

ÍNDICE DE CONLEY PARA FLUXOS GUTIERREZ-SOTOMAYOR

NIVALDO G. GRULHA JR., DAHISY V. S. LIMA, DENILSON TENÓRIO

RESUMO. Neste artigo introduzimos o leitor, por meio de exemplos, à teoria do índice de Conley e à teoria dos fluxos Gutierrez-Sotomayor. Apresentamos também importantes resultados de Montúfar e de Rezende, sobre o cálculo do índice de Conley para fluxos GS e uma fórmula para a característica de Euler-Poincaré por meio do índice de Conley.

1. INTRODUÇÃO

Charles Cameron Conley⁽¹⁾, foi um matemático estadunidense que trabalhou na área de sistemas dinâmicos. De forma inovadora, Conley introduziu um índice para campos vetoriais que agrega, além de informações numéricas, informações topológicas relacionadas a homotopia. Este é o chamado índice de Conley ([2]) um dos seus objetivos com este índice era generalizar o índice de Morse.

Jorge Manuel Sotomayor Tello^(2a) foi um matemático peruano e naturalizado brasileiro que trabalhou com equações diferenciais. Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon^(2b), também foi um matemático peruano e foi orientando de doutorado do próprio Sotomayor.

No ano de 1982, Gutierrez e Sotomayor ([4]) estenderam os resultados de Marília Peixoto e Maurício Peixoto sobre estabilidade estrutural de campos de vetores tangentes a variedades 2-dimensionais ([9], [10]).

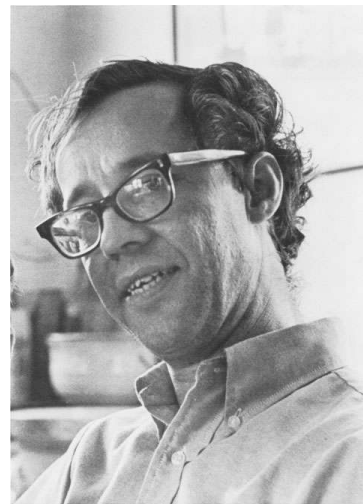
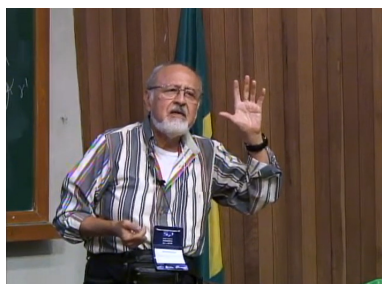


FIGURA 1. C. C. Conley 1933-1984

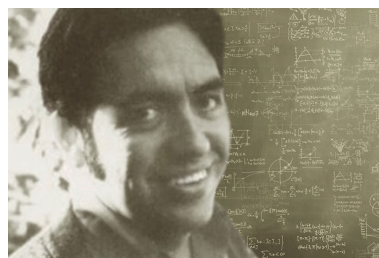
Fonte: www-users.cse.umn.edu

Data de aceitação: 24 de junho de 2023.

Palavras chave. Fluxo contínuo, Fluxos Gutierrez-Sotomayor, Índice de Conley, Singularidades.



(A) J. M. Sotomayor 1942-2022
 Fonte: impa.br



(B) C. T. Gutierrez 1944-2008
 Fonte: www.icmc.usp.br

FIGURA 2. Sotomayor e Gutierrez

Em seu trabalho Gutierrez e Sotomayor consideraram uma classe especial de conjuntos que foi chamado por eles de variedades 2-dimensionais com singularidades simples, atualmente chamamos esses conjuntos de variedades Gutierrez-Sotomayor ou apenas variedades GS. Além de definir as variedades GS, eles consideraram alguns fluxos especiais sobre essas variedades, hoje chamados de fluxos Gutierrez-Sotomayor ou fluxos GS. Na Seção 3, apresentamos alguns exemplos desses fluxos.

Apesar de definido para todo fluxo contínuo o índice de Conley ainda não havia sido calculado para os fluxos GS, mas recentemente com os trabalhos de Montúfar, de Rezende, Grulha, Lima, Raminere e Zigart essas duas teorias puderam ser relacionadas e os índices devidamente calculados ([3], [5], [8]). Neste artigo, através de alguns exemplos podemos ver um pouco dessa ligação entre as duas teorias.

2. ÍNDICE DE CONLEY

Nesta seção apresentamos o índice de Conley por meio de exemplos, mas antes precisamos ter em mente duas definições que são muito importantes para o entendimento do índice de Conley.

Considere φ_t um fluxo contínuo definido sobre um espaço topológico M . Diremos que um subconjunto compacto $N \subset M$ é uma **vizinhança isolante** se

$$Inv(N) := \{x \in N \mid \varphi_t(x) \in N, \forall t\} \subset int(N),$$

onde $int(N)$ denota o interior de N . Isto é, $N \subset M$ é uma vizinhança isolante quando a parte invariante pelo fluxo de N está contida no interior de N . Dizemos que S é um **conjunto invariante isolado** quando $S = Inv(N)$, para alguma vizinhança isolante N .

Agora, vamos exemplificar estas duas definições. Considere N um retângulo fechado ao redor da sela S ⁽³⁾. Perceba que $S = Inv(N) \subset int(N)$, pois o único ponto que não deixa o conjunto N pelo fluxo é justamente o ponto de sela. Assim, o ponto S é um conjunto invariante isolado e N é uma vizinhança isolante. Já se considerarmos um centro S no plano⁽³⁾, temos que este ponto não é um conjunto invariante isolado, pois para qualquer compacto N tal que $S \in int(N)$ temos que $inv(N) \neq S$.

