

7. Фридман Я. Б. Механические свойства металлов.— М.: Машиностроение, 1974, т. 2.
 8. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости.— М.: ГИТТЛ, 1955.
 9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.
 10. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения.— М.: ГИТТЛ, 1953.

Поступила 22/II 1985 г.

УДК 539.3 + 534.232

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ С ИСТОЧНИКОМ КОЛЕБАНИЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

А. А. Золотарев, Г. В. Ткачев

(Ростов-на-Дону)

Настоящая работа посвящена изучению гравитационных и акустических волн, возбуждаемых заглубленным вибрационным источником в жидкости, покрытой льдом. Анализ прочностных характеристик льда, моделируемого упругим слоем либо пластиной Кирхгофа, выполнен на основе построенного методом факторизации решения интегрального уравнения, эквивалентного исходной смешанной краевой задаче.

С несмешанными краевыми условиями задачи для неограниченных ледовых полей решались в [1—3], со смешанными условиями и расположенными на границе среды источниками возмущений — в [4].

1. Рассматривается задача о возбуждении волнового поля в слое жидкости и покрывающем его упругом слое источником гармонических колебаний, расположенным на границе раздела сред. Источник моделируется скачком распределенной нагрузки, заданной в области $x, y \in \Omega$, $z = -C$. Слой идеальной тяжелой жидкости ($|x, y| \leq \infty$, $-H \leq z \leq -C$) лежит на абсолютно жестком основании. Поле смещений в упругом слое ($|x, y| \leq \infty$, $-C \leq z \leq 0$) описывается уравнениями движения Ламэ, потенциал скоростей частиц жидкости удовлетворяет волновому уравнению. Зависимость от времени всех рассматриваемых функций задается соотношением $f_0(x, y, z, t) = f(x, y, z)e^{-i\omega t}$. На границе раздела двух сред, вне области, занятой источником, выполняется условие равенства напряжений и нормальных скоростей. В области, занятой источником колебаний ($x, y \in \Omega$, $z = -C$), заданы нормальные напряжения на его берегах $\sigma^I(x, y) = \sigma^*(x, y, -C + 0)$, $\sigma^{II}(x, y) = \sigma^*(x, y, -C - 0)$, а следовательно, и их скачок $\Delta\sigma(x, y) = \sigma^I(x, y) - \sigma^{II}(x, y)$. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечность.

С помощью метода интегральных преобразований краевая задача сводится к решению интегрального уравнения относительно неизвестного скачка скоростей смещений $\Delta V_z^*(x, y) = V^*(x, y, -C + 0) - V^*(x, y, -C - 0)$ берегов источника колебаний:

$$(1.1) \quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} \Delta V_z(\xi, \eta) k(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = f(x, y), \quad x, y \in \Omega,$$

$$f(x, y) = \sigma(x, y) + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \Delta\sigma(\xi, \eta) m(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta,$$

$$k(t, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(u) e^{-i(\alpha t + \beta s)} d\alpha d\beta,$$

$$m(t, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} M(u) e^{-i(\alpha t + \beta s)} d\alpha d\beta.$$

Входящие в (1.1) безразмерные функции и переменные имеют вид

$$(1.2) \quad K(u) = i[m\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0(h - c)) - \kappa^2 \operatorname{ch}(\gamma_0(h - c))] \Delta_0(u) / \Delta(u),$$

$$M(u) = [m\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0(h - c)) - \kappa^2 \operatorname{ch}(\gamma_0(h - c))] \Delta_1(u) / \Delta(u),$$

$$\Delta_0(u) = 4[(\gamma^4 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 u^4) \operatorname{sh}(\gamma_1 c) \operatorname{sh}(\gamma_2 c) - 2\gamma_1 \gamma_2 u^2 \gamma^2 (\operatorname{ch}(\gamma_1 c) \operatorname{ch}(\gamma_2 c) - 1)],$$

$$\Delta_1(u) = \kappa^2 \gamma_1 [\gamma^2 \operatorname{sh}(\gamma_2 c) \operatorname{ch}(\gamma_1 c) - u^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 c) \operatorname{ch}(\gamma_2 c)],$$

