



(19) 대한민국특허청(KR)
(12) 등록특허공보(B1)

(45) 공고일자 2013년11월14일
 (11) 등록번호 10-1329350
 (24) 등록일자 2013년11월07일

(51) 국제특허분류(Int. Cl.)
 G06F 17/00 (2006.01) G06F 17/10 (2006.01)
 (21) 출원번호 10-2012-0064528
 (22) 출원일자 2012년06월15일
 심사청구일자 2012년06월15일
 (56) 선행기술조사문헌
 KR1020010056264 A

(73) 특허권자
 한국과학기술원
 대전광역시 유성구 대학로 291(구성동)
 (72) 발명자
 이민중
 대전광역시 유성구 대학로 291 한국과학기술원 전산학과
 이정민
 대전광역시 유성구 대학로 291 한국과학기술원 전산학과
 (뒷면에 계속)
 (74) 대리인
 특허법인 정안

전체 청구항 수 : 총 8 항

심사관 : 이석형

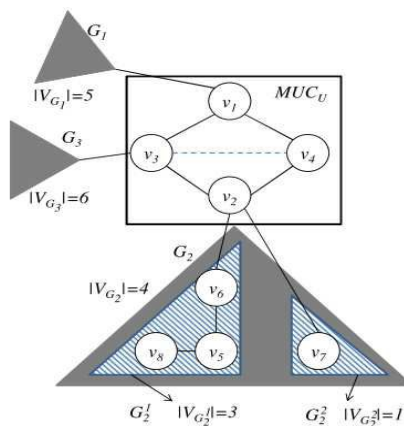
(54) 발명의 명칭 **그래프의 매개 중심성 갱신 방법**

(57) 요약

정점 및 가중치를 갖지 않는 에지로 구성된 비가중치 그래프(이하 원래 그래프)에서 에지(이하 갱신 에지)가 갱신되면 갱신된 그래프(이하 갱신 그래프)의 매개 중심성을 구하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 관한 것으로서, (a) 상기 갱신 그래프에서 최소합 사이클(이하 MUC)을 구하는 단계; (b) 상기 갱신 에지에 입사되는 정점(이하 갱신 정점)을 포함하는 MUC(이하 MUC_v)를 추출하여, 상기 MUC_v 내의 최단 경로(이하 내부경로)들로 인한 매개 중심성(이하 로컬 매개 중심성)을 계산하는 단계; (c) 상기 MUC_v 내에 포함되지 않은 상기 그래프의 최단 경로(이하 외부경로)들로 인한 매개 중심성(이하 외부경로 증분)을 구하는 단계; 및, (d) 상기 로컬 매개 중심성에 상기 외부경로 증분을 더하여, 상기 그래프의 매개 중심성(이하 글로벌 매개 중심성)을 계산하는 단계를 포함하고, 상기 MUC는 상기 그래프의 정점이 짝수로 입사되는 상기 그래프의 에지들의 부분 집합(이하 사이클)으로서, 선형적으로 독립인 사이클(linearly independent cycle)의 극대 집합(이하 사이클 기반) 중 가중치가 최소인 집합(이하 최소 사이클 기반)의 사이클들을 공통된 정점으로 합하여 형성되는 구성을 마련한다.

상기와 같은 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 의하여, 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 후보 집합을 발견하여 후보 정점들만을 이용하여 이들의 매개 중심성을 계산함으로써, 검색 공간을 효과적으로 줄이고 계산 비용을 상당히 줄인다.

대표도 - 도9



(72) 발명자

박예진

대전광역시 유성구 대학로 291 한국과학기술원 전
산학과

최현

대전광역시 유성구 대학로 291 한국과학기술원 전
산학과

정진완

대전광역시 유성구 대학로 291 한국과학기술원 전
산학과

특허청구의 범위

청구항 1

정점 및 가중치를 갖지 않는 에지로 구성된 비가중치 그래프(이하 원래 그래프)에서 에지(이하 갱신 에지)가 갱신되면 갱신된 그래프(이하 갱신 그래프)의 매개 중심성을 구하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 있어서,

- (a) 상기 갱신 그래프에서 최소합 사이클(이하 MUC)을 구하는 단계;
- (b) 상기 갱신 에지에 입사되는 정점(이하 갱신 정점)을 포함하는 MUC(이하 MUC_U)를 추출하여, 상기 MUC_U 내의 최단 경로(이하 내부경로)들로 인한 매개 중심성(이하 로컬 매개 중심성)을 계산하는 단계;
- (c) 상기 MUC_U 내에 포함되지 않은 상기 그래프의 최단 경로(이하 외부경로)들로 인한 매개 중심성(이하 외부경로 증분)을 구하는 단계; 및,
- (d) 상기 로컬 매개 중심성에 상기 외부경로 증분을 더하여, 상기 그래프의 매개 중심성(이하 글로벌 매개 중심성)을 계산하는 단계를 포함하고,

상기 MUC는 상기 그래프의 정점이 짝수로 입사되는 상기 그래프의 에지들의 부분 집합(이하 사이클)으로서, 선형적으로 독립인 사이클(linearly independent cycle)의 극대 집합(이하 사이클 기반) 중 정점의 수가 최소인 집합(이하 최소 사이클 기반)의 사이클들을 공통된 정점으로 합하여 형성되는 것을 특징으로 하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법.

청구항 2

제1항에 있어서,

상기 (a)단계에서, 상기 원래 그래프의 MUC 에서 상기 갱신 정점을 포함하는 MUC만을 갱신하여, 상기 갱신 그래프의 MUC를 구하는 것을 특징으로 하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법.

청구항 3

제2항에 있어서,

상기 (a)단계에서, 삽입되는 갱신 에지의 갱신 정점이 상기 원래 그래프의 동일한 MUC(이하 삽입할 MUC)에 속하는 경우 상기 삽입할 MUC에서만 상기 갱신 에지를 삽입하여 MUC를 갱신하고, 상기 갱신 정점이 동일한 MUC에 속하지 않는 경우 상기 갱신 정점들 사이의 최단 경로를 포함하는 MUC를 구하여 상기 원래 그래프의 MUC에 포함하고 상기 갱신 정점들을 포함하는 상기 원래 그래프의 MUC를 제외하여 갱신하는 것을 특징으로 하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법.

청구항 4

제2항에 있어서,

상기 (a)단계에서, 삭제되는 갱신 에지의 갱신 정점들 사이의 경로 수가 1개인 경우 상기 갱신 정점들을 포함하는 MUC를 상기 원래 그래프에서 제외하여 갱신하고, 상기 경로의 수가 적어도 2개이고 상기 갱신 정점들 사이의 모든 경로에서 나타나는 적어도 하나의 정점이 존재하면 상기 원래 그래프의 MUC를 분리하고 존재하지 않으면 상기 갱신 에지를 제외하여 갱신하는 것을 특징으로 하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법.

청구항 5

제1항에 있어서,

상기 (c)단계에서, 상기 외부경로 중 출발점 및 도착점 중 하나가 MUC_U 내에 존재하는 외부경로에 의한 제1 외부경로 증분과, MUC_U 를 통과하나 출발점 및 도착점 모두가 MUC_U 내에 존재하지 않는 외부경로에 의한 제2 외부경로 증분을 구하는 것을 특징으로 하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법.

청구항 6

제5항에 있어서,

상기 제1 외부경로 증분 $c_{bj}(v_i)$ 은 다음 [수식 1]에 의해 구하는 것을 특징으로 하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법.

[수식 1]

$$c_{bj}(v_i) = |V_{G_j}| \cdot \sum_k \frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$$

단, $v_i, v_j, v_k \in MUC_U, i \neq k, j \neq k$ 이며 v_j 는 G_j 로의 연결 정점이고, V_{G_j} 는 v_j 연결정점에 연결된 부분 그래프 G_j 의 정점 집합이고, $|V_{G_j}|$ 는 부분 그래프 G_j 의 정점 집합의 기수이고, $\sigma_{v_j, v_k}(v_i)$ 는 v_i 를 포함하는 v_j 와 v_k 사이의 최단 경로들의 수이고, σ_{v_j, v_k} 는 v_j 와 v_k 사이의 최단 경로들의 수이다.

청구항 7

제5항에 있어서,

상기 제2 외부경로 증분은 상기 출발점 또는 도착점을 포함하는 상기 MUC_U 의 연결 정점의 부분 그래프가 분리되지 않은 경우의 증분(이하 제2-1 외부경로 증분) 및 상기 부분 그래프가 분리된 경우의 증분(이하 제2-2 외부경로 증분)으로 구성되는 것을 특징으로 하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법.

청구항 8

제7항에 있어서,

상기 제2-1 및 제2-2 중심성 증분 $c_{t_j^k}(v_i)$ 및 $c_{ti}(v_i)$ 은 다음 [수식 2] 및 [수식 3]에 의해 구하는 것을 특징으로 하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법.

[수식 2]

$$c_{t_j^k}(v_i) = |V_{G_j}| \cdot |V_{G_k}| \cdot \frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$$

단, $v_i, v_j, v_t \in MUC_U, j \neq k$ 이며 v_j 및 v_k 각각 G_j 및 G_k 로의 연결 정점들이고, V_{G_j}, V_{G_k} 는 각각 연결정점 v_j 및 v_k 에 연결된 부분 그래프 G_j 및 G_k 의 정점 집합이고, $|V_{G_j}|$ 및 $|V_{G_k}|$ 는 각각 부분 그래프 G_j 및 G_k 의 정점 집합의 기수이고, $\sigma_{v_j, v_k}(v_i)$ 는 v_i 를 포함하는 v_j 와 v_k 사이의 최단 경로들의 수이고, σ_{v_j, v_k} 는 v_j 와 v_k 사이의 최단 경로들의 수이다.

[수식 3]

$$c_{t_i}(v_i) = \begin{cases} |V_{G_i}|^2 - \sum_{l=1}^n (|V_{G_l}|^2) & \text{if } G_i \text{ is disconnected} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

단, G_i^l 는 G_i 의 l 번째 연결된 성분이고, n 은 G_i 내의 연결된 성분들의 수이고, v_i 는 G_i 로의 연결 정점임.

명세서

기술분야

[0001] 본 발명은 정점 및 가중치를 갖지 않는 에지로 구성된 비가중치 그래프에서 에지가 갱신되면 갱신된 그래프의 매개 중심성을 갱신하여 구하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 관한 것이다.

배경기술

[0002] 일반적으로, 매개 중심성(betweenness centrality)은 그래프에서 정점(vertex)의 상대적 중요도를 계산하는 척도로서, 사회망 분석, 생물학 그래프 분석, 및 도로망 분석과 같은 네트워크 분석에 널리 사용된다. 예를 들어, 사회망 분석에서, 높은 중심성을 갖는 정점은 낮은 중심성을 갖는 정점보다 더 중요한 정점으로 간주될 수 있다. 그래프에서 정점의 매개 중심성은 그래프의 최단 경로들에서 정점의 참여를 판단하는 척도이다.

[0003] 매개 중심성 문제에 관한 기존 연구가 많이 있어 왔다. 매개 중심성의 개념은 [문헌 1]에서 제안되었으나, [문헌 10]에서 제안된 정의가 더 널리 사용된다. 최근에, [문헌 6]에 다양한 정의들이 제안되고 있다. [문헌 5]는 수정된 너비 우선 탐색(breadth-first search) 알고리즘과 정점의 의존성(dependency)을 근거로 매개 중심성 계산 시간을 개선하였고, 이는 그래프에서 모든 정점들의 정확한 매개 중심성을 계산하는 가장 빠른 알고리즘으로 알려져 있다. 모든 정점 쌍(pair of vertex)들 사이에서 최단 경로들에 대한 계산은 시간을 많이 소요하므로, [문헌 22]는 랜덤 워크(random walk)를 기초로 하는 또 다른 매개 중심성의 정의를 제안하고 있다. [문헌 22]에서, 각각의 정점은 인접한 정점을 방문할 확률을 갖는다. 또한, [문헌 7], [문헌 2] 및 [문헌 12]는 매개 중심성을 계산하는 근사 알고리즘(approximation algorithm)을 제안하고 있다. [문헌 23] 및 [문헌 24]는 사회망에서 커뮤니티를 검출하기 위해 매개 중심성을 이용하고 있다.

[0004] 매개 중심성을 계산하는 많은 연구들이 존재하며, 매개 중심성은 사회망 그래프의 분석에서 사용되는 주요 척도 중 하나이긴 하지만, 매개 중심성을 계산하는 그 어떠한 연구도 매개 중심성을 업데이트하는 문제를 다루지 않고 있다.

[0005] 사회망 그래프와 같이 자주 업데이트되는 그래프들에 대해 영향력 있는 사용자를 찾거나 커뮤니티를 검출하기 위해 기존의 알고리즘을 적용하는 것은 효과적이지 못하다. 이는, 그래프에서 모든 사용자의 매개 중심성을 계산하는 것은 그래프에서 모든 사용자 쌍들 사이의 최단 경로들을 계산하는 것을 포함하기 때문이다. 기존의 모든 연구에서, 그래프에 새로운 에지가 삽입될 때마다 모든 정점들에 대한 재계산이 불가피하다. 이러한 재계산은 확실히 많은 시간을 소요한다. 사회망 그래프에서 에지들의 수가 시간의 경과에 따라 증가하기 때문에 ([문헌 19]), 매개 중심성 업데이트의 필요성은 분명하다.