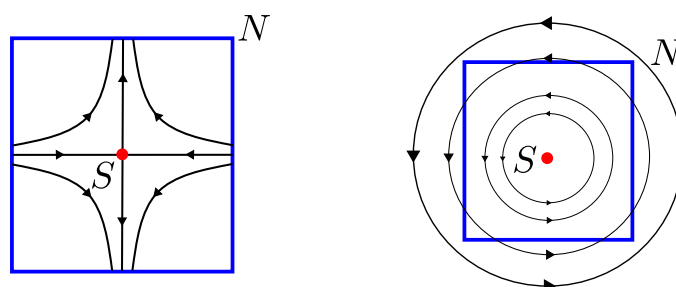
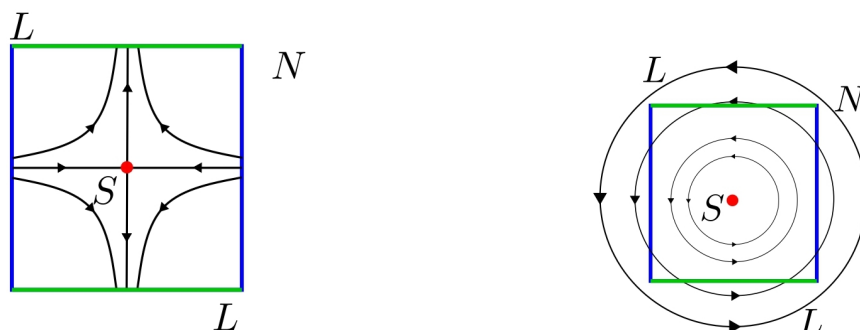


FIGURA 3. À esquerda temos uma singularidade do tipo sela e à direita uma singularidade do tipo centro.

A próxima definição é essencial para a definição e cálculo do Índice de Conley. Considere S um conjunto invariante isolado qualquer. Um par (N, L) de conjuntos compactos $L \subset N$ é dito um **par-índice** para S se satisfaz:

- (i) $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$;
- (ii) L é **positivamente invariante** em N , ou seja, dado $x \in L$ com $\varphi_t(x) \in N$ para $t \in [0, t_0]$, então $\varphi_t(x) \in L$ para $t \in [0, t_0]$.
- (iii) L é um **conjunto de saída** para N , isto é, dado $x \in N$ e $t_1 > 0$ tal que $\varphi_{t_1}(x) \notin N$, então existe $t_0 \in [0, t_1]$ de modo que $\varphi_t(x) \in N$, para $t \in [0, t_0]$ e $\varphi_{t_0}(x) \in L$.



(A) Ponto de Sela no plano

(B) Ponto de centro no plano

FIGURA 4. Exemplos

Agora, para fixarmos o que seria um par-índice, vamos exibir alguns exemplos. Na Figura 4a, perceba que $\overline{N \setminus L} = N$ e já vimos que N é uma vizinhança isolante, L é positivamente invariante e é um conjunto de saída para o fluxo, portanto o par (N, L) é um par-índice para o conjunto invariante S . Na Figura 4b, já vimos que $\text{inv}(\overline{N \setminus L}) = \text{inv}(N) \neq S$. Logo, não é um par-índice para o centro.

Um par (X, y) formado por um espaço topológico X e um ponto $y \in X$ é chamado de espaço pontuado e denotado por $(X, *)$. Indicamos por $[X, *]$ o **tipo de homotopia do par** $(X, *)$. De maneira menos técnica e mais lúdica, $[X, *]$ representa o conjunto de todos os espaços que podem ser contraídos ou esticados continuamente até ficarem iguais a $(X, *)$. Dado um conjunto invariante isolado S e um par-índice

(N, L) para S , vamos denotar por $(N/L, *)$ o espaço pontuado obtido pelo espaço quociente N/L , este espaço é obtido pela relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ ou $x, y \in L$, e $*$ é a classe de equivalência do conjunto L , que pode ser visto como um ponto.

O **índice de Conley homotópico** de um conjunto invariante isolado S é definido como o tipo de homotopia:

$$h(S) := [N/L, *],$$

onde (N, L) é um par-índice de S . Já o **índice de Conley homológico** de S é definido como:

$$CH_*(S) := \tilde{H}_*(h(S)),$$

onde \tilde{H}_* denota a homologia singular reduzida sobre \mathbb{Z} ¹. Os **índices de Conley numéricos** de S são definidos como o rank dos grupos de homologia $H_*(h(S))$, e denotados por:

$$h_*(S) = \text{rank } CH_*(S).$$

Note que as definições acima dependem, a priori, do par-índice escolhido. Porém Conley provou que, sempre existe um par-índice para um conjunto invariante isolado e que o índice independe da escolha do par-índice, mais precisamente:

Teorema 2.1 (Conley [2]). *Dado um conjunto invariante isolado S , sempre existe um par-índice associado a este conjunto. Além disso, se (N_1, L_0) e (M_1, M_0) são pares-índice para o conjunto invariante isolado S , então*

$$[N_1/L_0, *] = [M_1/M_0, *].$$

A prova completa é um pouco técnica e foge do objetivo do artigo, mas o leitor pode encontrar a demonstração no artigo do Conley ([2]). Aqui vamos apresentar um roteiro para demonstração, ou seja, os passos principais da prova.

Roteiro da demonstração.

