LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

Algoritmos de decomposição de Benders para um problema de roteamento de ônibus escolares

Samuel Ferreira Guimarães Santos
Instituto de Ciências de Matemática e Computação, Universidade de São Paulo (USP)
samuel.ferreira.santos@usp.br

Franklina M. B. Toledo
Instituto de Ciências de Matemática e Computação, Universidade de São Paulo (USP)
fran@icmc.usp.br

Pedro B. Castellucci
Departamento de Informática e Estatística, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
pedro.castellucci@ufsc.br

RESUMO

O problema de roteamento de ônibus escolares é uma variante de problemas de roteamento que busca atender a demanda de transporte de estudantes entre um conjunto possível de pontos de parada e escolas (em ambas as direções). Apesar de sua importância social e econômica, trata-se de um problema NP-difícil e há uma escassez de métodos exatos na literatura para sua resolução. Na tentativa de diminuir essa lacuna, são propostos e avaliados dois algoritmos de decomposição de Benders para o problema. A avaliação em instâncias da literatura mostra uma redução considerável de *gap* e um maior número de soluções ótimas comprovadas quando as propostas são comparadas com a utilização direta de um pacote computacional baseado em *branch-and-cut*.

PALAVRAS CHAVE. Roteamento de veículos, Método exato, Programação Inteira.

ABSTRACT

The School Bus Routing problem is a type of routing problem that accounts for transporting students between bus stops and schools (in both directions). Despite its social and economic importance, it is an NP-hard problem and lacks exact solution methods. For this, we propose and evaluate two Benders decomposition algorithms. Evaluating them with instances from the literature shows smaller gaps and more proven optimal solutions when compared to the direct use of a branch-and-cut-based solver.

PALAVRAS CHAVE. Vehicle routing, exact method, integer programming.

1. Introdução

No Brasil, de acordo com o [INEP, 2023], 47,3 milhões de estudantes estavam matriculados na educação básica num conjunto de 178,5 mil escolas em 2023. No censo, também se contabilizou 49% das matrículas se davam na rede municipal e 30% na rede estadual de ensino. Destes estudantes, 88,8% estavam na área urbana. A lei brasileira obriga o Estado a garantir o transporte escolar, responsabilidade delegada aos municípios.

Além do aspecto econômico, um transporte eficiente e seguro traz benefícios para a Educação. Neste contexto, a importância da definição de rotas para o transporte de estudantes é evidenciada pela literatura da área de Otimização há mais de 50 anos, com o Problema de Roteamento de Ônibus Escolares (*School Bus Routing Problem*, SBRP). Newton e Thomas [1969] foram os primeiros a abordar o SBRP e, desde então, diversas variantes e extensões do problema já foram exploradas: a escolha dos pontos de parada [Sales et al., 2018], a distância percorrida pelos estudantes até os pontos de parada [Martínez e Viegas, 2011], o horário limite para chegada à escola, a inclusão de estudantes com necessidades variáveis [Ansari et al., 2021; Santos et al., 2022], a minimização de custos de roteamento e/ou de número de veículos [Feng et al., 2023], entre outras. Para uma revisão abrangente o leitor pode consultar o trabalho de Ellegood et al. [2020].

No entanto, a extensão do problema que permite o embarque e o desembarque simultâneos em uma rota, pelo melhor do nosso conhecimento, foi abordada apenas recentemente por Miranda et al. [2018] e Santos et al. [2022]. Miranda et al. [2018] trataram o problema de transporte escolar de estudantes da área rural com uma combinação de busca local iterada (ILS) e um método de busca decomposta em vizinhança variável (VNDS). Em Santos et al. [2022], foram propostos e avaliados modelos para minimizar o custo total da rota e minimização do tempo da rota mais longa.

Mesmo para variantes que não consideram embarque e desembarque simultâneos, os métodos de solução típicos são heurísticos [Ellegood et al., 2020]. Algumas exceções são o trabalho de Kinable et al. [2014] e Caceres et al. [2019]. Kinable et al. [2014] utilizaram geração de colunas para resolver os problemas de seleção dos pontos de parada e de roteamento dos ônibus. Os autores obtiveram bons resultados nos experimentos computacionais realizados utilizando o *benchmark* de Schittekat et al. [2013]. Calvete et al. [2020] também utilizaram o conjunto de instâncias de Schittekat et al. [2013] para avaliar uma *matheurística* para um problema de determinação dos pontos de ônibus, alocação de cada estudante aos pontos e o roteamento dos ônibus. Caceres et al. [2019] consideram o SBRP com foco no roteamento de estudantes com necessidades variáveis e, apesar do método desenvolvido ser heurístico, os autores utilizam uma abordagem de geração de colunas. Sharma [2024] propôs um algoritmo de otimização por colônia de formigas que considera aspectos de sustentabilidade, como o consumo de combustível dos veículos. Outra variante é abordada por Movafaghpour [2023], que desenvolveu uma heurística para o problema de roteamento de ônibus escolares com frota heterogênea com incertezas associadas ao tempo de viagem.