[0006] 하나의 에지 삽입이나 하나의 에지 삭제조차도 그래프에서 수많은 최단 경로들의 변경으로 이어지기 때문에, 매개 중심성을 업데이트한다는 것은 어려운 일이다. 이러한 변경은 그래프에서 많은 정점의 매개 중심성의 업데이트를 초래한다. 에지 (v_i, v_j) 가 그래프에 삽입될 때 v_i 에서 v_j 사이의 최단 경로가 변경된다는 것은 당연히 알 수 있는 일이다. 또한, v_i 에서 v_j 사이의 원래의 최단 경로를 포함하는 경로들도 변경된다.

[0007] 매개 중심성의 계산에 대한 종래 연구를 보다 구체적으로 살펴보자.

[0008] 매개 중심성의 계산은 사회망 분석에 있어서 많은 중요성을 얻고 있으며 많은 응용분야에서 널리 사용된다. 매개 중심성의 이러한 개념을 정량화하는 척도를 정의하기 위한 초기 연구는 안토니세(Anthonisse) 등([문헌 1])

과 프리만(Freeman)([문헌 10])에 의해 도입되었다. 매개 중심성을 찾는 프리만의 원래의 방법은 그래프 상의 모든 정점 쌍들에 대한 측지 경로(geodesic paths)를 집계하는 것에 근거한다.

- [0009] 프리만의 연구 이후, 중심성 척도의 변형들이 제안되었다. 에버렛(Everette) 등([문헌 17])은 개인뿐만 아니라 집단 및 계층에 적용될 수 있는 집단 매개 척도(group betweenness measure)를 제안한다. 프리만 등([문헌 11])은 프리만의 연구([문헌 10])를 확장시켜 최단 및 특정한 비-최단 경로들 모두를 고려하는 네트워크 흐름의 개념에 근거한 중심성의 새로운 척도를 소개했다. 뉴만(Newman)([문헌 22])은 최단 경로 대신에 임의의 길이의 랜덤 워크에 근거한 매개 중심성의 척도를 제안한다.
- [0010] 현재, 모든 정점들에 대한 정확한 매개 중심성을 계산하는데 가장 빠른 것으로 알려진 알고리즘은([문헌 5]) 각각 가중치 그래프(weighted graph)와 비가중치 그래프 상에 $O(|V||E|)$ 및 $O(|V||E|+|V|^2\log|V|)$ 시간을 필요로 한다. 전통적으로, 매개 중심성은 우선 모든 쌍들 사이의 최단 경로의 길이와 수를 계산하고, 모든 쌍들의 쌍-의존성(pair-dependency)을 합으로써 결정되었다([문헌 10]). 중간 정점($v \in V$) 상의 쌍($s, t \in V$)의 쌍-의존도는 s 와 t 사이의 모든 최단 경로에 대한, v 가 놓인 s 와 t 사이의 최단 경로의 비율로서 정의된다. 브란데스([문헌 5])는 이러한 방법의 약점은 필요한 것보다 더 많은 정보를 계산하는 것이라고 지적한다. 더 빠른 알고리즘은, 네트워크에서 서로 다른 출발 정점들로부터의 전체 경로의 총수를 바탕으로, 브란데스에 의해 제시되었다([문헌 5]).
- [0011] 초기의 매개 중심성 계산 알고리즘에 비해 커다란 개선이 이루어졌지만, 많은 연구자들이 브란데스 알고리즘은 대형 그래프에 대해서는 여전히 너무 많은 비용이 든다고 주장한다. 이러한 한계를 극복하기 위해서, 연구자들은 양호한 근사(approximation)값은 빠른 계산이 가능한 한 정확한 매개 중심성 값에 대한 수용 가능한 대안이 될 것이라는 것을 주장하면서, 근사된 매개 중심성을 계산하기 위한 근사 알고리즘(approximation algorithm)을 제안하고 있다.
- [0012] 브란데스 등([문헌 7])은 매개 중심성 계산을 위한 체험적인 추정 방법(heuristic estimation method)을 제안하고 추정의 질을 평가하기 위해 출발 정점의 다양한 선택 전략으로 실험을 수행한다. 브란데스 등([문헌 3])은 척도 없는 희소 그래프(scale-free sparse graph)에 대해 최적화된, 매개 중심성을 위한 병렬 알고리즘을 제안했다. 이들은([문헌 2]) 또한 모든 정점들의 매개를 계산하는 것보다 더 빠른 시간 안에 단일 정점의 매개 중심성을 계산하는 알고리즘을 제안하고 있다.
- [0013] 가이스버거(Geisberger) 등([문헌 12])은 매개 중심성의 변형의 근사치를 계산하기 위한 양분 스케일링 알고리즘(bisection scaling algorithm)을 제안한다. 마카리체브(Makarychev)([문헌 21])는 만족스러운 매개 제약들의 수를 최대화하는 정점들의 배치를 찾는 선형 시간 근사 알고리즘(linear time approximation algorithm)을 제안하고 있다.
- [0014] 매개 중심성은 여러 분야에 걸쳐 다양한 응용 분야에서 사용된다. 매개 중심성은 정보의 흐름에 정점이 기여하는 정도의 이해를 가능하게 한다. 매개 중심성은 가장 눈에 띄는 정점들이 사회망에서의 개인인지, 생물학적 네트워크에서의 요소인지, 교통 네트워크에서의 교차로 또는 나들목인지, 컴퓨터 네트워크에서의 물리적 요소인지, 또는 월드 와이드 웹에서의 서류인지 간에 복잡한 네트워크에서 그것들을 찾는데 주로 사용된다.
- [0015] 예를 들어, 레이데스도르프(Leydesdorff)([문헌 20])는 그의 연구에서 매개 중심성이 과학 잡지의 학제간 전문 분야(interdisciplinarity)의 지표로 보여지는 방법을 설명하고 있으며, 델 솔(del Sol) 등([문헌 8])은 단백질-단백질 복합 구조(protein-protein complex structure)에서 가장 중앙에 있는 잔기를 식별하는데 매개 중심성을 사용한다. 진(Jin) 등([문헌 15])은 전자 그리드(electrical grid)에서 잠재적인 유해 노드를 검출하기 위해 병렬 매개 중심성의 적용을 설명하고 있다. 전자 그리드는 공급자로부터 소비자로부터 전기를 전달하는 상호 네트워크이다.
- [0016] 홈(Holme)([문헌 13])은 매개 중심성과 트래픽 모형의 밀도 사이의 관계를 연구했으며, 라머(Lammer) 등([문헌 18])은 도로 또는 교차로의 중요성을 계산하는데 매개 중심성을 사용하였으며 독일의 도시 도로망과 관련된 척척법(scaling law)을 연구하였다. 많은 응용 분야에서, 네트워크 구조는 일반적으로 고정적인 것이 아니다. 네트워크의 발전으로, 네트워크 그래프는 시간이 경과함에 따라 지속적으로 변하며, 이는 매개 중심성을 업데이트하기 위한 효과적인 알고리즘을 위한 강한 필요가 있음을 시사한다.
- [0017] 매개 중심성은 또한 커뮤니티 검출에서도 사용된다. 뉴만 등([문헌 22])은 네트워크로부터 가장 높은 매개 중심성 값을 갖는 에지를 반복적으로 제거하는 분열적인 커뮤니티 검출 기술(divisive community detection technique)을 제안한다. 피니(Pinney) 등([문헌 25])은 네트워크 분할이 에지 매개 대신에 정점 매개에 근거하

는 대안적인 커뮤니티 검출 알고리즘을 제안한다. 뉴만 등([문헌 23])은 에지들이 제거되었을 때 모든 쌍 최단 경로들의 반복적인 재계산과 관련된 높은 계산 비용에 대한 기존의 알고리즘에서의 약점을 논의한다.

- [0018] 다양한 응용 분야에서 관찰되듯이, 많은 실질적인 네트워크의 동적인 특성은, 효과적으로 매개 중심성을 업데이트하는 것은 중요한 문제라는 명백한 증거이다. 그러나 동적 네트워크 환경에서 매개 중심성을 효과적으로 업데이트하는 문제를 다루는 문헌은 현재 존재하지 않는다.

선행기술문헌

비특허문헌

- [0019] (비특허문헌 0001) [문헌 1] J. Anthonisse and S. M. C. A. A. M. besliskunde. The rush in a directed graph. Technical report, 1971.
- (비특허문헌 0002) [문헌 2] D. A. Bader, S. Kintali, K. Madduri, and M. Mihail. Approximating betweenness centrality. In Proceedings of the 5th international conference on Algorithms and models for the web-graph, WAW'07, pages 124-137, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.
- (비특허문헌 0003) [문헌 3] D. A. Bader and K. Madduri. Parallel algorithms for evaluating centrality indices in real-world networks. In Proceedings of the 2006 International Conference on Parallel Processing, ICPP '06, pages 539-550, Washington, DC, USA, 2006. IEEE Computer Society.
- (비특허문헌 0004) [문헌 4] M. Boguna, R. Pastor-Satorras, A. Diaz-Guilera, and A. Arenas. Models of social networks based on social distance attachment. Phys. Rev. E, 70(5):056122, Nov. 2004.
- (비특허문헌 0005) [문헌 5] U. Brandes. A faster algorithm for betweenness centrality. Journal of Mathematical Sociology, 25(1994):163-177, 2001.
- (비특허문헌 0006) [문헌 6] U. Brandes. On variants of shortest-path betweenness centrality and their generic computation. Social Networks, 30(2):136-145, 2008.
- (비특허문헌 0007) [문헌 7] U. Brandes and C. Pich. Centrality estimation in large networks. International Journal Of Bifurcation And Chaos, 17(7):2303, 2007.
- (비특허문헌 0008) [문헌 8] A. del Sol, H. Fujihashi, and P. O'Meara. Topology of small-world networks of protein-protein complex structures. Bioinformatics, 21(8):1311-1315, Apr. 2005.
- (비특허문헌 0009) [문헌 9] P. Erdos and A. Renyi. On random graphs, I. 1959.
- (비특허문헌 0010) [문헌 10] L. C. Freeman. A set of measures of centrality based on betweenness. Sociometry, 40(1):35-41, 1977.
- (비특허문헌 0011) [문헌 11] L. C. Freeman, S. P. Borgatti, and D. R. White. Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow. Social Networks, 13(2):141 - 154, 1991.
- (비특허문헌 0012) [문헌 12] R. Geisberger, P. Sanders, and D. Schultes. Better approximation of betweenness centrality. In J. I. Munro and D. Wagner, editors, ALENEX, pages 90-100. SIAM, 2008.
- (비특허문헌 0013) [문헌 13] P. Holme. Congestion and centrality in traffic flow on complex networks. Advances in Complex Systems, 6(2):163-176, Jan. 2003.
- (비특허문헌 0014) [문헌 14] J. D. Horton. A polynomial-time algorithm to find the shortest cycle basis of a graph. SIAM J. Comput., 16:358-366, April 1987.
- (비특허문헌 0015) [문헌 15] S. Jin, Z. Huang, Y. Chen, D. G. Chavarria-Miranda, J. Feo, and P. C. Wong. A novel application of parallel betweenness centrality to power grid contingency analysis. In IPDPS, pages 1-7. IEEE, 2010.

(비특허문헌 0017) [문헌 16] T. Kavitha, K. Mehlhorn, D. Michail, and K. E. Paluch. A faster algorithm for minimum cycle basis of graphs. In ICALP, pages 846-857, 2004.

(비특허문헌 0018) [문헌 17] E. D. Kolaczyk, D. B. Chua, and M. Barthelemy. Group betweenness and co-betweenness: Inter-related notions of coalition centrality. Social Networks, 31(3):190-203, July 2009.

(비특허문헌 0019) [문헌 18] S. Lammer, B. Gehlsen, and D. Helbing. Scaling laws in the spatial structure of urban road networks. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 363(1):89-95, Apr. 2006.

(비특허문헌 0020) [문헌 19] J. Leskovec, J. Kleinberg, and C. Faloutsos. Graph evolution: Densification and shrinking diameters. ACM Trans. Knowl. Discov. Data, 1(1):2, 2007.

(비특허문헌 0021) [문헌 20] L. Leydesdorff. Betweenness centrality as an indicator of the interdisciplinarity of scientific journals. Journal of the American Society for Information Science and Technology, 58(9):1303-1309, 2009.

(비특허문헌 0022) [문헌 21] Y. Makarychev. Simple linear time approximation algorithm for betweenness. Technical report, 2009.

(비특허문헌 0023) [문헌 22] M. E. J. Newman. A measure of betweenness centrality based on random walks. Social Networks, 27(1):39-54, 2005.

(비특허문헌 0024) [문헌 23] M. E. J. Newman and M. Girvan. Finding and evaluating community structure in networks. Physical Review E, 69 2):26113, 2004.

(비특허문헌 0025) [문헌 24] K. Norlen, G. Lucas, M. Gebbie, and J. Chuang. EVA: Extraction, Visualization and Analysis of the Telecommunications and Media Ownership Network, Aug. 2002.

(비특허문헌 0026) [문헌 25] J. W. Pinney and D. R. Westhead. Betweenness-based decomposition methods for social and biological networks. In Interdisciplinary Statistics and Bioinformatics, pages 87-90. Leeds University Press, 2006.