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= \Delta_1(u)[m\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0(h-c)) - \kappa^2 \operatorname{ch}(\gamma_0(h-c))] - \\ &\quad - \Delta_0(u)\rho_0\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0(h-c)), \\ u^2 &= (\alpha^2 + \beta^2)R^2, \rho_0 = \rho_1/\rho_2, m = Rg/b^2, \\ \sigma &= \sigma^{II}/\rho_1 b^2, \Delta V_z = \Delta V_z^*/R\omega, \\ h &= H/R, c = C/R, x = x/R, y = y/R, \\ \gamma_i &= u^2 - \varepsilon_i^2 \kappa^2, \quad i = 0, 1, 2, \kappa^2 = \omega^2 R^2/b^2, \\ \varepsilon_0^2 &= b^2/a^2, \varepsilon_1^2 = (1-2\nu)/2(1-\nu), \varepsilon_2^2 = 1, \gamma^2 = u^2 - \kappa^2/2. \end{aligned}$$

Здесь ρ_1, ρ_2 — плотность упругой среды и жидкости; b, a — скорость поперечных волн в упругом слое и звука в жидкости; C, H — толщина упругой и жидкой сред; g — ускорение свободного падения; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота колебаний источника; ν — коэффициент Пуассона упругой среды; R — характерный размер источника колебаний (его радиус в случае круглого в плане источника). Вопрос выбора контуров Γ_1 и Γ_2 (Γ_1 расположен выше Γ_2), совпадающих с вещественной осью и обходящих вещественные отрицательные полюсы $K(u)$ и $M(u)$ сверху, а положительные — снизу, освещен в [5].

Анализ дисперсионных соотношений (1.2) позволяет сделать заключение, что функции $K(u)$ и $M(u)$ имеют одинаковые полюсы, причем их счетное множество (вещественных — конечное число). На бесконечности имеем $K(u) \sim O(|u|^{-1}), u \rightarrow +\infty$.

2. Если источник колебаний представляет собой круг с осесимметрично расположенной по нему нагрузкой, то (1.1) преобразуется как

$$(2.1) \quad \int_{\Gamma} K(u) J_0(ur) u du \int_0^1 \Delta V_z(\rho) J_0(u\rho) \rho d\rho = f(r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$f(r) = \sigma(r) + \int_{\Gamma} M(u) J_0(ur) u du \int_0^1 \Delta \sigma(\rho) J_0(u\rho) \rho d\rho, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

($J_0(x)$ — функция Бесселя). Контур Γ , почти всюду совпадающий с полуосью $[0, \infty)$, — правая половина контура Γ_1 .

Изучение свойств функций $K(u)$ и $M(u)$ позволяет применить для решения уравнения (2.1) метод левосторонней регуляризации [6]. Для этого $K(u)$ аппроксимировалась дробно-рациональной функцией $K^*(u)$ с последующей левосторонней факторизацией

$$(2.2) \quad K^*(u) = K_+(u)K_-(u),$$

где $K_+(u), K_-(u)$ — функции, регулярные соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Используя результаты [6], находим продолжение правой части интегрального уравнения (2.1), функцию $f(r)$ ($r > 1$) в виде

$$(2.3) \quad f(r) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} K_+(u) \frac{H_0^{(2)}(ur)}{H_0^{(2)}(u)} Y_+(u) du, \quad r > 1,$$

где $H_0^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля; контур Γ_0 (от $-\infty$ до $+\infty$) представляет собой контур Γ , развернутый на всю вещественную ось симметричным образом относительно начала координат. Функция $Y_+(u)$, регулярная в верхней полуплоскости, удовлетворяет интегральному уравнению второго рода

$$(2.4) \quad Y_+(\alpha) + \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_{11}} \frac{du}{K_+(u)(u-\alpha)} \int_{\Gamma_{22}} \frac{K_+(t)\Theta(t,u)Y_+(t)}{t^2-u^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{11}} \frac{H_0^{(2)}(u)F(u)}{K_+(u)(u-\alpha)} u du.$$