A falta de abordagens exatas para o problema motivou a exploração de decomposição de Benders [Benders, 1962] como alternativa. A decomposição de Benders teve sua aplicabilidade aumentada com a proposta de Hooker e Ottosson [2003] e tem sido aplicada em diversos problemas de otimização, entre eles corte e empacotamento, escalonamento, projeto de redes de telecomunicação, roteamento de veículos e transporte de passageiros [Hooker, 2023]. Embora tenha sido aplicada a problemas de roteamento e transporte de passageiros, não é de nosso conhecimento uma aplicação para o SBRP, em especial para a variante com embarque e desembarque simultâneos.

Este trabalho explora a lacuna de uma escassez de métodos exatos que contemplem características importantes do SBRP. Por isso, são propostos e avaliados dois algoritmos de decomposição de Benders para o SBRP capazes de acomodar a variação de embarque e de desembarque e diferentes tempos de serviço para os estudantes. O restante do artigo está organizado da seguinte forma, na Seção 2, o problema e uma respectiva modelagem são apresentados. Então, as propostas de reformulações para os algoritmos de Benders são apresentadas na Seção 3. Os experimentos computacionais são descritos na Seção 4 e são tecidas conclusões na Seção 5.

2. Definição e modelagem

O modelo apresentado foi proposto por Santos et al. [2022]. Para modelar o problema de embarque e desembarque simultâneos, é preciso expandir o conjunto dos pontos de ônibus (U). Cada ponto de ônibus $u \in U$ é duplicado, para considerar um ponto de embarque, u^e, e o desembarque de estudantes, u^d. Os estudantes que embarcam em u^e, desembarcam na escola, enquanto os estudantes que desembarcam em u^d, embarcam na escola. Portanto, dois novos conjuntos de paradas de ônibus U^e e U^d são definidos. Além disso, cada nó de embarque está associado a seu respectivo nó de desembarque. Portanto, são criados múltiplos nós na escola para realizar as associações aos pontos de ônibus duplicados (Sc^d associado ao conjunto U^e e Sc^e associado ao conjunto U^d). Os parâmetros e as variáveis do modelo são resumidos nas Tabelas 1 e 2, respectivamente.

Tabela 1: Parâmetros do modelo (1)–(24).

S	conjunto de estudantes ($k = 1, \ldots, \|S\|$);
S^e	conjunto de estudantes que embarcam na escola ($S^e \subseteq S$);
S^d	conjunto de estudantes que desembarcam na escola ($S^d \subseteq S$, $S^e \cap S^d = \emptyset$ e $S^e \cup S^d = S$) ;
U	conjunto de pontos de ônibus ($\ell = 1, \ldots, n_u$ em que $n_u = \|U\|$);
Sc^e	conjunto de nós de embarque na escola correspondentes aos pontos de ônibus U ($Sc^e = \{1, ..., n_u\}$);
U^d	conjunto de nós de desembarque correspondentes aos pontos de ônibus U ($U^d = \{n_u + 1, ..., 2n_u\}$);
U^e	conjunto de nós de embarque correspondentes aos pontos de ônibus U ($U^e = \{2n_u + 1, ..., 3n_u\}$);
Sc^d	conjunto de nós de desembarque na escola correspondentes aos pontos de ônibus U ($Sc^d = \{3n_u + 1, ..., 4n_u\}$);
Sc	conjunto de nós que representam a escola ($Sc = \{0, 4n_u + 1\}$);
N	conjunto de todos os nós que representam o problema ($N = Sc^e \cup U^d \cup U^e \cup Sc^d \cup Sc$);
N^e	conjunto de nós de embarque ($N^e = Sc^e \cup U^e$);
D_{ij}	tempo (ou distância) para ir do nó i ao nó j ($i, j = 0, \ldots, 4n_u + 1$);
U_k	conjunto de pontos de ônibus alcançáveis pelo estudante k ($U_k \subseteq U$);
T_k	tempo de embarque (desembarque) do estudante k;
Q	capacidade dos ônibus, em número de estudantes.

