КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт физики

Т.Ю.АЛЬПИН, Р.А.ДАИШЕВ

ПОСОБИЕ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ: ЧАСТЬ I

Учебное пособие

Казань – 2022

УДК 517

Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института Физики КФУ

Протокол № 8 от 6 мая 2022 г.

Рецензент
доцент Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ,
кандидат физико-математических наук
Корнеева Наталья Николаевна

Альпин Т.Ю., Даишев Р.А.

Пособие по высшей математике: часть I / Альпин Т.Ю., Даишев Р.А. – Казань: Казан. ун-т, 2022. – 136 с.

Пособие предназначено для студентов-радиофизиков Института физики Казанского федерального университета и является методическим обеспечением курса "Высшая математика".

Глава 1

Теория последовательностей

1.1 Основные понятия и определения

Определение 1. Если каждому числу n натурального ряда 1,2,3,...,n ставится в соответствие по определённому закону некоторое вещественное число x_n, то множество занумерованных вещественных чисел $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ мы будем называть *числовой последовательностью* или просто *последовательностью.* Числа x_n мы будем называть *элементами последовательности* или *членами последовательности.* Сокращённо, последовательность будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Пусть даны две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. *Суммой* этих последовательностей мы назовём последовательность $\{x_n + y_n\}$, *разностью* - последовательность $\{x_n - y_n\}$, *произведением* - последовательность $\{x_n y_n\}$, *частным* - последовательность $\{x_n/y_n\}$. При определении последовательности $\{x_n/y_n\}$ необходимо требовать, чтобы все элементы последовательности $\{y_n\}$ были отличны от нуля: $y_n \neq 0$. Однако если у последовательности $\{y_n\}$ обращаются в ноль лишь конечное число элементов, то частное $\{x_n/y_n\}$ можно определить с того номера, начиная с которого все элементы y_n отличны от нуля.

1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 2. Последовательность называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует такое вещественное число M (число m), что каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $x_n < M$ $(x_n > m)$. При этом число M (число m) называется *верхней гранью (нижней гранью)* последовательности $\{x_n\}$, а сами эти неравенства называются *условиями ограниченности сверху (снизу).*

Отметим, что любая ограниченная сверху последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечно много верхних граней. Действительно, если M - верхняя грань, то $\forall\ \tilde{M} > M$ тоже является верхней гранью. При условии $x_n < M$ в качестве верхней грани может рассматриваться любая верхняя грань. Аналогичные замечания могут быть сделаны и для нижней грани последовательности x_n.

Наименьшая верхняя грань называется *точной верхней гранью* и имеет обозначение $\sup\{x_n\}$. Наибольшая нижняя грань называется *точной нижней гранью* и обозначается символом $\inf\{x_n\}$.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной с обеих сторон*, или просто *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, то есть существуют числа m и M такие, что $m < x_n < M$. Очевидно, что если это условие выполнено, то заведомо выполнено условие $|x_n| \leqslant A$. Для этого достаточно положить $A = \max(m, M)$.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если $\forall A > 0\ \exists x_n \in \{x_n\} : |x_n| > A$, (то есть для любого сколь угодно большого числа A найдется такой элемент x_n последовательности $\{x_n\}$, что он превзойдет это число A).

Пример 1. Последовательность $\{-n^2\}$ - ограничена сверху нулем, снизу - не ограничена.

Пример 2. Последовательность $\{1/n\}$ - ограниченная последовательность.

1.3 Предел последовательности

Если последовательность $\{x_n\}$ стремится к пределу a, то при достаточно больших n члены $\{x_n\}$ будут сколь угодно мало отличаться от a - это интуитивное понятие предела. Строгое же определение таково.

Определение 5. Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что как только выполнится неравенство $n > N(\varepsilon)$, так сразу выполнится неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Иначе, на языке кванторов, $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \mapsto |x_n - a| < \varepsilon$. Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Говорят также, в этом случае, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к a, и пишут $x_n \to a$.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, очевидно, равносильно следующим неравенствам: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Этими неравенствами мы часто будем пользоваться впоследствии.

Открытый промежуток $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ с центром в точке a называется ε - *окрестностью* точки a. Таким образом, неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что какую бы малую окрестность точки a ни взять, все значения x_n, начиная с некоторого, обязательно попадут в эту ε - окрестность.

Определение 6. Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся последовательностью.*

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\forall A > 0\ \exists\ N(A) : n \geqslant N(A)$, все $|x_n| > A$.

Замечание. Очевидно, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной, однако неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой.

Пример: $\left\{n^{(-1)^n}\right\} = (0, 1, 2, 1/3, 4, 1/5, 6, 1/7, ...)$.

Определение 8. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называют *бесконечно малой* последовательностью и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : n \geqslant N(\varepsilon)$ все элементы $\alpha_n \in \{\alpha_n\}$ удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Пример: $\{{}^1\!/_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

1.4 Основные свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема 1. Последовательность, обратная бесконечно малой последовательности - есть бесконечно большая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Это означает, что $\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : n \geqslant N(\varepsilon)\, |\alpha_n| < \varepsilon \Rightarrow 1/\alpha_n > 1/\varepsilon \overset{def}{=} E$. А это, в свою очередь, означает, что при $n > N(\varepsilon)\,|\,1/\alpha_n| > E$, то есть что последовательность $\{1/\alpha_n\}$ - бесконечно большая.

Теорема 2. Сумма двух бесконечно малых последовательностей - бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Покажем, что $\{\alpha_n + \beta_n\}$ - тоже бесконечно малая последовательность.

Если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \mapsto |\alpha_n| < \varepsilon/2$.
Если и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малая последовательность, то $\forall\varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \mapsto |\beta_n| < \varepsilon/2$.
Тогда при $n > \max(N_1, N_2)$ выполнится $|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, то есть $\{\alpha_n + \beta_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

Очевидны два следующих следствия этой теоремы.

Следствие 1. Разность бесконечно малых последовательностей - бесконечно малая последовательность.

Следствие 2. Алгебраическая сумма *конечного* числа бесконечно малых последовательностей - есть снова бесконечно малая последовательность.

Теорема 3. Бесконечно малая последовательность - ограничена.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \mapsto |\alpha_n| < \varepsilon$.

Обозначим через A следующее число: $A = \max\{\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, ..., |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда очевидно, что $|\alpha_n| < A$ для $\forall n$, что и означает ограниченность последовательности.

Теорема 4. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность - бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность, а $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Поскольку $\{x_n\}$ - ограничена, то $\exists A > 0 : \forall x_n : |x_n| < A$. Так как $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon)\ |\alpha_n| < \varepsilon/A$. Тогда при $n > N(\varepsilon)$ выполнится $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n|\,|\alpha_n| < A \cdot \varepsilon/A = \varepsilon$, $|x_n \cdot \alpha_n| < \varepsilon$, то есть $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

Следствие. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей представляет собой бесконечно малую последовательность.

Замечание. Очевидно, что о частном бесконечно малых последовательностей такого сказать нельзя. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно взять, например, последовательности $\{\alpha_n\} = \{1/n\}$ и $\{\beta_n\} = \{1/n^2\}$.

1.5 Основные свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство. Предположим противное: одна и та же последовательность $\{x_n\}$ имеет два разных предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$. Тогда для $n > N_1$, $|x_n - a| < \varepsilon_1$, для $n > N_2$, $|x_n - b| < \varepsilon_2$. Возьмем $\varepsilon_1 < \frac{b-a}{2}$, $\varepsilon_2 < \frac{b-a}{2}$, $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда при $n > N$ один и тот же член последовательности должен находиться одновременно в окрестности точки a и окрестности точки b, причем эти окрестности не пересекаются. А это невозможно.

Противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. **(О связи сходящейся последовательности с бесконечно малой последовательностью).** Для того, чтобы число a было пределом сходящейся последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

Необходимость. Дано, что число a - предел последовательности $\{x_n\}$. Необходимо доказать, что $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Действительно, если a - предел последовательности $\{x_n\}$, то $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Обозначим $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$, то есть $\alpha_n = x_n - a$. Тогда $|\alpha_n| < \varepsilon$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и при $n > N(\varepsilon)$, то есть по определению $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

Достаточность. Дано, что $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, a - вещественное число. Необходимо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство: $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$, поскольку $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Тогда, по определению, a - предел последовательности $x_n\}$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство: Последовательность $\{x_n\}$ - сходящаяся, значит она может быть представлена в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, а $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Мы знаем, что бесконечно малая последовательность ограничена. Это значит, что найдется такое число A, что $|\alpha_n| < A$. Тогда $|x_n| < |a| + A$, что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

1.6 Свойства пределов

Свойство 1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, где $C = const$.

Действительно, $\{C\} = C, C, ..., C, ...$, что и требуется доказать.

Свойство 2. Предел суммы *сходящихся* последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Доказательство: Для доказательства воспользуемся теоремой 2 пункта 1.5 (о связи сходящейся последовательности с бесконечно малой последовательностью) лекции 1. Пусть $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=b+\beta_n$. Тогда $x_n+y_n=a+b+\alpha_n+\beta_n$. Положим $\gamma_n\stackrel{def}{=}\alpha_n+\beta_n$. Так как α_n и β_n - бесконечно малые последовательности, то и γ_n - бесконечно малая последовательность. Но тогда $x_n+y_n=a+b+\gamma_n$. Из этого равенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, что и требовалось доказать.

Свойство 3. Предел произведения *сходящихся* последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Доказательство: Пусть $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=b+\beta_n$. Тогда $x_ny_n=ab+a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n\stackrel{def}{=}ab+\gamma_n$, где $\gamma_n\stackrel{def}{=}a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n$ - бесконечно малая величина , так как $a\beta_n$ - бесконечно малая, $b\alpha_n$ - бесконечно малая, и $\alpha_n\beta_n$ - тоже бесконечно малая величина. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=ab=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, что и требовалось доказать.

Свойство 4. Предел частного двух *сходящихся* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$, равен отношению пределов этих последовательностей: $\lim\limits_{n\to\infty}{x_n}/{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\Big/\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Доказательство: Пусть $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=b+\beta_n$. Рассмотрим $\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}=\frac{ab+\alpha_nb-ab-a\beta_n}{b(b+\beta_n)}=\frac{\alpha_nb-a\beta_n}{b^2+b\beta_n}=\frac{\gamma_n}{b^2+\sigma_n}=\tau_n$, где γ_n и σ_n - бесконечно малые. Для $\varepsilon=b^2/2$ $\exists N_1$: $n>N_1\Rightarrow|\sigma_n|<\frac{b^2}{2}$, следовательно, $-\frac{b^2}{2}<\sigma_n<\frac{b^2}{2}$, а значит, $0<\frac{b^2}{2}<b^2+\sigma_n<\frac{3b^2}{2}$, а отсюда $\frac{b^2}{2}>\frac{1}{b^2+\sigma_n}>\frac{3b^2}{2}$. При $n<N_1$ существует конечное, а следовательно, тоже ограниченное множество значений величины $\frac{1}{b^2+\sigma_n}$.

Замечание: Доказанные выше свойства последовательностей справедливы лишь в том случае, если существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Рассмотрим, например, две последовательности $\{x_n\}=\{1+(-1)^n\}$ и $\{y_n\}=\{1-(-1)^n\}$. Ясно, что пределов этих последовательностей не существует, тогда как предел суммы этих последовательностей существует: $\{x_n+y_n\}=\{2\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=2$, равно как и предел произведения этих последовательностей: $\{x_n\cdot y_n\}=\{1-(-1)^2\}=\{0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=0$.

1.7 Свойства сходящихся последовательностей, связанные с неравенствами

Теорема 1. Если члены сходящейся последовательности $\{x_n\}$ начиная с некоторого номера N_0 таковы, что $x_n\geqslant 0$ $(n\geqslant N_0)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$.

Доказательство: Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Необходимо доказать, что $a\geqslant 0$. Предположим противное: $a<0$. Рассмотрим $|x_n-a|$ при $n\geqslant N_0$. $|x_n-a|=|x_n+(-a)|=|x_n|+|a|\geqslant|a|$, так как $x_n\geqslant 0$ при $n\geqslant N_0$. Таким образом, $|x_n-a|\geqslant|a|$. С другой стороны, поскольку $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность, то для $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$: $n>N(\varepsilon)$ $|x_n-a|<\varepsilon$. Выберем $\varepsilon=a$. Получим $|x_n-a|<|a|$ при $n\geqslant N(\varepsilon)$. Следовательно, при $n>\max(N_0,N(\varepsilon))$ одновременно должно быть выполнено и $|x_n-a|\geqslant|a|$, и $|x_n-a|<|a|$ при $n\geqslant N(\varepsilon)$, что невозможно.

Противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. Если начиная с некоторого номера N_0 сходящиеся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таковы, что $x_n\leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Доказательство: Действительно, если $x_n\leqslant y_n$, то $|y_n-x_n|\geqslant 0$ при $n\geqslant N_0$. Тогда, по предыдущей теореме, $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)\geqslant 0$. Так как $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - сходящиеся последовательности, то $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n-\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Что и требовалось доказать.

Замечание: Может случиться так, что $x_n>0$ (строго!) тогда, как $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Пример: $x_n=\frac{1}{n}>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Теорема 3. (Теорема о двух милиционерах). Пусть начиная с некоторого номера N_0 сходящиеся последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ связаны неравенствами $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, причем последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к одному пределу (скажем, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$). Тогда последовательность $\{y_n\}$ также сходится и имеет тот же предел, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство: Зададимся $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \, |x_n - a| < \varepsilon$, а также $\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \, |z_n - a| < \varepsilon$. При $n > \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ оба этих неравенства выполнены одновременно, то есть выполнено $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \;\; a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$. Имея в виду неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, можем записать: $a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon$. Таким образом, при $n > \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ выполнено $a - \varepsilon \leqslant y_n \leqslant a + \varepsilon$, или $|y_n - a| < \varepsilon. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если каждый последующий элемент последовательности не меньше (не больше) предыдущего, то есть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant ...$ $(x_1 \geqslant x_2 \geqslant ... \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant ...)$. Если неравенства строгие, то последовательность называется *монотонно растущей (монотонно убывающей)*.

Теорема 4. Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.

Доказательство: Действительно, если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она имеет точную верхнюю грань $\sup\{x_n\} = L$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Зададимся $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $L - \varepsilon$. По определению точной верхней грани, всегда найдется x_N такое, что $L > x_N > L - \varepsilon$ и, тем более, $L - \varepsilon < x_N < L + \varepsilon$. Но, поскольку последовательность неубывающая, то при $n > N$ имеем: $L - \varepsilon < x_N \leqslant x_n < L + \varepsilon$, то есть $|x_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

1.8 Критерий Коши сходимости последовательности. Теорема Штольца

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого положительного ε найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и для любого натурального $p = 1, 2, 3, ...$ справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Теорема Коши. (Критерий Коши сходимости последовательности). Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Эту теорему мы приведём без доказательства.

Во многих случаях для исследования сходимости частного $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ оказывается полезным следующее предложение.

Теорема 5. (Теорема Штольца). Пусть $\{y_n\}$ - возрастающая бесконечно большая последовательность и пусть последовательность $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$ сходится и имеет предел a. Тогда последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ тоже сходится и имеет тот же предел a.

Иначе говоря,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a.$$

1.9 Число e как предел последовательности $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$

Ранее мы доказали теорему о том, что если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.

Эту теорему можно применить для доказательства существования предела последовательности $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Для этого необходимо доказать, что она:

1. монотонно возрастает.
2. ограничена сверху.

Из этого будет следовать, что эта наша последовательность имеет предел. Его мы обозначим буквой e.

Для того, чтобы выполнить первый пункт программы, необходимо сравнить x_n и x_{n+1}.
$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \;\; x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$. Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(x + a) = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + ... + C_n^m x^{n-m} a^m + ...$$
$$... + C_n^{n-2} x^2 a^{n-2} + C_n^{n-1} x a^{n-1} + a^n,$$

где

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot m} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!},$$

$$C_n^1 = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}\ ,\ ...\ .$$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-2)]}{(n-1)!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-2)][n-(n-1)]}{n!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-2}{n}\right) +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = ... =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + ...$$

$$... + \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-2}{n+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-2}{n+1}\right)\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-2}{n+1}\right)\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Сравнивая, видим, что в x_{n+1} каждое слагаемое, начиная с третьего, больше соответствующего слагаемого в x_n, ибо $\left(1-\frac{k}{n}\right) < \left(1-\frac{k}{n+1}\right)$ для любого $0 < k < n$. Кроме того, x_{n+1} содержит по сравнению с x_n дополнительное положительное слагаемое. Поэтому $x_n < x_{n+1}$. Стало быть, наша последовательность действительно монотонно возрастает.

Покажем теперь, что последовательность ограничена сверху.

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} <$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ... = 3,$$

поскольку

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{n-1},$$

а сумма членов бесконечно убывающей прогрессии равна $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$. Здесь a_1 - значение первого члена прогрессии, q - знаменатель прогрессии.

Тем самым показано, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел. Обозначим его e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Очевидно, что $2 < e < 3$. Приближенно, это число равно $e = 2,718281828459045...$.

Глава 2

Функции и их пределы

Отметим сразу, что многие определения, связанные с изучением функций, мы будем считать известными из школьного курса. Поэтому мы только очень кратко остановимся на фактах, известных из школьной программы. Основное же внимание уделим тем разделам теории функций, которые важны при рассмотрении дифференциального исчисления.

2.1 Понятие функции одного переменного, способы задания функции

Пусть $X \subseteq R$ - некоторое множество. Символом x обозначим точку, которая может быть отождествлена с точкой множества X. В этом случае x называется *переменной величиной*, а множество X - *областью изменения* переменной величины x. Как правило, в анализе переменные величины обозначаются буквами латинского алфавита $x, y, z, u, v, ...$ и так далее.

