UMA ABORDAGEM EXATA PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM RESTRIÇÕES DE EMPACOTAMENTO BIDIMENSIONAL E ENTREGA FRACIONADA

Kamyla Maria Ferreira e Franklina Maria Bragion de Toledo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC-USP
Av. Trabalhador São-Carlense, 400, Cx. Postal 668, 13560-970, São Carlos-SP
kamylamaaria@gmail.com, fran@icmc.usp.br

Thiago Alves de Queiroz
Unidade de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Catalão
Av. Dr. Lamartine P. Avelar, 1120, Setor Universitário, 75704-020, Catalão-GO
taq@ufg.br

RESUMO

O problema de roteamento de veículos estudado considera a possibilidade de entrega fracionada aos clientes. A demanda dos clientes é composta por um conjunto de itens retangulares que devem ser empacotados na base do veículo sem sobreposição entre quaisquer itens. O problema de roteamento é resolvido em conjunto com o problema de empacotamento. Além disso, com adição da restrição de entrega fracionada, os clientes podem ser atendidos por um ou mais veículos. Neste contexto, este trabalho busca investigar quais são os benefícios, em termos de custo, obtidos com a agregação da entrega fracionada ao problema. Para tanto, um modelo matemático foi proposto e testes computacionais utilizando um conjunto de 60 instâncias foram realizados. Os resultados mostram que é possível reduzir os custos das rotas com uma melhora média de 0,9%.

PALAVRAS CHAVE. Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Carregamento. Empacotamento Bidimensional. Entrega Fracionada.

PM - Programação Matemática, L&T - Logística e Transportes.

ABSTRACT

The vehicle routing problem studied considers the possibility of split delivery to customers. Customer demand consists of a set of rectangular items that must be packed in the rectangular base of the vehicle without overlap between any items. The routing problem is solved together with the packing problem. Besides that, with the addition of the split delivery constraint, customers can be served by one or more vehicles. In this context, this work seeks to investigate what are the benefits, in terms of cost, obtained by adding split delivery to the problem. Therefore, a mathematical model was proposed and computational tests using a set of 60 instances were performed. The results show that it is possible to reduce the cost of routes with an average improvement of 0.9%.

KEYWORDS. Vehicle Routing Problem with Loading Constraints. Two-dimensional packing. Split Delivery.

PM - Mathematical Programming, L&T - Logistics and Transport.

1. Introdução

Impulsionadas pelo constante desenvolvimento e competitividade do mercado, as empresas do setor logístico buscam diminuir cada vez mais seus custos. Assim, como o transporte de mercadorias corresponde a uma das principais atividades do setor, o estudo do Problema de Roteamento de Veículos (Vehicle Routing Problem - VRP) possui relevância prática e acadêmica. Um fator importante durante a construção de rotas de distribuição é o carregamento das cargas nos veículos. Côté et al. [2017] destacam que soluções factíveis para o VRP podem ser inviáveis na prática, pois o VRP apenas garante que as demandas dos clientes sejam atendidas respeitando a capacidade do veículo. No entanto, a área ocupada pela carga não é considerada durante a geração das rotas, o que pode resultar num empacotamento inviável (isto é, a carga pode não caber totalmente dentro do veículo). Além disso, os autores destacam que ao lidar com as decisões de rotear e empacotar simultaneamente, economias significativas podem ser alcançadas. Em seu estudo, foi obtida uma economia de cerca de 7% em relação a tomada das decisões em sequência.

O problema de roteamento de veículos capacitado que considera restrições de empacotamento bidimensional (Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints - 2L-CVRP) aparece em situações em que os itens podem ser de grande porte e, assim, ocupam quase toda a altura do veículo ou não podem ser empilhados devido a sua fragilidade, ou a forma irregular em seu topo. Algumas aplicações práticas do 2L-CVRP advém da distribuição de mercadorias, como móveis, componentes mecânicos e eletrodomésticos [Iori et al., 2007]. Esse problema é classificado como NP-difícil, uma vez que generaliza o VRP que também é classificado como NP-difícil [Iori et al., 2007].

Embora relevante, poucos trabalhos na literatura abordam o 2L-CVRP. Algoritmos exatos tipo *branch-and-cut* foram propostos por Iori et al. [2007] e por Hokama et al. [2016]. Para aumentar a eficiência dos métodos, ambos tratam o empacotamento utilizando algumas heurísticas, métodos exatos e limitante. Métodos heurísticos foram desenvolvidos por Wei et al. [2015] e Wei et al. [2018]. No primeiro, os autores propuseram um método baseado em busca em vizinhança variável, enquanto, no segundo, é apresentada uma heurística de recozimento simulado. No que é de nosso conhecimento, apenas Annouch et al. [2016] tratam o problema com a possibilidade de entrega fracionada. Além disso, os autores consideram uma frota heterogênea de veículos, janelas de tempo para a entrega e a existência de múltiplos depósitos. Esta variante do 2L-CVRP foi estudada para resolver o problema de distribuição de gás de petróleo líquido que se caracteriza por realizar operações diárias de coleta e entrega de cilindros de gás entre os postos de abastecimento e um conjunto de clientes. Os autores modelam e resolvem instâncias do problema utilizando o solver de otimização IBM ILOG CPLEX.

Com o foco em obter uma maior redução nos custos das rotas, propõe-se a agregação da restrição de entrega fracionada no 2L-CVRP. Na literatura há estudos sobre o Problema de Roteamento de Veículos com Entrega Fracionada (Split Delivery Vehicle Routing Problem - SDVRP) e os resultados indicam que é possível obter economias ao se permitir que a demanda de um cliente possa ser distribuída por mais de um veículo, tanto em relação ao número de veículos quanto à distância total percorrida.