Tabela 2: Variáveis binárias, inteiras e contínuas do modelo (1)–(24).

x_{ij}	varíavel binária que assume o valor 1 se um ônibus percorre o arco (i, j) e é igual a zero, caso contrário;
$y_{k\ell}$	variável binária que assume o valor 1 se o estudante k embarca (ou desembarca) no ponto de ônibus ℓ e é igual a zero, caso contrário;
z_ℓ	variável binária que assume o valor 1 se houver embarque ou desembarque no ponto de ônibus ℓ, e 0 caso contrário;
d_i	é igual ao número de estudantes que embarcam (desembarcam) no nó i;
q_i	número de estudantes que estão no veículo após ele visitar o nó i;
r_i	identificador da rota a que o nó i pertence.
t_i	tempo total de embarque/desembarque no nó i;
u_i	tempo total da rota após visitar o nó i.

Com isso, tem-se o modelo de otimização linear (1)–(24). Vale destacar que, sem perda de generalidade, as variáveis d_i e q_i podem ser consideradas contínuas, pois são resultantes da soma de valores binários, logo não assumem valores fracionários em uma solução factível do problema.

$$\text{minimizar} \sum_{(i,j)\in N\times N} D_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

sujeito a:

$$\sum_{\ell\in U_k} y_{k\ell} = 1 \qquad \forall k \in S \tag{2}$$

$$\sum_{k\in S^e} y_{ki} = d_i \qquad \forall i \in Sc^e \tag{3}$$

$$\sum_{k\in S^d} y_{k,i-2n_u} = d_i \qquad \forall i \in U^e \tag{4}$$

$$d_i = -\, d_{i+n_u} \qquad \forall i \in Sc^e \cup U^e \tag{5}$$

$$\sum_{k\in S^e} T_k\, y_{ki} = t_i \qquad \forall i \in Sc^e \tag{6}$$

$$\sum_{k\in S^d} T_k\, y_{k,i-2n_u} = t_i \qquad \forall i \in U^e \tag{7}$$

$$t_i = t_{i+n_u} \qquad \forall i \in Sc^e \cup U^e \tag{8}$$

$$y_{k\ell} \le z_\ell \qquad \forall k \in S, \ell \in U \tag{9}$$

$$\sum_{i\in N} x_{0i} = \sum_{i\in N} x_{i0} \tag{10}$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij} = \sum_{j\in N} x_{ji} = z_i \qquad \forall i \in N \tag{11}$$

$$q_j \ge q_i + d_j + 2Q(x_{ij} - 1) \qquad \forall i \in N \setminus \{0\}, j \in N, i \ne j \tag{12}$$

$$q_i \le Q \qquad \forall i \in N \tag{13}$$

$$u_j \ge u_i + (D_{ij} + t_j) + M(x_{ij} - 1) \qquad \forall i, j \in N, i \ne j \tag{14}$$

$$u_{i+n_u} \ge u_i + (d_{i,i+n_u} + t_{i+n_u}) \qquad \forall i \in N^e \tag{15}$$

$$r_{i+n_u} = r_i \qquad \forall i \in N^e \tag{16}$$

$$r_j \ge j\, x_{0j} \qquad \forall i \in N \setminus \{0\} \tag{17}$$

$$r_j \le j\, x_{0j} + |N|\,(1 - x_{0j}) \qquad \forall i \in N \setminus \{0\} \tag{18}$$

$$r_j \ge r_i - n\,(1 - x_{ij}) \qquad \forall i, j \in N \tag{19}$$

$$r_j \le r_i + n\,(1 - x_{ij}) \qquad \forall i, j \in N \tag{20}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j \in N \tag{21}$$

$$y_{k\ell} \in \{0,1\} \qquad \forall k \in S, \ell \in U \tag{22}$$

$$z_\ell \in \{0,1\} \qquad \forall \ell \in U \tag{23}$$

$$d_i \ge 0, q_i \ge 0, r_i \ge 0, u_i \ge 0, t_i \ge 0 \qquad \forall i \in N \tag{24}$$

A função objetivo (1) minimiza a soma dos tempos (distâncias) gastos para concluir as rotas. O conjunto de restrições (2) garante que cada estudante k é designado a um único ponto de ônibus ℓ. O número de alunos alocados a cada nó de embarque da escola é definido nas restrições (3). Analogamente, para o desembarque, tem-se as restrições (4). As restrições (5) asseguram a consistência da quantidade de estudantes que embarcam em um nó e desembarcam em seu nó correspondente. De forma análoga, em (6)–(8), são contabilizados os tempos de embarque/desembarque nos nós.