Определение 1. Если каждому значению переменной $x \in X$ по определенному закону ставится в соответствие одно или несколько значений переменной $y \in Y \subseteq R$, то говорят, что на множестве X задана вещественная функция вещественного переменного $y = f(x)$.

Множество Y называется *множеством значений* функции, f - её *характеристикой*, x - *аргументом*, а X - *областью изменения аргумента*. Часто X называют *областью существования* функции, или *областью определения* функции.

Функции по тем или иным свойствам различают на: однозначные, многозначные, бесконечнозначные, четные, нечетные, периодические, непериодические и так далее. Всё это известно из школьной программы. Поэтому мы не останавливаемся на этих определениях. (Вспомним также понятия невозрастающей, неубывающей, монотонно растущей и монотонно убывающей функций). А вот на определении *обратной функции* остановимся подробнее.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве X, а множеством её значений является множество Y . Пусть также каждому $y \in Y$ соответствует только одно значение $x \in X$, для которого $y = f(x)$. Тогда на множестве Y можно определить функцию $x = \varphi(y)$, ставя в соответствие каждому $y \in Y$ то значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$. Функция $x = \varphi(y)$ называется *обратной* для функции $y = f(x)$.

Обычно обратную функцию обозначают так: $x = f^{-1}(y)$, $\left(\neq \frac{1}{f(y)}\right)$. Знак f^{-1} заменяет слова "функция, обратная по отношению к функции $y = f(x)$". Поскольку в математике аргумент договорились обозначать через x, то обратная функция в этих обозначениях выглядит так: $y = f^{-1}(x)$.

Определение 3. Пусть функция $x = \psi(t)$ определена на множестве T, а на множестве X значений этой функции определена функция $y = f(x)$. В этом случае говорят, что на множестве T определена сложная функция $y = f(\psi(t))$.

Например, функцию $y = \sin\sqrt{x}$ можно рассматривать как сложную функцию, заданную следующим образом. Сначала на множестве $X = [0, +\infty)$ задана функция $u = \sqrt{x}$, а затем на множестве $U = [0, +\infty)$ задана функция $y = \sin u$.

Наконец, коснемся вопроса о способах задания функций. Как известно из школы, существует три основных способа задания функций: 1) аналитический (посредством формул), 2) табличный,

3) графический. Каждый из этих способов имеет свои преимущества, в зависимости от решаемой задачи.

2.2 Простейшие элементарные функции

Под простейшими элементарными функциями понимаются следующие функции:
1) степенные: $y = x^{\alpha}$ (α - вещественное число),
2) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$,
3) показательные: $y = a^x$ ($a > 0$ - вещественное число),
4) логарифмические: $y = \log_a x$ ($a > 0$ - вещественное число),
5) обратные тригонометрические,
6) гиперболические.

Здесь мы подробнее коснемся только логарифмических и гиперболических функций. В математическом анализе за основание логарифмов берется число e, о котором мы подробно говорили ранее. $\log_e x$ называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x$. На первый взгляд может показаться, что мы очень проигрываем, взяв за основание такое "несуразное" число как e, вместо "красивого" числа 10. Однако на протяжении всего курса анализа мы увидим, какие громадные преимущества имеет такой выбор.

Что касается гиперболических функций, то они также связаны с числом e. Они определяются так:

$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \;\; ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \;\; th x = \frac{sh x}{ch x}, \;\; cth x = \frac{ch x}{sh x}.$$

Свойства:
1. $ch^2 x - sh^2 x = 1$.
2. $ch^2 x + sh^2 x = ch 2x$.
3. $1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$.
4. $cth^2 x - 1 = \frac{1}{sh^2 x}$.
5. $2 sh x \cdot ch x = sh 2x$.
6. $sh(x_1 + x_2) = sh x_1 \cdot ch x_2 + sh x_2 \cdot ch x_1$.

Все свойства этих функций доказываются непосредственной проверкой.

2.3 Предельное значение функции

Пусть на множестве X определена функция $y = f(x)$. Рассмотрим точку c, которая может и не принадлежать множеству X, но у неё есть некоторая окрестность, принадлежащая этому множеству.

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to c$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только выполнится неравенство $|x - c| < \delta(\varepsilon)$, так сразу же выполнится неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Оказывается, что нахождение предела функции может быть сведено к нахождению предела некоторой числовой последовательности. Если нам удастся это показать, то тогда мы получим выгодное положение: все теоремы о пределах последовательностей автоматически будут иметь место и для пределов функций, как то:

$$\lim_{x \to c} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \to c} f_1(x) + \lim_{x \to} f_2(x),$$

$$\lim_{x \to c} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \to c} f_1(x) \cdot \lim_{x \to c} f_2(x),$$

$$\lim_{x \to c} f_1(x)/f_2(x) = \lim_{x \to c} f_1(x) \Big/ \lim_{x \to c} f_2(x),$$

теорема о двух милиционерах и так далее.

Теорема 1. Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \to c$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к c, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции имела пределом число A.

Необходимость. Дано: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$. Доказать: для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к c, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Действительно, если A - предел функции $f(x)$ при $x \to c$, то для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $|x - c| < \delta$, так сразу $|f(x) - A| < \varepsilon$. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к c. По известному δ найдется номер N, такой, что как только $n > N$, так сразу $|x_n - c| < \delta$, то есть x_n будут находиться в δ- окрестности точки c. Но тогда, при $n > N$, в силу $|f(x) - A| < \varepsilon$, автоматически выполнится $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Достаточность. Дано: для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к числу c, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A : $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Доказать: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$. Для доказательства предположим противное: для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что хотя $|x - c| < \delta$, тем не менее выполняется неравенство$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Но у нас есть последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к числу c, следовательно для данного $\delta > 0$ найдется такой номер N, что как только выполнится $n > N$, так сразу выполнится неравенство $|x_n - c| < \delta$, то есть все x_n, начиная с номера $N + 1$, попадают в $\delta > 0$ – окрестность точки c. Согласно нашему предположению, при этом будет выполнено $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$ для $n > N$. Но это противоречит тому, что дано, а именно $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то есть $|f(x_n) - A| \leqslant \varepsilon$ для $n > N$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, вследствие этой теоремы, все доказанные нами ранее теоремы о свойствах пределов последовательностей переносятся на пределы функций.

2.4 Сравнение бесконечно малых функций

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Определение 2. Бесконечно малая функция $\beta(x)$ в точке x_0 называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем бесконечно малая функция $\alpha(x)$, если $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ - бесконечно малая функция в точке x_0, и называется *бесконечно малой более низкого порядка*, если $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция в точке x_0.

Определение 3. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми функциями одного порядка*, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = A$ и, при этом, $A \neq 0$; $A \neq \infty$.

Если $A = 1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и пишут $\beta(x) \sim \alpha(x)$ в точке x_0.

Определение 4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = A(\neq 0, \neq \infty)$, ($k$ - вещественное число), то $\beta(x)$ называется *бесконечно малой функцией k-го порядка*, по сравнению с $\alpha(x)$.

Пример. $\beta(x) = 1 - \cos x$. В точке $x = 0$ эта функция является бесконечно малой функцией второго порядка по сравнению с x. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}(\neq 0, \neq \infty)$

Определение 5. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = A(\neq 0, \neq \infty)$, то есть $\beta(x) \sim A\,[\alpha(x)]^k$. Выражение $A\,[\alpha(x)]^k$ называется главной частью бесконечно малой функции $\beta(x)$. Пишется так: $[\beta(x) = A\,[\alpha(x)]^k + 0(k)$.

Пример. Выделить главную часть бесконечно малой функции в точке $x = 0$ у $\beta(x) = \sin^3 x$ по x. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x^3} = 1$, то $\sin^3 x = x^3 + 0(3)$.

Глава 3

Замечательные пределы и непрерывные функции

3.1 Первый замечательный предел

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Сначала для доказательства рассмотрим $x<\frac{\pi}{2}$. Проведем окружность единичного радиуса и рассмотрим чертёж: видим $AO<\cup AO<AR$, или $\sin x<x<tgx$. Если $\sin x>0$, то есть $x>0$, то $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, или $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$. Заметим здесь, что последняя формула верна и для отрицательных значений аргумента x, поскольку $\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{\sin x}{x}$ и $\cos(-x)=\cos x$.

Если мы теперь покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, то, в силу теоремы о двух милиционерах, покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Зададимся сколь угодно малым $\varepsilon>0$. Оценим разность $|\cos x-1|=|1-\cos x|=\left|2\sin^2\frac{x}{2}\right|<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}$. Следовательно, $|\cos x-1|<\frac{x^2}{2}<\varepsilon$, как только $x<\sqrt{2}\varepsilon=\delta$. Иначе говоря, искомое неравенство выполнится, как только выполнится неравенство $|x-0|<\delta$, и мы положим $\varepsilon=\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, что и требуется.

3.2 Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Очевидно, что этот предел - обобщение ранее доказанного предела

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

В этом пределе переменная n стремится к бесконечности, принимая значения только из натурального множества $1,2,3,...$, тогда как во втором замечательном пределе переменная x стремится к бесконечности, принимая значения из всего множества вещественных чисел.

Доказательство этой формулы разобъем на три этапа.

1. Сначала рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Обратимся к теореме о связи предела функции с пределом последовательности значений функции.

Пусть $\{x_n\}$ - бесконечно большая последовательность, причем $x_n>0$. Пусть n_k - целая часть числа x_k : $n_k=[x_k]$. Тогда $n_k\leqslant x_k\leqslant n_k+1$, или $\frac{1}{n_k}\geqslant\frac{1}{x_k}\geqslant\frac{1}{n_k+1}$, или $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\geqslant\left(1+\frac{1}{x_k}\right)\geqslant\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)$, или $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}\geqslant\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}\geqslant\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}$. Но $\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e\cdot 1=e$. Аналогично, $\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=\frac{e}{1}=e$. По теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{x_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e$, откуда $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

2. На втором этапе докажем, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

С этой целью сделаем замену $x=-y$. Тогда $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot 1=e.$

3. На третьем этапе рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большую, но содержащую бесконечно много как отрицательных, так и положительных вещественных чисел. (Пример такой последовательности привести совсем нетрудно: $\{1, -1, 3, -3, ..., (2n-1), -(2n-1), ...\}$). Обозначим через $\{x'_n\}$ последовательность, составленную из отрицательных членов последовательности $\{x_n\}$, а через $\{x''_n\}$ - последовательность, составленную из положительных членов $\{x_n\}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ по вышедоказанному имеем: $\lim\limits_{x_k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e$ при $k > K_1$ и $\left|\left(1 + \frac{1}{x''_k}\right)^{x''_k} - e\right| < \varepsilon$ при $k > K_2$. Очевидно, что если $k > \max(K_1, K_2)$, то оба эти неравенства выполнятся одновременно, то есть будет выполнено неравенство $\left|\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} - e\right| < \varepsilon$. Тем самым мы доказали, что $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

3.3 Понятие о непрерывности функции в точке и области

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в самой точке x_0.

Определение 1. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (значение функции в точке x_0), то функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0.

Поскольку равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ может быть записано в виде $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x_0)$, то это означает, что для непрерывной в точке x_0 функции $f(x)$ символ функции и символ предела функции перестановочны. Например, как мы видели раньше, при доказательстве первого замечательного предела, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ и $\cos 0 = 1$. А вот функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ не является непрерывной, поскольку значение $f(0) = \frac{\sin 0}{0}$ не определено.

Данное выше определение может быть записано на $(\varepsilon - \delta)$ языке, если вспомнить определение предела функции.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только выполнится неравенство $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, так сразу же выполнится $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Перейдем к определению непрерывности функции в точке с геометрической точки зрения. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Рассмотрим некоторую точку x из этой окрестости. Разность $x - x_0 = \Delta x$ называется *приращением аргумента* в точке x_0. Видим, что для любой точки $x = x_0 + \Delta x$ из окрестности точки x_0 выполнено $\Delta x > 0$, если $x > x_0$, и $\Delta x < 0$ если $x < x_0$. Соответствующие значения функций таковы: $f(x_0)$ и $f(x_0 + \Delta x)$. Разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* в точке x_0.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta y = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_o)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$, то есть *если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *то бесконечно малому приращению аргумента в точке* x_0 *соответствует бесконечно малое приращение функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Можно показать, что справедливо и обратное утверждение: если бесконечно малому приращению аргумента в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции $f(x)$ в точке x_0, то функция непрерывна в точке x_0.

Действительно, если $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta y = 0$, то это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_o)] = 0$, или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, что, по определению, означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

На основании прямого и обратного утверждения можно дать также

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой точке и такие функции: $a)$ $F(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, $b)$ $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, $c)$ $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, $(f_2(x) \neq 0)$.

Доказательство. Доказательство проведём, например, для случая b). Для остальных случаев доказательство аналогично. $b)$ $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) = F(x_0)$, что и требовалось.

Теорема 2. Если функция $u = \psi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в соответствующей точке $u_0 = \psi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\psi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Зададим Δx в точке x_0 и пусть $\Delta x \to 0$, тогда, в силу непрерывности функции $u = \psi(x)$, $\Delta u \to 0$, а в силу непрерывности функции $y = f(u)$ $\Delta y \to 0$. В итоге,

$\lim\limits_{x\to x_0} \Delta y = 0$, что и требовалось доказать.

Для дальнейшего нам потребуется следующее определение.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример. Функция $y = \sin x$ непрерывна на всей числовой оси. Действительно, рассмотрим любую точку x_0 числовой оси. $|\Delta y| = |\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| < 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < \Delta x$. Очевидно, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.

Рассуждая аналогично, без труда можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. (Без доказательства). Все простейшие элементарные функции непрерывны в области своего определения.

3.4 Следствия второго замечательного предела

Воспользуемся теоремой 3 для вывода ещё трёх замечательных пределов, являющихся следствиями этой теоремы и второго замечательного предела.

Рассмотрим второй замечательный предел и введём переменную $\alpha = \frac{1}{x}$. Ясно, что $\alpha \to 0$, когда $x \to \infty$. Тогда второй замечательный предел, в терминах переменной α, будет выглядеть так: $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Следствие 1. Прологарифмируем полученное выше равенство по основанию "e". Получим: $\ln\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \ln e = 1$. Поскольку, в силу теоремы 3, функция $\ln x$ - непрерывная функция, то операции взятия предела и логарифмирования перестановочны. Из этого следует, что $\ln\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$.

Следствие 2. Рассмотрим $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}$. Сделаем замену: $y = a^\alpha - 1$, ясно, что при $\alpha \to 0$ и $y \to 0$. Тогда: $\alpha = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)} = \lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+y)}{y}}\right) = \ln a$, то есть $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha} = \ln a$.

Следствие 3. Рассмотрим $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^p-1}{\alpha}$. Сделаем замену: $(1+\alpha)^p = a^y$. При $\alpha \to 0$ и $y \to 0$. Видим, что $\alpha = a^{\frac{y}{p}} - 1$. В итоге:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^p-1}{\alpha} = \lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{a^{\frac{y}{p}}-1} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\frac{a^y-1}{y}}{\frac{a^{\frac{y}{p}}-1}{\frac{y}{p}}}\right)\cdot p = \frac{\ln a}{\ln a}\cdot p = p.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^p-1}{\alpha} = p$.

3.5 Классификация точек разрыва

Вспоминая определение непрерывности функции в точке, мы отмечали, что если функция непрерывна в точке x_0, то (1°) эта функция определена в окрестности точки x_0 и в самой точке x_0, (2°) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, и ($3^\circ$) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 1. Если функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0, а в самой точке x_0 нарушается хотя бы одно из трёх условий, указанных выше, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$, а сама функция - *разрывной функцией*.

Определение 2. *Левосторонним (правосторонним) пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется следующий предел функции $f(x)$: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x-0)$, $\left(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x+0)\right)$.

Определение 3. Точка x_0 называется точкой *разрыва первого рода*, если в этой точке существуют конечные левосторонний и правосторонний пределы, но эти пределы или не равны друг другу, или, в случае их равенства, не равны значению функции в точке x_0.

Очевидно, что в точке разрыва первого рода возможны следующие четыре ситуации.

1. Левосторонний и правосторонний пределы не равны друг другу, но значение функции в точке x_0 существует и равно одному из этих пределов: $f(x_0-0) \neq f(x_0+0) = f(x_0)$, или $f(x_0) = f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$.

2. Левосторонний и правосторонний пределы не равны друг другу, но значение функции в точке x_0 не определено.

3. Левосторонний и правосторонний пределы равны друг другу, значение функции в точке x_0 определено, но не равно ни одному из этих пределов: $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$.

4. Левосторонний и правосторонний пределы равны друг другу, значение функции в точке x_0 не определено.

Последний (четвёртый) случай носит название *устранимой точки разрыва*, так как достаточно определить $f(x_0)$ как значение $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, и функция будет непрерывной в точке x_0 .

Пример 1. Функция $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода, поскольку эта функция не определена в точке $x=0$ (уже нарушено первое условие), а левосторонний предел в этой точке не совпадает с правосторонним пределом: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Значение этой функции в точке $x=0$ не определено, левосторонний предел в этой точке не совпадает с правосторонним пределом: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x}{-x} = -1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x}{x} = 1$.

Пример 3. Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$. Эта точка для функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ является устранимой точкой разрыва, так как достаточно положить $f(-0) = f(+0) = 1$, и функция станет в точке $x=0$ непрерывной.