- Existência:
 - (1) Defina $N^t := \{x \in N \mid x \cdot [-t, 0] \subset N\}$, prove que N^t é compacto e positivamente invariante em N ;
 - (2) Encontre um $T \geq 0$ adequado para $N_1 = N^T$;
 - (3) Defina $N_0 := N_1 \cap ((N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T])$;
 - (4) Prove que (N_1, N_0) é um par-índice.
- Equivalência homotópica entre os espaços pontuados:
 - (1) Defina funções $f_{(t,u,v)} : M_1/M_0 \rightarrow N_1/N_0$;
 - (2) Com algumas hipóteses sobre (t, u, v) , podemos provar que as funções $f_{(t,u,v)}$ são duas a duas homotópicas;
 - (3) Conseguimos, a partir dessas f 's, construir uma equivalência homotópica entre $[M_1/M_0, *]$ e $[N_1/N_0, *]$.

¹A teoria de homologia singular associa a cada espaço topológico uma sequência de grupos abelianos. Neste artigo faremos uso apenas de cálculos elementares da homologia singular reduzida da esfera.

□

O próximo resultado mostra um pouco de como utilizar o índice de Conley para investigar um conjunto invariante isolado de um fluxo.

Proposição 2.1. *Seja S um conjunto invariante isolado. Se $h(S) \neq \bar{0}$, então $S \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que $S = \emptyset$. Como (\emptyset, \emptyset) é um par-índice para S , então $h(S) = \bar{0}$. Assim, provamos a contrapositiva □

A proposição anterior nos diz que, se o índice de Conley de um conjunto invariante isolado S não é a classe de um ponto, então estamos diante de um conjunto S não vazio, ou seja, temos ao menos um ponto que é invariante pelo fluxo.

3. FLUXOS GUTIERREZ-SOTOMAYOR

O objetivo dessa seção é entender através de exemplos o que seria um fluxo Gutierrez-Sotomayor. Estes fluxos foram apresentados pela primeira vez por Gutierrez e Sotomayor em ([4]). Eles definiram campos vetoriais em uma classe especial de conjuntos que chamaram de "variedades 2-dimensionais com singularidades simples". Posteriormente, Montúfar e de Rezende ([8]) denominaram tais conjuntos de variedades GS. Como na Teoria de Singularidade o termo "singularidade simples" tem outro significado, optamos por denominá-las singularidades controladas. Em homenagem aos grandes matemáticos Gutierrez e Sotomayor, abreviamos ao longo do texto por variedades, campos e fluxos GS.

Antes de definir os fluxos GS precisamos lembrar ou ver pela primeira vez alguns conceitos básicos de Sistemas Dinâmicos. Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , onde $k \geq 1$. Além disso, considere $p \in U$ e $\varphi_p(t) = \varphi(t, p)$ o fluxo que passa pelo ponto p e é definida no intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = +\infty$, podemos definir o seguinte conjunto:

$$\omega(p) := \{q \in U \mid \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R} \mid t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Do mesmo modo, se $\omega_-(p) = -\infty$, podemos definir o seguinte conjunto:

$$\alpha(p) := \{q \in U \mid \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R} \mid t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Estes conjuntos são chamados, respectivamente, de ω -limite e α -limite de p .

Considere p uma singularidade do campo X , ou seja, $X(p) = 0$. Definimos a **variedade estável e instável de p** , respectivamente por:

$$W_p^s := \{q \in U \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, q) = p\},$$

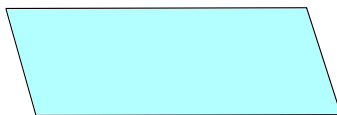
$$W_p^u := \{q \in U \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, q) = p\}.$$

Um ponto singular p de um campo vetorial X de classe C^k , onde $k \geq 1$, é dito **hiperbólico** se todos os autovalores de $DX(p)$ têm parte real diferente de zero. Com essas definições vamos conseguir entender os fluxos GS.

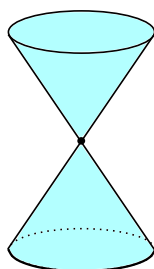
Uma **variedade 2-dimensional com singularidades controladas** ou variedade Gutierrez-Sotomayor ou simplesmente variedade GS é um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança V_p de p em M e um difeomorfismo

$\psi : \tilde{V}_p \rightarrow \mathcal{P}$ de classe C^∞ , com $\psi(p) = 0$, onde \tilde{V}_p é uma extensão do aberto V_p para o espaço euclidiano e \mathcal{P} é um dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 :

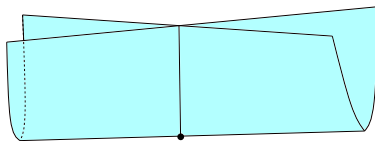
- (1) **Plano** $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$;



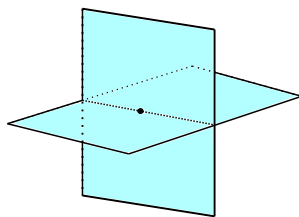
- (2) **Cone** $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 - y^2 - x^2 = 0\}$;



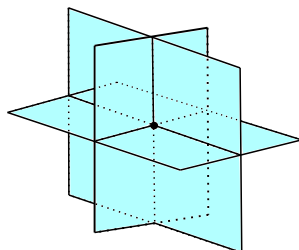
- (3) **Cross-cap** $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | zx^2 - y^2 = 0 \text{ e } z \geq 0\}$;



- (4) **Ponto duplo** $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0\}$;



- (5) **Ponto triplo** $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xyz = 0\}$.