발명의 내용

해결하려는 과제

- [0020] 본 발명의 목적은 상술한 바와 같은 문제점을 해결하기 위한 것으로, 정점 및 가중치를 갖지 않는 에지로 구성된 비가중치 그래프에서 새로운 에지가 추가되거나 기존의 에지가 삭제 되면 갱신된 그래프의 매개 중심성을 갱신하여 구하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법을 제공하는 것이다.
- [0021] 또한, 본 발명의 목적은 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 후보 집합(또는 MUC_U)을 추출하여 상기 후보 집합들에서만 로컬 매개 중심성을 계산하고, 상기 로컬 매개 중심성을 이용하여 전체 그래프에 의한 매개 중심성(또는 글로벌 매개 중심성)을 계산하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법을 제공하는 것이다.
- [0022] 또한, 본 발명의 목적은 에지의 추가 또는 삭제에 의해 그래프가 갱신될 때 이미 구해진 최소합 사이클(또는 MUC, Minimum Union Cycle)에서 갱신된 에지의 정점들만 포함하는 MUC만을 갱신함으로써 갱신 그래프의 전체 MUC를 구하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법을 제공하는 것이다.

과제의 해결 수단

- [0023] 상기 목적을 달성하기 위해 본 발명은 정점 및 가중치를 갖지 않는 에지로 구성된 비가중치 그래프(이하 원래 그래프)에서 에지(이하 갱신 에지)가 갱신되면 갱신된 그래프(이하 갱신 그래프)의 매개 중심성을 구하는 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 관한 것으로서, (a) 상기 갱신 그래프에서 최소합 사이클(이하 MUC)을 구하는 단계; (b) 상기 갱신 에지에 입사되는 정점(이하 갱신 정점)을 포함하는 MUC(이하 MUC_U)를 추출하여, 상기 MUC_U 내

의 최단 경로(이하 내부경로)들로 인한 매개 중심성(이하 로컬 매개 중심성)을 계산하는 단계; (c) 상기 MUC_U 내에 포함되지 않은 상기 그래프의 최단 경로(이하 외부경로)들로 인한 매개 중심성(이하 외부경로 증분)을 구하는 단계; 및, (d) 상기 로컬 매개 중심성에 상기 외부경로 증분을 더하여, 상기 그래프의 매개 중심성(이하 글로벌 매개 중심성)을 계산하는 단계를 포함하고, 상기 MUC는 상기 그래프의 정점이 짝수로 입사되는 상기 그래프의 에지들의 부분 집합(이하 사이클)으로서, 선형적으로 독립인 사이클(linearly independent cycle)의 극대 집합(이하 사이클 기반) 중 정점의 수가 최소인 집합(이하 최소 사이클 기반)의 사이클들을 공통된 정점으로 합하여 형성되는 것을 특징으로 한다.

[0024] 또, 본 발명은 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 있어서, 상기 (a)단계에서, 상기 원래 그래프의 MUC 에서 상기 갱신 정점을 포함하는 MUC만을 갱신하여, 상기 갱신 그래프의 MUC를 구하는 것을 특징으로 한다.

[0025] 또, 본 발명은 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 있어서, 상기 (a)단계에서, 삽입되는 갱신 에지의 갱신 정점이 상기 원래 그래프의 동일한 MUC(이하 삽입할 MUC)에 속하는 경우 상기 삽입할 MUC에서만 상기 갱신 에지를 삽입하여 MUC를 갱신하고, 상기 갱신 정점이 동일한 MUC에 속하지 않는 경우 상기 갱신 정점들 사이의 최단 경로를 포함하는 MUC를 구하여 상기 원래 그래프의 MUC에 포함하고 상기 갱신 정점들을 포함하는 상기 원래 그래프의 MUC를 제외하여 갱신하는 것을 특징으로 한다.

[0026] 또, 본 발명은 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 있어서, 상기 (a)단계에서, 삭제되는 갱신 에지의 갱신 정점들 사이의 경로 수가 1개인 경우 상기 갱신 정점들을 포함하는 MUC를 상기 원래 그래프에서 제외하여 갱신하고, 상기 경로의 수가 적어도 2개이고 상기 갱신 정점들 사이의 모든 경로에서 나타나는 적어도 하나의 정점이 존재하면 상기 원래 그래프의 MUC를 분리하고 존재하지 않으면 상기 갱신 에지를 제외하여 갱신하는 것을 특징으로 한다.

[0027] 또, 본 발명은 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 있어서, 상기 (c)단계에서, 상기 외부경로 중 출발점 및 도착점 중 하나가 MUC_U 내에 존재하는 외부경로에 의한 제1 외부경로 증분과, MUC_U 를 통과하나 출발점 및 도착점 모두가 MUC_U 내에 존재하지 않는 외부경로에 의한 제2 외부경로 증분을 구하는 것을 특징으로 한다.

[0028] 또, 본 발명은 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 있어서, 상기 제1 외부경로 증분 $c_{bj}(v_i)$ 은 다음 [수식 1]에 의해 구하는 것을 특징으로 한다.

[0029] [수식 1]

$$c_{bj}(v_i) = |V_{G_j}| \cdot \sum_k \frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$$

[0030]

[0031] 단, $v_i, v_j, v_k \in MUC_U$, $i \neq k, j \neq k$ 이며 v_j 는 G_j 로의 연결 정점이고, V_{G_j} 는 v_j 연결정점에 연결된 부분 그래프 G_j 의 정점 집합이고, $|V_{G_j}|$ 는 부분 그래프 G_j 의 정점 집합의 기수임.

[0032] 또, 본 발명은 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 있어서, 상기 제2 외부경로 증분은 상기 출발점 또는 도착점을 포함하는 상기 MUC_U 의 연결 정점의 부분 그래프가 분리되지 않은 경우의 증분(이하 제2-1 외부경로 증분) 및 상기 부분 그래프가 분리된 경우의 증분(이하 제2-2 외부경로 증분)으로 구성되는 것을 특징으로 한다.

[0033] 또, 본 발명은 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 있어서, 상기 제2-1 및 제2-2 중심성 증분 $\overline{c_{tj}^k}(v_i)$ 및, $c_{ti}(v_i)$ 은 다음 [수식 2] 및 [수식 3]에 의해 구하는 것을 특징으로 한다.

[0034] [수식 2]

$$c_{tj}^k(v_i) = |V_{G_j}| \cdot |V_{G_k}| \cdot \frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$$

[0035]

[0036] 단, $v_i, v_j, v_t \in MUC_U$, $j \neq k$ 이며 v_j 및 v_k 각각 G_j 및 G_k 로의 연결 정점들이고, V_{G_j}, V_{G_k} 는 각각 연결정점 v_j 및 v_k 에 연결된 부분 그래프 G_j 및 G_k 의 정점 집합이고, $|V_{G_j}|$ 및 $|V_{G_k}|$ 는 각각 부분 그래프 G_j 및 G_k 의 정점

집합의 기수임.

[수식 3]

$$c_{t_i}(v_i) = \begin{cases} |V_{G_i}|^2 - \sum_{l=1}^n (|V_{G_i^l}|^2) & \text{if } G_i \text{ is disconnected} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

단, G_j^l 는 G_i 의 l 번째 연결된 성분이고, n 은 G_i 내의 연결된 성분들의 수이고, v_i 는 G_i 로의 연결 정점임.

발명의 효과

상술한 바와 같이, 본 발명에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 방법에 의하면, 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 후보 집합을 발견하여 후보 정점들만을 이용하여 이들의 매개 중심성을 계산함으로써, 검색 공간을 효과적으로 줄이고 계산 비용을 상당히 줄이는 효과가 얻어진다.

보다 구체적으로, 본 발명은 다음과 같은 효과가 있다.

1. 매개 중심성의 변화에 대한 포괄적인 분석을 바탕으로, 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 후보 집합과 매개 중심성이 변하지 않는 정점들의 집합들을 식별하는 방법을 제공한다.

2. 매개 중심성 업데이트 정리(Betweenness Centrality Update Theorem)를 제공한다. 이러한 정리는 전체 그래프를 거치지 않고도 매개 중심성의 효과적인 업데이트를 가능하게 한다. 제안된 정리를 바탕으로, 매개 중심성을 업데이트하기 위한 효과적인 방법을 제공한다.

3. 대형의 실제 데이터 집합뿐만 아니라 다양한 합성 데이터 집합에 대한 실험을 수행하였다. 실험 결과는 본 발명의 포함이 매개 중심성의 업데이트에 있어서 기존의 방법을 능가한다는 것을 보여준다. 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 후보 집합의 크기가 합성 그래프에서의 전체 정점들의 수의 1/10인 경우, 제안된 알고리즘은 기존의 알고리즘의 속도를 평균 577배 증가시킨다. 실제 데이터 집합에 있어서, 본 발명에 의한 방법은 데이터 집합에 따라 기존의 방법의 속도를 2배 내지 2,418배 증가시킨다.

도면의 간단한 설명

도 1은 본 발명을 실시하기 위한 전체 시스템의 구성도이다.

도 2는 그래프 업데이트의 일례이다.

도 3은 본 발명의 일실시예에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 방법을 설명하는 흐름도이다.

도 4는 본 발명에 따른 사이클 기반 및 최소 사이클 기반의 일례이다.

도 5는 본 발명에 따른 MUC를 찾는 알고리즘 1을 도시한 것이다.

도 6은 본 발명에 따른 MUC의 업데이트의 일례이다.

도 7은 본 발명에 따른 MUC를 찾는 알고리즘 2를 도시한 것이다.

도 8은 본 발명에 따른 매개 중심성의 의존성에 대한 일례이다.

도 9는 본 발명에 따른 매개 중심성의 업데이트의 일례이다.

도 10은 본 발명에 따른 MUC의 매개 중심성을 갱신하는 알고리즘 3을 도시한 것이다.

도 11은 본 발명의 실험예에 따른 매개 중심성 갱신의 일례이다.

도 12는 본 발명을 브란데스의 방법에 적용한 알고리즘 4를 도시한 것이다.

도 13은 본 발명의 실험결과에 따른 합성 데이터에 대한 매개 중심성 업데이트 시간을 나타낸 그래프이다.

도 14는 본 발명의 실험결과에 따른 실제 데이터에 대한 속도 증가에 대한 표이다.

도 15는 본 발명의 실험결과에 따른 실제 데이터에 대한 매개 중심성 업데이트 시간을 나타낸 그래프이다.

도 16은 본 발명의 일실시예에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 시스템의 구성에 대한 블록도이다.

발명을 실시하기 위한 구체적인 내용

- [0047] 이하, 본 발명의 실시를 위한 구체적인 내용을 도면에 따라서 설명한다.
- [0048] 또한, 본 발명을 설명하는데 있어서 동일 부분은 동일 부호를 붙이고, 그 반복 설명은 생략한다.
- [0049] 먼저, 본 발명을 실시하기 위한 전체 시스템 구성의 예들을 도 1을 참조하여 설명한다. 도 1a 또는 도 1b에서 보는 바와 같이, 본 발명에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 방법은 컴퓨터 단말 또는 네트워크 상의 서버 시스템으로 실시될 수 있다.
- [0050] 도 1a에서 보는 바와 같이, 본 발명을 실시하기 위한 전체 시스템의 일례는 컴퓨터 단말(10)과 상기 컴퓨터 단말(10)에 설치되는 매개 중심성 갱신 시스템(30)으로 구성될 수 있다. 즉, 매개 중심성 갱신 시스템(30)의 각 기능들은 컴퓨터 프로그램으로 구현되어 컴퓨터 단말(10)에 설치된다. 매개 중심성 갱신 시스템(30)은 컴퓨터 단말(10)의 저장매체에 미리 저장되거나 입력장치를 통해 입력된 그래프 또는 갱신에 대한 데이터를 읽어들이어 처리한다.
- [0051] 또는, 다른 실시예로서, 본 발명에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 방법은 마이크로 프로그램으로 구성되어 마이크로프로세서에 의해 구동되는 하나의 전용 IC칩으로 실시되거나, ASIC(주문형 반도체) 등 하나의 전자회로로 구성되어 실시될 수 있다. 즉, 소프트웨어 형태, FPGA 칩이나 여러 개의 회로소자로 구성된 전자회로의 형태로 구성될 수도 있다. 그 외 가능한 다른 형태도 실시될 수 있다.
- [0052] 다음으로, 도 1b에서 보는 바와 같이, 본 발명을 실시하기 위한 전체 시스템의 또 다른 예는 컴퓨터 단말(10)과 매개 중심성 갱신 방법을 처리하는 서버(30)로 구성되고 서로 네트워크(20)로 연결된다. 또, 필요한 데이터를 저장하기 위한 데이터베이스(40)를 더 구비할 수 있다.
- [0053] 컴퓨터 단말(10)은 사용자가 이용하는 PC, 노트북, 넷북 등의 통상의 컴퓨팅 단말기이다.
- [0054] 서버(30)는 네트워크(20)에 연결되어 네트워크 상에서 데이터를 수집하거나, 컴퓨터 단말(10)로부터 데이터를 수신하여, 그래프를 구성하고 또한 구성된 그래프를 갱신한다. 또한, 서버(30)는 구성된 그래프에 대한 매개 중심성을 계산해두고, 그래프가 갱신된 경우 그래프뿐만 아니라 매개 중심성 값들도 갱신하여 저장한다. 예를 들어, 소셜 네트워크 분석 등을 위한 서버(30)인 경우, 인터넷 상에서 소셜 망에 대한 데이터를 수집하여 그래프를 구하거나 갱신한다.
- [0055] 데이터베이스(40)는 서버(30)에서 필요한 데이터를 저장하는 통상의 저장매체로서, 그래프 정보 및 매개 중심성 값 등을 저장한다. 상기 데이터베이스(40)에 저장하는 데이터들은 앞서의 도 1(a)의 예의 경우 컴퓨터 단말(10)의 저장매체에 저장될 수 있다.
- [0056] 상기와 같이 본 발명에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 방법은 다양한 실시예가 가능하지만, 이하에서 설명의 편의를 위해, 도 1(a)의 실시예인 컴퓨터 단말에 설치되는 프로그램 시스템으로 설명하기로 한다.
- [0057] 다음으로, 본 발명의 기본 개념을 도 2의 예를 참조하여 보다 구체적으로 설명한다.
- [0058] 도 2에서, G_1 을 그래프라 하고, G_1 의 업데이트 그래프를 G_1' 이라고 가정하자. 예지 (v_1, v_5)가 삽입되면 v_1 과 v_5 사이의 최단 경로가 변경된다. 또한, 예를 들어, v_{12} 와 v_5 사이의 최단 경로 및 v_{10} 과 v_{11} 사이의 최단 경로와 같이 변경되는 최단 경로들이 많이 있다.
- [0059] 그러나 그래프가 업데이트되어도, 매개 중심성이 변하지 않는 정점들이 존재함을 알 수 있다. 도 2(b)에서, v_1, v_3, v_4, v_5 의 매개 중심성은 변하는 반면, 다른 정점들의 매개 중심성은 변하지 않는다. 그래프 G_1 이 그래프 G_1' 로 업데이트되어도, $v_2, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}$ 또는 v_{12} 를 통과하는 원래의 최단 경로들의 출발점-도착점

(source-target) 쌍은 변하지 않으므로, $v_2, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}$ 및 v_{12} 의 매개 중심성은 변하지 않는다.