Определение 4. Точки разрыва, не попадающие под определение точек разрыва первого рода, называются *точками разрыва второго рода.*

Пример 4. $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой этой функции, а точка $x=1$ - точкой разрыва второго рода. $f(1-0) = +\infty$, $f(1+0) = -\infty$.

3.6 Свойства непрерывных на сегменте функций

Пусть $X = [a,b]$ и функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве X. Какими свойствами она обладает? На этот вопрос отвечают следующие 5 теорем.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, и в этой точке $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, то найдётся такая окрестность точки x_0, что в ней $f(x) > 0$ $(f(x) < 0.)$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на сегменте $[a,b]$, причем $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Тогда всегда существует такая внутренняя точка ξ, что $f(\xi) = 0$.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на сегменте $[a,b]$, причем $f(a) \neq f(b)$. Тогда, каково бы ни было число C, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$ (то есть, $f(a) < C < f(b)$), всегда найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = C$.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она ограничена сверху и снизу.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она достигает своей точной верхней и точной нижней граней.

Эти теоремы мы приведём без доказательства.

3.7 Понятие равномерной непрерывности функции

Запишем определение функции $f(x)$, заданной на множестве X и непрерывной *в точке* $x_0 \in X$: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in X$: и $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Вообще говоря, при фиксированных $\varepsilon > 0$ у каждой точки x_0 будет своё значение $\delta(\varepsilon)$, то есть величина $\delta(\varepsilon)$ зависит от x_0, и это символически можно записать так: $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Если же оказалось, что для любого $\varepsilon > 0$ и всякой точки $x_0 \in X:$ величина δ зависит только от ε и не зависит от x_0, то функция $f(x)$ называется равномерно-непрерывной на множестве X. Запишем это определение более четко в эквивалентной форме.

Определение. Функция $f(x)$ называется *равномерно-непрерывной* на множестве X, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что *при произвольных* x' и x'' из X, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, будет выполнено неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 4. (Теорема Кантора) Всякая непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция равномерно-непрерывна на этом сегменте. (Без доказательства).

Глава 4

Производная функции

4.1 Понятие производной функции и таблица производных

Пусть $f(x)$ определена на множестве X, которое представляет собой либо сегмент, либо интервал, либо полусегмент, луч, или всю вещественную прямую.

Рассмотрим точку $x_0 \in X$; приращение аргумента в точке x_0 : $\Delta x = x - x_0$ и соответствующее ему приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 по аргументу x, если существует предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента в этой же точке, когда $\Delta x \to 0$ произвольным образом.

Обозначения: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = f'_x(x_0) = y'_x(x_0)$.

Определение 2. Функцию, имеющую производную в точке x_0, называют дифференцируемой в точке x_0.

Определение 3. Функцию, имеющую производную в каждой точке множества X, называют дифференцируемой на множестве X.

Таблица производных.

$\mathbf{1^\circ}$. $\mathbf{y = C} - const$,

$\Delta y = C - C = 0$, $y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. $\mathbf{C'_x = 0}$.

$\mathbf{2^\circ}$. $\mathbf{y = x^n}$,

$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n - x^n =$

$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x) + ... + (\Delta x)^{n-1}$,

$y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$. Таким образом, $\mathbf{(x^n)' = nx^{n-1}}$.

$\mathbf{3^\circ}$. $\mathbf{y = \sin x}$.

$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos\frac{2x+\Delta x}{2} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

$y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\frac{\Delta x}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$. Таким образом, $\mathbf{(\sin x)' = \cos x}$.

$\mathbf{4^\circ}$. $\mathbf{y = \cos x}$.

$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$.

$y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \left(-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = -\sin x$.

$\mathbf{5^\circ}$. $\mathbf{y = \ln x}$.

$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\frac{x+\Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$. $y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. Таким образом, $\mathbf{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$.

$\mathbf{6^\circ}$. $\mathbf{y = a^x}$.

$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$.

$y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a$. Таким образом, $\mathbf{(a^x)' = a^x \ln a}$.

4.2 Правила дифференцирования. Продолжение таблицы производных

Теорема 1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $u(x) \pm v(x)$ также дифференцируема в точке x_0, причем $\mathbf{y' = u'(x) \pm v'(x)}$.

Доказательство. Действительно, $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$; $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $u(x) \cdot v(x)$ также дифференцируема в точке x_0, причем $\mathbf{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$.

Доказательство. Действительно, $\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - u \cdot v = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x$.

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = u' \cdot v + u \cdot v'$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также дифференцируема в точке x_0, причем $\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)' = \frac{\mathbf{u' \cdot v - u \cdot v'}}{\mathbf{v^2}}$.

Доказательство. $\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{u \cdot v + \Delta u \cdot v - u \cdot v - u \cdot \Delta v}{(v+\Delta v) \cdot v} = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v^2 + \Delta v \cdot v}$. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x}$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, что и требовалось доказать.

7°. $\mathbf{y = \operatorname{tg} x}$.

$y'_x = (\operatorname{tg} x)'_x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'_x = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Таким образом, $\mathbf{(\operatorname{tg} x)'_x = \frac{1}{\cos^2 x}}$.

8°. Аналогично доказывается, что $\mathbf{(\operatorname{ctg} x)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x}}$.

9°. $\mathbf{y = \operatorname{sh} x}$.

Напомним, что по определению, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Предварительно найдем производную $(e^{-x})'_x = \left(\frac{1}{e^x}\right)'_x = \frac{(1)'_x \cdot e^x - 1 \cdot (e^x)'_x}{(e^x)^2} = -\frac{e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}$.

Далее: $(\operatorname{sh} x)'_x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)'_x = \frac{1}{2}\left[(e^x)'_x - (e^{-x})'_x\right] = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \overset{def}{=} \operatorname{ch} x$. Таким образом, $\mathbf{(\operatorname{sh} x)'_x = \operatorname{ch} x}$.

10°. Аналогично доказывается, что $\mathbf{(\operatorname{ch} x)'_x = \operatorname{sh} x}$.

11°. $\mathbf{y = \operatorname{th} x}$.

$\operatorname{th} x \overset{def}{=} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Поэтому $(\operatorname{th} x)'_x = \frac{(\operatorname{sh} x)'_x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)'_x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Таким образом, $\mathbf{(\operatorname{th} x)'_x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}$.

12°. $\mathbf{y = \operatorname{cth} x}$.

Аналогично доказывается, что $\mathbf{(\operatorname{cth} x)'_x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}}$.

4.3 Производная обратной функции. Продолжение таблицы производных

Производная обратной функции может быть вычислена, если известна производной прямой функции. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема о производной обратной функции. Пусть непрерывная функция $f(x)$ в некоторой точке x_0 (а) монотонно возрастает (монотонно убывает) и (б) дифференцируема в точке x_0, причем $f'_x(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ (а) определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и (б) дифференцируема в этой точке, причем $x'_y(y_0) = \frac{1}{f'_x(x_0)}$.

Доказательство. В первой части теоремы сформулированы условия, при которых существует непрерывная обратная функция $x = f^{-1}(y)$ в точке y_0 и в некоторой её окрестности.

Придадим аргументу y этой функции приращение $\Delta y \neq 0$. Поскольку функция монотонно возрастает (монотонно убывает), ему отвечает $\Delta x \neq 0$. Следовательно, можно писать $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

При $\Delta y \to 0$, в силу непрерывности обратной функции $f^{-1}(y)$, $\Delta x \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

13°. $\mathbf{y = \arcsin x}$.

$x = \sin y$, $x'_y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Таким образом, окончательно: $\mathbf{(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

Аналогично доказываются следующие формулы для производных обратных функций:

14°. $(\arccos \mathbf{x})'_{\mathbf{x}} = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1-x^2}}}$.

15°. $(\operatorname{arctg} \mathbf{x})'_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x^2}}$.

16°. $(\operatorname{arcctg} \mathbf{x})'_{\mathbf{x}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x^2}}$.

4.4 Производная сложной функции. Продолжение таблицы производных

Теорема о производной сложной функции. Пусть функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x_0, а производная сложной этой функции находится по формуле: $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Доказательство. Придадим аргументу x в точке x_0 приращение Δx. Тогда $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$. Соответственно, функция $y = f(u)$ получит приращение $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = \Delta f$. Можем расписать тождество: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Пререходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим требуемый результат: $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

17°. $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mu}$, μ - любое действительное число.

$(x^{\mu})'_x = \left(e^{\mu \ln x}\right)'_x = e^{\mu \ln x} \cdot (\mu \ln x)'_x = x^{\mu} \cdot \mu \cdot \frac{1}{x} = \mu \cdot x^{\mu - 1}$. Таким образом, $(\mathbf{x}^{\mu})'_{\mathbf{x}} = \mu \cdot \mathbf{x}^{\mu - \mathbf{1}}$.

Глава 5

Дифференцирование в более сложных случаях

5.1 Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически

Определение. Говорят, что функция $y(x)$ задана неявно, если соотношение, связывающее функцию y и аргумент x, не разрешено относительно y.

Примеры задания неявных функций: 1. $y^2 + xy + 1 = 0$, 2. $e^{xy} - \sin(x^2 + y^2) = 3$. Обобщая: $F(x, y) = 0$.

Как отыскивать производную в таких случаях? Ответ таков: левую часть неявной функции $F(x, y) = 0$ дифференцируем, считая, что y - функция от x то есть $y = y(x)$, и применяя формулу дифференцирования сложной функции. Например, для первой приведённой выше функции: $(y^2 + xy + 1)'_x = 2yy'_x + y + xy'_x = 0$, откуда мы и найдем y'_x как функцию y и x : $y'_x = -\frac{y}{2y+x}$.

Правило, применяемое выше, используется и при **логарифмическом дифференцировании.**

Пусть $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции. Видим, что $\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$. Дифференцируя последнее соотношение, получим $\frac{y'_x}{y} = v'_x \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'_x}{u}$, откуда получаем окончательную формулу: $y'_x = u^v \left(v'_x \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'_x}{u} \right)$.

Пример. $y = x^{\sin x}$. $y'_x = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$.

Из аналитической геометрии известно, что выражение $F(x, y) = 0$ представляет собой уравнение линии, а знание производной y'_x в какой-либо точке этой кривой даёт возможность записать уравнение касательной к данной кривой в данной точке (об этом будет сказано ниже). Однако часто уравнение линии задают в **параметрической форме:** $\vec{r} = \vec{r}(t)$, или $\vec{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$. Задание функций $x(t)$ и $y(t)$ позволяет полностью судить о виде кривой на плоскости $(x\ o\ y)$. Например, функции $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{array} \right.$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ задают окружность радиуса R. Таким образом, кривая на плоскости $(x\ o\ y)$ может быть задана в виде $\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$. Для того, чтобы решить задачу о касательной, нужно знать значение y'_x в точке кривой. Как найти y'_x, если кривая задана параметрически?

Теорема. Если непрерывные функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, то функция $y = y(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = x(t_0)$, и выполняется формула $y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, где $\dot{y}$ и $\dot{x}$ означают производные по t от функций $y(t)$ и $x(t)$ в точке t_0.

Доказательство. Действительно, придадим аргументу t в точке t_0 приращение $\Delta t \neq 0$. Тогда и функции $x(t)$ и $y(t)$ получат приращения Δx и Δy. Поскольку $x(t)$ - дифференцируемая функция, то при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ Можем писать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Big/ \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Переходя в этом соотношении к пределу при $\Delta t \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \Big/ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ - требуемый результат.

Пример. $\left\{ \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right.$. $y'_x = ?$ $y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}$.

Часто кривые изучаются по их уравнениям, заданным в полярной системе координат $r = r(\varphi)$. Например: $r = k\varphi$ - спираль Архимеда, или $r = a(1+\cos\varphi)$, $(a-const)$ - кардиоида. Как в этом случае найти y'_x ? Для этого воспользуемся переходом от полярных координат к декартовым: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ и вспомним, что $r = r(\varphi)$. Получим: $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ - представление функции в параметрическом виде, где роль параметра t играет полярный угол φ. Поэтому $y'_x = \frac{r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi}$.

5.2 Производные высших порядков и формула Лейбница

Если $y = f(x)$ - функция на множестве X, то $f'_x(x)$ - также функция, определенная уже на множестве X_1, (которое может и совпадать с исходным множеством X). Может случиться так, что $f'_x(x)$ на X_1 является дифференцируемой. Тогда, дифференцируя эту функцию ещё раз, получим вторую производную: $(f'_x(x))'_x = f''_{xx}(x)$. Таким образом, вторая производная - это производная от первой производной. Аналогично строится третья производная, и так далее. Вообще, $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'_x$.

Примеры. 1. $y = e^x$. $(e^x)^{(n)} = e^x$.
2. $y = a^x$. $(a^x)'_x = a^x \ln a$. $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.
3. $y = \sin x$, $y'_x = \cos x = \sin(x+1\cdot\frac{\pi}{2})$, $y''_{xx} = \cos(x+1\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$, ... , $y^{(n)} = \sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$.

Как быть, если функция задана неявно? Рассмотрим, например, функцию $x^2 + y^2 = a^2$. Дифференцируем первый раз, считая, что y - функция от x, то есть $y = y(x)$: $y'_x = -\frac{x}{y}$. Дифференцируем второй раз и, для получения окончательного результата, воспользуемся полученной первой производной и исходной функцией: $y''_{xx} = -\frac{y - xy'_x}{y^2} = -\frac{y + x\frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}$.

Как быть, если функция задана в параметрической форме? Ответ: $y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, $y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{\ddot{y}\cdot\dot{x} - \dot{y}\cdot\ddot{x}}{\dot{x}^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}\cdot\ddot{y} - \ddot{x}\cdot\dot{y}}{\dot{x}^3}$, и так далее.

Очень часто приходится иметь дело с производными высших порядков от функции $y = y(x)$, представимой в виде $y(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Теорема (Лейбниц). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы n раз, то функция $y(x) = u(x)\cdot v(x)$ также дифференцируема n раз и справедлива формула:

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)}\cdot v' + C_n^2 \cdot u^{(n-2)}\cdot v'' + ...$$
$$... + C_n^m \cdot u^{(n-m)}\cdot v^{(m)} + ... + C_n^{n-1}\cdot u'\cdot v^{(n-1)} + u\cdot v^{(n)}.$$

Доказательство. Доказательство формулы Лейбница проведем методом математической индукции.
$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ - формула справедлива при $n = 1$. Пусть она справедлива при $n = k$, то есть справедлива формула:

$$(u\cdot v)^{(k)} = u^{(k)}\cdot v + C_k^1 \cdot u^{(k-1)}\cdot v' + C_k^2\cdot u^{(k-2)}\cdot v'' + ...$$
$$... + C_k^{m-1}\cdot u^{(k-(m-1))}\cdot v^{(m-1)} + C_k^m \cdot u^{(k-m)}\cdot v^{(m)} + ... + C_k^{k-1}\cdot u'\cdot v^{(k-1)} + C_k^k\cdot u\cdot v^{(k)}.$$

Продифференцируем это выражение:

$$(u\cdot v)^{(k+1)} = \left[(u\cdot v)^{(k)}\right]'_x =$$
$$= u^{(k+1)}\cdot v + u^{(k)}\cdot v' + C_k^1\cdot u^{(k)}\cdot v' + C_k^1\cdot u^{(k-1)}\cdot v'' + C_k^2\cdot u^{(k-1)}\cdot v'' + C_k^2\cdot u^{(k-2)}\cdot v''' + ...$$
$$... + C_k^{m-1}\cdot u^{(k-(m-1)+1)}\cdot v^{(m-1)} + C_k^{m-1}\cdot u^{(k-(m-1))}\cdot v^{(m)} + C_k^m\cdot u^{(k-(m-1))}\cdot v^{(m)} +$$
$$+ C_k^m\cdot u^{(k-m)}\cdot v^{(m+1)} + ... + C_k^{k-1}\cdot u''\cdot v^{(k-1)} + C_k^{k-1}\cdot u'\cdot v^{(k)} + C_k^k\cdot u'\cdot v^{(k)} + C_k^k\cdot u\cdot v^{(k+1)} =$$
$$= u^{(k+1)}\cdot v + (1 + C_k^1)\cdot u^{(k)}\cdot v' + (C_k^1 + C_k^2)\cdot u^{(k-1)}\cdot v'' + (C_k^2 + C_k^3)\cdot u^{(k-2)}\cdot v''' + ...$$
$$... + (C_k^{m-1} + C_k^m)\cdot u^{(k-(m-1))}\cdot v^{(m)} + ... + (C_k^{k-1} + C_k^k)\cdot u'\cdot v^{(k)} + C_k^k\cdot u\cdot v^{(k+1)}.$$

Учтем теперь, что $C_n^n = C_n^0 = 1$ и что $(C_k^{m-1} + C_k^m) = C_{k+1}^m$. Получим:

$$(u\cdot v)^{(k+1)} = u^{(k+1)}\cdot v + C_{k+1}^1\cdot u^{(k)}\cdot v' + C_{k+1}^2\cdot u^{(k-1)}\cdot v'' + C_{k+1}^3\cdot u^{(k-2)}\cdot v''' + ...$$

$$... + C_{k+1}^m \cdot u^{(k-(m-1))} \cdot v^{(m)} + ...$$

$$+ C_{k+1}^k \cdot u' \cdot v^{(k)} + u \cdot v^{(k+1)}.$$

Видим, что доказываемая формула справедлива при начальном значении номера, то есть при $n = 1$, и остается справедливой при каждом последующем увеличении номера. Следовательно, эта формула верна при любом значении n.

Теорема доказана.

Глава 6

Геометрический смысл производной и дифференциал функций

6.1 Геометрический смысл производной

Определение. *Касательной к кривой* на плоскости в данной точке называют предельное положение секущей, когда вторая точка кривой неограниченно сближается с данной точкой, в пределе сливаясь с ней.