Este trabalho tem como foco o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada (*Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints and Split Delivery* - 2L-SDVRP). Mais especificamente, as mercadorias dos clientes correspondem a itens retangulares que devem ser carregados na base do veículo respeitando suas dimensões e sem sobreposição. Além disso, deve ser respeitada a restrição de descarregamento dos itens, ou seja, ao descarregar os itens de um cliente estes não podem ter o caminho de retirada bloqueados por itens de outros clientes que serão visitados posteriormente. Para este estudo, as mercadorias dos clientes podem ser entregues por um ou mais veículos.

No 2L-SDVRP estudado, duas são as principais contribuições. A primeira é a apresentação de um modelo matemático para o 2L-SDVRP em que uma formulação de três índices é utilizada. Desigualdades válidas são estudadas para fortalecer o modelo. A segunda contribuição é um método exato do tipo *branch-and-cut* para a resolução do problema. Este utiliza como base o solver de otimização Gurobi. Para melhorar o desempenho do método de resolução são utilizados procedimentos de separação. Em especial, para resolver o subproblema de empacotamento, diferentes abordagens foram utilizadas para obter uma solução mais rapidamente, como um método heurístico, limitantes inferiores e uma formulação baseada em programação por restrições. Um conjunto de 60 instâncias da literatura foi utilizado para avaliar a proposta. Os resultados mostraram que para 26 instâncias as soluções do 2L-SDVRP são melhores e para 31 são iguais as do 2L-CVRP. Para as outras 3 instâncias, o 2L-CVRP teve resultados melhores que o 2L-SDVRP, contudo a otimalidade da solução do 2L-SDVRP não foi provada. O 2L-SDVRP foi capaz de reduzir o custo das rotas do 2L-CVRP em aproximadamente 0,9%, em média.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2 é descrito o 2L-SDVRP, ao passo que um modelo para o problema, bem como algumas desigualdades válidas e procedimentos de separação utilizados para tratar as restrições de quantidade exponencial são apresentados na Seção 3. Resultados computacionais utilizados para analisar o modelo são discutidos na Seção 4 e as conclusões são apresentadas na Seção 5.

2. Definição do 2L-SDVRP

O 2L-SDVRP pode ser expresso em um grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{0, 1, \dots, n\}$ corresponde ao conjunto de vértices, que é composto pelo depósito (vértice 0) e pelo conjunto de clientes $(1, \dots, n)$, e $E = \{(i, j) \mid i, j \in V, i \neq j\}$ representa o conjunto de arestas que ligam dois vértices de V. Cada aresta $\{i, j\} \in E$ tem um custo não-negativo associado (D_{ij}). No depósito, há um conjunto de K veículos idênticos disponíveis. Os veículos são caracterizados por terem uma capacidade máxima de carga Q e uma base retangular com uma área total $A_T = L\ C$, em que L é a largura e C é o comprimento. Além disso, as operações de carga e descarga dos itens são realizadas em um único lado do compartimento do veículo.

Cada cliente j demanda um conjunto de R_j itens retangulares com peso total $P_j = \sum_{r=1}^{|R_j|} p_{jr}$ e área total $A_j = \sum_{r=1}^{|R_j|} a_{jr}$, em que cada item $r \in R_j$ tem largura l_{jr}, comprimento c_{jr}, peso p_{jr} e área $a_{jr} = l_{jr}\ c_{jr}$. Neste contexto, cada item retangular é descrito por um par (j, r), em que j representa o cliente e r o índice do item do cliente. Por fim, assume-se, sem perda de generalidade, que as dimensões da base retangular do veículo e dos itens admitem somente valores inteiros positivos.

O objetivo do problema é encontrar rotas de entrega com custo total mínimo de transporte, que atendam a demanda de todos os clientes, respeitando as seguintes restrições: (i) cada veículo inicia e termina sua rota no depósito central; (ii) um veículo só pode executar uma rota; (iii) um cliente pode ser atendido por um ou mais veículos, conforme a sua demanda de itens, isto é, a quantidade de entrega fracionada a um cliente é menor ou igual ao número de itens, pois não é possível dividir um item ao meio; (iv) um veículo pode visitar um cliente uma única vez, isto é, um veículo não pode passar duas vezes em um mesmo cliente; (v) a capacidade dos veículos (em peso e área) não pode ser ultrapassada; (vi) o número de rotas deve ser igual à quantidade de veículos disponíveis; (vii) cada rota deve conter mais de um cliente; (viii) a demanda de cada cliente deve ser completamente atendida; (ix) não pode ocorrer sobreposição entre quaisquer itens dentro da base retangular dos veículos; (x) todos os itens devem estar totalmente contidos no compartimento do veículo; (xi) o empacotamento deve ser ortogonal, ou seja, os itens devem ser empacotados com seus lados paralelos ou perpendiculares às bordas da base do veículo; e (xii) a restrição de ordem de visita deve ser respeitada, isto é, quando um cliente é visitado todos os seus itens não devem ter caminho de retirada obstruído por quaisquer itens de outros clientes que vão ser servidos posteriormente.

No empacotamento, a base dos veículos é discretizada em uma malha de pontos, ao longo da largura L e do comprimento C, em que os pontos na malha correspondem as posições onde os itens podem ser empacotados. Na literatura há vários tipos de malhas, como a *canonical dissections* de Herz [1972], *reduced raster points* de Scheithauer e Terno [1996] e *meet-in-the-middle* (MIM) de Côté e Iori [2018]. Côté e Iori [2018] mostram que a malha MIM apresentou melhores resultados que as anteriores, isto é, gerou uma malha de tamanho menor em relação as malhas da literatura. A ideia da malha MIM é empacotar os itens antes ou após e acima ou abaixo de uma dada posição da base do veículo ao longo da largura e do comprimento. Além disso, Côté e Iori [2018] apresentam dois pré-processamentos que visam reduzir o tamanho da malha MIM. O primeiro pré-processamento impõe que o item de menor dimensão deve ser empacotado em somente um dos lados da base do veículo, enquanto que o segundo elimina pontos redundantes da malha. O primeiro pré-processamento apenas foi utilizado para a dimensão da largura, pois se usado para o comprimento pode ocorrer perda da solução ótima devido a restrição de ordem de visita dos clientes. O segundo pré-processamento foi utilizado em ambas as dimensões.