Здесь α лежит выше контура Γ_{11} (от $-\infty$ до $+\infty$), который в свою очередь расположен выше Γ_{22} (от $-\infty$ до $+\infty$); контуры Γ_{11} и Γ_{22} получены деформацией Γ_0 в полосе регулярности подынтегральной функции; $F(u)$ — преобразование Фурье от известной правой части $f(r)$ ($r \leq 1$) уравнения (2.1);

$$\Theta(t, u) = -\pi i u H_0^{(2)}(u) J_0(u) \left[u \frac{J_1(u)}{J_0(u)} - t \frac{H_1^{(2)}(t)}{H_0^{(2)}(t)} \right] + t + u.$$

Опуская контуры интегрирования Γ_{11} и Γ_{22} в нижнюю полуплоскость и пересекая конечное число полюсов $K_+(\alpha)$ и нулей $K_+^{-1}(\alpha)$, решение интегрального уравнения (2.4) сводим к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно значений $Y_+(\alpha)$ в полюсах $K_+(\alpha)$, пересеченных контуром Γ_{22} . При этом в силу имеющихся оценок [5] пренебрегаем интегралами по деформированным контурам. Можно показать, что интегральное уравнение (2.4) почти Фредгольмово и сводится к интегральному уравнению с вполне непрерывным интегральным оператором. В силу этого полученная линейная алгебраическая система хорошо обусловлена и эффективно решается численными методами (в частности, методом Гаусса).

Аналогичной деформацией контура Γ_0 в нижнюю полуплоскость продолжение правой части уравнения (2.1) — функция $f(r)$ ($r > 1$) — раскладывается в ряд по тем же значениям $Y_+(\alpha)$ в полюсах $K_+(\alpha)$, которые определяются из описанной выше алгебраической системы. По найденному продолжению правой части уравнения (2.1) — функции $f(r)$ ($r > 1$) — двукратным обращением интегрального оператора из (2.1) получаем искомый скачок скоростей берегов виброисточника.

3. При численной реализации положено $\Delta\sigma(\rho) \equiv 0$, что соответствует случаю, когда к верхней и нижней границам источника колебаний приложены одинаковые по величине и противоположно направленные силы. В этом случае

$$(3.1) \quad f(r) \equiv \sigma(r), \quad r \leq 1.$$

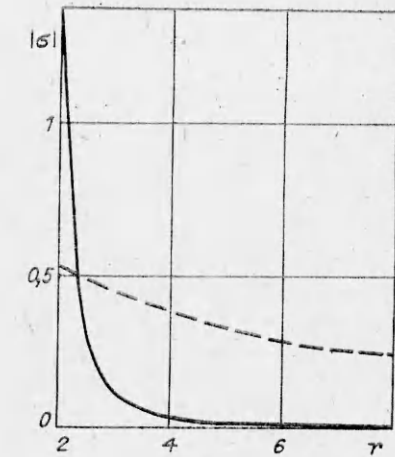
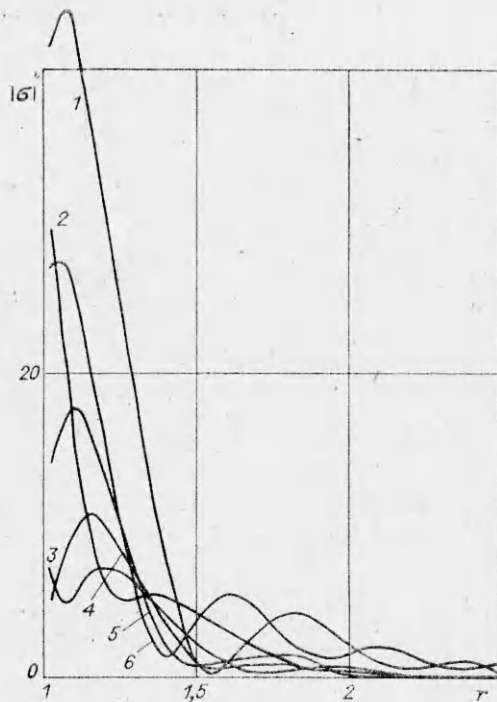
Тогда продолжение правой части — функция $f(r)$ ($r > 1$) — является так же напряжением $\sigma(r)$ на границе раздела сред вне области, занятой источником колебаний.