As restrições (9) asseguram que um estudante só pode ser alocado ao ponto de ônibus ℓ, se o ponto estiver ativo ($z_\ell = 1$). A restrição (10) impõe que todos os ônibus que deixam a escola retornam ao final de suas rotas. As restrições (11) garantem que um ônibus somente visitará pontos de ônibus ativos. As restrições (12) asseguram a consistência da capacidade dos veículos durante a rota, enquanto as restrições (13) garantem que a capacidade dos ônibus é respeitada. As restrições (14) contabilizam o tempo acumulado de rota de um veículo após finalizar o atendimento do nó j.

As restrições (15)–(20) asseguram as relações de pareamento e de precedência entre os nós de embarque e de desembarque. As restrições (15) garantem que o nó de desembarque somente é visitado após o nó de embarque. As restrições (16)–(20) atribuem rótulos às rotas como em Furtado et al. [2017]. O domínio das variáveis é definido pelas restrições (21)–(24).

Note que é possível eliminar algumas variáveis, de acordo com (25) e (26).

$$x_{ij} = 0 \quad i, j \in Sc^e : i \geq j, \tag{25}$$

$$x_{ij} = 0 \quad i, j \in Sc^d : i \geq j \tag{26}$$

Como mencionado, o modelo (1)–(24) foi proposto por Santos et al. [2022], e está baseado nos modelos de Miranda et al. [2018] e Furtado et al. [2017]. Neste trabalho, a solução deste modelo utilizando um resolvedor baseado em *branch-and-cut* é utilizada como comparação com os algoritmos de decomposição de Benders propostos (Seção 3).

3. Algoritmos de decomposição de Benders

A decomposição de Benders baseada em lógica não limita o subproblema a um problema de otimização linear, como em sua versão clássica [Hooker, 2023]. Na Seção 3.1, são apresentadas duas versões de problema mestre, cada uma atuando como um gerador de soluções candidatas. Essas soluções candidatas são avaliadas pelo subproblema, descrito na Seção 3.2. As soluções enumeradas pelo problema mestre correspondem a uma atribuição de estudantes a pontos de parada, cada atribuição é avaliada pelo subproblema que, por sua vez, gera uma nova restrição para contabilizar o custo completo da solução candidata.

3.1. Problemas mestres

Para a definição dos problemas mestres é definido o custo mínimo para que um veículo alcance um nó i, definido em (27).

$$c'_j = \min_{i \in N : i \overset{!}{\neq} j} \{D_{ij}\} \quad \forall j \in N. \tag{27}$$

Em que a notação $i \overset{!}{\neq} j$ indica que o nó i é diferente do nó j e de qualquer de suas cópias. Os parâmetros c'_i correspondem às distâncias mínimas para que um veículo alcance o ponto i.

Também é definido o conjunto $\mathcal{P}$ composto por todas as atribuições possíveis de estudantes a pontos de parada. Com isso, pode-se definir parâmetros binários auxiliares $\overline{y}_{k\ell}, k \in S, \ell \in U$, de forma que $\overline{y}_{k\ell} = 1$ se o estudante k é atribuído ao ponto de parada ℓ em uma atribuição $A \in \mathcal{P}$, caso contrário $\overline{y}_{k\ell} = 0$.

Foram avaliadas duas versões do problema mestre. Na primeira versão, chamada de *Benders-1* (Seção 3.1.1), o problema mestre realiza a atribuição de estudantes a pontos de parada, enquanto, na segunda versão (*Benders-2*, Seção 3.1.2), informações de roteamento de forma relaxada são incorporadas ao problema mestre, visando guiar as soluções enumeradas pelo mestre. Na Seção 3.3, é mostrado que as funções objetivo (28) e (33) das duas versões do algoritmo de Benders são equivalentes à função objetivo (1).