3. Formulação Matemática do 2L-SDVRP

O modelo desenvolvido para o 2L-SDVRP é dado por (1) a (15). Neste modelo, além dos dados descritos na Seção 2, também são considerados os seguintes parâmetros: S, subconjunto de clientes; S_{inv}, subconjunto de todas as rotas cujo empacotamento é inviável; e $\mathcal{R}_j$, subconjunto de itens $\mathcal{R}_j \in R_j$ do cliente $j \in S$. $\mathcal{R}_j$ é necessário para tratar a possibilidade de entrega fracionada, visto que nem todos os itens de um cliente são necessariamente entregues numa mesma rota. Assim, $\mathcal{R}_j$ contém os itens do cliente $j \in R_j$ que são distribuídos pelo veículo que executa a rota S. O modelo do 2L-SDVRP considera as seguintes variáveis de decisão: x_{ij}^k, que é igual a 1 se o veículo k segue diretamente de i para j, e z_{ir}^k, que é igual 1 se o item r do cliente j é transportado pelo veículo k.

$$\text{Minimizar} \sum_{k \in K} \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} D_{ij}\, x_{ij}^k. \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{0j}^k = |K|, \tag{2}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V \setminus \{0\}} x_{i0}^k = |K|, \tag{3}$$

$$\sum_{\substack{i \in V, \\ i \neq j}} x_{ij}^k \leqslant 1, \qquad \forall j \in V \setminus \{0\},\ \forall k \in K, \tag{4}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} x_{ij}^k = \sum_{k \in K} \sum_{\substack{h \in V \\ h \neq j}} x_{jh}^k, \qquad \forall j \in V \setminus \{0\}, \tag{5}$$

$$x_{ij}^k + x_{ji}^k \leqslant 1, \qquad \forall i,\ j \in V,\ i \neq j,\ \forall k \in K, \tag{6}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} \sum_{r \in R_j} p_{jr}\, z_{jr}^k \leqslant Q, \qquad \forall k \in K, \tag{7}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} \sum_{r \in R_j} a_{jr}\, z_{jr}^k \leqslant A_T, \qquad \forall k \in K, \tag{8}$$

$$\sum_{k \in K} z_{jr}^k = 1, \qquad \forall r \in R_j,\ \forall\, j \in V \setminus \{0\}, \tag{9}$$

$$z_{jr}^k \leqslant \sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} x_{ij}^k, \qquad \forall r \in R_j,\ \forall j \in V \setminus \{0\},\ \forall\, k \in K, \tag{10}$$

$$\sum_{r \in R_j} z_{jr}^k \geqslant \sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} x_{ij}^k, \qquad \forall j \in V \setminus \{0\},\ \forall k \in K, \tag{11}$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij}^k \leqslant |S| - 1, \qquad \forall S \subseteq V \setminus \{0\},\ S \neq \varnothing,\ \forall k \in K, \tag{12}$$

$$\sum_{j \in S} \sum_{r \in \mathcal{R}_j} z_{jr}^k \leqslant \sum_{j \in S} |\mathcal{R}_j| - 1, \qquad \forall S \subseteq S_{inv},\ \forall k \in K, \tag{13}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,\ 1\}, \qquad \forall i,\ j \in V,\ \forall k \in K, \tag{14}$$

$$z_{ir}^k \in \{0,\ 1\}, \qquad \forall r \in R_i,\ \forall i \in V \setminus \{0\},\ \forall k \in K. \tag{15}$$

A função objetivo (1) busca por um conjunto de rotas que minimiza a distância total percorrida nas rotas. As restrições (2) e (3) garantem que sejam utilizados todos os veículos disponíveis para atender a demanda dos clientes e asseguram que cada rota começa e termina no depósito. As restrições (4), por sua vez, impõem que um veículo só pode visitar um cliente uma única vez, isto é, um mesmo veículo não pode parar em um cliente para entregar mercadorias mais de uma vez. As restrições (5) garantem a continuidade dos percursos nas rotas, impondo que a quantidade de arestas que entram em um vértice deve ser igual ao número de arestas que deixam este vértice. As restrições (6) asseguram que apenas uma das arestas $(i,\ j)$ ou $(j,\ i)$ seja percorrida. As restrições (7) e (8) limitam a quantidade de itens dos clientes carregados em uma rota de modo que a capacidade em peso e em área de um veículo devem ser respeitadas, respectivamente.

As restrições (9) garantem que todos os itens dos clientes sejam empacotados em algum veículo. As restrições (10) impõem que um item de um cliente só pode ser empacotado em um veículo que atende o respectivo cliente. As restrições (11) garantem que se um cliente é atendido por um veículo, então pelo menos um item deste cliente deve ser empacotado neste veículo e indicam também que os clientes podem ser atendidos por um ou mais veículos. As restrições (12) eliminam os subciclos, enquanto que as restrições (13) são responsáveis por assegurar a viabilidade do empacotamento nos veículos. O domínio das variáveis é definido em (14) a (15).

3.1. Desigualdades Válidas

Algumas desigualdades válidas são usadas para fortalecer a formulação do 2L-SDVRP apresentada na seção anterior. As desigualdades apresentadas em (16) são responsáveis por eliminar a simetria em respeito à frota homogênea de veículos. Tais restrições são uma adaptação de Fischetti et al. [1995] e Albareda-Sambola et al. [2011] desenvolvidas para resolver o problema de roteamento de veículos capacitado e o problema de localização de plantas, respectivamente.