Um exemplo de variedade GS é o **toro pinçado**⁽⁵⁾, que é "parecido" com um toro a diferença é que um dos círculos meridianos foi contraído, de forma contínua, a um ponto. Neste ponto, temos uma vizinhança que é difeomorfa ao cone, os demais pontos ainda são localmente difeomorfos ao plano.

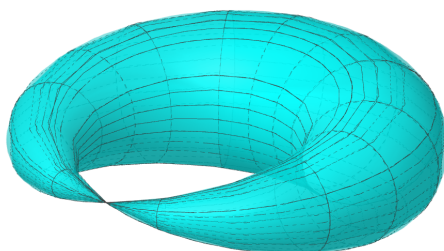


FIGURA 5. Toro pinçado

Agora, definimos o que é um **campo vetorial de Gutierrez-Sotomayor** que abreviamos apenas por **campo GS**. Ao longo do texto, usamos $\mathcal{X}^r(M)$ para denotar o conjunto de todos os campos vetoriais de classe r em uma variedade M . Dada M uma variedade GS, dizemos que $X \in \mathcal{X}^r(M)$ é um **campo Gutierrez-Sotomayor** se satisfaz:

- (1) X tem um número finito de singularidades e de órbitas periódicas e todas elas são hiperbólicas;
- (2) Os ciclos limites singulares de X são simples e X não tem conexão de sela²;
- (3) Os conjuntos α -limite e ω -limite de toda trajetória de X são formado por pontos singulares, órbitas periódicas ou ciclos singulares.

O fluxo φ_t induzido por um campo GS é chamado de fluxo Gutierrez-Sotomayor ou **fluxo GS**. No nosso trabalho consideramos um campo GS mais restrito, onde o fluxo GS não admite órbitas periódicas nem ciclos limites. Isto é, consideramos campos $X \in \mathcal{X}^r(M)$ tais que:

- (1) X tem um número finito de singularidades e todas elas são hiperbólicas;
- (2) X não tem conexão de sela;
- (3) Os conjuntos α -limite e ω -limite de toda trajetória de X são pontos singulares.

Agora, para fixarmos as ideias das últimas definições apresentamos alguns exemplos de fluxos GS. Além disso, esses exemplos são aproveitados na Seção 4.

Começamos por uma singularidade do **tipo plano** de **natureza sela** como mostra a Figura 6.

²Uma trajetória $\gamma \subset M(\mathcal{R})$ é uma conexão de sela se existem duas singularidades hiperbólicas p e q de X tais que $W^u(p) \cap W^s(q) \supset \gamma$ e $W^u(p) \cup W^s(q)$ é constituído de um número finito de trajetórias, onde $W^u(p)$ e $W^s(q)$ denotam os conjuntos instável de p e estável de q , respectivamente.

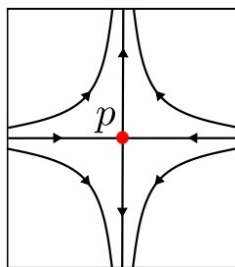
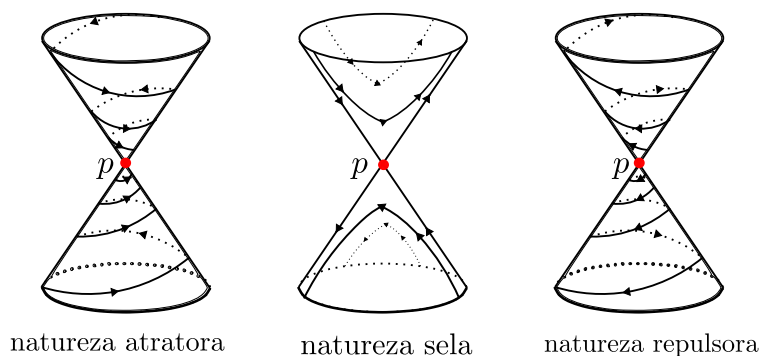


FIGURA 6. Singularidade de tipo plano e natureza sela

Agora, a Figura 7 apresenta singularidades do **tipo cone** e de **naturezas atratora, sela e repulsora**.



natureza atratora

natureza sela

natureza repulsora

FIGURA 7. Singularidades do tipo cone

A Figura 8 a seguir representa uma singularidade do **tipo cross-cap** e de **natureza repulsora**.

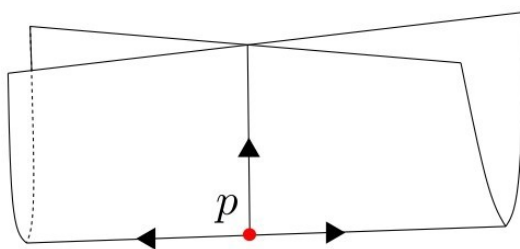
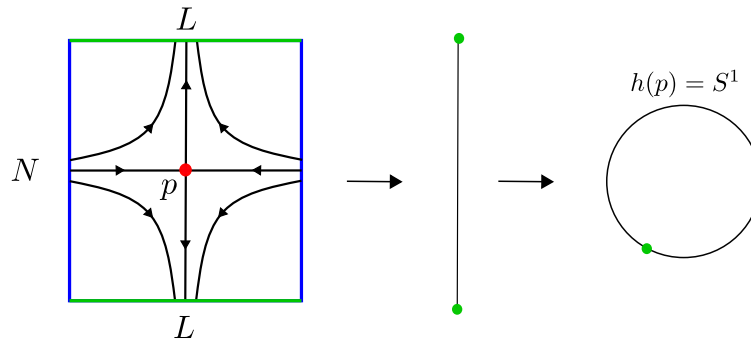


FIGURA 8. Singularidade do tipo cross-cap e natureza repulsora

4. ÍNDICE DE CONLEY DE ALGUNS FLUXOS GS

Nesta seção, apresentamos os cálculos dos índices de Conley das singularidades presentes nos fluxos GS que analisamos na Seção 3. Este e os demais casos foram devidamente calculados por de Rezende e Montúfar [8].