3.1.1. Primeira versão (*Benders-1*)

Seja $\alpha \geq 0$ uma variável corresponde à distância adicional (em relação à $\sum_{i \in N} c'_i$) percorrida pelos ônibus. O problema mestre da versão *Benders-1* é dado pelo modelo (28)–(32).

$$\gamma = \min \sum_{\ell \in U} c'_\ell \, z_\ell + \alpha \tag{28}$$

sujeito a:

(2), (9), (22), (23)

$$\sum_{k \in S^e} y_{ki} \leq Q \qquad \forall i \in Sc^e \tag{29}$$

$$\sum_{k \in S^d} y_{k,i-2n_u} \leq Q \qquad \forall i \in U^e \tag{30}$$

$$\alpha \geq fo_{sub} - fo_{sub} \sum_{(k,\ell) \in A: \overline{y}_{k\ell}=1} (1 - y_{k\ell}) + \sum_{(k,\ell) \in A: \overline{y}_{k\ell}=0} y_{k\ell} \quad A \in \mathcal{P} \tag{31}$$

$$\alpha \geq 0. \tag{32}$$

A função objetivo (28) contabiliza os custos totais, as restrições (29) e (30) garantem que a atribuição de estudantes aos pontos de parada não viola a capacidade dos veículos. As restrições (31) contabilizam o custo adicional α para cada atribuição viável, em que fo_{sub} consideram o custo adicional da atribuição, computado pelo respectivo subproblema. O domínio da variável α é definido em (32).

3.1.2. Segunda versão (*Benders-2*)

Na segunda versão, é contabilizado o custo aproximado do roteamento também no problema mestre. Para isso, pode-se adicionar as variáveis e as restrições de roteamento ao problema de forma linearmente relaxada. Assim, é formulada a segunda versão do problema mestre, (33)–(36). Essa formulação é uma tentativa para aumentar a velocidade de convergência do algoritmo.

$$\gamma = \min \sum_{i \in U} c'_i \, z_i + \sum_{(i,j) \in N \times N} (D_{ij} - c'_i) \, x_{ij} \tag{33}$$

sujeito a:

(2) – (10), (12) – (15), (16) – (20), (22) – (24)

$$\sum_{j \in N} x_{\ell+i,j} = \sum_{j \in N} x_{j,\ell+i} = z_\ell \qquad \ell \in U, i \in \{0, n_u, 2n_u, 3n_u\} \tag{34}$$

$$\sum_{(i,j) \in N \times N} (D_{ij} - c'_i) \, x_{ij} \geq$$

$$\geq fo_{sub} - fo_{sub} \sum_{\overline{y}_{k\ell}=1} (1 - y_{k\ell}) + \sum_{\overline{y}_{k\ell}=0} y_{k\ell}, \qquad A \in \mathcal{P}. \tag{35}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \qquad \forall i, j \in N. \tag{36}$$

A função objetivo (33) contabiliza os custos totais das rotas, as restrições (34) e (35) são adequações de (11) e (31), respectivamente. As variáveis de roteamento x_{ij} são adicionadas de forma relaxada nesta versão (restrições (36)).

3.2. Subproblema

No problema mestre, são definidos os pontos de ônibus aos quais foram designados os estudantes. Logo, as variáveis z_ℓ têm seus valores fixados em 1 se há pelo menos um estudante no ponto de ônibus ℓ e 0, caso contrário. Portanto, definem parâmetros para o subproblema, denotados por $\overline{z}_\ell$. Uma solução para o problema mestre também define valores para as variáveis y_{ki}, permitindo a definição dos parâmetros de demanda $(\overline{d}_i)$ e tempo de serviço $\overline{t}_i$, de cada ponto de ônibus. Assim, o subproblema pode ser definido por (37)–(42).

$$fo_{sub} = \min \sum_{(i,j)\in N\times N} (D_{ij} - c'_i)\, x_{ij} \quad (37)$$

sujeito a:

$$(10), (13), (16) - (21)$$

$$\sum_{j\in N} x_{\ell+i,j} = \sum_{j\in N} x_{j,\ell+i} = \overline{z}_\ell \qquad \ell \in U, i \in \{0, n_u, 2n_u, 3n_u\} \quad (38)$$

$$q_j \geq q_i + \overline{d}_j + 2Q(x_{ij} - 1) \qquad \forall i \in N \setminus \{0\}, j \in N, i \neq j \quad (39)$$

$$u_j \geq u_i + (D_{ij} + \overline{t}_j) + M(x_{ij} - 1) \qquad \forall i, j \in N, i \neq j \quad (40)$$

$$u_{i+n_u} \geq u_i + (\overline{d}_{i+n_u} + \overline{t}_{i+n_u}) \qquad \forall i \in N^e \quad (41)$$

$$q_i \geq 0, r_i \geq 0, u_i \geq 0 \qquad \forall i \in N. \quad (42)$$

A função objetivo e as restrições são análogas às do modelo (1)–(24) (vide Seção 2). Portanto, para brevidade, não são descritas aqui novamente.