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{ji}^k \leqslant \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} \sum_{\substack{h \in V \setminus \{0\} \\ h \neq j \\ h \leqslant i}} x_{jh}^{k-1}, \qquad \forall\, i \in V \setminus \{0\},\ \forall\, k \in K \setminus \{1\}. \tag{16}$$

As restrições (16) impõem que o cliente i só pode ser atribuído ao veículo $k \in K \setminus \{1\}$, se o veículo $k-1 \in K$ atender um cliente h com índice menor ou igual a i (note que os índices i e h podem ser iguais, ou seja, representar o mesmo cliente devido à possibilidade de entrega fracionada). Por exemplo, o cliente 2 só pode ser atendido pelo veículo 2, se o veículo 1 atender o cliente 1 e/ou o cliente 2, mesmo que parcialmente. Logo, é perceptível que o cliente 1 sempre vai ser atendido pelo veículo 1, seja parcialmente ou por completo e, assim, a desigualdade (17) é valida.

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq 1}} x_{j1}^1 = 1. \tag{17}$$

Dror et al. [1994] apresentaram uma classe de desigualdades válidas para o SDVRP, denominada restrições de eliminação de ciclo fracionário. As desigualdades (18) compõem essa classe de restrições e auxiliam na obtenção de uma solução melhor para a relaxação do problema. A prova de que a restrição (18) é valida para o SDVRP foi dada por esses autores. Como ela envolve apenas a distribuição dos clientes nas rotas, ela também é valida para o 2L-SDVRP.

$$x_{ij}^k \leqslant \sum_{\substack{h \in V \\ h \neq i}} x_{jh}^k, \qquad \forall i,\, j \in V \setminus \{0\},\ \forall k \in K. \tag{18}$$

3.2. Procedimentos de Separação

Como as restrições de eliminação de subciclo e de verificação de viabilidade do empacotamento nas rotas são de quantidade exponencial, tais restrições são inseridas ao longo do processo de otimização por meio de procedimentos de separação. Esse procedimento analisa inicialmente as restrições de subciclo e é aplicado sempre que uma solução fracionária ou inteira é obtida. Assim, caso as rotas não contenham subciclos e a solução seja inteira, aplica-se o procedimento para detectar rotas com empacotamento inviável.

Neste trabalho, a checagem da viabilidade do empacotamento das rotas conta com cinco estratégias que são aplicadas sequencialmente até que alguma prove que o empacotamento é factível ou não. Além disso, uma estrutura *hash* em tabela é utilizada para guardar e pesquisar rotas já examinadas em busca de diminuir o esforço computacional gasto na checagem da factibilidade das rotas quanto ao empacotamento.

Estratégia 1: a heurística construtiva de Leung et al. [2012] é utilizada para verificar rapidamente se todos os itens da rota S podem ser empacotados no veículo. A heurística construtiva empacota os itens de acordo com uma determinada sequência/ordem. Assim, dada uma sequência de itens, seleciona-se o item que tem a melhor aptidão em relação a um espaço vazio na base do veículo e que respeita a restrição da ordem de entrega para executar o empacotamento. Os itens foram ordenados conforme quatro regras: (i) ordem original, (ii) ordem decrescente por largura, (iii) ordem decrescente por comprimento e (iv) ordem decrescente por área. Além disso, os clientes são considerados tanto na direção original da rota quanto na ordem reversa. Se um empacotamento viável for encontrado, então a rota é viável.

Estratégia 2: consiste em gerar dois limitantes inferiores para a base do veículo, um para largura (L_1^L) e outro para o comprimento (L_1^C), com base na formulação de *Gilmore-Gomory* para o problema de corte de estoque. Assim, se $L_1^L > L$ ou $L_1^C > C$ o empacotamento é inviável. Mais detalhes sobre esses limitantes podem ser encontrados no trabalho de Côté et al. [2014].

Estratégia 3: consiste em aplicar o limitante L_2 descrito por Côté et al. [2014]. Este limitante estima o comprimento do veículo, de modo que para cada item determina-se a posição mínima e máxima que o mesmo pode ocupar levando em consideração a ordem de entrega dos itens e, assim, restringido as posições dos itens ao longo do comprimento da base. Se o valor do limitante for maior que C, a rota não possui empacotamento viável.

Estratégia 4: consiste em resolver uma relaxação do Problema de Empacotamento Ortogonal Bidimensional (*Two-dimensional Orthogonal Packing Problem* - 2OPP), que é dada por (19) a (24). O objetivo é apenas obter uma solução viável para o problema.

$$\sum_{r \in M} \sum_{\{s \in P_r^X : p - l_r + 1 \leq s \leq p\}} c_r \delta_{rs}^x \leq C, \quad \forall p \in P^X, \tag{19}$$

$$\sum_{r \in M} \sum_{\{t \in P_r^Y : q - c_r + 1 \leq t \leq q\}} l_r \delta_{rt}^y \leq L, \quad \forall q \in P^Y, \tag{20}$$

$$\sum_{p \in P_r^X} \delta_{rp}^x = 1, \quad \forall r \in M, \tag{21}$$

$$\sum_{q \in P_r^Y} \delta_{rq}^y = 1, \quad \forall r \in M, \tag{22}$$

$$\delta_{rp}^x \in \{0,\ 1\}, \quad \forall r \in M,\ \forall p \in P_r^X, \tag{23}$$

$$\delta_{rq}^y \in \{0,\ 1\}, \quad \forall r \in M,\ \forall q \in P_r^Y. \tag{24}$$

em que: M é o conjunto de itens dos clientes na rota S, P_r^X e P_r^Y são, respectivamente, os conjuntos de pontos da malha MIM ao longo da largura (eixo X) e do comprimento (eixo Y), onde o item $r \in M$ pode ser empacotado. P^X e P^Y são os conjuntos de todos os pontos onde os itens podem ser empacotados ao longo dos eixos X e Y do veículo. O modelo possui as seguintes variáveis de decisão: δ_{rp}^x (δ_{rp}^y) que assume valor 1 se o item $r \in M$ é empacotado na coordenada $p \in P_r^X$ ($p \in P_r^Y$).