На ЭВМ найдены вещественные особенности функции $K(u)$ и произведена ее аппроксимация дробно-рациональной функцией

$$(3.2) \quad K(u) \approx K^*(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{u^2 + B^2}} \prod_{i=1}^N \frac{u^2 - \xi_i^2}{u^2 - \eta_i^2},$$

где среди ξ_i, η_i присутствуют все вещественные нули ξ_j ($j = 1, 2, \dots, N_1$) и полюсы η_j ($j = 1, 2, \dots, N_2$) функции $K(u)$, причем $N_1 < N, N_2 < N$. Введение $\sqrt{u^2 + B^2}$ в (3.2) обеспечивает необходимое убывание на бесконечности. Значение B выбирается из условия наилучшей аппроксимации, а также из условия малости интегралов по деформированным контурам (при сведении интегрального уравнения (2.4) к алгебраической системе). В нашем случае оптимальным оказалось $B = 10$. Исследование $\sigma(r)$ при $r \rightarrow 1$ позволило установить, что напряжения на контуре источника колебаний ($z = -c, r \rightarrow 1 \pm 0$) имеют конечный скачок ($\sigma(1+0) - \sigma(1-0) = \text{const}$).

Произведен численный анализ акустических нагрузок $\sigma(r)$ ($r > 1$) на линии раздела двух сред вне области, занятой источником колебаний. На рис. 1 показаны зависимости безразмерной амплитуды комплексной величины $\sigma(r)$ от расстояния r , отсчитываемого от центра источника колебаний радиуса $r = 1$, кривые 1–6 соответствуют $\kappa^2 = 1, 2, \dots, 6$. Рис. 1 отражает также и амплитудно-частотную зависимость σ . Так, для $r = 1,1$ видно, что модуль $\sigma(r)$ имеет максимум при $\kappa^2 = 1$ и минимум при $\kappa^2 = 3$. При расчетах использованы значения $f(r) = \sigma(r) = 1$ ($r \leq 1$), $h = 5, c = 0,1, \rho_0 = 1,1, \epsilon_0 = 0,66, \nu = 0,3$.



Р и с. 2

Р и с. 1

4. В отличие от предыдущей задачи, основное внимание в которой при численной реализации уделено исследованию акустических характеристик, рассмотрена аналогичная краевая задача, в которой ледовое поле, покрывающее слой тяжелой идеальной жидкости, моделировалось пластиной Кирхгофа. Эта модель, учитывающая лишь изгибные колебания льда, тем не менее хорошо описывает процесс возбуждения и распространения поверхностных гравитационных волн [1].

Интегральными преобразованиями задача сводилась к эквивалентному интегральному уравнению (1.1), где

$$(4.1) \quad \begin{aligned} K(u) &= i\rho_0 D(u^4 - \lambda^2) [m\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0(h-c)) - \\ &\quad - \kappa^2 \operatorname{ch}(\gamma_0(h-c))] / \Delta(u), \\ M(u) &= [m\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0(h-c)) - \kappa^2 \operatorname{ch}(\gamma_0(h-c))] / \Delta(u), \\ \Delta(u) &= [D(u^4 - \lambda^2) + m\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0(h-c)) - \kappa^2 \operatorname{ch}(\gamma_0(h-c))], \\ D &= \rho_0 c^3 / 6(1 - \nu), \quad \lambda^2 = 6(1 - \nu) R^2 \omega^2 / c^2 b^2, \end{aligned}$$

причем $K(u) \sim O(1)$ при $u \rightarrow \pm\infty$.

Аналогично предыдущему решению уравнения (1.1) (или же после преобразований (2.1) с правой частью (3.1)), регуляризованного методом левосторонней факторизации, представляется в виде обращения Фурье от правой части, значение которой в области $r > 1$ дается формулой (2.3).