[0060] 위의 관찰을 근거로, 매개 중심성 업데이트를 위한 빠른 방법(또는 알고리즘)(Quick algorithm for Updating Betweenness centrality, QUBE)을 제안할 수 있다. 본 발명의 핵심 개념은 정점들의 축소 집합에 대해 매개 중심성 계산을 수행하는 것이다. 우선 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 집합과 매개 중심성이 변하지 않는 정점들의 집합(들)을 찾는다.

[0061] 도 2(b)에서, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 는 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 집합이고, $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}, \{v_{11}\}, \{v_{12}\}$ 는 매개 중심성이 변하지 않는 정점들의 집합들이다. 이러한 집합을 찾는 방법은 이후 설명되며, 후자의 세 개의 집합들은 G_1 에서 제1 집합을 제거한 이후의 연결된 부분 그래프에 해당한다는 것을 쉽게 알 수 있다.

[0062] 정점들의 제 1 집합에 대해서만 매개 중심성을 계산한다. 종래 기술에서, 모든 쌍 최단 경로들(pair shortest paths)에 대한 재계산은 매개 중심성을 계산할 필요가 있고, G_1 에 대해 재계산될 필요가 있는 최단 경로들의 수는 $12 \cdot 11/2=66$ 이 될 것이다. 반면에, 본 발명에 따른 방법에서, $5 \cdot 4/2 = 10$ 의 최단 경로들만이 재계산될 필요가 있다. 제 1 집합의 기수(cardinality)가 작을수록, 필요한 최단 경로를 계산하는데 걸리는 시간은 더욱 단축된다.

[0063] 축소 집합에서의 정점의 매개 중심성을 재계산하기 위해, 축소 집합만을 고려한 로컬 매개 중심성에, 다음의 조건을 만족하는 최단 경로들의 수가 고려될 필요가 있다.

[0064] 1. 최단 경로는 축소 집합의 정점들 중 하나 이상을 통과한다.

[0065] 2. 최단 경로의 출발점이나 도착점 또는 둘 모두는 축소 집합 내에 존재하지 않는다.

[0066] 상기 수는, 실제로 최단 경로를 계산하지 않고도, 매개 중심성이 변하지 않는 정점들의 집합(들)의 기수를 근거로 획득될 수 있다. 예를 들어, v_{12} 에서 v_6 까지의 최단 경로들은 항상 축소 집합 내의 정점들을 통과한다. 마찬가지로, $v_i \in \{v_{12}\}$ 에서 $v_j \in \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ 까지의 최단 경로들은 항상 축소 집합에서의 정점들을 통과한다. 따라서 v_i 에서 v_j 까지의 최단 경로들의 수는, 두 개의 집합의 기수의 곱(즉, 5)이다.

[0067] 다음으로, 본 발명에서 사용될 매개 중심성에 대하여 보다 구체적으로 설명한다.
 [0068] 매개 중심성은 그래프에서 정점의 상대적 중요도를 계산하는 척도이다. 형식적인 정의는 다음과 같다.

[0069] 그래프는 $G = (V, E)$ 로 나타내고, 여기서 V 는 정점들의 집합이며 $E \subseteq V \times V$ 는 에지의 집합이다. 그래프에서 경로는 정점들의 시퀀스(v_1, \dots, v_n)로 나타내며, 여기서 $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ 에 대한 $v_i, v_j \in V$ 는 가능한 $1 = n$ 을 제외한다.

[0071] [정의 1] (매개 중심성).

[0072] 정점($v_j \in G$)의 매개 중심성은 다음과 같다.

[0073] [수학식 1]

$$c(v_j) = \sum_{i,k} \frac{\sigma_{v_i, v_k}(v_j)}{\sigma_{v_i, v_k}}$$

[0075] 여기서 $v_i, v_j, v_k \in V, i \neq j \neq k, \sigma_{v_i, v_k}(v_j)$ 는 v_j 를 포함하는 v_i 와 v_k 사이의 최단 경로들의 수이고, σ_{v_i, v_k} 는 v_i 와 v_k 사이의 최단 경로들의 수이다.

[0076] 매개 중심성은 다음과 같이 계산된다:

[0077] 1. 정점들(v_s 및 v_t)의 각각의 쌍에 대해, 두 개의 정점들 사이의 최단 경로를 계산한다.

[0078] 2. 정점들의 각각의 쌍에 대해, 최단 경로(들) 내의 각각의 정점의 참여 비율을 계산한다. 상기 비율은 v_s 과 v_t

사이의 최단 경로들의 수로 나눈 v_j 를 통과하는 v_s 와 v_t 사이의 최단 경로들의 수이다.

- [0079] 정점들의 모든 쌍에 대한 비율을 축적한다.
- [0080] 그래프 업데이트에 의해 초래되는 매개 중심성의 업데이트를 고려해 보자. 예를 들어, 그래프에 에지를 삽입하는 것과 같은 간단한 업데이트조차도 그래프 내의 정점들의 많은 쌍들에 대해 현존하는 최단 경로들을 변경할 수 있다. 이전의 방법을 사용하여 매개 중심성을 업데이트하는데 있어서 가장 큰 단점 중의 하나는 정점들의 모든 쌍들에 대한 최단 경로들이 그래프에서 업데이트가 발생할 때마다 재계산된다는 것이다.
- [0081] 다음으로, 본 발명의 일실시예에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 방법을 도 3을 참조하여 보다 구체적으로 설명한다.
- [0082] 도 3에서 보는 바와 같이, 본 발명의 일실시예에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 방법은 (a) 갱신 그래프의 MUC를 구하는 단계(S10), (b) 갱신 정점을 포함하는 MUC(MUC_U)를 추출하여, MUC_U 내의 최단 경로(내부경로)들로 인한 매개 중심성(로컬 매개 중심성)을 계산하는 단계(S20), (c) MUC_U 내에 포함되지 않은 그래프의 최단 경로(외부경로)들로 인한 매개 중심성(외부경로 증분)을 구하는 단계(S30), 및, (d) 로컬 매개 중심성에 외부경로 증분을 더하여, 그래프의 매개 중심성(글로벌 매개 중심성)을 계산하는 단계(S40)로 구분된다.
- [0083] 즉, 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 집합과 매개 중심성이 변하지 않는 정점들의 집합(들)을 식별한다. 그래프 업데이트의 결과로 발생될 수 있는 매개 중심성의 가능한 변경의 분석을 통해, 매개 중심성의 변화가 발생하거나 발생하지 않는 정점들의 집합의 특징을 발견하였다. 관찰된 패턴은 모든 유형의 연결 그래프에 적용이 가능하다.
- [0084] 그리고 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 식별된 집합들에 대해 매개 중심성 계산을 수행한다. 계산된 값들을 로컬 매개 중심성이라 칭한다. 로컬 매개 중심성의 상부에서, 최단 경로가 아직 고려되지 않은 정점들에 대해 추가적인 계산을 수행한다. 간단한 추가적인 계산을 통해, 모든 쌍 최단 경로의 계산과 같은 그래프 상의 모든 정점들에 대한 비용이 많이 드는 계산을 수행하지 않고도 정확한 매개 중심성이 복원될 수 있다.
- [0085] 먼저, 갱신 그래프의 MUC들을 구하는 단계(S10)를 설명한다.
- [0086] 갱신 그래프는 원래 그래프에서 에지가 삽입 또는 삭제되어 갱신될 때의 그래프를 말한다. 바람직하게는, 갱신 그래프의 MUC들은 원래 그래프(또는 갱신전 그래프)의 MUC들에서 갱신되는 에지의 정점을 포함하는 MUC만을 갱신함으로써 얻어진다. 즉, 처음의 그래프에서 MUC들을 구한 후, 에지가 갱신될 때마다 상기 MUC를 갱신하여 갱신된 그래프의 MUC들을 지속적으로 얻는다.
- [0087] 즉, 갱신 그래프에서 최소합 사이클(이하 MUC)을 구한다(S10). 이때, 원래 그래프의 MUC들 중에서 상기 갱신 정점을 포함하는 MUC만을 갱신하여, 갱신 그래프의 MUC들을 구한다. 이때, MUC는 여러 개가 구해진다.
- [0088] 이하에서 먼저, 최초 그래프에서 MUC들을 구하는 방법을 설명한다.
- [0089] 사이클 기반은 다음과 같이 정의한다.
- [0090] [정의 2] (사이클 기반)
- [0091] $G = (V,E)$ 를 무방향 그래프(undirected graph)라 가정하자. 사이클 C 는 V 의 모든 정점이 C 내의 짝수의 에지들로 입사되도록 하는 에지의 부분 집합이다. 각각의 사이클 C 는 $\{0, 1\}^{|E|}$ 내의 에지 입사 벡터로 나타낼 수 있고, 여기서 성분은 $e \in C$ 일 때 정확히 1과 같다. 선형 독립 사이클들(linearly independent cycle)의 극대 집합(maximal set)은 사이클 기반으로 불린다.
- [0092] [정의 3] (최소 사이클 기반(MCB))
- [0093] 그래프 $G = (V,E)$ 를 각각의 에지 $e \in E$ 로 할당된 음이 아닌 가중치(nonnegative weight) w_e 를 갖는 무방향 연결 그래프라 가정하자. 최소 사이클 기반(MCB)은 전체 가중치가 최소(minimum total weight)인 사이클 기반 C 이다. 즉, $w(C)$ 를 최소로 하는 사이클 기반 C 이다.

[0094] 단, $w(C)$ 는 다음과 같다.

$$w(C) = \sum_{i=1}^v w(C_i), \quad w(C_i) = \sum_{e \in C_i} w_e$$

[0095] 도 4에 도시된 예는 세 개의 사이클 기반 집합($\{C_1, C_2\}$, $\{C_1, C_3\}$, and $\{C_2, C_3\}$)을 갖는다. 그래프에서 모든 에지가 동일한 가중치(즉, 모든 에지에 대해 1)를 갖는다고 가정하면, 최소 사이클 기반(MCB)은 $\{C_1, C_2\}$ 이다. 사이클 기반과 최소 사이클 기반의 자세한 정의는 [문헌 16]에서 찾을 수 있다.

[0096] 다음으로, 최소합 사이클(MUC)에 대해 설명한다.

[0097] 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 집합이 매개 중심성이 변하지 않는 정점들의 집합(들)과 구분된다. 이러한 집합들은 전처리 시간 동안 획득한 MUC들을 이용하여 식별된다. 그래프에서 변경이 발생함에 따라, 저장된 MUC들은 또한 변경될 필요가 있다. MUC의 변화는 실행 시간 동안 처리된다.

[0098] 최소합 사이클(MUC)은 다음과 같이 정의된다.

[0099] [정의 4] (최소 합 사이클, MUC)

[0100] 최소 사이클 기반 C 와 최소 사이클 $C_i \in C$ 가 주어질 때, V_{C_i} 가 C_i 내의 정점들이 집합이라고 가정하자. 두 개의 V_{C_i} 들이 적어도 하나의 공통 정점을 공유하는 경우 두 개의 V_{C_i} 들을 함께 회귀적으로 합한다. 그리고 나서 정점들의 각각의 최종 집합은 하나의 MUC를 형성한다.

[0101] 요약하면, MUC는 그래프의 정점이 짝수로 입사되는 상기 그래프의 에지들의 부분 집합(이하 사이클)으로서, 선형적으로 독립인 사이클(linearly independent cycle)의 극대 집합(이하 사이클 기반) 중 가중치가 최소인 집합(이하 최소 사이클 기반)의 사이클들을 공통된 정점으로 합하여 형성되는 것이라 할 수 있다.

[0102] MUC들은 분리된 집합이기 때문에 각각의 정점들은 오직 하나의 MUC 내에 나타난다. $MUC(v)$ 를 정점 v 를 포함하는 MUC로 나타낸다.

[0103] 다음으로, 연결 정점을 다음과 같이 정의한다.

[0104] [정의 5] (연결 정점)

[0105] v 가 관절 정점(articulation vertex)이고 v 가 정점 $w \notin MUC(v)$ 에 대한 에지를 갖는 경우 정점 $v \in MUC$ 는 연결 정점이다.