As restrições (19) asseguram que a soma dos comprimentos dos itens que cobrem a coordenada p quando empacotados em alguma coordenada s ao longo do eixo X deve respeitar o comprimento da base do veículo. De modo análogo, as restrição (20) garantem que a soma das larguras dos itens que cobrem a coordenada q quando empacotados em alguma coordenada t ao longo do eixo Y deve respeitar a largura da base do veículo. As restrições (21) e (22) impõem que todos os itens devem ser empacotados em alguma coordenada. As restrições (23) e (24) indicam que as variáveis de decisão são binárias.

Estratégia 5: consiste em aplicar a formulação de programação por restrições (CP) de Clautiaux et al. [2008], que são baseadas em restrições de escalonamento de tarefas. O modelo é dado por (25) a (30), em que as restrições (25) e (26) pertencem a formulação básica de CP e as restrições (27) a (30) são baseadas no escalonamento de tarefas. O modelo possui as seguintes variáveis de decisão: ψ_i^x e ψ_i^y, que representam as coordenadas onde cada item i é empacotado com seu canto inferior esquerdo na base do veículo, com relação ao eixo X e Y, respectivamente, e os seus domínios são dados pela malha MIM, isto é, $\psi_i^x \in P_i^X$ e $\psi_i^y \in P_i^Y$; T_i^x e T_i^y, que representam os instantes em que as tarefas/itens começam a ser processadas nos recursos R_x e R_y, respectivamente. Os recursos R_x e R_y representam os eixos X e Y e tem capacidade C e L. Cada item i representa uma tarefa que ao ser processada no recurso R_x consome uma quantidade c_i do recurso R_y e ao ser processada em R_y consome uma quantidade l_i do recurso R_x.

$$\psi_i^x + l_i \leqslant \psi_j^x \;\; or \;\; \psi_j^x + l_j \leqslant \psi_i^x \;\; or \;\; \psi_i^y + c_i \leqslant \psi_j^y \;\; or \;\; \psi_j^y + c_j \leqslant \psi_i^y, \;\; \forall i,\, j \in M,\; i \neq j. \tag{25}$$

$$\psi_i^x + l_i \leqslant \psi_j^x \;\; or \;\; \psi_j^x + l_j \leqslant \psi_i^x \;\; or \;\; \psi_j^y + c_j \leqslant \psi_i^y, \;\; \forall i,\, j \in M,\; i \neq j,\; \sigma_j > \sigma_i. \tag{26}$$

$$\sum_{T_i^x \leqslant s \leqslant T_i^x + l_i} c_i \leqslant C, \quad \forall i \in M, \;\; s = 0, \ldots, L, \tag{27}$$

$$\sum_{T_i^y \leqslant s \leqslant T_i^y + c_i} l_i \leqslant L, \quad \forall i \in M, \;\; s = 0, \ldots, C, \tag{28}$$

$$T_i^x = \psi_i^x, \quad \forall i \in M \tag{29}$$

$$T_i^y = \psi_i^y, \quad \forall i \in M \tag{30}$$

As restrições (25) são responsáveis por garantir que não haja sobreposição entre qualquer par de itens i e j. As restrições (26) seguem a mesma ideia das restrições (25), contudo elas lidam com a restrição de ordem de entrega e impõem que todo item j que vai ser entregue depois de i ($\sigma_j > \sigma_i$) seja arranjado em alguma posição que não bloqueie a sua retirada. As restrições (27) e (28) garantem que a soma das quantidades de recurso que as atividades consomem não exceda as capacidades de cada recurso. As restrições (29) e (30) são responsáveis por relacionar as variáveis de escalonamento com as variáveis básicas do modelo de CP.

4. Experimentos Computacionais

O modelo do 2L-SDVRP foi descrito utilizando a linguagem de programação C++ e os experimentos computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-8700 de 3,2 GHz, 8 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 18.04 LTS. Para a resolução das instâncias foi utilizado o *Gurobi Optimize*r, na versão 8.1, sendo a estratégia de programação por restrições resolvida utilizando as bibliotecas de CP do *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.8*. O tempo limite de execução de 3600 segundos foi considerado como critério de parada para cada instância. Também foi atribuído para cada chamada do modelo 2OPP relaxado e do CP um tempo limite de 60 e 120 segundos, respectivamente.

4.1. Definição das Instâncias

Para os testes computacionais foram adaptadas as 60 instâncias da literatura de 2L-CVRP de Iori et al. [2007]. Como elas não tem o peso individual de cada item, apenas o peso total da demanda do cliente, o peso para cada item foi definido como descrito em (31).

$$p_{jr} = \left\lfloor \frac{a_{jr}\, P_j}{A_j} \right\rfloor. \tag{31}$$

em que P_j e A_j são, respectivamente, o peso e a área total dos itens do cliente j e p_{jr} é peso do item r do cliente j. Caso a soma dos pesos dos itens seja inferior a P_j, o restante da demanda é adicionado ao item r com maior área (a_{jr}).

A Tabela 1 tem detalhes das instâncias do 2L-CVRP, incluindo o nome da instância e o número de clientes (n). Para cada classe do problema (1 a 5) é fornecida a quantidade total de itens e o número de veículos disponível no depósito.