Começamos analisando as singularidades do tipo plano e natureza sela. Aqui, tomamos o par-índice (N, L) composto pelo retângulo N , em torno da singularidade p , e por L que é formado pelos dois segmentos de reta em verde na fronteira de N .

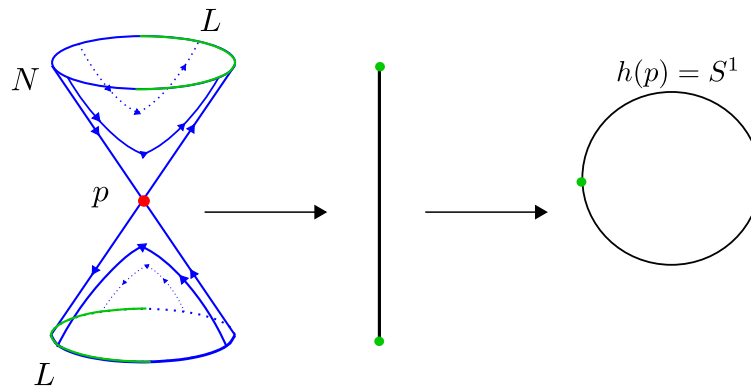


Neste caso o índice homotópico pode ser obtido da seguinte forma: primeiro fazemos um processo de contração na horizontal, isto é, ao longo da variedade estável de p , em seguida fazemos a identificação dos pontos assinalados e paramos por aí porque essa já é uma figura conhecida, a 1-esfera S^1 . Agora, o índice de Conley homológico desta singularidade é:

$$\tilde{H}_n(S^1) = \tilde{H}_n(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Donde, o índice de Conley numérico para esta singularidade é $(0, 1, 0)$.

Agora, vamos analisar as singularidades do tipo cone. O primeiro caso que vamos apresentar são as singularidade de natureza sela. Aqui, tomamos o par-índice (N, L) composto pelo cone N , em torno da singularidade p , e L formado pelos dois segmentos em verde na fronteira de N .

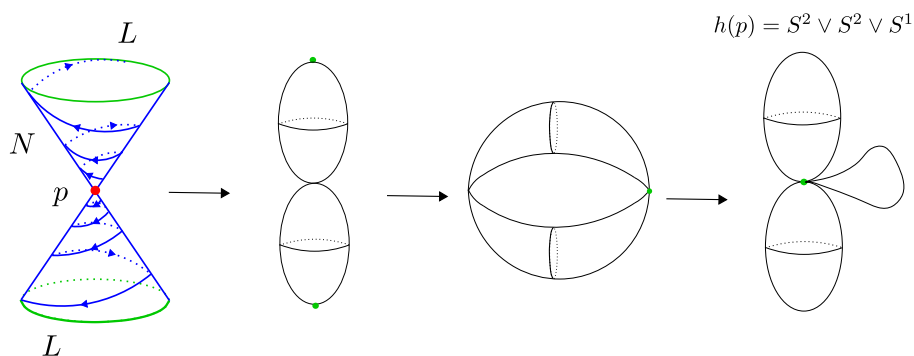


No primeiro passo, fizemos uma contração na horizontal, pois tanto N quanto L "não registram buracos". No segundo passo, fizemos o processo de quociente N/L e mais uma vez obtemos \mathbb{S}^1 . Novamente, calculamos o índice de Conley homológico desta singularidade:

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^1) = \tilde{H}_n(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Donde, o índice de Conley numérico para esta singularidade é $(0, 1, 0)$.

O segundo caso desse tipo de singularidade são as de natureza repulsora. Neste caso, tomamos um par-índice (N, L) formado pelo cone N , em torno da singularidade p , e L composto de duas circunferências no bordo do cone N .

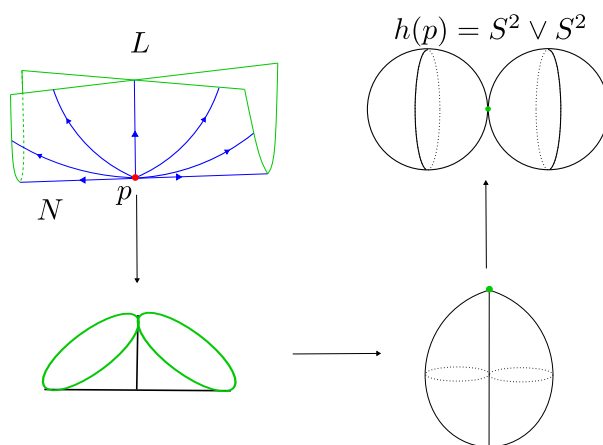


Perceba que neste caso o conjunto L é composto de duas partes conexas e cada uma delas registra buracos. No primeiro passo fizemos a identificação de cada uma das componentes conexas de L a um ponto, e teremos duas "sacolas unidas pelo ponto p ". No segundo passo fizemos o processo de quociente N/L . Como ainda não chegamos em uma figura conhecida precisamos realizar algumas contrações no terceiro passo. Perceba que a conexão entre as duas sacolas é um "laço", e que este laço não pode ser solto porque ele registra buracos, mas podemos deslizar continuamente as sacolas até o ponto L mantendo esse laço de ligação e foi justamente o que fizemos no terceiro passo. Agora, chegamos em uma figura conhecida o buquê de duas \mathbb{S}^2 e uma \mathbb{S}^1 coladas no mesmo ponto. Matematicamente isso corresponde a $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$. Também conseguimos calcular a homologia reduzida desse buquê,

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 2; \\ \mathbb{Z}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1, 2. \end{cases}$$

Assim, o índice de Conley numérico desta singularidade é dado por $(0, 1, 2)$.