Сейчас мы поставим задачу записать уравнение касательной к заданной кривой в заданной точке, вспомнив, предварительно, что уравнение любой прямой, проходящей через точку (x_0, y_0), кроме прямой, перпендикулярной к оси x, описывается следующим уравнением: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = tg\varphi$, φ - угол наклона прямой к оси x, а x и y - текущие координаты точки прямой.

Пусть $y = f(x)$ - некоторая кривая, (x_0, y_0) - точка на ней (то есть $y_0 = f(x_0)$). Видим, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta$, где β - угол наклона секущей. Очевидно, что когда $M_2 \to M_1$, $\Delta x \to 0$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi = f'_x(x_0)$. В таком случае уравнение касательной имеет вид: $y - y_0 = f'_x(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, а точка на кривой, к которой надо провести касательную, определяется значением параметра, равным t_0, то уравнение касательной следующее: $y - y_0 = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \cdot (x - x_0)$, где $y_0 = y(t_0)$, $x_0 = x(t_0)$.

Определение. *Нормалью к кривой* в точке (x_0, y_0) называется прямая, перпендикулярная к касательной, проведенной к кривой в точке (x_0, y_0).

Как написать уравнение нормали? Из курса аналитической геометрии известно, что если две прямые перпендикулярны между собой, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Следовательно, $k_{norm} = -\frac{1}{f'_x(x_0)}$, поэтому

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'_x(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

- уравнение нормали.

6.2 Дифференциал функции

Пусть задана дифференцируемая в точке x_0 функция $y = f(x)$, то есть существует призводная $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0)$. Вспоминая теорему о связи переменной, её предела и бесконечно-малой величины, по ранее доказанной нами формуле $x_n = a + \alpha_n$, мы можем записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где α - бесконечно малая функция, зависящая от Δx, и $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда $\Delta y = f'_x(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Таким образом, если функция дифференцируема в точке x_0, то её приращение всегда может быть представлено в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $A = f'_x(x_0) = const$, а α - бесконечно малая функция, зависящая от Δx, причем $\alpha \to 0$, когда $\Delta x \to 0$.

Обратно, пусть функция $y = f(x)$ такова, что приращение Δy в точке x_0 представимо в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $A = const$, а $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Покажем, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Действительно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, то есть функция $y = f(x)$ обладает первой производной в точке x_0, равной постоянной величине A. Следовательно, можно дать и такое определение дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если приращение Δy в точке x_0, соответствующее приращению Δx, может быть представлено в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $A = const$, не зависящая от Δx, а α - бесконечно малая функция аргумента Δx, причем $\alpha \to 0$, когда $\Delta x \to 0$.

Опять обратимся к выражению $\Delta y = f'_x(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Из него видно, что если $f'_x(x_0) \neq 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'_x(x_0)\Delta x} = 1$, то есть выражение $f'_x(x_0)\Delta x$ представляет собой *главную часть* приращения функции Δy в точке x_0.

Определение. Главную часть приращения функции Δy , линейную по приращению аргумента Δx, называют *дифференциалом функции* в точке x_0 и обозначают символом dy. Таким образом, $dy = f'_x(x_0)\Delta x$. Для удобства приращение независимой переменной Δx обозначают dx, так что $dy = f'_x(x_0)dx$. Отсюда же и новое обозначение первой производной функции: $y'_x = \frac{dy}{dx}$.

Какова геометрическая интерпретация дифференциала функции? Поскольку производная функции в точке x_0 - есть тангенс угла наклона касательной к кривой в точке x_0 : $f'_x(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, то $dy = f'_x(x_0)\Delta x = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$. Таким образом, дифференциал функции в точке x_0 - есть приращение ординаты касательной, проведенной к кривой точке $(x_0, y_0 = f(x_0))$.

6.3 Правила вычисления дифференциалов функций

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда:

$d(u \pm v) = (u \pm v)'_x dx = u'_x dx \pm v'_x dx = du \pm dv.$

$d(u \cdot v) = (u \cdot v)'_x dx = u'_x dx \cdot v + u \cdot v'_x dx = du \cdot v + u \cdot dv.$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)'_x dx = \frac{u'_x dx \cdot v - u \cdot v'_x dx}{v^2} = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}.$

Теорема. Пусть функции $y = f(u)$ и $u = u(x)$ дифференцируемы в точках $u_0 = u(x_0)$ и x_0. Тогда дифференциал от сложной функции $y = f(u(x))$ равен $dy = f'_u \cdot du$. Иначе говоря, независимо от того, стоит ли под знаком функции зависимая или независимая переменная, первый дифференциал сохраняет свою форму.

Доказательство. Для доказательства утверждения применим правило дифференцирования сложной функции, получим: $dy = y'_x dx = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u \cdot du$, что и утверждалось.

6.4 Дифференциалы высших порядков

При рассмотрении этого вопроса необходимо исследовать два случая. Первый - $y = f(x)$, а x – независимая переменная; второй – $y = f(u)$, а $u = u(x)$ – зависимый аргумент, то есть y – сложная функция.

Исследуем первый случай. $dy = f'_x(x)dx$. Поскольку приращение независимого аргумента $dx \equiv \Delta x$ - есть величина не зависящая от x, то первый дифференциал - есть функция x. Поэтому если функция $f(x)$ имеет вторую производную в точке x, можно вычислить от первого дифференциала снова дифференциал: $d^2y = d(dy) = d(f'_x(x)dx) = (f'_x(x)dx)'_x dx = f''_{xx}(x)(dx)^2 \stackrel{def}{=} f''_{xx}(x)dx^2$, то есть $d^2y = f''_{xx}(x)dx^2$. Аналогично, $d^3y = f'''(x)dx^3$ и так далее. В общем случае: $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Второй случай: $y = f(u)$, Здесь u - функция x, и дифференциал du - тоже функция аргумента x. Поэтому $dy = f'_u du$. $d^2y = d(dy) = d(f'_u du) = f''_{uu}du^2 + f'_u d^2u$. $d^3y = d(d^2y) = d(f''_{uu}du^2 + f'_u d^2u) = f'''(x)dx^3 + 3f''(x) \cdot du \cdot d^2u + f'(x)d^3u$, и так далее.

Формула Лейбница для дифференциалов.

$d^{(n)}(u \cdot v) = (u \cdot v)^{(n)}dx^n =$

$= \left(u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} \cdot v' + ... + C_n^m u^{(n-m)} \cdot v^{(m)} + ...C_n^{n-1} u' \cdot v^{(n-1)} + u \cdot v^{(n)}\right) dx^n =$

$= d^n u \cdot v + C_n^1 d^{n-1}u \cdot dv + ... + C_n^m d^{n-m}u \cdot d^m v + ... + C_n^{n-1} du \cdot d^{n-1}v + u \cdot d^n v.$

6.5 Применение дифференциалов в приближенных вычислениях

Вспомним: $\Delta y = f'_x(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, то есть $\Delta y = dy + \alpha\cdot\Delta x$. Второе слагаемое в этой формуле - это бесконечно-малая высшего порядка по сравнению с dy, то есть $\Delta y \approx dy$, или $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'_x(x_0)\cdot\Delta x$. Таким образом, мы получили формулу для приближенного вычисления значения функции с помощью дифференциала: $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'_x(x_0)\cdot\Delta x$.

Примеры. 1. $\sqrt{102} = ?$ Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. $\sqrt{x_0+\Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x$. Применительно к поставленной задаче нахождения значения $\sqrt{102}$ эта формула означает: $\sqrt{102} \approx 10 + \frac{1}{2\cdot 10}\cdot 2 = 10,1$. Проверим: $(10,1)^2 = 102,01$.

2. $\cos 28^o = ?$ Рассмотрим функцию $y = \cos x$. Согласно формуле приближенного вычисления с помощью дифференциала имеем: $\cos(x_0+\Delta x) \approx \cos x_0 - \sin x_0\cdot\Delta x$. $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{90}$. Следовательно $\cos 28^o \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{90} \approx \frac{1,7}{2} + 0,5\cdot\frac{3,14}{90} \approx 0,87$.

6.6 Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции

Определение 1. *Левосторонней (правосторонней)* производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда $\Delta x \to 0$ и, при этом, $\Delta x < 0$ $(\Delta x > 0)$. Обозначения: $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0-0)$,
$\left(\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0+0)\right)$.

Пример. $y = |x|$; $f'_x(-0) = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$; $f'_x(+0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Теорема 1. Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы $f'_x(x_0-0) = f'_x(x_0+0)$.

Необходимость. Дано: $\lim\limits_{\Delta x\to}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0)$ как при $\Delta x < 0$, так и при $\Delta x > 0$. Доказать: $f'_x(x_0-0) = f'_x(x_0+0)$.

Доказательство. Видим, что $f'_x(x_0-0) = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0+0)$, то есть $f'_x(x_0-0) = f'_x(x_0+0)$.

Достаточность. Дано: $f'_x(x_0-0) = f'_x(x_0+0) = A$. Доказать, что при этом существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0)$.

Доказательство. Из "дела" следует, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что как только $|\Delta x| < \delta_1$ (и, при этом, $\Delta x < 0$), так сразу $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'_x(x_0-0)\right| < \varepsilon$. **(1)** Также найдется такое $\delta_2 > 0$, что как только $|\Delta x| < \delta_2$ (и, при этом, $\Delta x > 0$), так сразу $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'_x(x_0+0)\right| < \varepsilon$. **(2)** Обозначим $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$ и рассмотрим множество точек x, для которых $|\Delta x| < \delta$ (при этом Δx может быть как положительным, так и отрицательным). Очевидно, что оба неравенства (1) и (2) в этом случае будут выполнены одновременно, то есть $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - A\right| < \varepsilon$ как только $|\Delta x| < \delta$. Это и означает, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, что и требовалось доказать.

Если обратиться к приведенному выше примеру, то на основании теоремы 1 можно заключить, что непрерывная всюду функция $y = |x|$ недифференцируема в точке $x_0 = 0$. Этого примера достаточно, чтобы сформулировать следующее утверждение: если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то этого ещё не достаточно для дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Действительно, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$, где A - постоянное число, не зависящее от Δx, α - бесконечно-малая функция, стремящаяся к нулю, когда $\Delta x \to 0$. Отсюда $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть бесконечно-малому приращению аргумента соответствует бесконечно-малое приращение функции.

Глава 7

Свойства дифференцируемых функций

7.1 Теоремы о дифференцируемых функциях

В этом важном для дальнейшего разделе будут рассмотрены основные свойства дифференцируемых на множестве X функций одного аргумента.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум (минимум)*, если найдется такая окрестность точки x_0, в пределах которой значение $f(x_0)$ является наибольшим (наименьшим) значением среди всех значений функции в этой окрестности.

Теорема 3 (Ферма). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум (т.е. максимум или минимум), то $f'_x(x_0) = 0$.

Доказательство. При доказательстве, ради определённости, будем считать, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный максимум. Тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ при любом знаке Δx из окрестности точки x_0, и если $\Delta x > 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x_0 + 0) \leqslant 0$. Если же $\Delta x < 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x_0 + 0) \geqslant 0$, а так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $f'_x(x_0) = f'_x(x_0 - 0) = f'_x(x_0 + 0) = 0$.

Теорема 4 (Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[\,a,\ b\,]$, дифференцируема в интервале $(\ a,\ b\ )$ и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется по крайней мере одна точка c внутри $[\,a,\ b\,]$, такая, что $f(c) = 0$.

Если $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[\,a,\ b\,]$, то она непременно достигнет на этом сегменте своего наибольшего и наименьшего значения: $\sup f(x) = L$, $\inf f(x) = l$. Очевидно, что существует два варианта: 1. $L = l$, Тогда $L = l = const$. В этом случае и $f(x) = const$, $f'_x(x) = 0$. 2. $L \neq l$. Поскольку $f(a) = f(b)$, то наибольшее или наименьшее значение функции достигается во внутренней точке, которую мы обозначили через c. Таким образом, в этой точке c достигается локальный экстремум, где, по теореме Ферма, $f'_x = 0$. Следовательно, $f'_x(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если хотя бы одно из условий теоремы Ролля не выполнено, теорема не имеет места.

Теорема 5 (Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[\ a,\ b\ ]$ и дифференцируема в интервале $(\ a,\ b\ )$. Тогда найдётся такая точка c интервала $(\ a,\ b\ )$, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'_x(c)$.

Геометрическая иллюстрация теоремы проста: пусть $f(a) = M$, $f(b) = N$. Теорема утверждает, что на кривой, описываемой функцией $y = f(x)$, найдется по крайней мере одна точка, что касательная в ней к этой кривой окажется параллельной к хорде $M,\ N$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$. Видим, что: 1. $F(x)$ - непрерывна на сегменте $[\ a,\ b\,]$, 2. $F(a) = F(b) = \frac{f(a)\cdot b - f(b)\cdot a}{b-a}$, 3. Поскольку $F(x)$ - есть разность дифференцируемых функций, то она сама является дифференцируемой функцией в интервале $(\ a,\ b\ )$. Таким образом, для функции $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. В таком случае найдется такая точка c интервала $(\ a,\ b\ )$, что $F'_x(c) = 0$. Поскольку $F'_x(x) = f'_x(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, то $f'_x(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, что и утверждалось.

Следствие. Применим теорему Лагранжа к случаю, когда $a = x$, $b = x + \Delta x$. Тогда по теореме Лагранжа найдется такая точка ξ, $(x < \xi < x + \Delta x)$, что $f'_x(\xi) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Отсюда без труда получим знаменитую формулу конечных приращений Лагранжа: $\Delta y = f'_x(\xi) \cdot \Delta x$.

Чаще всего формула конечных приращений Лагранжа встречается в литературе в иной записи. А именно: ξ всегда можно задать в виде $\xi = x + \theta \cdot \Delta x$, где $0 < \theta < 1$. После этого формула конечных приращений Лагранжа будет выглядеть так: $f(x + \Delta x) - f(x) = f'_x(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$.

Теорема 6 (Коши). Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, непрерывные на сегменте $[\ a,\ b\ ]$, дифференцируемые в интервале $(\ a,\ b\ )$, причем $\varphi'_x \neq 0$ всюду в $(\ a,\ b\ )$. Тогда найдётся такая точка c интервала $(\ a,\ b\ )$, что $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'_x(c)}{\varphi'_x(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \varphi(x)$. Для этой функции, очевидно, выполнены все условия теоремы Ролля. Следовательно, найдется такая точка c интервала $(\ a,\ b\ )$, что $F'_x(c) = 0$. Поскольку $F'_x(x) = f'_x(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \varphi'_x(x)$, то $f'_x(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \varphi'_x(c)$, что и утверждалось.

Замечание. В формулировке теоремы не требуется формулировать условие $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, ибо если $\varphi(b) = \varphi(a)$, то, по теореме Ролля, найдется такая точка c интервала $(\ a,\ b\ )$, что в ней $\varphi'_x(c) = 0$, а у нас уже есть условие $\varphi'_x \neq 0$ всюду в $(\ a,\ b\ )$.

7.2 Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)

В этом разделе мы используем результаты теоремы Коши, которая утверждает, что если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, непрерывные на сегменте $[\ a,\ b\ ]$, дифференцируемые в интервале $(\ a,\ b\ )$, причем $\varphi'_x \neq 0$ всюду в $(\ a,\ b\ )$, то найдётся такая точка c интервала $(\ a,\ b\ )$, что $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'_x(c)}{\varphi'_x(c)}$.

Определение 1. Говорят, что отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляет собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, для которых $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точки a, причем $\varphi'_x(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем эти пределы равны: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)}$.

Доказательство. Рассмотрим фиксированную точку x из окрестности точки a, и сегмент $[\ a,\ x\ ]$. Доопределим значения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, положив $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут непрерывны на сегменте $[\ a,\ x\ ]$ и дифференцируемы в окрестности $(\ a,\ x\ )$, причем $\varphi'_x(t) \neq 0$ для всех $t \in (\ a,\ x\ )$. Видим, что для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполнены все условия теоремы Коши. Следовательно, имеем $\frac{f(x)-f(0)}{\varphi(x)-\varphi(0)} = \frac{f'_x(\xi)}{\varphi'_x(\xi)}$, $a < \xi < x$, (для определённости мы положили $x > a$,) и, при этом, как мы сами ранее доопределили, $f(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$. Пусть теперь $x \to a$, тогда и $\xi \to a$, но $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)}$ существует, следовательно существует и предел левой части равенства, то есть мы получили, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)}$.

Добавление 1. Если производные $f'_x(x)$, и $\varphi'_x(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f''_{xx}(x)}{\varphi''_{xx}(x)}$ и так далее.

Добавление 2. Теорема 1 справедлива и в том случае, когда a - бесконечно удалённая точка числовой прямой, то есть если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, для которых $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$ определены и дифференцируемы в $(\ A,\ \infty\ )$, причем $\varphi'_x \neq 0$ в этом интервале, то при условии существования $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)}$ существует и $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем эти пределы равны: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)}$.

Действительно, полагая $x = \frac{1}{t}$, получим: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f'_t\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi'_t\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f'_x \cdot x'_t}{\varphi'_x \cdot x'_t} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)}$.

Добавление 1 справедливо, очевидно, и для добавления 2.

Кроме того, нетрудно заметить, что в формулировке теоремы $+\infty$, в случае необходимости, может быть заменено на $-\infty$.