Tabela 1: Informações das instâncias.

Instância	Clientes	Classe 1		Classe 2		Classe 3		Classe 4		Classe 5	
		Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos
E016-03m	15	15	3	24	3	31	3	37	4	45	4
E016-05m	15	15	5	25	5	31	5	40	5	48	5
E021-04m	20	20	4	29	5	46	5	44	5	49	5
E021-06m	20	20	6	32	6	43	6	50	6	62	6
E022-04g	21	21	4	31	4	37	4	41	4	57	5
E022-06m	21	21	6	33	6	40	6	57	6	56	6
E023-03g	22	22	3	32	5	41	5	51	5	55	6
E023-05s	22	22	5	29	5	42	5	48	5	52	6
E026-08m	25	25	8	40	8	61	8	63	8	91	8
E030-03g	29	29	3	43	6	49	6	72	7	86	7
E033-03n	32	32	3	44	7	56	7	78	7	102	8
E036-11h	35	35	11	56	11	74	11	93	11	114	11

4.2. Resultados Computacionais

Na Tabela 2, os resultados obtidos ao resolver o 2L-CVRP e o 2L-SDVRP são apresentados. Na primeira coluna é dado o nome da instância e sua classe. Da segunda a sexta colunas há informações sobre os resultados obtidos para o 2L-CVRP, que consiste na quantidade de cortes realizados pelos procedimentos de separação ("C_{rot}" - cortes do roteamento e "C_{emp}" - cortes do empacotamento), o tempo total gasto para resolver a instância do 2L-CVRP ("T_{total}"), tempo total gasto pelas estratégias de empacotamento ("T_{emp}") e o valor da solução do 2L-CVRP ("Sol"). Por fim, são fornecidos as mesmas informações para o 2L-SDVRP, acrescida da diferença percentual ("GAP" = 100 $\times$ ((Solução do 2L-SDVRP - Solução do 2L-CVRP)/Solução do 2L-CVRP)) entre o custo das rotas do 2L-SDVRP e do 2L-CVRP, e da quantidade de clientes que tiveram sua entrega fracionada ("Frac"). A solução inicial fornecida para o 2L-SDVRP ("S_{ini}") consiste na solução do 2L-CVRP, contudo o tempo limite de execução foi limitado em 300 segundos e o tempo do CP e do 2OPP definido a 10 segundos. Logo, o tempo limite do 2L-SDVRP consiste em 3600 segundos menos o tempo gasto na geração da solução inicial. Ressalta-se que as soluções marcadas com "$*$" correspondem às soluções que não tiveram a otimalidade provada devido ao tempo limite ter sido atingido e/ou durante a chamada do CP o método parou por tempo limite.

Os resultados da Tabela 2 mostram que o tempo médio gasto para resolver as instâncias do 2L-CVRP é igual a 283 segundos, enquanto que para solucionar as instâncias do 2L-SDVRP, ele é igual a 1300 segundos, em média. A maior parte do tempo computacional foi gasto com o roteamento, o que é evidente ao analisar o tempo total gasto com o empacotamento, que para ambos os problemas foi inferior a 100 segundos. Já era esperado que resolver as instâncias do 2L-SDVRP demandasse mais tempo uma vez que este problema tem mais variáveis de decisão. Em relação aos cortes, o 2L-SDVRP apresentou, em média, 935,927 cortes de roteamento, enquanto que do 2L-CVRP apresentou 66,054. Por outro lado, o 2L-CVRP inseriu mais cortes no empacotamento do que o 2L-SDVRP. Em relação a solução inicial fornecida para o 2L-SDVRP, é perceptível que a solução inicial para algumas instâncias foi igual a solução final do 2L-SDVRP e para as demais instâncias foi bem próxima. No que diz respeito a solução, para o 2L-CVRP foi possível obter a otimalidade para 56 instâncias, e para o 2L-SDVRP somente para 40 das 60 instâncias obteve-se a otimalidade. A diferença média entre as soluções é de -0,9%, mostrando que melhorias foram obtidas quando se considera a possibilidade de entrega fracionada, ou seja, o 2L-SDVRP foi capaz de melhorar a solução do 2L-CVRP. Em geral, o 2L-SDVRP obteve 26 soluções melhores, 31 iguais e 3 piores que o 2L-CVRP, sendo que para as soluções piores a otimalidade não foi provada para o 2L-SDVRP.

5. Considerações Finais

Este artigo tratou o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional com a agregação da restrição de entrega fracionada (2L-SDVRP), que permite que a carga de um cliente seja fracionada, isto é, um cliente pode ser atendido por um ou mais veículos. Para o problema em questão, desenvolveu-se um modelo de três índices, bem como algumas desigualdades válidas foram propostas. O modelo contém restrições em quantidade exponencial em relação a verificação de rotas inviáveis quanto ao empacotamento e/ou subciclos. Para tratar essas restrições foram utilizados procedimentos de separação que visam detectar as desigualdades violadas e inseri-las durante o processo de otimização. Para checar a viabilidade do empacotamento nas rotas, considera-se uma heurística, alguns limitantes inferiores e um modelo de programação por restrições, no qual os itens dos clientes devem ser empacotados sobre a malha *meet-in-the-middle*. Além disso, a resolução do 2L-SDVRP sem a restrição de entrega fracionada (isto é, do problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional - 2L-CVRP) foi realizada, pois o 2L-CVRP foi utilizado como base para a comparação dos resultados do 2L-SDVRP.