Agora, vamos analisar as singularidades do tipo cross-cap e natureza repulsora. Neste caso, tomamos um par-índice (N, L) formado pelo cross cap N , em torno da singularidade p , e L é composto pelo bordo de N .



No primeiro passo fizemos apenas uma deformação contínua no conjunto L . No segundo passo fizemos o processo de quociente N/L , mas perceba que o conjunto L tem duas partes que registram buracos. Logo, ficamos com duas sacolas que estão unidas por uma reta. No terceiro passo deformamos continuamente até formar um buquê de duas esferas. Note que a reta que ligava as duas esferas não registrava buracos. Como nos outros casos de buquê, calculamos o índice de Conley homológico desta singularidade:

$$\tilde{H}_n(S^2 \vee S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 2; \\ 0, & n \neq 2. \end{cases}$$

Assim, o índice de Conley numérico desta singularidade é dado por $(0, 0, 2)$.

5. CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ

Nesta seção, vamos apresentar outra aplicação da teoria de Conley que é a sua ligação com a Característica de Euler-Poincaré. Como hoje sabemos a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico muito conhecido e importante na matemática. Foi introduzido por Euler em 1758, na famosa expressão $\chi(K) = V - A + F$, onde $K \subset \mathbb{R}^3$ é um poliedro, V o número de vértices, A é o número de arestas e F o número de faces. Por exemplo, vamos calcular a característica de Euler-Poincaré de um cubo como a da Figura 9. Pela Figura 10a temos que $V = 8$, pela Figura 10b temos que $F = 6$ e pela Figura 10c temos que $A = 12$. Assim, a característica de Euler-Poincaré do cubo é dada por $\chi(K) = 8 - 12 + 6 = 2$.

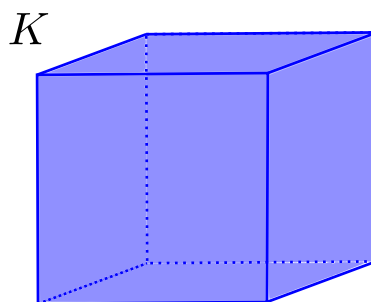


FIGURA 9. Cubo ou hexaedro regular

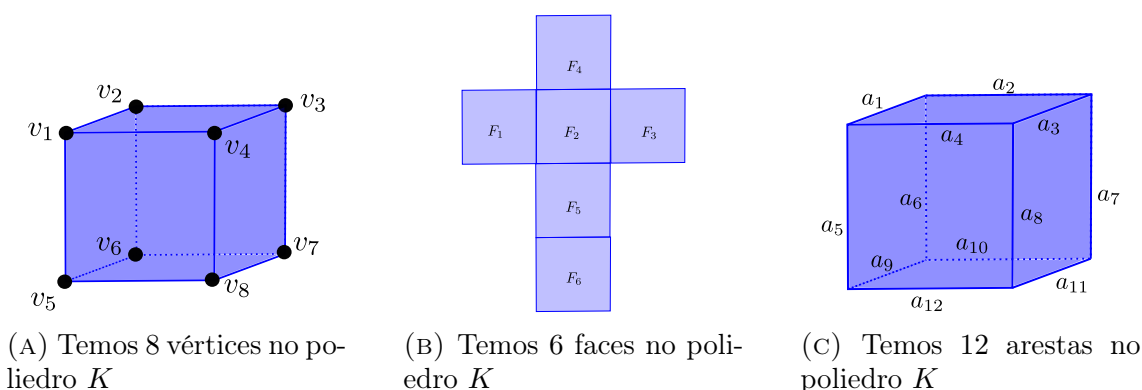


FIGURA 10. Característica de Euler-Poincaré do cubo

Já em 1893, Poincaré nos mostrou que se consideramos a homologia com coeficientes inteiros, então:

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \beta_r,$$

onde β_r são os números de Betti de K . Logo, temos um invariante topológico. Para os leitores que nunca viram, ou ainda não se aprofundaram no assunto, recomendamos a leitura do Capítulo 2 do livro do Brasselet [1] ou o artigo do Elon [7].

Para que tenhamos uma noção de como o índice de Conley é interessante, trouxemos o seguinte resultado:

Proposição 5.1 (Montúfar e de Rezende [8]). *Considere M uma variedade GS munida de um fluxo GS X_t , com um conjunto de singularidades $\mathcal{L} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Se (h_0^i, h_1^i, h_2^i) é o índice de Conley numérico para p_i , então:*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^m (h_0^i - h_1^i + h_2^i).$$

Demonstração. Sejam $G_k \subset M$ uma seqüência de conjuntos tais que:

$$G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = M$$

e (G_i, G_{i-1}) é um par-índice para $L_i = \{p_i\}$, para todo $1 \leq i \leq m$. Podemos conseguir uma tal seqüência de conjuntos graças aos resultados encontradas em [8]. Considere a seqüência exata longa do par (G_i, G_{i-1}) :

$$\dots \xrightarrow{p_j} H_j(G_i, G_{i-1}) \xrightarrow{\partial_j} H_{j-1}(G_{i-1}) \xrightarrow{i_*} H_{j-1}(G_i) \xrightarrow{p_{j-1}} \dots$$