3.3. Cortes de Benders, implementação do algoritmo e equivalência das funções objetivo

Um dos desafios para se projetar um algoritmo eficaz de decomposição de Benders baseado em lógica é a definição de cortes efetivos. No caso dos corte (31) e (35), note que, caso um único estudante mude de ponto de parada para outro, todo o corte é desativado. Isso pode fazer com que o algoritmo enumere muitas soluções simétricas. Uma possibilidade de melhoria é utilizar o fato de que a adição de novos pontos de parada, previamente não utilizados em uma atribuição, não diminui o valor da solução. Assim, é possível melhorar os cortes (31), reescrevendo-os como (43).

$$\alpha \geq fo_{sub} - fo_{sub} \sum_{\overline{y}_{k\ell}=1} (1 - y_{k\ell}) \quad A \in \mathcal{P}. \quad (43)$$

Também é possível melhorar o corte (35) eliminando o somatório análogo. Essa forma melhorada das restrições é denominada cortes de otimalidade monótonos (*Monotone optimality cuts*) [Hooker, 2023].

Devido ao número exponencial das restrições de Benders (31) e (35), os cortes são adicionados durante a execução do algoritmo de *branch-and-cut* do pacote computacional Gurobi, utilizado nos experimentos, sempre que uma solução factível para o problema mestre é encontrada. Essa funcionalidade foi utilizada nos experimentos, descritos na Seção 4. Essa forma de implementação, com o problema mestre sendo resolvido apenas uma vez, é conhecida como *branch-and-check* (vide Algoritmo 1). Destaca-se também que outros pacotes computacionais oferecem a mesma funcionalidade.

Algoritmo 1: Algoritmo de *branch-and-check* utilizado. Adaptado de Hooker [2023].

Seja $\mathcal{O} = \{T_0\}$, em que T_0 é raiz da árvore de *branch-and-cut*. Correspondendo ao problema mestre relaxado.
$\gamma^* = \infty, p = 0.$
while $\mathcal{O}$ *não for vazio* **do**
    $p = p + 1.$
    Escolha um nó $T \in \mathcal{O}$ e remova-o de $\mathcal{O}$.
    Resolva a relaxação linear (RL) no nó T e seja γ_p seu valor ótimo.
    if $\gamma_p < \infty$ *(RL é factível)* **then**
        Seja $(\overline{y}_{ik}, \overline{z}_\ell)$ uma solução ótima de RL.
        if *Se* $(\overline{y}_{ik}, \overline{z}_\ell)$ *for uma solução inteira* **then**
            Resolva o subproblema $fo_{sub}(\overline{y}_{ik}, \overline{z}_\ell)$ e seja fo_{sub} o seu valor.
            if $\gamma_k < fo_{sub}$ **then**
                Gere um corte de Benders (43), adicione-o ao mestre e adicione T em $\mathcal{O}$.
            else if $\gamma_k < \gamma^*$ **then**
                $\gamma^* = \gamma_k.$
                Atualize a melhor solução para $(\overline{y}_{ik}, \overline{z}_\ell)$
        else if $\gamma_k \leq \gamma^*$ **then**
            Ramificar no nó T, produzindo os nós T_1 e T_2, adicionando-os em $\mathcal{O}$.

Por fim, destaca-se que as funções objetivos dos modelos (1)–(24), *Benders-1* e *Benders-2* são equivalentes à função objetivo (1), como demonstrado em (44) e (45).

$$\sum_{(i,j)\in N\times N} D_{ij}x_{ij} = \sum_{(i,j)\in N\times N} D_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in N} c_i'\, z_i - \sum_{i\in N} c_i'\, z_i \tag{44}$$

Por (10), temos que: $\sum_{j\in N} x_{ij} = z_i$, portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in N\times N} D_{ij}x_{ij} &= \sum_{(i,j)\in N\times N} D_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in N} c_i'\, z_i - \sum_{(i,j)\in N\times N} c_i'\, x_{ij} \\ \sum_{(i,j)\in N\times N} D_{ij}x_{ij} &= \sum_{i\in N} c_i'\, z_i + \sum_{(i,j)\in N\times N} (D_{ij} - c_i')\, x_{ij} = \sum_{i\in N} c_i'\, z_i + \alpha. \end{aligned} \tag{45}$$

4. Experimentos computacionais

Para os experimentos foi utilizado o pacote computacional Gurobi, versão 9.1, com quatro *threads* e tempo limite de 3600 segundos para cada instância. O ambiente computacional era equipado com um processador Intel(R) Core(TM) i7-7700 CPU @ 3,60GHz, com 16GB de memória RAM e o sistema operacional Ubuntu 16.04. Nos resultados o *gap* é definido a partir dos melhores limitantes superior (UB) e inferior (LB) da seguinte forma $100\frac{UB-LB}{UB}$.