[0106] 관절 정점(articulation vertex)이란 해당 정점 및 이에 입사되는 에지를 그래프에서 삭제하면 상기 그래프를 분리하는 정점을 말한다. 동일한 의미로, 정점 v 에서 정점 w 까지의 모든 경로는 관절 정점을 지나도록 하는, 2개의 정점 v 및 w 가 반드시 존재한다는 것을 의미한다.

[0107] 도 9에서, 에지(v_3, v_4)가 삽입된다고 가정하자. $MUC(v_3)$ 는 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 이고, $MUC(v_3)$ 의 연결 정점들은 v_1, v_2 및 v_3 이다.

[0108] 연결 정점은 또한 관절 정점이기 때문에 연결 정점의 삭제는 그래프가 분리되게 한다. 연결 정점(v_i)의 삭제의 결과로 $MUC(v_i)$ 로부터 분리된 그래프를 분리된 부분 그래프(G_i)로 나타낸다. 도 9에서, G_1, G_2 , 및 G_3 는 연결 정점 v_1, v_2 , 및 v_3 의 삭제로 각각 형성된 분리된 부분 그래프들이다.

[0109] 다음으로, 그래프에서 MUC를 추출하는 방법을 도 5를 참조하여 설명한다. 도 5는 그래프에서 MUC를 추출하는 방법을 알고리즘으로 표시한 것이다.

[0110] 구체적으로, MUC들, 각각의 MUC에 대한 연결 정점들의 집합 및 연결 정점의 삭제로 유래된, 분리된 부분 그래프들을 형성하는 방법을 제시한다.

- [0112] 도 5의 알고리즘 1은 최소 사이클 기반 C를 입력으로 사용하고 MUC들(MUCSet) 및 대응하는 부분 그래프들을 갖는 연결 정점들의 집합을 찾아낸다.
- [0113] 최소 사이클 기반의 계산은 그래프 이론 분야에서 잘 연구되어 있으며, 호튼(Horton)의 알고리즘([문헌 14]) 및 카비타(Kavitha)의 알고리즘([문헌 16])과 같은 다양한 효과적인 알고리즘이 존재한다. 상기 알고리즘 1의 라인 2에서, 기존의 알고리즘을 사용하여 최소 사이클 기반을 계산한다. 라인 3 내지 라인 5에서, 알고리즘은 합해진 사이클들이 서로 분리될 때까지 최소 사이클 기반 내에서 사이클들을 합함으로써 MUC들(MUCSet)의 집합을 발견한다. 라인 7 내지 라인 9에서, 각각의 MUC에 대한 연결 정점들의 집합과 연결 정점들의 삭제로 유래된, 분리된 부분 그래프들은 추출된다.
- [0114] 전처리 시간 동안 알고리즘 1이 수행되는 것을 주목하자.
- [0115] 최초의 그래프에 대하여 MUC들의 집합을 구해놓고, 이하에서 설명할 MUC 업데이트 알고리즘(알고리즘 2)에 MUC들의 집합을 지속적으로 갱신하여 갱신된 그래프의 MUC(또는 MUC 집합)을 구한다. 즉, MUC 업데이트 알고리즘(알고리즘 2)은 실행 시간 동안 처리될 필요가 있다.
- [0116] 다음으로, MUC(또는 MUC 집합)을 갱신하는 방법을 도 6 및 도 7을 참조하여 설명한다. 도 6은 본 발명에 따른 MUC 갱신의 일례를 도시한 것이고, 도 7은 본 발명에 따른 MUC 업데이트 방법을 알고리즘(알고리즘 2)으로 표시한 것이다.
- [0117] 여기서, MUC들의 집합, 각각의 MUC에 대한 연결 정점들의 집합 및 연결 정점의 삭제로 유래된, 분리된 부분 그래프들을 유지하는 기술을 제시한다. 예지가 그래프에 삽입되거나 삭제되어 갱신된다. 이때의 예지를 갱신 예지라 하고, 상기 갱신 예지에 삽입되는 정점을 갱신 정점이라 부르기로 한다.
- [0118] 도 7의 알고리즘 2에서 보는 바와 같이, 삽입되는 갱신 예지의 갱신 정점이 상기 원래 그래프의 동일한 MUC(이하 삽입할 MUC)에 속하는 경우 상기 삽입할 MUC에서만 상기 갱신 예지를 삽입하여 MUC를 갱신한다(라인 3-4). 또한, 상기 갱신 정점이 동일한 MUC에 속하지 않는 경우 상기 갱신 정점들 사이의 최단 경로를 포함하는 MUC를 구하여 상기 원래 그래프의 MUC에 포함하고 상기 갱신 정점들을 포함하는 상기 원래 그래프의 MUC를 제외하여 갱신한다(라인 6-10).
- [0119] 또한, 삭제되는 갱신 예지의 갱신 정점들 사이의 경로 수가 1개인 경우 상기 갱신 정점들을 포함하는 MUC를 상기 원래 그래프에서 제외하여 갱신하고(라인 14-15), 상기 경로의 수가 적어도 2개이고 상기 갱신 정점들 사이의 모든 경로에서 나타나는 적어도 하나의 정점이 존재하면 상기 원래 그래프의 MUC를 분리하고(라인 17-18) 존재하지 않으면 상기 갱신 예지를 제외하여 갱신한다(라인 13, 19-20).
- [0120] 도 6의 예를 참조하여 보다 구체적으로 설명한다.
- [0121] 예지의 삽입 또는 연결에 따라 MUC들을 업데이트하는 각각의 경우를 다음과 같이 설명한다(도 6(a)의 초기의 MUC들은 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 및 $\{v_8, v_9, v_{10}\}$ 이고, 도 6(b)의 초기의 MUC들은 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ 및 $\{v_8, v_9, v_{10}\}$ 이다)
- [0122] 1. 예지가 삽입될 때,
- [0123] (a) 하나의 MUC 내에서 새로운 예지가 두 개의 정점을 연결하는 경우, 변화가 없다. 도 6(a)에서, 예지(a)의 삽입은 MUC에 어떠한 영향도 주지 않는다(알고리즘 2의 라인 4).
- [0124] (b) 새로운 예지 내의 두 개의 정점들 사이의 기존의 최단 경로 내의 정점들이 임의의 MUC에 포함되는 경우, 새로운 MUC가 생성된다. 도 6(a)에서, 예지(b)의 삽입은 $\{v_6, v_7, v_{12}\}$ 를 포함하는 새로운 MUC를 생성하게 한다(알고리즘 2의 라인 6에서 라인 10. $s_p(v_i, v_j)$ 는 v_i 와 v_j 사이의 최단 경로들 내의 정점들의 집합임).
- [0125] (c) 새로운 예지의 두 개의 정점들 사이의 기존의 최단 경로들 내의 정점들이 일부 MUC들에 포함되는 경우, MUC는 정점들 및 다른 MUC들과 합병되어 새로운 MUC를 형성한다. 도 6(a)에서, 예지(c)의 삽입은 MUC(v_{10})을 포함하여 v_{11} 과 합병된다(알고리즘 2의 라인 6 내지 라인 10).
- [0126] 2. 예지가 삭제될 때,

- [0127] (a) 삭제의 결과로서 삭제된 에지 내의 두 개의 정점들 사이에 단 하나의 경로가 존재할 때, MUC는 소멸된다. 도 6(b)에서, 에지(a)의 삭제는 MUC(v_{10})의 파괴를 일으킨다(알고리즘 2의 라인 14 및 라인 15. $Path(v_i, v_j)$ 는 v_i 와 v_j 사이의 경로들의 집합임).
- [0128] (b) 삭제 이후, 두 개의 정점들 사이에 하나 이상의 경로가 계속 존재하고 두 개의 정점들 사이의 모든 경로에서 나타나는 정점이 존재하지 않는 경우, 변화가 없다. 도 6(b)에서, 에지(b)의 삭제는 MUC에 어떠한 영향도 주지 않는다(알고리즘 2의 라인 20).
- [0129] (c) 삭제 이후, 두 개의 정점들 사이에 하나 이상의 경로가 계속 존재하고 두 개의 정점들 사이의 모든 경로에서 나타나는 정점이 존재하는 경우, 기존의 MUC는 MUC(들)과 정점(들)로 분리된다. 도 6(b)에서, 에지(c)의 삭제는 MUC이 두 개의 MUC로 분리되게 한다 (알고리즘 2의 라인 18).
- [0130] 다음으로, 갱신 정점을 포함하는 MUC(MUC_U)를 추출하여, MUC_U 내의 최단 경로(내부경로)들로 인한 매개 중심성(로컬 매개 중심성)을 계산하는 단계(S20)를 설명한다.
- [0131] 즉, 매개 중심성 값들을 계산하는 방법을 설명한다. 앞서 단계(S10)에서 언급된 바와 같이, 에지 $e(v_i, v_j)$ 의 삽입이나 삭제 이후, $MUC(v_i)$ 내의 정점들의 매개 중심성이 변경될 수 있다는 것을 확신한다. 따라서 MUC이라 칭하는 정점들의 축소 집합을 찾은 이후, 업데이트된 정점들이 속하는 MUC 내의 정점들의 매개 중심성을 효과적으로 계산하고 업데이트할 필요가 있다. 이제부터, 이러한 MUC를 단순히 MUC_U 로 나타낸다.
- [0132] 갱신 에지에 입사되는 정점(이하 갱신 정점)을 포함하는 MUC(이하 MUC_U)를 추출한다(S20). 앞서 갱신 그래프의 MUC를 구하는 단계(S10)에서 갱신된 MUC가 MUC_U 에 해당된다. 다만, 갱신 에지가 삭제되어 MUC가 파괴되는 경우(도 6b의 에지 a의 삭제 경우), 갱신 에지를 포함하는 갱신전 그래프(또는 원래 그래프)의 MUC를 MUC_U 로 결정하는 것이 바람직하다.
- [0133] 참고로, 앞 단계(S10)에서 구한 갱신 그래프의 MUC는 여러 개이고 그 중에서 갱신과 관련된 MUC를 MUC_U 라고 칭한 것이다.
- [0134] 그리고 MUC_U 내의 최단 경로(이하 내부경로)들로 인한 매개 중심성(이하 로컬 매개 중심성)을 계산한다(S10). 최단 경로의 모든 에지가 MUC_U 내에 포함되는 경우, 이러한 최단 경로를 내부경로라 부르기로 한다. 또한, 내부 경로에 의한 매개 중심성을 로컬 매개 중심성이다. 즉, 로컬 매개 중심성은 MUC_U 를 하나의 그래프로 보고 [수학식 1]에 의해 매개 중심성을 구한다.
- [0135] 이를 다시 정리하면 아래 [수학식 1a]와 같다. [수학식 1a]에서의 각 정점 v_i, v_j, v_k 는 전체 그래프의 정점집합 V 의 정점이었던 것에 반해 [수학식 1a]에서의 각 정점 v_i, v_j, v_k 는 갱신 정점을 포함하는 MUC 즉, MUC_U 내의 정점들만 그 대상으로 한다는 것이 다르다.
- [0136] [수학식 1a]
- $$c_{MUC}(v_i) = \sum_{j,k} \frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$$
- [0137]
- [0138] 여기서 $v_i, v_j, v_k \in MUC_U, i \neq j \neq k, \sigma_{v_i, v_k}(v_j)$ 는 v_j 를 포함하는 v_i 와 v_k 사이의 MUC_U 내의 최단 경로(내부경로)들의 수이고, σ_{v_i, v_k} 는 v_i 와 v_k 사이의 내부경로들의 수이다.
- [0139] 갱신된 그래프에 대하여 MUC_U 의 정점만 고려한 매개 중심성(로컬 매개 중심성)을 다시 계산하나, MUC_U 의 정점의 수가 전체 그래프(갱신된 그래프)의 정점 수 대비 작기 때문에 계산하는 시간은 매우 빠르다.
- [0140] 다음으로, MUC_U 의 외부경로들로 인한 매개 중심성(외부경로 증분)을 구하는 단계(S30)를 설명한다. 즉, MUC_U 내

에 포함되지 않은 상기 그래프의 최단 경로(이하 외부경로)들로 인한 매개 중심성(이하 외부경로 증분)을 구한다(S30). MUC_U 의 외부경로란 그래프의 최단 경로 중 일부가 MUC_U 내에 있고, 일부는 MUC_U 외의 그래프에 있는 최단 경로를 말한다.

[0141] 앞서 단계에서, 에지의 삽입, 삭제로 인해 매개 중심성이 변경되는 정점들의 집합(MUC_U)을 찾는 방법과 MUC_U 내의 정점들만을 이용하여 매개 중심성(로컬 매개 중심성)을 구하는 방법을 설명했다. 그러나, MUC_U 내의 정점들만을 이용하여 계산된 매개 중심성(로컬 매개 중심성)은 충분하지 않다. 실제로는, MUC_U 내의 정점들만을 이용하여 계산된 매개 중심성(로컬 매개 중심성)은 그래프 내의 모든 정점들을 이용하여 계산된 매개 중심성(글로벌 매개 중심성)에 비해 항상 작다.

[0142] 이는 (1) 출발점이나 도착점이 MUC_U 내에 존재하지 않는 최단 경로 및 (2) MUC_U 를 통과하고 최단 경로의 출발점과 도착점 모두가 MUC_U 내에 존재하지 않는 최단 경로들은 아직 고려되지 않았기 때문이다.