А как раскрыть неопределенность вида $0\cdot\infty$? Ответ очевиден: необходимо свести эту неопределенность к неопределенности уже исследованного вида. Пусть $f(x)\to 0$, и $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}}{\varphi(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Аналогично можно поступать и с неопределенностями вида 1^∞, 0^0, ∞^0, $\infty-\infty$, и так далее.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0} x^x=?$ $y=x^x$. $\ln y=x\ln x$. $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x-x\sin x}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{1-x\operatorname{ctg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{\operatorname{ctg} x-\frac{x}{\sin^2 x}}=0.$

Глава 8

Приложение производных функций

8.1 Формула Тейлора

Формула Тейлора - это одна из важнейших формул математического анализа.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ в окрестности точки a имеет производные до $n+1$-го порядка включительно. Пусть, далее, x - любое значение аргумента из этой окрестности, а p - произвольное положительное число. Тогда найдется такая точка ξ между точками a и x, что справедлива формула

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой Ролля. Зафиксируем точку x из окрестности точки a (для определенности будем считать, что $x > a$), рассмотрим сегмент $[a,\ x]$ и запишем функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \tag{1}$$

где $R_{n+1}(x)$ - неизвестная пока функция, которую мы назовем *остаточным членом.* Потребуем, чтобы это равенство выполнялось при любом значении x, (то есть оно было тождеством). Из этого требования определим неизвестную функцию $R_{n+1}(x)$.

На сегменте $[a,\ x]$ рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] - \frac{(x-t)^p}{(x-a)^p}R_{n+1}(x),$$

где $t \in [a,\ x]$, (x - здесь фиксированная точка!)

Легко видеть, что $F(t)$ на сегменте $[a,\ x]$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Ролля.

1. $F(t)$ непрерывна на сегменте $[a,\ x]$, так как $f(t)$, $f'(t)$, ... $f^{(n)}$ - непрерывные функции, поскольку по условиям теоремы существует $n+1$-я производная функции $f(x)$.

2. Очевидно, что $F(t)$ дифференцируема в интервале $(a,\ x)$.

3. На концах интервала, в точках a и x, функция $F(t)$ принимает одинаковые значения. Действительно, в силу формулы (1) и определения функции $F(t)$, имеем: $F(x) = 0$ и

$$F(a) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right] - R_{n+1}(x) = 0.$$

Вычислим производную функции $F(t)$:

$$F'_t(t) = -\left[f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - f'(t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{2!}\cdot 2\cdot(x-t) + ...\right.$$

$$\left. ... + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot n\cdot(x-y)^{n-1}\right] + p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-a)^p}R_{n+1}(x) =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-a)^p}R_{n+1}(x).$$

На основании теоремы Ролля найдется такая точка $\xi \in (a, x)$, что в ней $F'(\xi) = 0$, то есть

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + p\frac{(x-\xi)^{p-1}}{(x-a)^p}R_{n+1}(x) = 0.$$

Из этого равенства находим:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p. \tag{2}$$

Мы получили вид остаточного члена в общей форме, зависящий от параметра $p > 0$. Подставляя формулу (2) в формулу (1), получим доказываемую формулу:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p.$$

Заметим, что точка ξ зависит от выбора точки x. Она может быть записана в виде $\xi = a+\theta(x-a)$, где θ зависит от x и $0 < \theta < 1$. Кроме того, θ зависит от выбора параметра p.

Остаточные члены при различных p имеют разную форму. В приложениях чаще всего встречаются случаи, когда $p = n + 1$ или $p = 1$.

При $p = n + 1$ остаточный член принимает вид:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

или, что то же:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Этот вид называется *остаточным членом в форме Лагранжа.*

При $p = 1$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a).$$

Подставляя сюда ранее введенное нами выражение для ξ, получим *остаточный член в форме Коши*:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_2(x-a))}{n!}(x-a)^{n+1}(1-\theta_2)^n.$$

Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для того, чтобы представить функцию $f(x)$ с помощью приращения аргумента:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Положим в этой формуле $a = x_0$, $x - a = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$. Получим:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}.$$

Поскольку $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \left(\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^n\right) \cdot \Delta x.$$

Обозначая выражение в больших скобках за $\alpha(\Delta x)$, получим хорошо знакомое выражение для приращения дифференцируемой функции:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Формула Маклорена - это формула Тейлора при $a = 0$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x).$$

Остаточный член в форме Лагранжа в этом случае имеет вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_1 x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

остаточный член в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_2 x)}{n!}x^{n+1}(1-\theta_2)^n.$$

Пример. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$.
Видим, что на сегменте $[-R, +R]$ $\quad |R_{n+1}(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e^R}{(n+1)!}R^{n+1}$.
Положим в предыдущей формуле $x = 1:$ $\quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$.
Взяв $n = 10$, мы получим $|R_{n+1}(1)| < 3 \cdot 10^{-9}$.

8.2 Аналитические признаки возрастания и убывания функции

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале и возрастает (убывает) в нем, то $f'_x(x) \geqslant 0$ ($f'_x(x) \leqslant 0$) для всех x из этого интервала.

Доказательство. Выберем любую точку x_0 из этого интервала и рассмотрим точку $x = x_0 + \Delta x$. По условиям теоремы $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$ $(\Delta y < 0)$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0) \geqslant 0$; $\quad (\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x_0) \leqslant 0)$. Так как точка x_0 - произвольная точка рассматриваемого интервала, $f'_x(x) \geqslant 0$ ($f'_x(x) \leqslant 0$) для всех точек x из этого интервала.
Теорема доказана.

Теорема 2. Если для некоторого интервала $f'_x(x) > 0$ ($f'_x(x) < 0$), то в этом интервале функция $y = f(x)$ возрастает (убывает).

Доказательство. Рассмотрим две точки x_1 и x_2 такие, что $x_2 > x_1$ и построим разность $f(x_2) - f(x_1)$. По формуле конечных приращений Лагранжа имеем: $f(x_2) - f(x_1) = f'_x(\xi)(x_2 - x_1) > 0$, так как $x_2 - x_1 > 0$, а $f'_x(\xi) > 0$. Отсюда следует, что функция $y = f(x)$ возрастает, поскольку большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Если же $f'_x(\xi) < 0$, то большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, а это означает, что функция $y = f(x)$ убывает.
Что и требовалось доказать.

8.3 Экстремум функции

Напомним определение экстремума функции, которое мы давали, когда доказывали теорему Ферма.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой значение $f(x_0)$ является наибольшим (наименьшим), то есть $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$) для всех точек x из указанной окрестности.

По теореме Ферма, если x_0 - есть точка экстремума функции и функция дифференцируема в окрестности точки x_0, то $f'_x(x_0) = 0$. Следовательно, для дифференцируемых в окрестности точки экстремума и в самой точке экстремума функций, условие $f'_x(x_0) = 0$ является *необходимым условием.*

Однако в точке экстремума функция может и не быть дифференцируемой. Например, функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ имеет минимум, но в этой точке не дифференцируема.

Определение. *Критическими точками* функции $f(x)$ называют такие точки, в которых функция непрерывна, а производная в них либо равна нулю, либо не существует, либо обращается в бесконечность. Все такие точки подозрительны на экстремум.

Но всякая ли критическая точка является точкой экстремума? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, нужны достаточные условия экстремума.

I - е достаточное условие экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в окрестности критической точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'_x(x)$ меняет знак, то точка x_0 является точкой экстремума, если же при переходе критической точки производная сохраняет свой знак, экстремума в точке x_0 нет. Если, при этом, знак производной меняется с плюса на минус, то в точке x_0 достигается максимум функции $f(x)$, а если же знак меняется с минуса на плюс - достигается минимум функции $f(x)$.

Доказательство. Проведем доказательство для максимума, для остальных случаев исследование проводится аналогично.

Пусть $x < x_0$ и $f'_x(x) > 0$. Это означает, что функция при $x < x_0$ возрастает и, следовательно, $f(x) < f(x_0)$. Пусть при $x > x_0$ и $f'_x(x) < 0$ - производная меньше нуля, значит функция убывает, и, следовательно, $f(x) < f(x_0)$. Иначе говоря, и справа, и слева от точки x_0 значения функции меньше, чем значение функции в самой точке x_0. А это, по определению, данному выше, означает, что точка x_0 - есть точка максимума.

II - е достаточное условие экстремума. Пусть в точке x_0 $f'_x(x) = 0$, а также существует вторая производная, непрерывная в точке x_0. Тогда, если $f'_x(x) \neq 0$, то точка x_0 - есть точка экстремума, причем если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 достигается максимум функции $f(x)$, а если $f''(x_0) > 0$ - минимум.

Доказательство. Для определенности рассмотрим доказательство для минимума. Посмотрим, какой знак имеет первая производная в точке x_0-h и в точке x_0+h. Поскольку первая производная $f'_x(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0 - h) \equiv f'(x_0 - h) - \underbrace{f'(x_0)}_{=0} = f''(x_0) \cdot (-h) + \alpha(-h)$, где $\alpha \to 0$ при $h \to 0$, и $f'(x_0 + h) \equiv f'(x_0 + h) - \underbrace{f'(x_0)}_{=0} = f''(x_0) \cdot (+h) + \beta(+h)$, где $\beta \to 0$ при $h \to 0$. Если $f''(x_0) > 0$, то, в силу малости $|\alpha h|$ и $|\beta h|$, при малых значениях h имеем: $\text{sgn} f'(x_0 - h) = \text{sgn}[f''(x_0)(-h)] = -1$, $\text{sgn} f'(x_0 + h) = \text{sgn}[f''(x_0)(+h)] = +1$. Таким образом, первая производная $f'_x(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус - это и есть условие достижения функцией $f(x)$ минимума в точке x_0.

III - е достаточное условие экстремума. Пусть в критической точке x_0 $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0) = 0$, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, и пусть $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда если $n + 1$ – четное число, то в точке x_0 есть экстремум функции $f(x)$, причем при $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ в точке x_0 достигается минимум, а если $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ - максимум. Если же $n + 1$ – нечетное число, то в точке x_0 экстремума нет.

Доказательство. В условии теоремы соблюдены все условия применимости формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Поскольку $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0) = 0$, то $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$. В силу непрерывности $f^{(n+1)}(x_0)$ в точке x_0, найдется такая окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ этой точки, что в ней $f^{(n+1)}(x)$ сохраняет знак. Следовательно, если $f^{(n+1)}(x_0) > 0\ (< 0)$, то и $f^{(n+1)}(x) > 0\ (< 0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Если $n + 1$ - четное число и $f^{(n+1)}(x_0) > 0\ (< 0)$, (а значит и $f^{(n+1)}(\xi) > 0\ (< 0)$), то $f(x) - f(x_0) > 0\ (< 0)$ или, что то же, $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$ для всех $x \in (x_0 - \delta x_0 + \delta)$. Это означает, что в точке x_0 достигается минимум (максимум) функции $f(x)$. При нечетном $n + 1$ знак $(x - x_0)^{n+1}$ меняется при переходе через точку x_0, а это значит, что в этом случае экстремум в точке x_0 отсутствует.

8.4 Асимптоты кривой

Определение 1. Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* для кривой $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений функции $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равно ∞, ($+\infty$, или $-\infty$).

Пример. $y = \frac{2x^2+x}{x+1} \equiv 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$. При $x \to -1 + 0$, $y \to +\infty$, при $x \to -1 - 0$, $y \to -\infty$.

Определение 2. Говорят, что прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* (в том числе, при $k = 0$ - *горизонтальной асимптотой*) для кривой $y = f(x)$, если для достаточно больших по абсолютной величине значений x функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \alpha(x) = 0$.

Пример. $y = \frac{2x^2+x}{x+1} \equiv 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$. Очевидно, что $\alpha(x) = \frac{1}{x+1}$ и $\alpha(x) \to 0$, если $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Таким образом, мы видим, что у кривой $y = \frac{2x^2+x}{x+1}$ есть две асимптоты: прямая $y = 2x - 1$ - это наклонная асимптота, а прямая $x = -1$ - вертикальная асимптота.

Теорема. Для того, чтобы кривая $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) имела асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} (f(x) - kx) = b$.

Доказательство. Проведём доказательство лишь для случая $x \to +\infty$. Альтернативный случай доказывается аналогично.

Необходимость. Пусть $y = kx + b$ - асимптота кривой $y = f(x)$. Это значит, что $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ для достаточно больших по абсолютной величине значений x. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть выполнены формулы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$. Из второй формулы сразу следует, что $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to \infty$. Иначе говоря, функция $y = f(x)$ представима в виде: $f(x) = kx + b + \alpha(x)$. Это означает, что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика этой функции.

Глава 9

Введение в неопределённые интегралы

9.1 Первообразная и свойства неопределённого интеграла

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на множестве X, если в любой точке $x \in X$ $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Функция $F(x) = \sqrt{1-x}$ является первообразной функции $f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ для $\forall x \in X = (-\infty, 1)$.

Пример 2. Если $f(x) = \cos x$, то $F(x) = \sin x, F_1(x) = \sin x + 1, F_2(x) = \sin x + 2, F_3(x) = \sin x - \frac{1}{2}, \ldots.$ и так далее. Вообще говоря, любая функция вида $\Phi(x) = \sin x + C$, $C = const$, является первообразной функции $f(x) = \cos x$. Этот пример говорит, что первообразных одной и той же функции существует бесчисленное множество.

Теорема 1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на множестве X, то функция $\Phi(x) = F(x) + C$, $C = const$, - тоже первообразная функции $f(x)$ на множестве X. Обратно: каждая первообразная функции $f(x)$ представима в этом виде.

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная $f(x)$, то есть выполнено $F'(x) = f(x)$. Очевидно, что взяв $\Phi(x) = F(x)+C$, $C = const$, видим, что $\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$, то есть $\Phi(x)$ - тоже первообразная функции $f(x)$.

Докажем обратное. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ - первообразные функции $f(x)$, то есть $\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$ (или $\Phi'(x) - F'(x) = 0$) всюду на X. Обозначим $\Phi(x) - F(x) \equiv \pi(x)$. Тогда всюду на X $\pi'(x) = 0$. Рассмотрим произвольные точки x и x_0 из множества X и применим к $\pi(x)$ формулу конечных приращений Лагранжа в точках x и x_0. : $\pi(x) - \pi(x_0) = \pi'_x \cdot (x - x_0)$. Поскольку $\pi'(x) = 0$, имеем $\pi(x) = \pi(x_0)$ для любых двух точек из множества X, а это значит, что функция $\pi(x)$ сохраняет одно и то же значение в любой точке множества X. Значит, $\pi(x) = const \equiv C$, $\Phi(x) - F(x) = const \equiv C$, $\Phi(x) = F(x) + C$.

Таким образом, мы доказали, что **все первообразные функции** $f(x)$ **отличаются только на постоянную.**

Определение 2. *Вся совокупность* первообразных данной функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на множестве X и обозначается символом $\int f(x)dx$, где символ $\int$ - знак интеграла, $f(x)dx$ - это *подинтегральное выражение*, $f(x)$ - *подинтегральная функция.*

Итак, по определению: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Из этого определения вытекают следующие очевидные свойства неопределённого интеграла:

1°. $d\int f(x)dx = d\,(F(x) + C) = d\,(F(x)) = F'(x)dx = f(x)dx$ - знак дифференциала "уничтожает" знак интеграла.

2°. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$ - знак интеграла "уничтожает" знак дифференциала.

3°. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

4°. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$.

Теперь нетрудно составить таблицу неопределённых интегралов. Для этого мы должны ответить на простой вопрос: какую функцию мы должны продифференцировать, чтобы получить подинтегральную функцию.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
6. $\int e^x dx = e^x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

9.2 Метод интегрирования путем замены переменной в неопределённом интеграле

Теорема 2. Пусть $t = g(x)$ - функция, дифференцируемая на множестве X. Пусть T- множество значений $g(x)$. Пусть на множестве T существует неопределённый интеграл

$$\int \varphi(t)dt = \Phi(t) + C.$$

Тогда на множестве X для функции $\varphi(g(x)) \cdot g'_x(x)$ существует неопределённый интеграл

$$\int \varphi(g(x)) \cdot g'_x(x)dx = \Phi(g(x)) + C.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(g(x))$ и продифференцируем её: $[\Phi(g(x))]'_x = \Phi'_g \cdot g'_x$. Но так как $\Phi'_g = \Phi'_t = \varphi(t)$, то $[\Phi(g(x))]'_x = \varphi(g(x)) \cdot g'_x(x)$. Следовательно, функция $\Phi(g(x))$ является первообразной функции $\varphi(g(x)) \cdot g'_x(x)$, то есть

$$\int \varphi(g(x)) \cdot g'_x(x)dx = \Phi(g(x)) + C.$$

Теорема доказана.

9.3 Метод интегрирования по частям

Теорема 3. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на множестве X и для функции $u'(x) \cdot v(x)$ существует первообразная на X. Тогда на X для функции $u(x) \cdot v'(x)$ также существует первообразная, причём $\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$, или, что то же, $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

Доказательство. Известно, что $(u(x) \cdot v(x))'_x = u'_x(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'_x(x)$. Умножим это выражение на dx и возьмём интеграл: $u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)dx + \int u(x) \cdot v'(x)dx$. По условиям теоремы $\int u'(x) \cdot v(x)dx$ существует, следовательно, существует и $\int u(x) \cdot v'(x)dx$.

Теорема доказана.

Пример. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Здесь n - целое положительное число, a - действительное число. Применим к этому интегралу метод интегрирования по частям. Положим $u = (x^2 + a^2)^{-n}$, $du = -n \cdot 2x \cdot (x^2 + a^2)^{-n-1}dx$; $dv = dx$, $v = x$. Получим: $J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx - 2n \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}$. В результате получили так называемое *рекуррентное соотношение*: $J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}$. Это соотношение, которое связывает между собой J_n и J_{n+1} - предыдущее и последующее значения интеграла при возрастании (в данном случае на единицу) числа n. Разрешая это соотношение относительно J_{n+1}, получим окончательную формулу для вычисления этого интеграла: $J_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n$. Воспользуемся этой формулой при $n = 1:$ $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C_1$, $J_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ и так далее.