Para os experimentos, foram utilizadas 112 instâncias de Schittekat et al. [2013]. Nesse conjunto de instâncias, o número de pontos de ônibus varia entre 5 e 40, enquanto o número de estudantes varia entre 25 e 800. Cada instância descreve a distância entre as paradas, a capacidade máxima dos ônibus e a máxima distância de caminhada de cada estudante. É considerado o plano euclidiano para o cálculo das distâncias utilizadas. As instâncias são as mesmas utilizadas no trabalho de Santos et al. [2020]. Não foram encontradas instâncias na literatura com as características de embarque e desembarque simultâneos. Sendo assim, nos experimentos realizados, tem-se que os conjuntos correspondentes às viagens da escola para o pontos de ônibus são vazios.

Os algoritmos de Benders foram capazes de reduzir o *gap* médio quando comparado com a utilização direta do modelo (1)–(24). Na Tabela 3, observa-se que para todos os conjuntos de instâncias o *gap* médio de *Benders-1* e *Benders-2* nunca foi superior à utilização do modelo (1)–(24), sendo inferior em 11 (dos 14) casos. A maior diferença, em média, foi de mais de 50 pontos percentuais. O número de provas de otimalidade das soluções também foi superior quando o algoritmo de *Benders* foi utilizado (42 contra 31). Em termos de instâncias sem solução factível encontrada não há uma superioridade clara de desempenho entre os métodos de solução.

A diferença de desempenho entre as versões da decomposição de Benders é mais sutil em relação à utilização do modelo (1)–(24) (Tabela 3). Embora, apenas em um dos casos, o *gap* médio do *Benders-1* tenha sido inferior ao *Benders-2*, a diferença não superou 5 pontos percentuais. Outra desvantagem do *Benders-1* foi a ausência de solução factível em nove das instâncias (contra sete do *Benders-2*).

Tabela 3: Resultados computacionais agrupados pelas características das instâncias. As colunas representam o número de pontos de parada ($|U|$), o número de estudantes ($|S|$), o *gap*, o número de provas de otimalidade (NO) e o número de instâncias sem solução factível (NS) para a modelo (1)–(24), para *Benders-1* e *Benders2*.

		Modelo (1)–(24)			**Benders-1**			**Benders-2**		
$\|U\|$	$\|S\|$	**Gap(%)**	**NO**	**NS**	**Gap(%)**	**NO**	**NS**	**Gap(%)**	**NO**	**NS**
5	25	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
5	50	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
5	100	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
10	50	2,13	5	0	0,00	8	0	0,00	8	0
10	100	18,75	1	0	0,08	7	0	0,08	7	0
10	200	34,63	1	0	2,08	2	0	2,23	2	0
20	100	42,75	0	0	11,75	1	0	11,58	1	0
20	200	60,38	0	0	19,52	0	0	19,21	0	0
20	400	69,57	0	2	12,23	0	1	11,85	0	1
40	200	84,25	0	0	51,58	0	0	49,74	0	0
40	400	86,50	0	1	48,73	0	2	46,27	0	1
40	800	88,14	0	3	30,81	0	3	26,42	0	3
80	400	95,33	0	1	82,61	0	1	78,44	0	1
80	800	97,86	0	1	83,56	0	2	81,03	0	1
Total			**31**	**8**		**42**	**9**		**42**	**7**

5. Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho, é explorada uma variante do problema de roteamento de ônibus escolares (*School Bus Routing Problem*, SBRP). Foram desenvolvidas duas variações *branch-and-check* de algoritmos de decomposição de Benders baseado em lógica para sua resolução. As duas variações são capazes de acomodar características como o embarque e desembarque de estudantes e tempos de serviço variáveis. A proposta explora uma lacuna de falta de métodos exatos para o SBRP de forma geral.

Os resultados obtidos para instâncias da literatura argumentam em favor do potencial do algoritmo de decomposição, atingindo *gaps* consideravelmente inferiores em relação à utilização de um modelo de programação linear inteira mista da literatura. Houve também um aumento significativo no número de instâncias com a otimalidade provada (de 31 para 42). Apesar dos resultados encorajadores, as instâncias de maior porte (80 pontos de parada) continuam bastante desafiadoras para os métodos exatos propostos.