[0143] 예를 들어, 도 8은 G 와 G 의 부분 그래프인 G' 내의 정점들의 매개 중심성을 도시한다. 만약 G 의 부분 그래프인 G' 를 MUC_U 라고 했을 때, $G'(MUC_U)$ 내의 정점들만을 이용하여 계산된 로컬 매개 중심성은 G 내의 모든 정점을 이용하여 계산된 글로벌 매개 중심성 보다 그 값이 작다.

[0144] 이러한 개념을 바탕으로, MUC_U 내의 정점들만을 이용하여 계산된 매개 중심성을 로컬 매개 중심성이라 칭하고, 그래프 내의 전체 정점들을 이용하여 계산된 매개 중심성을 글로벌 매개 중심성이라 칭하기로 했을 때, 로컬 매개 중심성과 매개 중심성이 변하지 않는 정점들의 집합들(MUC 들 중에 MUC_U 를 제외한 집합 들)의 기수만을 이용해 글로벌 매개 중심성을 복원하는 방법을 설명한다.

[0145] 구체적으로, 외부경로 중 출발점 및 도착점 중 하나가 MUC_U 내에 존재하는 외부경로에 의한 제1 외부경로 증분과, MUC_U 를 통과하나 출발점 및 도착점 모두가 MUC_U 내에 존재하지 않는 외부경로에 의한 제2 외부경로 증분을 구한다.

[0146] 또한, 제2 외부경로 증분은 상기 출발점 또는 도착점을 포함하는 상기 MUC_U 의 연결 정점의 부분 그래프가 분리되지 않은 경우의 증분(이하 제2-1 외부경로 증분) 및 상기 부분 그래프가 분리된 경우의 증분(이하 제2-2 외부경로 증분)으로 구성된다.

[0147] 본 단계(S30)를 소개하기 전에, 좀 더 나은 이해를 위해 몇 가지 기술들을 정의한다. $cMUC(v_i)$ 는 오직 MUC_U 내의 정점들을 이용하여 계산된 정점 v_i 의 로컬 매개 중심성을 나타낸다. $s_p(v_i, v_j)$ 는 v_i 와 v_j 사이의 최단 경로들 내의 정점들의 집합이다. 예를 들어, 도 4에서, $s_p(v_1, v_2)$ 는 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 이다.

[0148] G_j 는 연결 정점(c_j)의 삭제로부터 유래된, 분리된 부분 그래프를 나타낸다. G_j^1 는 G_j 의 1번째 연결된 성분을 나타낸다. V_{G_j} 는 G_j 의 정점들의 집합이다.

[0149] 도 9에서, G_1, G_2 및 G_3 는 각각 연결 정점들 v_1, v_2 , 및 v_3 의 삭제로부터 유래된, 분리된 부분 그래프들을 나타낸다. G_1^1 및 G_2^2 는 G_2 의 연결된 부분 그래프들이다. 점선 에지가 삽입되는 경우, MUC_U 는 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 이고 G_1, G_2 , 및 G_3 으로의 MUC_U 의 연결 정점들은 v_1, v_2 , 및 v_3 이다. 도 9는 매개 중심성을 업데이트하는 예로서, G_1 및 G_3 내의 정점들은 생략되어 도시하고 있다.

[0150] [부명제 1] $v_s \in V_{G_j}, v_t \in MUC_U$ 이고, c_j 를 MUC_U 와 G_j 를 연결하는 연결 정점이라 하면, $s_p(c_j, v_t)$ 내의 각각의 정점은 반드시 $s_p(v_s, v_t)$ 내에 포함된다.

[0151] 증명: MUC_U 내의 연결 정점이 또한 관절 정점이므로, $v_s \in V_{G_j}$ 에서 $v_t \in MUC_U$ 까지의 모든 경로들은 연결 정점 c_j 를 통과한다. 따라서 $s_p(v_s, v_t)$ 는 항상 $s_p(c_j, v_t)$ 을 포함한다.

[0152] 부명제 1은 출발점이나 도착점이 MUC_U 내에 존재하지 않는 최단 경로들로 인한 매개 중심성의 증분을 계산하도록 한다(MUC_U 내에 존재하는 정점들 및 MUC_U 내에 존재하지 않는 정점들 사이의 최단 경로들).

[0153] 최단 경로 (v_s, v_t) 로 인한, v_i 에 대한 매개 중심성의 증분(또는 제1 외부경로 증분)은 $c_{b_j}(v_i)$ 로 나타낸다.

[0154] [수학식 2]

$$c_{b_j}(v_i) = |V_{G_j}| \cdot \sum_k \frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$$

[0155]

[0156] 여기서, $v_i, v_j, v_k \in MUC_U$, $i \neq k, j \neq k$ 이며 v_j 는 G_j 로의 연결 정점이다. V_{G_j} 는 v_j 연결정점에 연결된 부분 그래프 G_j 의 정점 집합이고, $|V_{G_j}|$ 는 부분 그래프 G_j 의 정점 집합의 기수이다.

[0157] [부명제 2] $v_s \in V_{G_j}$, $v_t \in V_{G_k}$ 이고, c_j 와 c_k 를 각각 MUC_U 와 G_j , 및, MUC_U 와 G_k 를 연결하는 연결 정점들이라 하면, $s \rho(c_j, c_k)$ 내의 각각의 정점들은 반드시 $s \rho(v_s, v_t)$ 내에 포함된다.

[0158] 증명: c_j 와 c_k 는 관절 정점들이므로, $v_s \in V_{G_j}$ 에서 $v_t \in V_{G_k}$ 까지의 모든 경로들은 연결 정점들 c_j 와 c_k 를 통과한다. 따라서 $s \rho(v_s, v_t)$ 는 항상 $s \rho(c_j, v_t)$ 을 포함한다.

[0159] 부명제 2는 MUC_U 를 통과하나 출발점 및 도착점이 모두 MUC_U 내에 존재하지 않는 최단 경로들로 인한 매개 중심성의 증분을 계산하도록 한다.

[0160] 최단 경로 (v_s, v_t) 로 인한, v_i 에 대한 매개 중심성의 이러한 증분(또는 제2-1 외부경로 증분)은 $\overline{c_{t_j^k}(v_i)}$ 로 나타낸다.

[0161] [수학식 3]

$$c_{t_j^k}(v_i) = |V_{G_j}| \cdot |V_{G_k}| \cdot \frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$$

[0162]

[0163] 여기서, $v_i, v_j, v_t \in MUC_U$, $j \neq k$ 이며 v_j 및 v_k 각각 G_j 및 G_k 로의 연결 정점들이다. V_{G_j}, V_{G_k} 는 각각 연결정점 v_j 및 v_k 에 연결된 부분 그래프 G_j 및 G_k 의 정점 집합이고, $|V_{G_j}|$ 및 $|V_{G_k}|$ 는 각각 부분 그래프 G_j 및 G_k 의 정점 집합의 기수이다.

[0164] 도 9의 예에서, 연결정점 v_3 에 대한 연결된 부분 그래프는 G_3 이고, G_3 의 정점 집합이 V_{G_3} 이 되며 그 기수 $|V_{G_3}|$ 는 6이 된다.

[0165] G_i 가 분리되는 경우에 있어서, G_i 의 서로 다른 연결된 성분들로부터의 두 개의 정점들 사이의 모든 최단 경로는 항상 v_i 를 통과한다. 예를 들어, 도 9에서, $v_s \in \overline{G_1^1}$ 에서 $v_t \in G_2^2$ 까지의 최단 경로는 항상 v_2 를 통과한다. v_i 에 대한 매개 중심성의 이러한 증분(또는 제2-2 외부경로 증분)은 $c_{t_i}(v_i)$ 로 나타내고 다음과 같이 계산된다:

[0166] [수학식 4]

$$c_{t_i}(v_i) = \begin{cases} |V_{G_i}|^2 - \sum_{l=1}^n (|V_{G_i^l}|^2) & \text{if } G_i \text{ is disconnected} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

[0167]

[0168] 여기서 G_i^l 는 G_i 의 l 번째 연결된 성분이고, n 은 G_i 내의 연결된 성분들의 수이고, 그리고 v_i 는 G_i 로의 연결 정점

이다.

[0169] 정리 1. (매개 중심성 업데이트 정리) 부명제 1 및 부명제 2에 의해, 정점 v_i , $c(v_i)$ 의 매개 중심성을 계산할 수 있다.

[0170] [수학식 5]

$$c(v_i) = c_{MUC}(v_i) + \sum_{G_j \subset G} c_{b_j}(v_i) + \sum_{G_j, G_k \subset G, j \neq k} c_{t_j^k}(v_i) + \sum_{G_i \subset G} c_{t_i}(v_i)$$

[0171]

[0172] 여기서 $c_{MUC}(v_i)$ 는 로컬 중심성 값으로 [수학식 1a]로 계산되고, $c_{b_i}(v_i)$ 는 [수학식 2](부명제 1)로부터 오고, $c_{t_j^k}(v_i), c_{t_i}(v_i)$ 는 [수학식 3] 및 [수학식 4](부명제 2)로부터 온다.

[0173] 정리 1에 의해, 그래프 내의 모든 정점들에 대해 모든 쌍 최단 경로의 계산을 수행하지 않고도 로컬 매개 중심성 및 각각의 분리된 부분 그래프 내의 정점들의 수를 이용하여 글로벌 매개 중심성을 계산할 수 있다.

[0174] 다음으로, MUC_U 의 글로벌 매개 중심성을 계산하는 단계(S40)를 도 10을 참조하여 설명한다. 도 10은 매개 중심성을 갱신하는 방법을 알고리즘 3을 표현한 것이다.

[0175] 로컬 매개 중심성에 상기 외부경로 증분을 더하여, 상기 그래프의 매개 중심성(이하 글로벌 매개 중심성)을 계산한다(S40).

[0176] 도 10에서 보는 바와 같이, 알고리즘 3은 업데이트된 정점들이 속하는 MUC_U 내의 정점들만을 이용하여 매개 중심성을 업데이트하는 방법을 보여준다. 알고리즘 3은 MUC_U 를 입력으로 사용하고 업데이트된 매개 중심성($C[v_i]$)을 출력으로 계산한다. MUC_U 내의 모든 쌍 최단 경로들의 집합과 MUC_U 내의 정점들의 로컬 매개 중심성은 기존의 매개 중심성 알고리즘들(라인 4)를 이용하여 계산된다.

[0177] 그리고 나서 MUC_U 내의 정점들에 대해(라인 5), MUC_U 내의 정점들 및 다른 부분 그래프 내의 정점들(라인 10) 사이의 최단 경로들뿐만 아니라, MUC_U 를 통과하는 두 개의 다른 부분 그래프들 내의 정점들의 최단 경로들(라인 13) 및 부분 그래프의 서로 다른 연결된 성분으로부터의 두 개의 정점들 사이의 최단 경로들(라인 15)로 인한

$$\frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$$

매개 중심성 값들의 증분을 더한다. 라인 10 및 라인 13에 나오는 $\frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$ 는 로컬 매개 중심성을 계산할 때(라인 4) 이미 계산되었고 쉽게 획득할 수 있기 때문에 추가의 비용이 필요하지 않다는 것에 주목하라.

[0178] 도 11은 도 9에 도시된 MUC_U 내의 정점들의 위한 [수학식 1a], [수학식 2], [수학식 3] 및 [수학식 4]를 이용하여 계산된 값들을 도시한다. 공간 제한으로 인해, 본 실시예에서 v_s 에서 v_t 까지의 경로 및 v_t 에서 v_s 까지의 경로를 구별하지 않는다. 따라서 실제의 매개 중심성들은 본 실시예에 도시된 값들보다 두 배가 크다.

[0179] 예를 들어 정점 v_2 에 대해, 로컬 매개 중심성 $c_{MUC}(v_2)$ 은 0이다. 그리고 v_2 를 포함하는 최단 경로 중 부분 그래프 G_2 의 한 정점을 끝으로 하는 최단 경로 인한 증분은 [수학식 2]에 의하여 V_{G_2} 의 기수인 4를

$$\sum_{k=1,3,4} \frac{\sigma_{v_2, v_k}(v_2)}{\sigma_{v_2, v_k}}$$

값인 3과 곱해 12가 된다.

[0180] 또한, v_2 를 포함하는 최단 경로 중 부분 그래프 G_1 과 G_2 의 각 정점을 양 끝으로 하는 최단 경로 인한 증분은 [수

$$\frac{\sigma_{v_1, v_2}(v_2)}{\sigma_{v_1, v_2}}$$

학식 3]에 의하여 ' $|V_{G_1}| \cdot |V_{G_2}| = 5 \cdot 4$ '를 값인 1과 곱해 20이 된다. 이와 비슷하게 v_2 를 포함하며

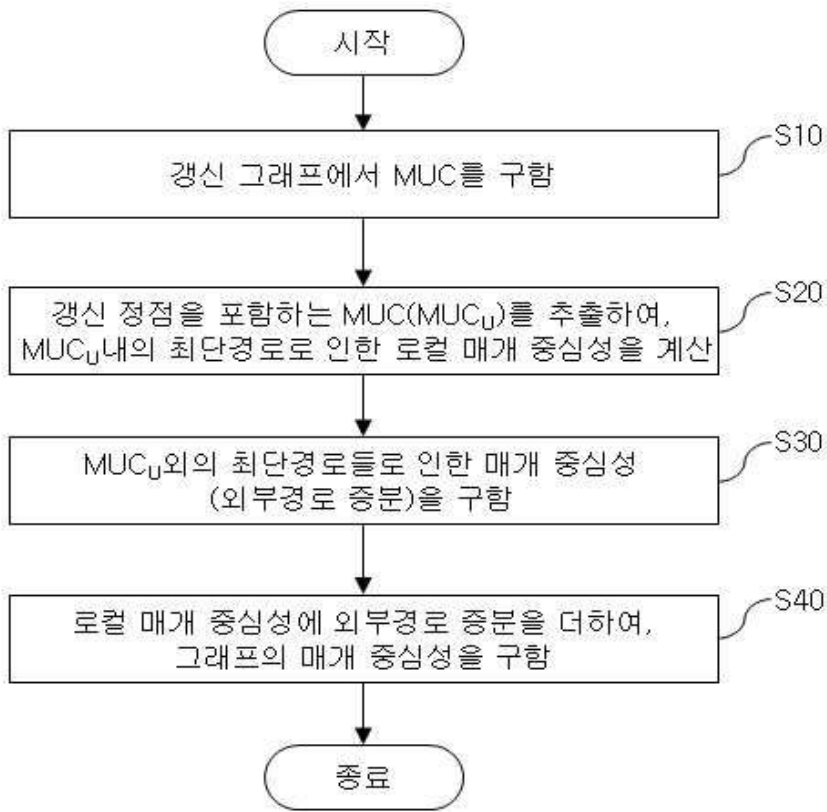
그래프 G_2 과 G_3 의 각 정점을 양 끝으로 하는 최단 경로 인한 증분은 24가 된다.