9.4 Классы интегралов, к которым применим метод интегрирования по частям

I. $\int P(x)(\sin ax \pm \cos ax)dx$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n+1} + ...a_{n-1}x + a_0$. Очевидно, что придётся вычислять интегралы вида $J_1 = \int x^k \sin axdx$ и $J_2 = \int x^k \cos axdx$, где k - целое положительное число.

Покажем, например, как можно вычислить, применяя метод интегрирования по частям, интеграл J_1. Положим $u = x^k, dv = \sin axdx$; тогда $du = kx^{k-1}dx, v = -\frac{1}{a}\cos ax$; $J_1 = -\frac{x^k}{a}\cos ax + \frac{k}{a}\int x^{k-1}\cos axdx$. Видим, что показатель степени над x в интеграле понизился на одну единицу; продолжая процесс интегрирования по частям, после k -го шага, понизим эту степень до нуля. При $k = 0$ получим табличные интегралы вида $\int \sin axdx$ и $\int \cos axdx$.

$II.$ Вычисление интеграла $\int P(x)e^{ax}dx$ сводится к вычислению интегралов вида $J=\int x^k e^{ax}dx$. Положим $u=x^k, dv=e^{ax}dx$; тогда $du=kx^{k-1}, v=\frac{1}{a}e^{ax}; J=\frac{x^k e^{ax}}{a}-\frac{k}{a}\int x^{k-1}e^{ax}dx=...$ Продолжая процесс интегрирования по частям, придем к табличному интегралу $\int e^{ax}dx$.

$III.$ $\int P(x)\ln^m xdx$. В этом случае нам придётся вычислять интегралы вида $J=\int x^k\ln^m xdx$. Выберем $u=\ln^m x,\ dv=x^k dx$, тогда $du=m\ln^{m-1}x\frac{dx}{x},\ v=\frac{x^{k+1}}{k+1}$. $J=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln^m x-\frac{m}{k+1}\int x^k\ln^{m-1}xdx=...$. В результате однократного интегрирования по частям показатель степени над логарифмом в интеграле снизился на одну единицу. Продолжая этот процесс, понизим степень до нуля и, в результате, придем к табличному интегралу $\int x^k dx$.

$IV.$ $J_1=\int e^{ax}\cos bxdx,\ J_2=\int e^{ax}\sin bxdx$. Способ вычисления этих интегралов одинаков. Покажем его на примере вычисления интеграла J_1. Положим $u=e^{ax}, dv=e^{ax}\cos bxdx; du=ae^{ax}dx, v=\frac{1}{b}\sin bx$ $J_1=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{b}\ e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\stackrel{*}{=}$ Прервём пока наше равенство. В получившемся интеграле легко узнать интеграл J_2. Продолжим вычисление интеграла по частям. Опять положим $u=e^{ax}, dv=e^{ax}\sin bxdx; du=ae^{ax}dx, v=-\frac{1}{b}\cos bx$. Продолжим вычисление с прерванного места: $\stackrel{*}{=}\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{e^{ax}\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx\right)=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx$. Легко видеть, что после двухкратного вычисления интеграла по частям мы вернулись к исходному интегралу. Рассмотрим получившееся равенство как уравнение на J_1. $J_1=e^{ax}\ \frac{b\sin bx+a\cos bx}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\ J_1$. Решая это уравнение, получим: $J_1=e^{ax}\ \frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}$. Таким образом, $J_1=\int e^{ax}\cos bxdx=e^{ax}\ \frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}$. Рассуждая совершенно аналогично, получим: $J_2=\int e^{ax}\sin bxdx=e^{ax}\ \frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$.

Глава 10

Специальные замены

10.1 Интегрирование рациональных функций

В этом разделе предложим метод вычисления интегралов вида

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n}dx,$$

где $a_0, \ a_1, \ ... \ , a_{m-1}, \ a_m, \ \ b_0, \ b_1, \ ... \ , b_{n-1}, \ b_n$ - действительные числа.

Если $m \geqslant n$, то дробь называется *неправильной*, и тогда, как известно, из неё можно выделить *целую часть* и *правильную* дробь: $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{S_{(m-n)-1}(x)}{Q_n(x)}$, где $R_{m-n}(x)$ - полином степени $m-n$, а $S_{(m-n)-1}(x)$ - полином степени меньше чем n. Поскольку интеграл от $R_{m-n}(x)$ вычисляется тривиально, то всё дело сводится к нахождению метода интегрирования правильных дробей.

Пример. $\frac{x^4-x^3-1}{x^2+x+2} = x^2 - 2x + \frac{4x+1}{x^2+x+2}$.

Вспомним некоторые, ранее известные из курса средней школы, сведения.

Определение 1. Многочленом (полиномом) степени n называют выражение вида $f_n(z) = A_0z^n + A_1z^{n-1} + A_2z^{n-2} + ... + A_{n-1}z + A_n$, где A_s - комплексные числа, z - комплексная переменная, n - натуральное число.

Теорема 1. Каковы бы ни были полиномы $f_n(z)$ и $\varphi_m(z)$, где $m \leqslant n$, справедливо равенство: $f_n(z) = \varphi_m(z) \cdot q_{n-m}(z) + r(z)$, где $q_{n-m}(z)$ и $r(z)$ - полиномы, причём степень $r(z)$ меньше степени $\varphi_m(z)$.

Определение 2. Назовём комплексное число α *корнем* полинома $f_n(z)$, если $f_n(\alpha) = 0$.

Теорема 2. Если α - корень полинома $f_n(z)$, то $f_n(z) = (z-\alpha)q_{n-1}(z)$.
Доказательство этого утверждения практически очевидно. Действительно, по теореме 1 должно быть $f_n(z) = (z-\alpha) \cdot q_{n-1}(z) + r_0$, где $r_0 = const$ (степень этого полинома должна быть меньше чем у $(z-\alpha)$). Подставив $z = \alpha$, получим $0 = 0 \cdot q_{n-1}(\alpha) + r_0$, откуда сразу следует, что $r_0 = 0$.

Теорема 3. (Основная теорема алгебры) Всякий полином ненулевой степени имеет по крайней мере один корень.
Эту теорему мы примем без доказательства.

Следствие. Всякий полином степени n имеет ровно n корней и может быть представлен в виде

$$f_n(z) = A_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_{n-1})(z-\alpha_n), \tag{1}$$

где среди корней $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n$ некоторые могут совпадать.
Справедливость этого утверждения очевидно в силу теоремы 2.

Определение 3. Полином $P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_n$ называют полиномом с вещественными коэффициентами, если все $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ - вещественные числа.

Теорема 4. Если $P_n(\alpha + i\beta) = M + iN$, где $P_n(z)$ - полином с вещественными коэффициентами, а M и N - вещественные числа, то $P_n(\alpha - i\beta) = M - iN$.

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения: Если полином $P_n(z)$ с вещественными коэффициентами имеет корень $\alpha + i\beta$, то он необходимо имеет своим корнем $\alpha - i\beta$.
Действительно: пусть $\alpha + i\beta$ - корень полинома с вещественными коэффициентами, то есть $P_n(\alpha + i\beta) = 0$, или $M + iN = 0$. Как хорошо известно, комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда по отдельности равны нулю действительная и мнимая части этого комплексного числа, то есть когда $M = N = 0$. Но тогда и $P_n(\alpha - i\beta) = M - iN = 0$, а это значит, что $\alpha - i\beta$ - корень этого полинома.

Следствие. Полином с вещественными коэффициентами, если он имеет хотя бы один комплексный корень $\alpha + i\beta$, то он имеет в своём разложении и корень $\alpha - i\beta$, и, следовательно, в своём разложении (1) на множители он содержит хотя бы один множитель вида z^2+pz+q, где p и q - вещественные числа, причём $(p^2-4q)<0$, а $\alpha+i\beta$ и $\alpha-i\beta$ - корни этого квадратного трехчлена.

Заметим, что если $a=\alpha+i\beta$ - комплексный корень кратности k, то $\overline{a}=\alpha-i\beta$ - тоже корень кратности k. Поэтому соответствующий множитель в разложении полинома выглядит так: $(z^2+pz+q)^k$.

Окончательный итог наших рассуждений относительно разложения полинома $P_n(z)$ с вещественными коэффициентами на множители выглядит так: **всякий полином с вещественными коэффициентами может быть разложен на множители следующим образом:**

$$P_n(z)=a_0\cdot(z-\lambda_1)^{k_1}\cdot(z-\lambda_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z-\lambda_s)^{k_s}\cdot(z^2+p_1z+q_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(z^2+p_jz+q_j)^{r_j},$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ - вещественные корни полинома кратности $k_1,k_2,...,k_s$, а $\alpha_1+i\beta_1,...,\alpha_j+i\beta_j$ -комплексные корни полинома кратности $r_1,...,r_j$. При этом $k_1+k_2+...+k_s+2r_1+...+2r_j=n$.

Сейчас мы можем перейти к вопросу о разложении правильных дробей на простейшие дроби.

Определение. Дроби вида $\frac{A}{(x-\lambda)^k}$ и $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^r}$, где A,B,C,λ,p,q - вещественные числа, $k\geqslant 1, r\geqslant 1$ - целые числа, называют *простейшими.*

Теорема. Всякая правильная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где в числителе и знаменателе стоят полиномы с вещественными коэффициентами, причём знаменатель дроби имеет разложение на множители вида

$$Q_n(x)=(x-\lambda_1)^{k_1}\cdot(x-\lambda_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_s)^{k_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_jx+q_1)^{r_j},$$

может быть представлена в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_0}{(x-\lambda_1)^{k_1}}+\frac{A_1}{(x-\lambda_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{k_1-1}}{(x-\lambda_1)}+\frac{B_0}{(x-\lambda_2)^{k_2}}+\frac{B_1}{(x-\lambda_2)^{k_2-1}}+\ldots+\frac{B_{k_2-1}}{(x-\lambda_2)}+\ldots$$

$$+\frac{C_0}{(x-\lambda_s)^{k_s}}+\frac{C_1}{(x-\lambda_s)^{k_s-1}}+\ldots+\frac{C_{k_s-1}}{(x-\lambda_s)}+\frac{U_0x+V_0}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}}+\frac{U_1x+V_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{U_{r_1-1}x+V_{r_1-1}}{(x^2+p_1x+q_1)}+\frac{R_0x+T_0}{(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}}+\frac{R_1x+T_1}{(x^2+p_jx+q_j)^{r_j-1}}+\ldots+\frac{R_{r_j-1}x+T_{r_j-1}}{(x^2+p_jx+q_j)}.$$

Примем эту теорему без доказательства.

Из этой теоремы видно, что для вычисления интегралов от рациональных функций необходимо уметь вычислять интегралы от простейших дробей. Перечислим эти интегралы.

1°. $\int\frac{dx}{x-\lambda}=\ln|x-\lambda|+C.$

2°. $\int\frac{dx}{(x-\lambda)^k}=\frac{(x-\lambda)^{1-k}}{1-k}+C.$

3°. $\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}=\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2\pm 1}=\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^2\pm 1}$. Это уже табличный интеграл. При вычислении этого интеграла мы приняли обозначения $x+\frac{p}{2}=t, q-\frac{p^2}{4}=\pm a^2$.

4°. $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dt}{(t^2\pm a^2)^k}=J_k$. Это интеграл, который считается по полученной нами ранее рекуррентной формуле.

Таким образом, мы видим, что интегралы от всех четырёх видов элементарных дробей всегда берутся в элементарных функциях. Это значит, что **интеграл от рациональной функции всегда берётся в элементарных функциях.**

10.2 Интегрирование иррациональностей

В этом разделе мы рассмотрим различные типы интегралов, у которых подинтегральное выражение представляет собой рациональную функцию от иррациональных аргументов.

Рассмотрим 3 типа интегралов такого рода.

I. $J=\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}},...,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$, где R - рациональная функция своих аргументов, а $\frac{p}{q}$, ... , $\frac{r}{s}$ - числовые дроби. Пусть общий знаменатель дробей $\frac{p}{q}$, ... , $\frac{r}{s}$ равен m. Делаем подстановку $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^m$. В этом случае $x=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}$ - рациональное выражение, $dx=$

$\frac{mt^{m-1}\delta(\alpha-\gamma t^m)-mt^{m-1}\gamma(\delta t^m-\beta)}{(\alpha-\gamma t^m)^2}dt$ - тоже рациональное выражение, $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}} = (t^m)^{\frac{p}{q}} = t^k$, k - целое число, $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{r}{s}} = (t^m)^{\frac{r}{s}} = t^l$, l - тоже целое число. В итоге: $J = \int \hat{R}(t)dt \equiv \int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$ - интеграл от рационального выражения.

II. $J = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, где R - рациональная функция своих аргументов, ax^2+bx+c - произвольный трёхчлен.

Необходимо различать два случая, а именно: квадратный трёхчлен имеет действительные корни, квадратный трёхчлен действительных корней не имеет.

В первом случае, если α и β - корни трёхчлена, то $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Делаем подстановку: $t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\alpha} = \frac{\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}}{x-\alpha} = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$, тогда $x = \frac{\alpha t^2-\beta a}{t^2-a}$, $dx = \frac{2\alpha t(t^2-a)-2t(\alpha t^2-\beta a)}{(t^2-a)^2}dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(\frac{\alpha t^2-\beta a}{t^2-a}-\alpha\right)$. В итоге: $J = \int \hat{R}(t)dt \equiv \int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$ - интеграл от рационального выражения.

Во втором случае, когда корни квадратного трёхчлена комплексные, обязательно должно быть выполнено $ax^2+bx+c > 0$, $a > 0$ - квадратный трёхчлен стоит под корнем и не имеет действительных корней. В этом случае делаем подстановку: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \varepsilon\sqrt{a}x + t$, где $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от конкретного примера. Разрешая последнее равенство относительно x, получим $x = \frac{t^2-c}{b-2\varepsilon\sqrt{a}t}$, $dx = \frac{2t(b-2\varepsilon\sqrt{a}t)+(t^2-c)2\varepsilon\sqrt{a}}{(b-2\varepsilon\sqrt{a}t)^2}dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \varepsilon\sqrt{a}x + t = \varepsilon\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\varepsilon\sqrt{a}t} + t$. Подставив все эти выражения под интеграл, получим: $J = \int \hat{R}(t)dt \equiv \int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$ - интеграл от рационального выражения.

Замечание. Подстановки, сделанные выше называются **подстановками Эйлера.**

III. **Интегрирование дифференциального бинома.** $J = \int x^m(a+bx^n)^p dx$, где a, b - постоянные вещественные числа, m, n, p - рациональные числа.

Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев доказал, что этот интеграл берётся в элементарных функциях только в трёх случаях. Укажем их. Для этого сделаем замену $x^n = z$, $x = z^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$. После этого интеграл примет вид: $J = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bz)^p dz$.

1. Если p **- целое число** (положительное, отрицательное или равное нулю), то исходный интеграл имеет вид $J = \int R(z, z^{\frac{r}{s}})dz$, то есть он относится к интегралам типа I. $J = \int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}}, ..., \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$, который мы уже рассматривали выше.

2. Если $\frac{m+1}{n}$ **- целое число,** тогда $\frac{m+1}{n}-1$ - тоже целое число и наш интеграл относится к интегралам вида $J = \int R\left(z, (a+bz)^{\frac{r}{s}}\right)dz$ - это тоже интеграл, относящийся к типу I.

3. Если $\frac{m+1}{n}+p$ **- целое число.**
$J = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bz)^p dz = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}+p-1}(\frac{a}{z}+b)^p dz = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz$ - опять пришли к интегралу типа I.

Во втором и третьем случае интеграл реализуется подстановкой $t = (a+bz)^{\frac{1}{s}}$ и $t = \left(b+\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{s}}$, где s - знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интеграл от дифференциального бинома выразить в элементарных функциях невозможно.

10.3 Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

$J = \int R(\sin x, \cos x)dx$, где R - рациональная функция своих аргументов.

Вычислить этот интеграл всегда возможно при помощи универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Поскольку $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Сделав эти замены, получим интеграл от от рациональной функции вида $J = \int \hat{R}(t)dt = \int \frac{P_m(t)}{Q_n(t)}dt$, а интеграл от рациональной функции, как мы уже выяснили, всегда берётся в элементарных функциях.

Универсальная подстановка всегда приведёт к цели, но, как правило, приводит к достаточно громоздким вычислениям. Поэтому, в частных случаях, удобно использовать подстановки, быстрее приводящие к цели.

Рассмотрим, например, интеграл $J_1 = \int R(\sin x) \cdot \cos x dx$, где R - рациональная функция своего аргумента. Замена очевидна: $t = \sin x, \cos x dx = dt$. Тогда: $J_1 = \int R(t) dt$.

Рассмотрим интеграл $J_2 = \int R(\operatorname{tg} x) dx$. Замена $\operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$. После этой замены интеграл принимает вид: $J_2 = \int \frac{R(t)}{1+t^2} dt$.

Рассмотрим, наконец, интеграл $J_3 = \int (\sin x)^{2p+1} \cos^q x dx$, где p и q - целые числа.

$J_3 = \int (\sin x)^{2p+1} \cos^q x dx = \int (\sin x)^{2p} \cos^q x d \cos x = \int (1 - \cos^2 x)^p \cos^q x d \cos x = \int (1 - t^2)^p \cdot t^q \cdot dt$ - это уже интеграл от рациональной функции.