Pela exatidão da seqüência, obtemos:

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } p_j) &= \dim(\text{Ker } \partial_j) \\ &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) - \dim(\text{Im } \partial_j) \\ (1) \quad &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) - \dim(\text{ker } i_*). \end{aligned}$$

Novamente pela exatidão da sequência temos que:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dim(\text{Im } p_{j-1}) &= -\dim(\text{Ker } p_{j-1}) + \dim(H_{j-1}(G_i)) \\ &= -\dim(\text{Im } i_*) + \dim(H_{j-1}(G_i)). \end{aligned}$$

Somando as equações (1) e (2):

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } p_{j-1}) + \dim(\text{Im } p_j) &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) - \dim(\text{ker } i_*) \\ &\quad + \dim(H_{j-1}(G_i)) - \dim(\text{Im } i_*) \\ &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) + \dim(H_{j-1}(G_i)) \\ &\quad - (\dim(\text{Im } i_*) - \dim(\text{Ker } i_*)). \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } p_{j-1}) + \dim(\text{Im } p_j) &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) + \dim(H_{j-1}(G_i)) \\ &\quad - \dim(H_{j-1}(G_{i-1})). \end{aligned}$$

Uma vez que $CH_*(L_i) \cong H_*(G_i, G_{i-1})$, teremos que $h_j(L_i) = \dim(H_j(G_i, G_{i-1}))$. Assim,

$$\dim(\text{Im } p_{j-1}) + \dim(\text{Im } p_j) = h_j(L_i) - \beta_{j-1}(G_{i-1}) + \beta_{j-1}(G_i).$$

Para i fixado, considere a soma alternada em j :

$$\sum_{j=0}^2 (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=1}^3 (-1)^j [\beta_{j-1}(G_i) - \beta_{j-1}(G_{i-1})] = 0.$$

Agora, somando a expressão acima para $i = 1, \dots, m$, temos:

$$\sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=1}^3 (-1)^j \beta_{j-1}(G_m) = 0.$$

Como $G_m = M$, temos:

$$\sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=0}^2 (-1)^j \beta_j(M) = 0.$$

Assim,

$$\chi(M) = \sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i),$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 0, 1, 2$. Portanto,

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^m (h_0^i - h_1^i + h_2^i).$$

□

Agora, vamos dar um exemplo de como utilizar a proposição anterior em conjunto com o cálculo do índice de Conley que fizemos anteriormente. Considere M como a variedade GS composta por exatamente duas singularidades do tipo cone, uma

singularidade p_1 de natureza repulsora e uma singularidade p_2 de natureza atratora, como na Figura 11.

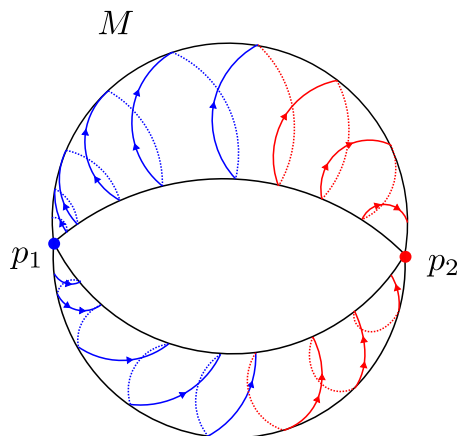


FIGURA 11. Fluxo GS na variedade M

Pelos exemplos de índice de Conley para fluxos GS, temos que o índice de Conley numérico de p_1 é dado por $(0, 1, 2)$ e da singularidade p_2 é dado por $(1, 0, 0)$. Pela Proposição 5.1, temos que a característica de Euler é igual a:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{i=1}^2 (h_0^i - h_1^i + h_2^i) \\ &= (0 - 1 + 2) + (1 - 0 + 0) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Definimos um **bloco isolante** como uma vizinhança isolante N tal que o seguinte conjunto:

$$N^- := \{x \in N \mid x \cdot [0, T) \not\subset N, \forall T > 0\}$$

é um conjunto fechado. Além disso, (N, N^-) é um par-índice para $Inv(N) = \{p\}$. Montúfar e de Rezende [8] tratam mais detalhadamente de como construir os blocos isolantes, para cada tipo de singularidade, via teoria das alças generalizadas e analisando diferentes tipos de colagem.

Para finalizar nosso artigo, vamos apresentar um ótimo resultado que dá uma relação entre os números de Betti das subvariedades que são fronteiras do bloco isolante contendo p , com o número de componentes conexas da fronteira e o índice de Conley numérico (h_0, h_1, h_2) .

Teorema 5.1 (Montúfar e de Rezende [8]). *(Igualdade de Poincaré-Hopf)* Considere (N_1, N_0) um par-índice para uma singularidade $p \in M$ de $X \in \mathcal{X}^r(M)$, cujo índice de Conley numérico é (h_0, h_1, h_2) . Então

$$(3) \quad (h_2 - h_1 + h_0) - (h_2 - h_1 + h_0)^* = e^+ - \beta^+ - e^- + \beta^-,$$

onde:

- $*$ indica o índice de Conley para o fluxo reverso;

- $e^+(e^-)$ é o número de componentes conexas da fronteira de entrada (respectivamente saída) de N_1 ;
- $\beta^+ = \sum_{k=1}^{e^+} b_k^+$ ($\beta^- = \sum_{k=1}^{e^-} b_k^-$), onde b_k^+ (b_k^-) é o primeiro número de Betti da k -ésima componente conexa do bordo de entrada (respectivamente saída) de N_1 .