- [0181] 추가적으로 G_2 는 분리된 그래프이고 v_2 는 G_2 로의 연결 정점이다. 따라서 [수학식 4]에 의하여 예제에서는 $4^2 - (3^2 + 1^2) = 6$ 을 증분으로 더한다. (본 실시예에서 v_s 에서 v_t 까지의 경로 및 v_t 에서 v_s 까지의 경로를 구별하지 않으므로 6의 반인 3을 더한다)
- [0182] 마지막으로, 원래의 그래프 내의 모든 정점들을 이용하여 v_2 의 매개 중심성의 계산으로부터 비롯된 동일한 값인 글로벌 매개 중심성으로서 $0+12+20+24+3=59$ 를 획득한다. 다른 정점들 v_1 , v_3 및 v_4 에 대한 매개 중심성 값은 또한 v_2 의 경우와 같은 방식으로 계산될 수 있다.
- [0183] 다음으로, 본 발명에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 방법을 구현하는 실험에 및 그 결과를 보다 구체적으로 설명한다.
- [0184] 브란데스 알고리즘을 근거로 본 발명(QUBE, a Quick algorithm for Updating BEtweenness centrality)을 이용하는 브란데스 알고리즘의 업데이트 가능한 버전을 구현하는 방법을 설명한다. 그리고 브란데스 알고리즘의 업데이트 가능한 버전을 원래의 브란데스 알고리즘과 비교하고, 본 발명에 따른 방법의 도움으로 어느 정도 향상이 달성되는지를 설명한다. 브란데스 알고리즘과 같은 그래프 업데이트를 고려하지 않는 매개 중심성 계산 알고리즘들은 필연적으로 그래프가 변경될 때마다 모든 매개 중심성을 처음부터 다시 계산을 해야 한다는 것을 상기 하자. 2.53GHz 및 20GB 메인 메모리를 갖는 인텔 제온(Intel Xeon) CPU 상에서 실험을 수행한다.
- [0185]
- [0186] 알고리즘 3에서 설명한 바와 같이, QUBE는 후보 정점들을 식별함으로써 검색 공간을 줄이고 로컬 매개 중심성을 사용하여 글로벌 매개 중심성을 복원하기 때문에, QUBE는 임의의 매개 중심성 계산 알고리즘에 적용될 수 있다. 브란데스 알고리즘은 정확한 매개 중심성을 계산하는 가장 빠른 알고리즘으로 지금까지 알려져 있기 때문에, 브란데스 알고리즘을 근거로 QUBE를 구현한다.
- [0187] 브란데스 알고리즘은 단일 출발 최단 경로의 문제점을 해결함으로써 주어진 출발 정점에 대해 그래프에서 모든 정점들의 일방적인 쌍 의존성을 계산한다. 정점 v_t 의 일방적인 쌍 의존성은, 경로들의 출발 정점이 특정 정점 v_s 에 고정된, v_t 를 통과하는 모든 최단 경로들의 수이다. 브란데스 알고리즘의 상세한 설명은 [문헌 5]에서 찾아볼 수 있다.
- [0188] 앞에서 언급한 바와 같이, 로컬 매개 중심성([수학식 1a]) 이외에, (1) 출발점이나 도착점이 연결 정점인 최단 경로들로 인한 매개 중심성의 증분([수학식 2])을 계산하고 (2) 출발점 및 도착점이 모두 연결 정점인 최단 경로들로 인한 매개 중심성의 증분([수학식 3] 및 [수학식 4])을 계산할 필요가 있다.
- [0189] 브란데스 알고리즘은 모든 쌍 최단 경로를 명백하게 계산하지 않기 때문에, (1)과 (2)의 계산을 위해 필요한 값들은 브란데스 알고리즘 상의 일방적인 쌍 의존성을 계산하는 동안 획득된다. QUBE를 이용하는 브란데스 알고리즘의 업데이트 가능한 버전의 세부 구현은 도 12의 알고리즘 4에 도시되어 있다. [수학식 2], [수학식 3] 및 [수학식 4]를 통해 설명된 매개 중심성의 추가적인 증분은 각각 (라인 34), (라인 23 내지 라인 26 및 라인 29 내지 라인 31), 및 (라인 38)에서 계산된다. 원래의 브란데스 알고리즘에 추가된 라인들은 밑줄이 쳐져 있다.
- [0190] 다음으로, 효과를 설명한다.
- [0191] 제안된 알고리즘을 평가하기 위해, 합성 데이터 집합과 실제 데이터 집합을 이용하여 매개 중심성 업데이트 시간을 측정한다. 그래프 크기와 비율에 대한 성능을 관찰하기 위해 다양한 수 정점들 및 에지들의 연결된, 무방향, 그리고 비가중치 그래프들을 합성적으로 생성한다.
- [0192] 비율은 $(|MUC_v|/|V|) \cdot 100$ 로 계산되며, 이는 그래프의 업데이트로 인해 매개 중심성이 재계산되어야 하는 정점들의 백분율을 나타내며, 이는 로컬 매개 중심성을 계산할 때 고려되는 정점의 수와 같다. 따라서 이는 주로 본 발명(QUBE)의 성능에 영향을 미친다. 가장 널리 사용되는 랜덤 그래프 모델인 에르되스-레니(Erdos-Renyi) 모델([문헌 9])은 합성 그래프를 생성하기 위해 사용된다. 그래프에서 각각의 에지는 생성되는 동일한 확률로, 현존

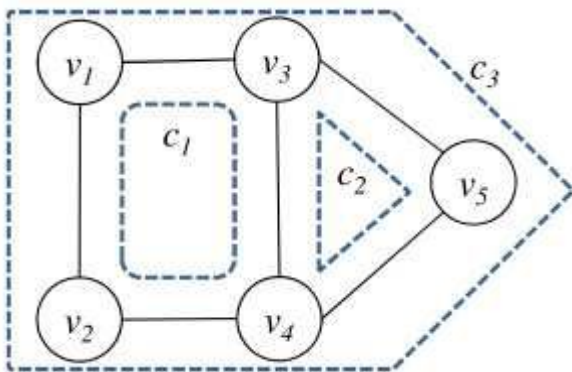
하는 에지와 상관없이 생성된다.

- [0193] 도 13은 각각 1,000, 3,000, 및 5,000 크기의 합성 그래프 상에 매개 중심성을 업데이트하는 실행 시간을 도시하고 있다. 각각의 그래프에서, 무작위로 100개의 에지를 삽입하고 평균값을 취한다. QUBE는 비율이 감소됨에 따라 매개 중심성 업데이트 시간을 상당히 줄인다.
- [0194] 도 13(c)에서, 비율이 80, 40, 그리고 10일 때, QUBE는 브란데스 알고리즘이 각각 대략 2배, 13배, 그리고 623배 더 빠르게 수행되도록 한다. 이러한 결과는 MUC_0 를 찾는 것은 매개 중심성의 업데이트 성능을 극적으로 향상시킨다는 명백한 증거를 제공한다. 그래프의 크기에 상관없이, QUBE는 원래의 브란데스 알고리즘이 더욱 빠르게 수행되도록 한다.
- [0195] 매개 중심성의 업데이트 시간 이외에도, 그래프가 업데이트됨으로 전처리 시간에 계산된 MUC들도 업데이트가 필요하지만, 이는 전체적인 처리 시간에 비해 무시할 수 있기 때문에, MUC들의 업데이트 시간을 명시적으로 제시하지 않는다.
- [0196] 실제 그래프에서 QUBE가 어떻게 수행되는가를 추정하기 위해, 자주 변경되는 것으로 증명된 다양한 실제 데이터 집합을 선택한다. 각각의 실제 그래프에 대해, 최대로 연결된 부분 그래프를 추출한다. 방향성의 실제 그래프인 경우, 방향성 에지를 무방향성 에지로 전환한다. 여덟 개의 서로 다른 실제 데이터 집합에 대해 매개 중심성 업데이트 시간을 비교한다.
- [0197] 결과를 도 14 및 도 15에 도시하였다. 도 14는 QUBE에 의해 달성한 속도 증가와 각각의 실제 데이터 집합의 전체적인 통계를 보여준다. 비율은 MUC 내의 정점들의 백분율임을 상기하자. 낮은 비율은 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들이 소수 존재한다는 것을 의미한다. 도 14의 속도 증가는 브란데스 알고리즘의 업데이트 가능한 버전이 원래의 브란데스 알고리즘에 비해 얼마나 빠른가를 보여준다. 도 14는 비율이 감소됨에 따라 브란데스 알고리즘의 업데이트 가능한 버전의 성능이 증가하는 것을 명백하게 보여준다.
- [0198] 도 15은 실제 그래프 상에서 측정된 평균 매개 중심성 업데이트 시간을 도시하고 있다. 도 15에서 y-축에 대해 로그 스케일(log scale)을 사용하였음을 상기하자. 정확한 업데이트 시간을 나타내기 위해, 표를 도 15에 포함시켰다. QUBE는 원래의 브란데스 알고리즘이, 비율이 대략 77인 'CAGrQc' 데이터 집합에 대해 대략 2배 빠르게 그리고 비율이 대략 6인 'Eva' 데이터 집합에 대해 대략 2,418배 빠르게 수행되도록 한다. 비율이 대략 30일 때 QUBE는 원래의 브란데스 알고리즘이 대략 37배 빠르게 수행되도록 하고, 비율이 대략 70일 때 QUBE는 원래의 브란데스 알고리즘이 대략 3배 빠르게 수행되도록 한다.
- [0199] 본 발명에서, 매개 중심성 업데이트 정리를 제공하고 이러한 정리를 근거로 효과적인 방법(QUBE)을 제안한다. QUBE는 매개 중심성이 변경될 수 있는 정점들의 집합을 식별한다. QUBE는 단지 집합 내의 정점들과 집합 내에 존재하지 않는 정점들의 수를 이용하여 계산된 매개 중심성을 바탕으로 매개 중심성을 효과적으로 업데이트한다.
- [0200] 그래프 업데이트를 고려하지 않는 기존의 매개 중심성 알고리즘은 QUBE의 채택으로 효과적인 업데이트 가능한 매개 중심성 알고리즘으로 변경될 수 있다. QUBE를 채택함으로써 브란데스 알고리즘의 업데이트 가능한 버전을 구현한다. 비율이 10인 합성 그래프에 대해, QUBE를 갖는 브란데스 알고리즘은 원래의 브란데스 알고리즘에 비해 대략 37배 더 빠르게 수행된다. 성능 향상은 비율이 감소될 때 더욱 증가한다.
- [0201] 다음으로, 본 발명의 일실시예에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 시스템을 도 16을 참조하여 설명한다.
- [0202] 앞서 설명한 바와 같이, 본 발명에 따른 매개 중심성 갱신 방법은 프로그램 시스템으로 구현될 수 있으며, 상기 방법의 각 단계를 하나의 기능적 수단으로 구성하여 구현될 수 있다.
- [0203] 매개 중심성 갱신 시스템(30)은 정점 및 가중치를 갖지 않는 에지로 구성된 비가중치 그래프(이하 원래 그래프)에서 에지(이하 갱신 에지)가 갱신되면 갱신된 그래프(이하 갱신 그래프)의 매개 중심성을 구하는 시스템이다.
- [0204] 도 16에서 보는 바와 같이, 본 발명의 일실시예에 따른 그래프의 매개 중심성 갱신 시스템은 갱신 그래프에서 최소합 사이클(이하 MUC)을 구하는 MUC 갱신부(31); 상기 갱신 에지에 입사되는 정점(이하 갱신 정점)을 포함하