Глава 11

Введение в определённые интегралы

11.1 Задача об определении площади криволинейной трапеции и определение определённого интеграла

Пусть задана непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $y = f(x) > 0$. Поставим себе задачу найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью $0 - x$, сверху - кривой $f(x)$, слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$. Разобъём отрезок a, b на n частей произвольным образом: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$. Построим прямоугольники высотой $f(x_k)$ и основанием $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Площадь каждого из этих прямоугольников равна $S_k = f(x_k) \cdot \Delta x_k$. Сумма площадей всех этих прямоугольников приблизительно равна площади искомой криволинейной трапеции: $S \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} S_k = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + ... + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k$. Очевидно, что если мы разобъём отрезок a, b на большее число частей, ошибка, допущенная при вычислении указанным выше способом, уменьшится. Увеличивая число делений, мы будем уменьшать ошибку. Таким образом, мы приходим к необходимости рассматривать $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k$. Если этот предел существует, то мы можем принять его за искомую площадь заданной криволинейной трапеции.

Отвлечёмся теперь от этой конкретной задачи и будем изучать пределы указанных выше сумм, только в более общей и строгой постановке. Откажемся, например, от требования, что функция $f(x) > 0$, она непрерывна на сегменте $[a, b$ и так далее.

Итак: пусть на сегменте $[a, b]$ определена функция $y = f(x)$. Разобъём отрезок a, b на n частей произвольным образом: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$. Пусть ξ_k - произвольная *фиксированная* точка из $[x_k, x_{k+1}]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\lambda \stackrel{def}{=} \max\{\Delta x_k\}$, $(k = 0, 1, 2, \; ... \; , n-1)$.

Определение 1. Число $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\ \Delta x_k$ называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$, соответствующей данному разбиению и выбору точек ξ_k.

Определение 2. Число J называется пределом интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)$, такое, что как только $\lambda < \delta$, так сразу выполнится неравенство $|\sigma - J| < \varepsilon$, не зависящее ни от способа разбиения сегмента $[a, b]$ на части, ни от выбора точек ξ_k : $J = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\ \Delta x_k$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* на сегменте $[a, b]$, если существует конечный предел интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$. Этот предел называют *определённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначают символом $J = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Вопрос: какие функции интегрируемы по Риману, а какие нет?

Теорема 1. Неограниченная на сегменте $[a, b]$ функция не интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Действительно, как бы мы не разбивали сегмент $[a, b]$ на части, всегда найдётся такой сегмент $[x_k, x_{k+1}]$, где функция не ограничена, то есть слагаемое $f(\xi_k)\ \Delta x_k$ может быть сделано за счёт выбора точки ξ_k сколь угодно большим по абсолютной величине. Тем самым интегральная сумма становится неограниченной и конечного предела J интегральных сумм σ не существует, что и требовалось доказать.

Таким образом, из теоремы 1 вытекает, что нам необходимо рассматривать лишь ограниченные на сегменте $[a, b]$ функции.

Но все ли ограниченные на сегменте $[a, b]$ функции интегрируемы по Риману? Ответ: нет. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть, например, *функцию Дирихле:* $f(x) = 1$, если x - рациональное число, и $f(x) = 0$, если x - иррациональное число. Эта функция принимает значения только 1 или 0, поэтому она заведомо ограничена на сегменте $[a, b]$, однако значения интегральных сумм этой функции существенно зависят от того, как мы выберем точки ξ_k. Если все ξ_k - рациональные числа, то $\sigma = \Delta x_0 + \Delta x_1 + ... + \Delta x_{n-1} = b - a$, если же в качестве ξ_k выбирать только иррациональные числа, то $\sigma = 0$. Предела интегральных сумм, не зависящих от выбора точек ξ_k , нет; поэтому функция Дирихле не интегрируема по Риману.

11.2 Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции (по Риману)

Необходимо найти условия, при выполнении которых мы могли бы сказать, интегрируема или нет на сегменте $[a, b]$ данная функция. С этой целью введем понятие сумм Дарбу.

Пусть на сегменте $[a, b]$ определена функция $y = f(x)$. Разобъём отрезок a, b на n частей произвольным образом: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$. Обозначим $M_k \stackrel{def}{=} \sup f(x),\ x \in [x_k, x_{k+1}]$, $m_k \stackrel{def}{=} \inf f(x),\ x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Определение. Суммы $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ и $s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу*, соответствующими данному разбиению. Так как $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$, очевидно, что $s \leqslant \sigma \leqslant S$.

Отметим здесь некоторые очевидные свойства сумм Дарбу:

Свойство 1. Если к фиксированному разбиению добавить новые точки разбиения, (фактически, при измельчении разбиения), верхняя сумма Дарбу может только уменьшиться, а нижняя - только возрасти.

Доказательство. Действительно, добавим к сегменту $[x_k, x_{k+1}]$ ещё одну точку разбиения x'. Тогда M'_k и M''_k - соответственно точная верхняя грань для функции $f(x)$, когда $x \in [x_k, x']$, и $x \in [x', x_{k+1}]$. Очевидно, что $M'_k \leqslant M_k$, $M''_k \leqslant M_k$. Поскольку $\Delta x'_k + \Delta x''_k = \Delta x_k$, то $M'_k \Delta x'_k + M''_k \Delta x''_k \leqslant M_k(\Delta x'_k + \Delta x''_k) = M_k \Delta x_k$. Отсюда $S' \leqslant S$. Аналогично доказывается, что $s' \geqslant s$.
Свойство доказано.

Свойство 2. Любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой другой верхней суммы Дарбу.

Доказательство. Действительно, рассмотрим нижние и верхние суммы Дарбу, принадлежащие двум разным разбиениям: s_1 ,S_1 и s_2, S_2. Докажем, что $s_1 \leqslant S_2$. Для этого объединим первое и второе разбиения. Вследствие этого возникнет третье разбиение с нижней суммой Дарбу s_3 и верхней суммой Дарбу S_3. В силу свойства 2 имеем: $s_1 \leqslant s_3 \leqslant S_3 \leqslant S_2$ - нижняя сумма Дарбу одного разбиения не превосходит верхнюю сумму Дарбу другого разбиения, что и требовалось доказать.

Теорема о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции. Для того, чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы для любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $|S - s| < \varepsilon$. (Без доказательства.)

На основании этой теоремы мы можем ответить на поставленный ранее вопрос: какие функции интегрируемы по Риману?

Теорема 1. Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. В силу теоремы Кантора непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна на этом сегменте. Это означает, что задавшись $\varepsilon > 0$, мы найдём $\delta > 0$ (для всего сегмента одно, зависящее только от выбора ε и не зависящее от x) такое, что как только выполнится неравенство $\Delta x_k < \delta$, так сразу выполнится $\omega_k \overset{def}{=} M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$. (В силу непрерывности функции $f(x)$ M_k и m_k достигаются на каждом сегменте $[x_k, x_{k+1}]$). Но тогда $S - s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$. В итоге - $S - s < \varepsilon$ - необходимое и достаточное условие интегрируемости функции выполнено.

Теорема 2. Ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$, имеющая на этом сегменте конечное точек разрыва первого рода, интегрируема (по Риману) на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Пусть p - число точек разрыва. Зададимся $\varepsilon > 0$. Покроем каждую точку разрыва интервалом длины $\frac{\varepsilon}{p}$. Вне этих интервалов имеем сегменты, где функция непрерывна. Рассмотрим $S - s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k$. Разобъём эту сумму на две части: первая часть - это сумма по интервалам, покрывающим точки разрыва: $\sum\limits_{i=1}^{p} \omega_i' \Delta x_i$, вторая часть - сумма по всем остальным сегментам: $\sum\limits_{j=0}^{n-p-1} \omega_j'' \Delta x_j$. В результате: $S - s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = \sum\limits_{i=1}^{p} \omega_i' \Delta x_i + \sum\limits_{j=0}^{n-p-1} \omega_j'' \Delta x_j$. Если обозначить $M = \sup f(x)$, $m = \inf f(x)$, $x \in [a, b]$, то $\omega_i' < M - m$. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{p} \omega_i' \Delta x_i < (M - m) \cdot \frac{\varepsilon}{p} \cdot p = (M - m) \cdot \varepsilon \overset{def}{=} \varepsilon_1$. В силу непрерывности функции на остальных сегментах, на основании теоремы 1, для второй части суммы имеем: $\sum\limits_{j=0}^{n-p-1} \omega_j'' \Delta x_j < \varepsilon_2$. В итоге: $S - s < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \overset{def}{=} \varepsilon$ - это необходимое и достаточное условие интегрируемости функции.

Теорема доказана.

11.3 Основные свойства определённого интеграла

1°. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

2°. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, поскольку, если мы идём от точки a к точке b (будем считать, что $a < b$), то $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$, а если от точки b к точке a, то $\Delta x_k < 0$, что и доказывает утверждение.

3°. Если $f(x)$ и $h(x)$ - интегрируемые на сегменте $[a, b]$ функции, то $\int\limits_a^b [f(x) \pm h(x)]dx = \int\limits_b^a f(x)dx \pm \int\limits_b^a h(x)dx.$

4°. Если $f(x)$ - интегрируемая на сегменте $[a, b]$ функция и $k = const$, то $\int\limits_b^a k \cdot f(x)dx = k \cdot \int\limits_b^a f(x)dx.$

5°. Если функция $f(x)$ - интегрируема на сегменте $[a, c]$ и на сегменте $[c, b]$, тогда функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и выполнено равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

Доказательство. Необходимо рассмотреть три случая: 1. $a < c < b$, 2. $a < b < c$, 3. $c < a < b$.

1. $a < c < b$. Рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=0 (a<x<b)}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{(a<x<c)} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{(c<x<b)} f(\xi_k)\Delta x_k \equiv \sigma_1 + \sigma_2.$$

Поскольку функция $f(x)$ - интегрируема на сегменте $[\ a,\ c\ ]$, существует конечный, не зависящий от способа разбиения и выбора точек ξ_k, предел интегральной суммы σ_1 : $\lim\limits_{\lambda_1 \to 0} \sigma_1 = \int\limits_a^c f(x)dx$. Аналогично, поскольку функция $f(x)$ - интегрируема на сегменте $[\ c,\ b\ ]$, существует конечный, не зависящий от способа разбиения и выбора точек ξ_k, предел интегральной суммы σ_2 : $\lim\limits_{\lambda_2 \to 0} \sigma_2 = \int\limits_c^b f(x)dx$. Если выбрать $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, то ясно, что существует $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_1 +$

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_2 = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

2. $a < b < c.$ На основании рассмотренного выше случая, можно утверждать, что $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx.$ Далее, пользуясь свойством **2°**, получим: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

3. Третий случай, когда $c < a < b,$ доказывается совершенно аналогично.

6°. Если $f(x) \geqslant 0$ и интегрируема на сегменте $[a, b],$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0.$

7°. Если $f(x) \geqslant g(x)$ и интегрируема на сегменте $[a, b],$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$

8°. Если $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b],$ то интегрируема и функция $|f(x)|,$ причём $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx.$ Это свойство следует из очевидного неравенства: $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|\Delta x_k.$ (Напомним, что мы считаем $\Delta x_k > 0.$)

9°. Общая теорема о среднем. Пусть функция $f(x)\cdot g(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b],$ пусть $M = \sup f(x),$ $m = \inf f(x),$ при $x \in [a, b].$ Тогда всегда найдётся такое число $m \leqslant \mu \leqslant M,$ что $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$

Доказательство. Исходим из неравенства $m \cdot \int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx \leqslant M \cdot \int\limits_a^b g(x)dx,$ которое всегда имеет место, если $g(x) > 0.$ (Если $g(x) < 0,$ рассмотрение полностью аналогично, при $g(x) = 0$ утверждение тривиально.) В таком случае $\int\limits_a^b g(x)dx > 0.$ Из неравенств вытекает $m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$ Обозначая $\mu = \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$ сразу приходим к требуемому равенству: $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \mu \cdot \int\limits_a^b g(x)dx.$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b],$ то она на этом сегменте достигает свою точную верхнюю грань $M,$ точную нижнюю грань m и принимает все значения между ними. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\mu = f(\xi),$ и теорема о среднем примет вид: $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\cdot \int\limits_a^b g(x)dx.$

Замечание 2. Если $g(x) \equiv 1$ и все условия теоремы о среднем выполнены, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu \cdot \int\limits_a^b dx = \mu\cdot(b - a),$ а для непрерывной функции $f(x)$ имеем: $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b - a).$

Глава 12

Вычисление определённых интегралов

12.1 Формула Ньютона - Лейбница

Пусть $f(t)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, где $x \in [a,b]$. Докажем, что $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то есть что $F'_x(x) = f(x)$. Действительно, $F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\cdot\Delta x$, где $\xi \in [x, x+\Delta x]$. Следовательно, $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(\xi)$. Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $F'_x(x) = f(x)$. (Ясно, что при $\Delta x \to 0,\ \xi \to x$.)

Мы знаем, что что все первообразные функции $f(x)$ отличаются лишь на постоянную: $\Phi(x) = F(x) + C$, поэтому $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$. Положим $x = a$. Тогда $\Phi(a) = \int\limits_a^a f(t)dt + C = 0 + C$, то есть $\Phi(a) = C$. При $x = b$ имеем: $\Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)dt + \Phi(a)$, или $\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) \stackrel{def}{=} \Phi(x)|_a^b$. Последняя формула называется *формулой Ньютона - Лейбница.*

12.2 Методы интегрирования заменой переменных и по частям

Теорема 1. Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и пусть $x = \varphi(t)$ такова, что при $t \in [\alpha,\beta]$ переменная x пробегает все точки сегмента $[a,b]$, причём $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Кроме того, пусть $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[\alpha,\beta]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'_t dt$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, она имеет первообразную $\Phi(x)$, причём, согласно формуле Ньютона - Лейбница, $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$. С другой стороны, рассмотрим дифференцируемую функцию $\Phi(\varphi(t))$. Её производная имеет вид: $\frac{d\Phi(\varphi(t))}{dt} = \Phi'_\varphi \cdot \varphi'_t = f(\varphi(t))\cdot\varphi'_t$. Следовательно, $\Phi(\varphi(t))$ - есть первообразная функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'_t$. Поэтому $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'_t(t)dt = \Phi(\varphi(t))|_\alpha^\beta = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на сегменте $[a,b]$. Тогда имеет место формула: $\int\limits_a^b udv = (uv)|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим $\int\limits_a^b (udv + vdu) = \int\limits_a^b (uv' + u'v)\,dx = \int\limits_a^b (uv)'\,dx = uv|_a^b$. Следовательно, $\int\limits_a^b udv + \int\limits_a^b vdu = uv|_a^b$, откуда требуемая формула получается очевидным образом.

Теорема доказана.

12.3 Первоначальные сведения о несобственных интегралах

1°. Несобственные интегралы первого рода. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в любой точке полупрямой $[a,\infty)$. Рассмотрим сегмент $[a,A]$, где $\forall\ A\in[a,\infty)$, а на этом сегменте рассмотрим интеграл $F(A)=\int\limits_a^A f(x)dx$. Если при $A\to\infty$ существует предел $I=\lim\limits_{A\to\infty}F(A)=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$, то этот предел называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ на промежутке $[a,\infty)$. Для интеграла I используется обозначение $I=\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Если предел существует и он конечен, то говорят, что интеграл *сходится.* Если же предел не существует, или он равен бесконечности, то выражение $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ понимают как некоторый символ и говорят, что интеграл *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)dx$, а несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ понимают как сумму двух несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx+\int\limits_a^\infty f(x)dx.$

Замечание 1. В отличие от несобственных интегралов, обычный интеграл Римана по конечному промежутку называется *собственным интегралом.*

Замечание 2. Из свойств собственного интеграла и определения несобственного интеграла для любых вещественных a и b тривиально имеем $\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^\infty f(x)dx=\int\limits_a^\infty f(x)dx.$

Пример 1. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to\infty}\operatorname{arctg}x|_0^A=\lim\limits_{A\to\infty}(\operatorname{arctg}A-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{2}$ - интеграл сходится.

Пример 2. При любом $a>0$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^\infty\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}\right), & \alpha\neq 1,\\ \lim\limits_{A\to\infty}(\ln A-\ln a), & \alpha=1.\end{cases}$$

Отсюда следует, что этот интеграл сходится при $\alpha>1$ и равен $\frac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha}$, и расходится при $\alpha\leqslant 1$.

2°. Несобственные интегралы второго рода. До этого момента мы предполагали, что функция конечна всюду на рассматриваемом сегменте $[a,b]$. А как поступать, если функция терпит бесконечный разрыв в одной из точек этого сегмента, например, в точке b ?

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,b)$ и не ограничена на нём. Пусть эта функция интегрируема на любом промежутке $[a,b-\varepsilon)$, где ε - сколь угодно малая положительная величина. Рассмотрим интеграл $\Phi(\varepsilon)=\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$. Если при $\varepsilon\to 0$ существует предел $J=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\Phi(\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$, то этот предел J называется *несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если предел существует и он конечен, то говорят, что интеграл *сходится.* Если же предел не существует, или он равен бесконечности, то выражение $\int\limits_a^b f(x)dx$ понимают как некоторый символ и говорят, что интеграл *расходится.* Точка b называется *особой точкой* интеграла J.