Testes computacionais foram realizados utilizando 60 instâncias da literatura do 2L-CVRP. De modo geral, pode-se observar que bons resultados foram obtidos para os dois problemas. Contudo, para o 2L-CVRP foi possível provar a otimalidade para um número maior de instâncias do que para o 2L-SDVRP, pois a resolução do 2L-SDVRP é mais difícil. Do ponto de vista do roteamento, o número de rotas possíveis para o 2L-SDVRP aumenta muito, pois além das combinações de rotas do 2L-CVRP, existe também os casos com entrega fracionada. Nos experimentos realizados, para as instâncias do 2L-CVRP, o método exato foi capaz de obter soluções ótimas para 56 da 60 instâncias, com tempo computacional médio de 283 segundos. Para o 2L-SDVRP, das 60 instâncias, a otimalidade foi provada para 40 instâncias e o tempo médio de resolução foi superior ao do 2L-CVRP, sendo de 1300 segundos. O 2L-SDVRP conseguiu uma melhoria média nos custos de 0,9% em relação ao 2L-CVRP. Logo, a agregação das restrições de entrega fracionada ao 2L-CVRP fornecem benefícios as empresas, reduzindo seus gastos com as operações de transporte.

Trabalhos futuros desta pesquisa visam desenvolver um método de solução baseado em heurísticas para resolver instâncias de maior porte e gerar um novo conjunto de instâncias em que os clientes demandem uma maior quantidade de itens em busca de realizar uma análise mais detalhada dos benefícios da entrega fracionada.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - 165896/2015-9, 308312/2016-3 e 308761/2018-9), a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás, e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (2018/07240-0 e CEPID 2013/07375-0).

Tabela 2: Comparação dos resultados do 2L-SDVRP e do 2L-CVRP.

Instância	2L-CVRP					2L-SDVRP							
	C_{rot}	C_{emp}	T_{total}	T_{emp}	Sol	C_{rot}	C_{emp}	T_{total}	T_{emp}	S_{ini}	Sol	GAP	Frac
E016-03m.1	2358	0	0,22	0,00	273	4280	0	1,06	0,00	273	273	0,00	0
E016-03m.2	17412	57	15,05	10,56	285	5178	21	22,09	16,96	285	279	-2,11	1
E016-03m.3	7285	22	41,33	40,04	280	10103	20	80,12	75,89	280	280	0,00	0
E016-03m.4	183	2	0,3	0,27	288	3019	2	14,58	13,28	288	288	0,00	0
E016-03m.5	24	1	0,25	0,24	279	38	1	0,68	0,34	279	279	0,00	0
E016-05m.1	2393	0	0,2	0,00	329	2614	0	1,34	0,00	329	329	0,00	0
E016-05m.2	15497	9	2,73	0,08	342	16372	21	16,85	0,26	342	329	-3,80	1
E016-05m.3	13117	5	2,55	0,24	347	22070	29	26,14	1,71	347	329	-5,19	2
E016-05m.4	5962	2	1,02	0,36	336	142	0	2,40	0,25	336	308	-8,33	2
E016-05m.5	2393	0	0,24	0,05	329	24	0	0,97	0,10	329	308	-6,38	1
E021-04m.1	8930	0	1,07	0,00	351	11666	0	4,31	0,00	351	351	0,00	0
E021-04m.2	40008	158	12,39	1,80	396	432478	96	309,74	5,13	396	396	0,00	0
E021-04m.3	7122	43	33,13	31,94	387	392286	14	247,16	19,40	387	387	0,00	0
E021-04m.4	3022	9	9,19	8,91	374	48550	20	68,19	43,16	374	371	-0,80	2
E021-04m.5	209	0	0,11	0,04	369	27068	0	16,30	0,12	369	369	0,00	0
E021-06m.1	1587	0	0,12	0,00	423	4327	0	2,67	0,00	423	423	0,00	0
E021-06m.2	12409	6	1,21	0,08	434	235598	2	141,40	0,18	434	434	0,00	0
E021-06m.3	8954	5	1,53	0,73	432	387984	1	325,21	2,20	432	419	-3,01	2
E021-06m.4	24951	0	5,12	0,07	438	465926	1	384,06	0,61	438	422	-3,65	2
E021-06m.5	1587	0	0,31	0,19	423	392716	0	237,61	0,13	423	422	-0,24	1
E022-04g.1	112	0	0,04	0,00	367	20777	0	3,94	0,00	367	367	0,00	0
E022-04g.2	4260	26	6,82	6,08	380	101357	9	37,36	2,82	380	377	-0,79	1
E022-04g.3	396	3	0,26	0,18	373	61103	2	28,19	0,32	373	373	0,00	0
E022-04g.4	676	1	0,29	0,18	377	96814	37	44,60	4,77	377	377	0,00	0
E022-04g.5	100	0	0,15	0,05	389	115634	0	63,86	0,10	389	388	-0,26	1
E022-06m.1	5174	0	0,59	0,00	488	62869	0	55,54	0,00	488	488	0,00	0
E022-06m.2	10851	3	2,19	0,08	491	257438	1	194,66	0,58	491	473	-3,67	1
E022-06m.3	19895	14	12,1	4,88	496	4373760	2	3600,00	6,54	496	485*	-2,22	1
E022-06m.4	2600	0	0,63	0,29	489	4634018	0	2970,41	10,44	489	471	-3,68	2
E022-06m.5	5174	0	0,59	0,00	488	3626945	0	2717,08	0,00	488	471	-3,48	3
E023-03g.1	59	0	0,03	0,00	558	237	0	0,65	0,00	558	558	0,00	0
E023-03g.2	10565	30	1,96	1,13	724	248448	22	125,19	1,94	724	724	0,00	0
E023-03g.3	2688	28	18,39	18,10	698	463912	3	310,93	11,04	698	698	0,00	0
E023-03g.4	767	3	3,99	3,87	714	676947	1	443,74	31,15	714	713	-0,14	1
E023-03g.5	36	0	0,28	0,25	742	44515	1	167,57	126,49	742	726*	-2,16	2
E023-05s.1	20	0	0,01	0,00	657	168	0	0,91	0,00	657	657	0,00	0
E023-05s.2	8430	204	8,38	7,05	720	150354	20	87,40	8,62	720	713	-0,97	1
E023-05s.3	9515	115	73,84	70,00	730	133431	6	163,98	75,24	730	730	0,00	0
E023-05s.4	114	1	0,76	0,70	701	184603	0	97,12	0,85	701	701	0,00	0
E023-05s.5	7	0	0,07	0,06	721	455	0	1,67	0,20	721	716	-0,69	1
E026-08m.1	13666	0	2,51	0,00	609	86197	0	86,76	0,00	609	609	0,00	0
E026-08m.2	16755	2	5,72	0,03	612	3236086	1	3600,00	0,13	612	611*	-0,16	1
E026-08m.3	25682	4	10,82	0,30	615	2904066	1	3600,00	1,44	615	609*	-0,98	1
E026-08m.4	64097	6	72,43	0,11	626	2311902	0	3600,00	0,97	626	619*	-1,12	2
E026-08m.5	13719	0	4,25	0,00	609	2428373	0	3600,00	0,00	609	603*	-0,99	1
E030-03g.1	62877	0	115,96	0,00	524	4103837	0	3600,00	0,00	524	524*	0,00	0
E030-03g.2	96802	494	53,32	14,15	687	3369783	12	3600,00	39,64	687	687*	0,00	0
E030-03g.3	209861	153	189,49	123,33	637	2453918	22	3600,00	181,35	637	637*	0,00	0
E030-03g.4	5026	42	901,18	900,33	738*	1907713	37	3600,00	1806,28	745	735*	-0,41	2
E030-03g.5	27819	4	125,96	123,03	704*	3598283	1	3600,00	51,26	704	703*	-0,14	1
E033-03n.1	5532	0	1,49	0,00	1991	261774	0	109,18	0,00	1991	1991	0,00	0
E033-03n.2	707121	1361	3600,24	29,81	2714*	2341532	43	3600,00	21,47	2714	2714*	0,00	0
E033-03n.3	419235	147	897,65	141,80	2574	2050435	48	3600,00	337,04	2666	2641*	2,60	1
E033-03n.4	218442	116	3600,12	3257,94	2668*	953329	94	3600,00	2371,75	2751	2690*	0,82	1
E033-03n.5	1029	7	63,17	62,98	2632	1827803	4	3600,00	181,78	2666	2583*	-1,86	1
E036-11h.1	306391	0	966,51	0,00	682	1397886	0	3600,00	0,00	682	682*	0,00	0
E036-11h.2	372037	0	1651,41	0,02	682	915414	0	3600,00	0,03	682	682*	0,00	0
E036-11h.3	279238	1	705,37	0,08	682	1033502	0	3600,00	0,07	682	682*	0,00	0
E036-11h.4	554658	13	2813,59	56,07	691	596813	1	3600,00	35,51	701	695*	0,58	3
E036-11h.5	306391	0	967,65	0,00	682	660740	0	3600,00	0,00	682	682*	0,00	0
Média	66054	52	283	82		935927	10	1300	91			-0,9	0,7