Выполнен численный анализ построенного решения для тяжелой несжимаемой жидкости. На рис. 2 приведены абсолютные значения нормальных напряжений $\sigma(r)$ на границе раздела сред вне области действия источника возмущений, где штриховая кривая характеризует поведение перерезающей силы, обусловленной возбуждаемой гравитационной модой, при моделировании льда тонкой пластиной, сплошная линия отражает зависимость амплитуды акустического давления на лед (моделируемый упругим слоем) от радиальной координаты r . Рис. 2 позволяет оценить вклад в динамическое воздействие на лед различных составляющих полного нормального давления. Расчеты проводились для указанных выше безразмерных параметров и $\kappa^2 = 0,1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова.— Л.: Гидрометеопиздат, 1967.
2. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн.— Киев: Наук. думка, 1980.
3. Селезов И. Т., Сорокина В. В. Распространение волн вдоль упругого слоя в жидкости.— В кн.: Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1975, вып. 32.
4. Золотарев А. А., Золотарева Л. И. Возбуждение волн в океане, частично покрытом льдом.— Ростов-на-Дону, 1983. Рук. деп. в ВИНТИ 30.08.1983 № 4820—83 деп.
5. Воронич И. И., Бабенко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.— М.: Наука, 1979.
6. Бабенко В. А., Ткачев Г. В. Вибрация круглой трещины при трехкомпонентной нагрузке.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 5.

Поступила 6/XII 1984 г.

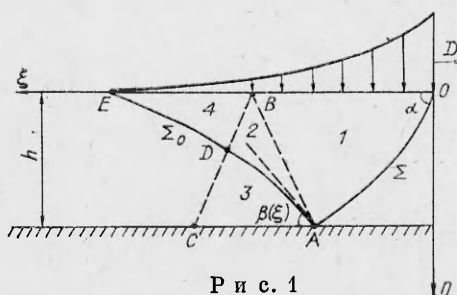
УДК 539.1

О ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМУЮ ПОЛОСУ С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

А. Айдозов, Н. Мамадалиев, У. Хакимов
(Алма-Ата)

Рассматривается плоская стационарная задача о воздействии подвижной нагрузки на нелинейно-сжимаемую полосу с жестким основанием. Случай линейного нагружения и разгрузки среды разобран в [1, 2]. В данной работе в отличие от [1, 2] волновой процесс исследуется с учетом нелинейного нагружения материала полосы, изучаются влияния неупругих свойств среды на распределение в ней кинематических параметров, напряжений и определена форма поверхности фронта отраженной от жесткого основания волны.

Пусть по верхней границе полосы толщиной h движется монотонно убывающая нормальная нагрузка с постоянной скоростью D , превышающей скорость распространения нагрузо-разгрузочных деформаций среды. Среда, заполняющая полосы, моделируется обобщенным «пластическим газом» [3], и при нагрузке связь между давлением p и объемной деформацией ε принимается как полином второй степени $p = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 (dp/d\varepsilon > 0, d^2p/d\varepsilon^2 > 0)$. Угол наклона ветви разгрузки E диаграммы $p \sim \varepsilon$ превышает угол наклона ветви нагружения, а профиль нагрузки по мере распространения волн не меняется. В этом случае распространяющаяся в среде волна сжатия с криволинейной поверхностью Σ (рис. 1) при $\xi = x + Dt \geq \xi_a, \eta = y = h$ отражается от жесткой границы в виде ударной волны с поверхностью Σ_0 , впереди которой с большой скоростью $c_p = \sqrt{E/\rho_0}$ излучается упругая волна слабого разрыва как характеристика отрицательного направления. Вследствие распространения и взаимодействия волн с границами полосы возникают соответственно возмущенные области 1—4 (рис. 1). Решим задачу для областей 1—3. Если построить решение задачи в области 1 обратным способом при заданной скорости распространения фронта Σ $d\eta/d\xi = \operatorname{tg} \alpha(\xi) = R_1 - R_2 \xi$, где R_1, R_2 — заданные постоянные величины, то на основе [3] для скоростей $u_1(\xi, \eta), v_1(\xi, \eta)$ и давления $p_1(\xi, \eta)$ имеем



Р и с. 1

$$(1.1) \quad u_1(\xi, \eta) = -\frac{D}{2\mu} \sum_{i=1}^2 \frac{(-i)^{i+1} \operatorname{tg} \alpha [F_i(\xi \mp \mu\eta)]}{\{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha [F_i(\xi \mp \mu\eta)]\}^2} \times \\ \times \{1 \mp \mu \operatorname{tg} \alpha [F_i(\xi \mp \mu\eta)]\} \Phi_i(\xi \mp \mu\eta),$$