas dos clientes $z_1 = (1, 0), z_2 = (0, 1), z_3 = (-1, 0)$, e $z_4 = (0, -1)$. Escolhemos o vetor de lucro para cada jogador como $b^1 = (1, 2, 1, 1)$ e $b^2 = (1, 2, 2, 3)$. Executamos o algoritmo para 100 pontos iniciais aleatórios com coordenadas geradas no intervalo $[-2, 2]$, comparando com os métodos de Yuan, descrito em Yuan [2011], Jacobi, como em Caruso et al. [2020], e Newton. Jacobi divergiu em 88 de 100 execuções enquanto o método de Yuan divergiu em 97 execuções, atingindo o número máximo de iterações. O algoritmo proposto convergiu para um ponto de equilíbrio verdadeiro em todos os casos, enquanto o método de Newton convergiu principalmente para pontos estacionários que não são pontos de equilíbrio, tendo atingido o ponto de equilíbrio em apenas 13 das 100 execuções. Vemos que os métodos de Jacobi e Yuan funcionam mal e que o método de Newton é atraído por pontos estacionários que não são solução. Estes fatos decorrem da não convexidade e das propriedades do jacobiano das condições de primeira ordem correspondentes. Já o algoritmo proposto funciona muito bem, o que indica ser uma ideia inovadora bastante promissora para uma melhor investigação futura.

Referências

Arrow, K. J. e Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22:265–290.

Caruso, F., Cerapano, M., e Morgan, J. (2020). An inverse-adjusted best response algorithm for nash equilibria. *SIAM Journal on Optimization*, 30(1):1638–1663.

Myerson, R. B. (1991). *Game theory. Analysis of conflict*. Harvard University Press.

Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, 54(2):286–295.

Yuan, Y.-X. (2011). A trust region algorithm for nash equilibrium problems. *Pacific Journal of Optimization*, 7(1):124–138.