Referências

Albareda-Sambola, M., Fernández, E., e Laporte, G. (2011). A computational comparison of several models for the exact solution of the capacity and distance constrained plant location problem. *Computers & Operations Research*, 38(8):1109–1116.

Annouch, A., Bellabdaoui, A., e Minkhar, J. (2016). Split delivery and pickup vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. In *Intelligent Systems: Theories and Applications (SITA), 2016 11th International Conference on*, p. 1–6. IEEE.

Clautiaux, F., Jouglet, A., Carlier, J., e Moukrim, A. (2008). A new constraint programming approach for the orthogonal packing problem. *Computers & Operations Research*, 35(3):944–959.

Côté, J.-F., Gendreau, M., e Potvin, J.-Y. (2014). An exact algorithm for the two-dimensional orthogonal packing problem with unloading constraints. *Operations Research*, 62(5):1126–1141.

Côté, J.-F., Guastaroba, G., e Speranza, M. G. (2017). The value of integrating loading and routing. *European Journal of Operational Research*, 257(1):89–105.

Côté, J.-F. e Iori, M. (2018). The meet-in-the-middle principle for cutting and packing problems. *INFORMS Journal on Computing*, 30(4):646–661.

Dror, M., Laporte, G., e Trudeau, P. (1994). Vehicle routing with split deliveries. *Discrete Applied Mathematics*, 50(3):239–254.

Fischetti, M., González, J. J. S., e Toth, P. (1995). Experiments with a multi-commodity formulation for the symmetric capacitated vehicle routing problem. In *Proceedings of the 3rd Meeting of the EURO Working Group on Transportation, 169–173*. Citeseer.

Herz, J. C. (1972). Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Research and Development*, 16(5):462–469.

Hokama, P., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. (2016). A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with loading constraints. *Expert Systems with Applications*, 47:1–13.

Iori, M., Salazar-González, J.-J., e Vigo, D. (2007). An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Transportation science*, 41(2):253–264.

Leung, S. C., Zhang, D., Zhou, C., e Wu, T. (2012). A hybrid simulated annealing metaheuristic algorithm for the two-dimensional knapsack packing problem. *Computers & Operations Research*, 39(1):64–73.

Scheithauer, G. e Terno, J. (1996). The g4-heuristic for the pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, 47(4):511–522.

Wei, L., Zhang, Z., Zhang, D., e Leung, S. C. (2018). A simulated annealing algorithm for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 265(3):843–859.

Wei, L., Zhang, Z., Zhang, D., e Lim, A. (2015). A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 243(3):798–814.