도면3



도면4



도면5

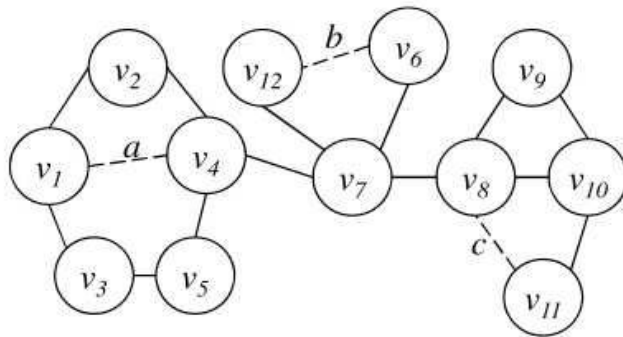
Algorithm 1: FindMUC(C)

```

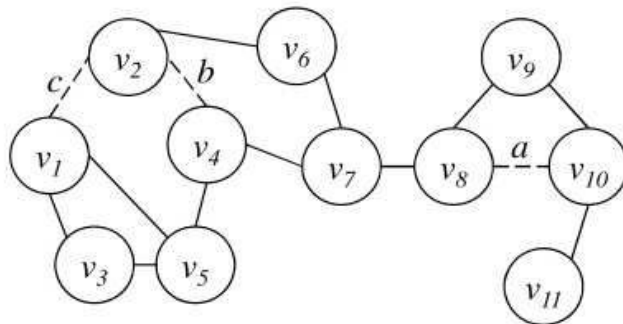
input  :  $C$  - minimum cycle basis
1 begin
2    $MUCSet := A$  minimum cycle basis  $C$ ;
3   while  $\exists c_i, c_j \in MUCSet$ , where  $c_i$  and  $c_j$  share at
      least one common vertex do
4      $c_i := c_i$  union  $c_j$ ;
5     Remove  $c_j$  from  $MUCSet$ ;
6   for each  $MUC \in MUCSet$  do
7      $Conn(MUC) :=$  a set of connection vertices in  $MUC$ 
      ;
8     for each connection vertex  $v_i \in Conn(MUC)$  do
9        $G_i :=$  disconnected subgraphs originated from
      the deletion of a connection vertex  $v_i$ ;

```

도면6



(a) Insertion



(b) Deletion

도면7

Algorithm 2: UpdateMUC($v_i, v_j, MUCSet, G$)

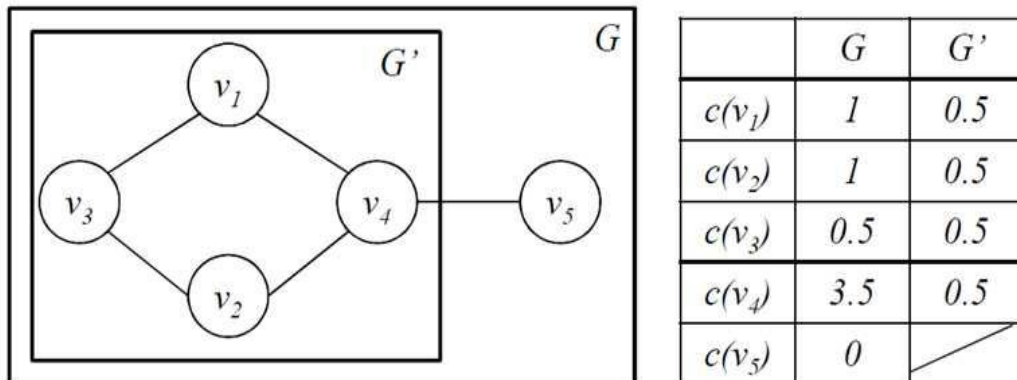
```

input :  $v_i$  - a vertex in inserted/deleted edge
          $v_j$  - a vertex in inserted/deleted edge
          $MUCSet$  - a set of MUCs
          $G$  - an original graph

1 begin
   // if  $v_i$  is not contained any MUC,  $MUC(v_i)$ 
   // returns  $v_i$  only
2 if Insertion Operation then
3   if  $MUC(v_i) = MUC(v_j)$  then
4     | // Do Nothing
5   else
6     |  $NewMUC :=$  Let be an empty set;
7     | for each vertices  $v$  in  $\zeta\rho(v_i, v_j)$  in  $G$  do
8     | |  $NewMUC := NewMUC \cup MUC(v)$ ;
9     | | remove  $MUC(v)$  from  $MUCSet$ ;
10    | add  $NewMUC$  to  $MUCSet$ ;
11    | add edge  $(v_i, v_j)$  to graph  $G$ ;
12  else
13    | delete edge  $(v_i, v_j)$  from graph  $G$ ;
14    | if  $1 = |Path(v_i, v_j)|$  in  $G$  then
15    | | remove  $MUC(v_i)$  from  $MUCSet$ ;
16    | else
17    | | if  $\exists v$  in all  $Path(v_i, v_j)$  then
18    | | | split  $MUC(v)$  into MUCs;
19    | | else
20    | | | // Do Nothing

```

도면8



도면10

Algorithm 3: QUBE(MUC_U)

```

input  :  $MUC_U$  - Minimum Union Cycle that updated
          vertices belong to
output :  $C[v_i]$  - Updated Betweenness Centrality Array
1 begin
2   Let  $SP$  be the set of all pair shortest paths in  $MUC_U$  ;
3   Let  $C[v_i]$  be an empty array,  $v_i \in MUC_U$  ;
4    $C[v_i] \leftarrow$  Betweenness() ;
5   for each  $v_i \in MUC_U$  do
6     for each connection vertex,  $v_j \in MUC_U$  do
7        $G_j :=$  Subgraph connected by a connection
          vertex  $v_j$  ;
8       for each  $v_k \in MUC_U - v_j$  do
9         if  $v_i \neq v_k$  then
10           $C[v_i] := C[v_i] + |V_{G_j}| \cdot \frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$  ;
11          if  $v_k$  is a connection vertex then
12             $G_k :=$  Subgraph connected by a
              connection vertex  $v_k$  ;
13             $C[v_i] := C[v_i] + |V_{G_j}| \cdot |V_{G_k}| \cdot \frac{\sigma_{v_j, v_k}(v_i)}{\sigma_{v_j, v_k}}$ 
              ;
14          if  $G_j$  is disconnected then
15             $C[v_j] := C[v_j] + |V_{G_j}|^2 - \sum_{l=1}^n (|V_{G_j^l}|^2)$ 

```

도면11

	v_1	v_2	v_3	v_4
$c_{MUC}(v_i)$	0	0	0.5	0.5
$c_{b_1}(v_i)$	15		2.5	2.5
$c_{b_2}(v_i)$		12	2	2
$c_{b_3}(v_i)$			18	
$c_{t_1^2}(v_i)$	20	20	10	10
$c_{t_1^3}(v_i)$	30		30	
$c_{t_2^3}(v_i)$		24	24	
$c_{t_2}(v_i)$		3		
$c(v_i)$	65	59	87	15
Actual Value	130	118	174	30

도면12a

Algorithm 4: QUBE-BRANDES(MUC_U)

input : MUC_U - Minimum Union Cycle that an updated vertices belong to
 SGs - A set of disconnected subgraphs connected by each connection vertices in MUC_U
output : $C[v_i]$ - Updated Betweenness Centrality Array

```

1 begin
2   for  $v_s \in MUC_U$  do
3      $S \leftarrow$  empty stack ;
4      $P[v_i] \leftarrow$  empty list, for all  $v_i \in MUC_U$  ;
5      $\sigma[v_i] := 0$ , for all  $v_i \in MUC_U$ ;  $\sigma[v_s] := 1$  ;
6      $\sigma_t[v_i] := 0$  for all  $v_i \in MUC_U$ ;  $d[v_s] := 0$  ;
7      $d[v_i] := -1$ , for all  $v_i \in MUC_U$ ;  $d[v_s] := 0$  ;
8      $Q \leftarrow$  empty queue ;
9     enqueue  $v_s \rightarrow Q$  ;
10    while  $Q$  not empty do
11      dequeue  $v_i \leftarrow Q$  ;
12      push  $v_i \rightarrow S$  ;
13      for each neighbor  $v_n$  of  $v_i$  do
14        if  $d[v_n] < 0$  then
15          enqueue  $v_n \rightarrow Q$  ;
16           $d[v_n] := d[v_i] + 1$  ;
17        if  $d[v_n] = d[v_i] + 1$  then
18           $\sigma[v_n] := \sigma[v_n] + \sigma[v_i]$  ;
19          append  $v_i \rightarrow P[v_n]$  ;

```

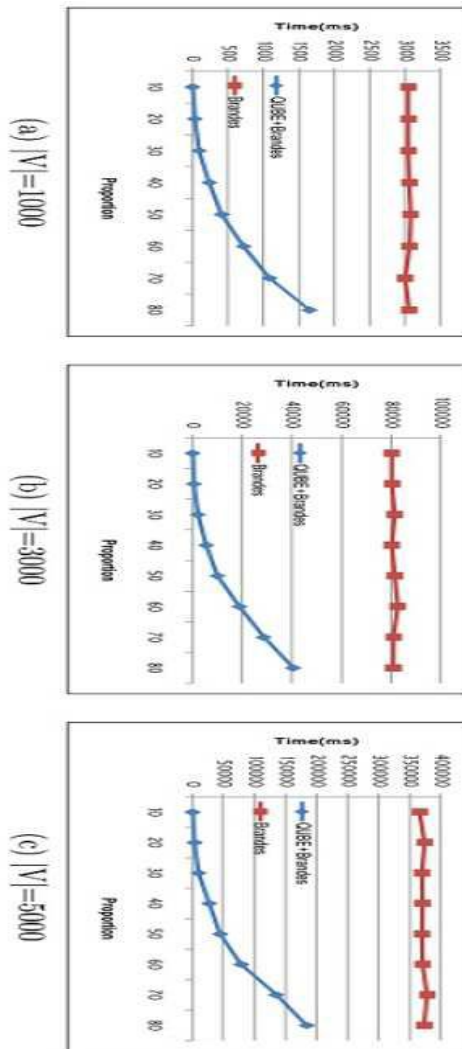
도면12b

```

20     $\delta[v_i] := 0$ , for all  $v_i \in MUC_U$  ;
21    while  $S$  not empty do
22      pop  $v_n \leftarrow S$  ;
23      if  $v_s, v_n$  are connection vertices and  $v_n \neq v_s$ 
24      then
25         $c_t := |V_{G_s}| \cdot |V_{G_n}|$  ;
26         $\sigma_t[v_n] := \sigma_t[v_n] + c_t$  ;
27         $C[v_n] := C[v_n] + c_t$  ;
28      for  $v_p$  in  $P[v_n]$  do
29         $\delta[v_p] := \delta[v_p] + \frac{\sigma[v_p]}{\sigma[v_n]} \cdot (1 + \delta[v_n])$  ;
30        if  $v_s$  is connection vertex then
31           $\sigma_t[v_p] := \sigma_t[v_p] + \sigma_t[v_n] \cdot \frac{\sigma[v_p]}{\sigma[v_n]}$  ;
32           $C[v_p] := C[v_p] + \sigma_t[v_n] \cdot \frac{\sigma[v_p]}{\sigma[v_n]}$  ;
33        if  $v_n \neq v_s$  then
34           $C[v_n] := C[v_n] + \delta[v_n]$  ;
35        if  $v_s$  is connection vertex then
36           $C[v_n] := C[v_n] + \delta[v_n] \cdot |V_{G_s}| \cdot 2$  ;
37    for  $G_i \in SGs$  do
38      if  $G_i$  is disconnected then
39         $C[v_i] := C[v_i] + |V_{G_i}|^2 - \sum_{l=1}^n (|V_{G_l}^i|^2)$  ;

```

도면13



도면14

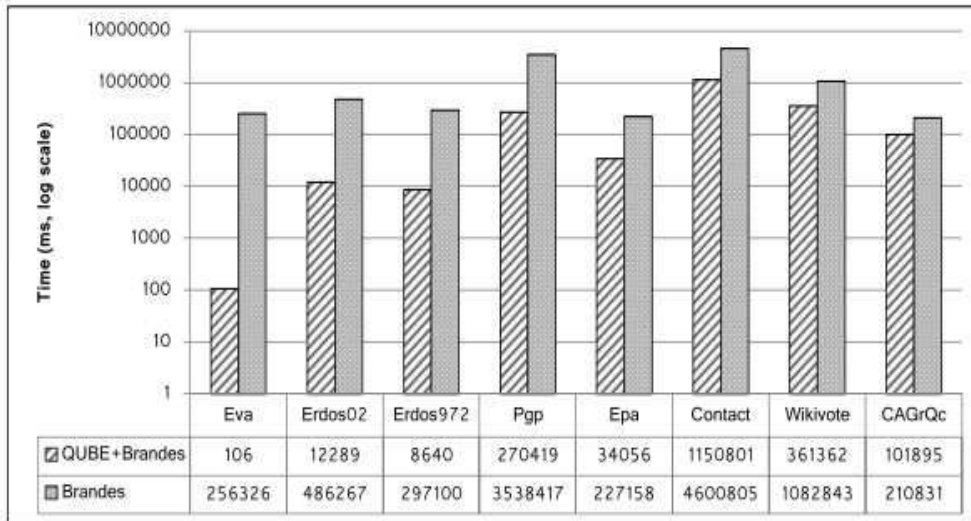
Name	Type	V	E	Avg. Prop.	Speed-up
Eva[24]	Ownership	4457	4562	6.41	2418.17
Erdos02 ^a	Collaboration	5534	8472	28.66	39.57
Erdos972 ^a	Collaboration	4680	7030	30.00	34.39
Pgp[4]	Social	4680	24316	42.14	13.09
Epa ^b	Web link	4253	8897	52.25	6.67
Contact ^c	Social	11604	65441	62.60	4.00
Wikivote[19]	Trust	7066	100736	67.73	3.00
CAGrQc[19]	Collaboration	4158	13422	77.92	2.06

^a<http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/data>

^b<http://www.cs.cornell.edu/courses/cs685/2002fa/>

^c<http://stuff.metafilter.com/infodump/>

도면15



도면16