Demonstração. Temos pela Proposição 5.1 que,

$$\chi((N_1, N_0)) = h_2 - h_1 + h_0.$$

Pela sequência longa exata do par (N_1, N_0) , temos que $\chi((N_1, N_0)) = \chi(N_1) - \chi(N_0)$.
 Onde,

$$\chi(N_1) = \chi(N_0) + h_2 - h_1 + h_0.$$

Como $N_0 = \partial N_1^-$, ficamos com a seguinte igualdade:

$$(4) \quad \chi(N_1) = \chi(\partial N_1^-) + h_2 - h_1 + h_0.$$

Poderíamos provar também uma igualdade análoga para o fluxo reverso, isto é:

$$(5) \quad \chi(N_1) = \chi(\partial N_1^+) + (h_2 - h_1 + h_0)^*.$$

Subtraindo a igualdade (5) da igualdade (4), obtemos:

$$(h_2 - h_2 + h_0) - (h_2 - h_2 + h_0)^* + \chi(\partial N_1^-) - \chi(\partial N_1^+) = 0.$$

Onde,

$$(h_2 - h_2 + h_0) - (h_2 - h_2 + h_0)^* = \chi(\partial N_1^+) - \chi(\partial N_1^-).$$

Como podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial N^+ &= \bigcup_{k=1}^{e^+} \partial N_k^+, \\ \partial N^- &= \bigcup_{k=1}^{e^-} \partial N_k^-, \end{aligned}$$

temos que:

$$\begin{aligned} \chi(\partial N^+) &= \sum_{k=1}^{e^+} \chi(\partial N_k^+) = \sum_{k=1}^{e^+} ((-1)^0 \cdot 1 - b_k^+); \\ \chi(\partial N^-) &= \sum_{k=1}^{e^-} \chi(\partial N_k^-) = \sum_{k=1}^{e^-} ((-1)^0 \cdot 1 - b_k^-). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \chi(\partial N^+) &= e^+ - \sum_{k=1}^{e^+} b_k^+ = e^+ - \beta^+; \\ \chi(\partial N^-) &= e^- - \sum_{k=1}^{e^-} b_k^- = e^- - \beta^-. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(h_2 - h_2 + h_0) - (h_2 - h_2 + h_0)^* = e^+ - \beta^+ - e^- + \beta^-.$$

□

6. CONCLUSÕES

Este trabalho destaca a importância e a beleza do índice de Conley e suas conexões com diferentes linhas da matemática como: topologia algébrica, sistemas dinâmicos e singularidades. Embora o índice de Conley esteja bem definido para uma gama muito grande de fluxos, o caso GS constitui um conjunto importante e ilustrativo para a teoria de Conley.

O índice de Morse pode ser usado no cálculo de homologia de uma variedade. O índice de Conley, como sua generalização, pode ser utilizado no cálculo da homologia de interseção no caso de variedade singular, gerando novas perspectivas na área. Além disso, muitos casos do cálculo do índice Conley ainda não foram propriamente calculados.

7. AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer o (a) parecerista anônimo(a) pelos apontamentos de várias correções e sugestões que certamente contribuíram para melhorar o presente texto.

N. Grulha foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2019/21181-0. D. Lima foi parcialmente financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos nº 2020/11326-8 e nº 2019/21181-0. D. Tenório ressalta que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- [1] BRASSELET, J. P. **An introduction to Characteristic Classes**. IMPA, 2021.
- [2] CONLEY, C. C. **Isolated Invariant Sets and the Morse Index**. 1978. CBMS vol. 38. Amer. Math. Soc., Providence.
- [3] DE REZENDE, K. A.; GRULHA, N. G. Jr.; LIMA, D. V. S.; ZIGART, M. A. J. **Gutierrez-Sotomayor flows on singular surfaces**. Topological Methods in Nonlinear Analysis, v. 60, n.1, p. 221-265, 2022.
- [4] GUTIERREZ, C. T.; SOTOMAYOR, J. M. **Stable vector fields on manifolds with simple singularities**. Proceedings of the London Mathematical Society, v. 3, n. 1, p. 97-112, 1982.
- [5] LIMA, D. V. S.; RAMINELLI, S. A.; DE REZENDE, K. A. **Homotopical cancellation theory for Gutierrez-Sotomayor singular flows**. Journal of Singularities, v. 23, p. 33-91, 2021.
- [6] LIMA, E. L. **Homologia básica**. IMPA, 2009.
- [7] LIMA, E. L. **A característica de Euler-Poincaré**. Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, n. 1, p. 47-62, 1985.
- [8] MONTÚFAR, H.; DE REZENDE, K. A. **Conley theory for Gutierrez-Sotomayor fields**. Journal of Singularities, v. 22, p. 241-277, 2020.

- [9] PEIXOTO, M. C.; PEIXOTO, M. M. **Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions**. An. Acad. Brasil. Ci, v. 31, n. 2, p. 135-160, 1959.
- [10] PEIXOTO, M. M. **Structural stability on two-dimensional manifolds**. Topology, v. 1, n. 2, p. 101-120, 1962.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
ESTRADA DONA CASTORINA, 110, SALA 109
RIO DE JANEIRO, RJ
22460-320

Email address: denilson.tenorio@ufabc.edu.br,
dahisy.lima@ufabc.edu.br,
njunior@icmc.usp.br