Inclusive, uma oportunidade de trabalho futuro está na sofisticação dos algoritmos de decomposição, com a proposição de cortes mais efetivos e a exploração do fornecimento soluções iniciais. Outra oportunidade de trabalho futuro é a produção e experimentação de instâncias que incorporem características de cenários urbanos mais realistas e embarque e desembarque simultâneos.

Agradecimentos

Os autores agradecem os seguintes apoios: CAPES, CEPID-CeMEAI FAPESP (2013/07375-0) e CNPq (309161/2022-3 e 405247/2023-0).

Referências

Ansari, A., Farrokhvar, L., e Kamali, B. (2021). Integrated student to school assignment and school bus routing problem for special needs students. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 152:102416.

Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4:238–252.

Caceres, H., Batta, R., e He, Q. (2019). Special need students school bus routing: Consideration for mixed load and heterogeneous fleet. *Socio-Economic Planning Sciences*, 65:10–19.

Calvete, H., Galé, C., Iranzo, J., e Toth, P. (2020). A partial allocation local search matheuristic for solving the school bus routing problem with bus stop selection. *Mathematics*, 8(8):1214.

Ellegood, W. A., Solomon, S., North, J., e Campbell, J. F. (2020). School bus routing problem: Contemporary trends and research directions. *Omega*, 95:102056.

Feng, R., Zhang, J., Wu, Y., Wu, R., e Yao, B. (2023). School accessibility evaluation under mixed-load school bus routing problem strategies. *Transport policy*, 131:75–86.

Furtado, M. G. S., Munari, P., e Morabito, R. (2017). Pickup and delivery problem with time windows: A new compact two-index formulation. *Operations Research Letters*, 45(4):334–341.

Hooker, J. (2023). *Logic-Based Benders Decomposition: Theory and Applications*. Springer Nature.

Hooker, J. N. e Ottosson, G. (2003). Logic-based benders decomposition. *Mathematical Programming*, 96(1):33–60.

INEP (2023). Censo escolar da educação básica – resumo técnico. URL `https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/resumo_tecnico_censo_escolar_2023.pdf`.

Kinable, J., Spieksma, F. C. R., e Vanden Berghe, G. (2014). School bus routing-a column generation approach. *International Transactions in Operational Research*, 21(3):453 – 478.

Martínez, L. M. e Viegas, J. M. (2011). Design and deployment of an innovative school bus service in lisbon. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 20:120–130.

Miranda, D. M., de-Camargo, R. S., Conceição, S. V., Porto, M. F., e Nunes, N. T. R. (2018). A multi-loading school bus routing problem. *Expert Systems with Applications*, 101:228 – 242.

Movafaghpour, M. A. (2023). Developing an efficient algorithm for robust school bus routing with heterogeneous fleet. *Journal of Decisions and Operations Research*, 8(3):566–577.

Newton, R. M. e Thomas, W. H. (1969). Design of school bus routes by computer. *Socio-Economic Planning Sciences*, 3(1):75 – 85.

Sales, L. d. P. A., Melo, C. S., Bonates, T. d. O. e., e Prata, B. d. A. (2018). Memetic algorithm for the heterogeneous fleet school bus routing problem. *Journal of urban planning and development*, 144(2):04018018.

Santos, S. F. G., Castellucci, P. B., e Toledo, F. M. B. (2022). Roteamento de ônibus escolares: uma abordagem inclusiva. *Anais do LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. URL `https://proceedings.science/sbpo/sbpo-2022/trabalhos/roteamento-de-onibus-escolares-uma-abordagem-inclusiva`. Acesso em: 21 de Mai. 2024.

Santos, S. F. G., Toledo, F. M. B., e Castellucci, P. B. (2020). O problema do roteamento de veículos: Transporte de pessoas. *Anais do LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. URL `https://proceedings.science/sbpo-2020/papers/o-problema-do-roteamento-de-veiculos--transporte-de-pessoas`. Acesso em: 21 de Mai. 2024.

Schittekat, P., Kinable, J., Sörensen, K., Sevaux, M., Spieksma, F., e Springael, J. (2013). A metaheuristic for the school bus routing problem with bus stop selection. *European Journal of Operational Research*, 229(2):518–528.

Sharma, A. K. (2024). Optimizing school bus routes with ant colony optimization: A dynamic approach to sustainable transportation logistics. *AIJMR-Advanced International Journal of Multidisciplinary Research*, 2(2).