Если особой точкой интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ является нижний предел интегрирования a , то несобственный интеграл определяется аналогично: на промежутке $(a+\lambda,b]$, где λ - сколь угодно малое положительное число, рассмотрим интеграл $\Phi(\lambda)=\int\limits_{a+\lambda}^b f(x)dx$. Тогда $J=\lim\limits_{\lambda\to0}\Phi(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\int\limits_{a+\lambda}^b f(x)dx\stackrel{def}{=}\int\limits_a^b f(x)dx.$

Если особая точка c лежит внутри сегмента $[a,b]$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$

определяется как сумма двух несобственных интегралов: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

12.4 Вычисление площадей плоских фигур

1°. Изучение определённого интеграла мы начали с задачи об определении площади криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью $0-x$, сверху - кривой $f(x)$, слева и справа - прямыми $x=a$ и $x=b$. Мы выяснили, что площадь S указанной криволинейной трапеции равна $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

2°. Если же нужно найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью $0-x$ сверху, а кривой $f(x)$ – снизу, слева и справа – по-прежнему – прямыми $x=a$ и $x=b$, то очевидно, что в этой формуле надо просто перед интегралом поменять знак на обратный: $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$.

3°. Интереснее выглядит задача о нахождении площади криволинейного сектора, ограниченного двумя лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ и кривой $r=r(\varphi)$, заданной в полярной системе координат.

Разобъём произвольным образом сегмент $[\alpha,\beta]$ на n частей: $\alpha \overset{def}{=} \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < ... < \varphi_k < \varphi_{k+1} < ... < \varphi_n \overset{def}{=} \beta$. Возникнет n элементарных секторов с полярными радиусами $r_k = r(\varphi_k)$, $r_{k+1} = r(\varphi_{k+1})$ и углом между ними $\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$. Обозначим $M_k = \sup r(\varphi)$, $m_k = \inf r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$. Видим, что $m_k \leqslant r(\theta_k) \leqslant M_k$, $\forall\, \theta_k \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$. $s_k = \frac{1}{2}m_k^2\Delta\varphi_k$ - площадь кругового сектора радиуса m_k, $S_k = \frac{1}{2}M_k^2\Delta\varphi_k$ – площадь кругового сектора, радиуса M_k. Видим, что $\sigma_k = \frac{1}{2}r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k$ такова, что $s_k \leqslant \sigma_k \leqslant S_k$. Очевидно, что $s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k$ - нижняя сумма Дарбу, $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} S_k$ - верхняя сумма Дарбу, а $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sigma_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k$ - интегральная сумма функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$. Тогда, по определению определённого интеграла, площадь сектора равна пределу интегральных сумм, когда максимальный диаметр разбиения стремится к нулю, при этом число элементов разбиения стремится к бесконечности: $P_{cek} = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = \frac{1}{2}\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

Окончательно: $P_{cek} = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

12.5 Вычисление длины дуги кривой

Пусть задана кривая (A,B) : $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где функция $\vec{r}(t)$ непрерывна и дифференцируема на множестве T. Если $t \in [\alpha,\beta]$, то имеем определённую её часть (дугу, может быть и замкнутую). Разобъём сегмент $[\ \alpha,\ \beta\ ]$ на n частей произвольным образом: $\alpha \overset{def}{=} t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ... < t_n \overset{def}{=} \beta$. Тем самым, дуга разобьётся точками $A = M_0, M_1, M_2,\ ...\ , M_k,\ ...\ , M_n = B$ на n частей. Впишем в дугу A,B ломаную: $\overrightarrow{A,M_1}$, $\overrightarrow{M_1,M_2}$, ... , $\overrightarrow{M_k,M_{k+1}}$, ... , $\overrightarrow{M_{n-1},B}$. Пусть $\lambda = \max\left|\overrightarrow{M_k,M_{k+1}}\right|$, $k=0,1,2,...,n$.

Определение. Длиной дуги (A,B) мы назовём предел периметра ломаной, вписанной в дугу, когда максимальный диаметр разбиения λ стремится к нулю при бесконечном увеличении числа звеньев, то есть когда $\lambda\to 0$ при $n\to\infty$.

Таким образом, периметр ломаной, вписанной в дугу, равен $\sigma_n = \left|\overrightarrow{A,M_1}\right| + \left|\overrightarrow{M_1,M_2}\right| + ... + \left|\overrightarrow{M_k,M_{k+1}}\right| + ... + \left|\overrightarrow{M_{n-1},B}\right|$. Согласно определению, длина дуги (A,B) равна: $L = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$. Длину отрезка $\overrightarrow{M_k,M_{k+1}}$, пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, запишем в виде $\left|\overrightarrow{M_k,M_{k+1}}\right| = |\vec{r}(t_{k+1}) - \vec{r}(t_k)| = \left|\dot{\vec{r}}(\xi_k)\cdot\Delta t_k\right|$, где $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Будем считать, что параметр t растёт вдоль дуги, поэтому $\Delta t_k > 0$. Тогда $\left|\overrightarrow{M_k,M_{k+1}}\right| = \left|\dot{\vec{r}}(\xi_k)\right|\cdot\Delta t_k$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|\dot{\vec{r}}(\xi_k)\right|\cdot\Delta t_k$. Эту сумму мы можем считать интегральной суммой для функции $\left|\dot{\vec{r}}(\xi_k)\right|$, следовательно, длина дуги равна $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt$. Вспомним, что в трёхмерном пространстве $\vec{r}(t) = \vec{i} \cdot x(t) + \vec{j} \cdot y(t) + \vec{k} \cdot z(t)$, $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{i} \cdot \dot{x}(t) + \vec{j} \cdot \dot{y}(t) + \vec{k} \cdot \dot{z}(t)$, $\left|\dot{\vec{r}}(t)\right| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$. Таким образом, для трёхмерной кривой, заданной в параметрическом виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$.

Если кривая задана на плоскости, то $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ а формула для вычисления длины кривой упростится; в этом случае: $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$.

Если кривая на плоскости задана в явном виде $y = f(x)$, а $x \in [a, b]$, то полагая в предыдущей формуле $\begin{cases} t = x, \\ y = y(x), \end{cases}$ получим: $L = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

Пусть кривая задана в полярной системе координат $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ как $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Тогда очевидно, что представление кривой в виде $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi, \end{cases}$ - не что иное, как задание кривой в параметрическом виде, где параметром служит угол φ. Нетрудно показать, что в этом случае формула для вычисления длины дуги такова: $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} d\varphi$.

Если конечную точку B на кривой не фиксировать, то $l(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(u) + \dot{z}^2(u)} du$. Нам известно, что $l(t)$ - это первообразная подинтегральной функции, поэтому

$$l'_t(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)},$$

а дифференциал длины дуги, следовательно, имеет вид

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Рассуждая аналогично, легко показать, что если кривая задана на плоскости в явном виде, то дифференциал длины дуги кривой имеет вид $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$, а если кривая задана в полярной системе координат, то $dl = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} d\varphi$.

Глава 13

Функции многих переменных

13.1 n - мерное декартово пространство

Пусть n - натуральное число. Под n - *мерным вещественным пространством* $\Re^n$ мы будем понимать множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ вещественных чисел x_k, $k = 1, 2, ..., n$. Каждый такой набор будем обозначать так: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и называть точкой.

Можно построить наглядную модель $\Re^2$ (или $\Re^3$), аналогичную представлению множества вещественных чисел $\Re$ в виде числовой прямой. Для этого на плоскости построим оси oX_1, oX_2 и любому элементу (x_1, x_2) из $\Re^2$ поставим точку с координатами (x_1, x_2). Тем самым, между элементами $\Re^2$ и всеми элементами плоскости установлено взаимно-однозначное соответствие, поскольку возможно и обратное сопоставление: любой точке плоскости можно поставить в соответствие элемент $(x_1, x_2) \in \Re^2$. Совершенно аналогично строится модель $\Re^3$. Обобщение на n -мерный случай $\Re^n$ очевидно.

В $\Re^n$ можно ввести структуру векторного пространства, если под суммой элементов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ понимать элемент $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$, а под элементом λx (λ - вещественное число) понимать $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$. В результате мы получили пространство строк (столбцов), элементы которого называются уже не точкой, а вектором.

Определение 1. Нормой вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется число $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ и обозначается $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Отметим, что в $\Re^n$ можно ввести и другие определения нормы вектора.

Иногда за норму вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ удобно взять число $\|x\| = \max |x_k|$, $k = 1, 2, ..., n$.

Определение 2. Расстояние между точками $x \in \Re^n$ и $y \in \Re^n$ - это число $\|x - y\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ и обозначается $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$.

Нетрудно доказать, что: 1) $\rho(x, y) > 0 \leftrightarrow x \neq y$, $\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$, 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, 3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для всех x, y и z из $\Re^n$.

Если x и y из $\Re^n$ считать переменными точками, то $\rho(x, y)$ - есть вещественная двухточечная функция и носит название *метрической функции,* а пространство $\Re^n$, в котором задана метрическая функция, называется *метрическим пространством.* Метрика, введённая выше, носит название *евклидовой метрики,* поэтому пространство $\Re^n$ часто в алгебре называют *евклидовым пространством.*

13.2 Окрестности и последовательности точек

Определение 1. Пусть $\overset{\circ}{x} = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n) \in \Re^n$ и $\varepsilon > 0$. ε - окрестностью точки $\overset{\circ}{x}$ называется множество вида $u_\varepsilon(\overset{\circ}{x}) = \{\left|x - \overset{\circ}{x}\right| < \varepsilon\}$, то есть множество, все точки которого удовлетворяют неравенству $\max\left|x_k - \overset{\circ}{x}_k\right| < \varepsilon$, $k = 1, 2, ..., n$. Очевидно, что $u_\varepsilon(\overset{\circ}{x})$ - есть n - мерный куб с центром в точке $\overset{\circ}{x}$ и рёбрами длины 2ε. (Множество точек, лежащих на рёбрах и гранях куба, не включаются в рассматриваемую ε - окрестностью точки $\overset{\circ}{x}$.)

Замечание. Иногда за ε - окрестность точки $\overset{\circ}{x}$ берут n - мерный шар $\left\|x-\overset{\circ}{x}\right\|<\varepsilon$, (или $\rho(x,\overset{\circ}{x})<\varepsilon$,) причём, множество точек поверхности (n - мерная сфера) не включается в ε - окрестность точки $\overset{\circ}{x}$.

Определение 2. Пусть множество $M\subset\Re^n$. Точка $\overset{\circ}{x}\in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если существует такое $\varepsilon>0$, что $u_\varepsilon(\overset{\circ}{x})\subset M$.

Определение 3. Окрестностью $u(x)$ точки x назовём любое множество точек из $\Re^n$, содержащее точку x как внутреннюю точку. В частности, всякая ε - окрестность точки x - есть её окрестность.

Определение 4. Множество $M\subset\Re^n$ называется *открытым множеством,* если каждая точка этого множества является его внутренней точкой.

Определение 5. Пусть $M\subset\Re^n$. Множество всех точек x из $\Re^n$, не принадлежащих множеству M, называется *дополнением* множества M и обозначается символом M'.

Определение 6. Множество $M\subset\Re^n$ называется *замкнутым,* если его дополнение M' открыто.

Например: $M=\{x:\left\|x-\overset{\circ}{x}\right\|<a\}$. Множество M' - открыто, следовательно, M - замкнуто.

Определение 7. Множество $M\subset\Re^n$ называется *ограниченным,* если существует такое $r>0$, что $M\subset Q_r=\{x:|x|\leqslant r\}$. Иначе говоря, множество M содержится в кубе с центром в начале координат и ребром, равным $2r$.

Определение 8. Если каждому натуральному числу l поставлена в соответствие некоторая точка $\overset{(l)}{x}=(\overset{(l)}{x}_1,\overset{(l)}{x}_2,...,\overset{(l)}{x}_n)$ из $\Re^n$, то говорят, что задана *последовательность* точек $\{\overset{(l)}{x}\}\in\Re^n$. Каждая отдельная точка называется *элементом последовательности,* $\{\overset{(l)}{x}\}$. Два элемента последовательности могут совпадать как точки, но их, в качестве элементов последовательности, необходимо рассматривать как разные элементы.

Каждая последовательность $\{\overset{(l)}{x}\}$ определяет в $\Re^n$ некоторое множество, которое мы обозначим $\prod=\{x,x\in\{\overset{(l)}{x}\}\}$.

Определение 9. Последовательность точек $\{\overset{(l)}{x}\}$ называется *ограниченной,* если $\prod$ - ограниченное множество.

Определение 10. Последовательность точек $\{\overset{(l)}{x}\}$ называется *сходящейся* к точке $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, если в каждой окрестности точки a содержатся все элементы последовательности, за исключением, может быть, конечного их числа.

Другими словами, для каждой окрестности $u_\varepsilon(a)$ найдётся такой номер L, что для всех номеров $l\geqslant L$ $\overset{(l)}{x}\in u_\varepsilon(a)$. (Заметим, что номер L зависит от выбора окрестности $u_\varepsilon(a)$). В этом случае мы пишем $\lim\limits_{l\to\infty}\overset{(l)}{x}=a$.

Это же определение можно сформулировать так: для любого $\varepsilon\geqslant 0$ существует номер $L(\varepsilon)$ такой, что при $l\geqslant L$ выполнится $\overset{(l)}{x}\in u_\varepsilon(a)$.

Теорема. Пусть $\overset{(l)}{x}=(\overset{(l)}{x}_1,\overset{(l)}{x}_2,...,\overset{(l)}{x}_n)$ - элементы последовательности $\{\overset{(l)}{x}\}$ и $a=(a_1,a_2,...,a_n)$. Для того, чтобы точка a была пределом последовательности $\{\overset{(l)}{x}\}$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{l\to\infty}\overset{(l)}{\underset{k}{x}}=a_k$, $(k=1,2,...,n)$.

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{l\to\infty}\overset{(l)}{x}=a$. Зададимся $\varepsilon>0$, тогда найдётся номер $L(\varepsilon)$ такой, что как только $l\geqslant L(\varepsilon)$, так сразу $\overset{(l)}{x}\in u_\varepsilon(a)$, то есть выполнится $\left|\overset{(l)}{x}-a\right|<\varepsilon$, или $\max\left|\overset{(l)}{x}_k-a_k\right|<\varepsilon$.

При этом тем более выполнятся неравенства $\left|\overset{(l)}{x_1} - a_1\right| < \varepsilon, \left|\overset{(l)}{x_2} - a_2\right| < \varepsilon, ..., \left|\overset{(l)}{x_n} - a_n\right| < \varepsilon,$ что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{l\to\infty} \overset{(l)}{x_k} = a_k$. Зададимся $\varepsilon > 0$, тогда найдётся номер $L_1(\varepsilon)$, что при $l \geqslant L_1(\varepsilon)$ выполнится $\left|\overset{(l)}{x_1} - a_1\right| < \varepsilon$, найдётся такой номер $L_2(\varepsilon)$, что при $l \geqslant L_2(\varepsilon)$ выполнится $\left|\overset{(l)}{x_2} - a_2\right| < \varepsilon$, и так далее. Окончательно, найдётся такой номер $L_n(\varepsilon)$, что при $l \geqslant L_n(\varepsilon)$ выполнится $\left|\overset{(l)}{x_n} - a_n\right| < \varepsilon$. Взяв за $L = \max(L_1, L_2, ..., L_n)$, мы получим, что при при $l \geqslant L(\varepsilon)$ все неравенства выполнятся одновременно. Это означает, что при $l \geqslant L(\varepsilon)$ выполнится $\left|\overset{(l)}{x} - a\right| < \varepsilon$, то есть $a = \lim\limits_{l\to\infty} \overset{(l)}{x}$, что и требовалось.

Очевидно, что данная теорема вопрос об исследовании предела последовательности точек $\Re^n$ сводит к вопросу об исследовании обычного предела последовательности точек числовой прямой.

Поэтому, на основании этой теоремы, можно утверждать, что

1. $\lim\limits_{l\to\infty} (\overset{(l)}{x} \pm \overset{(l)}{y}) = \lim\limits_{l\to\infty} \overset{(l)}{x} \pm \lim\limits_{l\to\infty} \overset{(l)}{y}$, и
2. $\lim\limits_{l\to\infty} (\lambda \cdot \overset{(l)}{x}) = \lambda \cdot \lim\limits_{l\to\infty} \overset{(l)}{x}$.

13.3 Функция n переменных. Непрерывность функции n переменных

Определение 1. Если каждой точке x множества $M \subset \Re^n$ однозначным образом поставлен определённый $f(x) \in \overline{\Re} \overset{def}{=} \Re \cup (-\infty, +\infty)$, то говорят, что на множестве M задана функция f со значениями из $\overline{\Re}$.

Множество M называется *областью определения* функции f. Функцию f называют функцией n переменных и пишут $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Если для всех точек $x \in M$ всегда $f(x) \in \Re$, то f называют *вещественной* функцией n переменных.

Пример. Рассмотрим функцию $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$. Функция z - это функция двух переменных, $M = x^2 + y^2 < 1$ - открытый круг единичного радиуса - есть область определения данной функции, а функция принимает значения $-\infty < z < +\infty$.

График этой функции можно представить как некоторую поверхность в $\Re^3$. Аналогично этому функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ рассматривается как некоторая гиперповерхность в $n+1$ - мерном пространстве $\Re^{n+1}$.

Определение 2. Если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что как только выполнится условие $|x - a| < \delta$, так сразу выполнится неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (или, подробнее, $|f(x_1, x_2, ..., x_n) - A| < \varepsilon$), то говорят, что число A - есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$ и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Как и в случае одного переменного, имеет место следующая

Теорема. Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек $\{\overset{(l)}{x}\}$, сходящейся к a, последовательность значений функции $\left\{\overset{(l)}{f} = f(\overset{(l)}{x_1}, \overset{(l)}{x_2}, ..., \overset{(l)}{x_n})\right\}$ сходилась к A.

Доказательство этой теоремы слово в слово повторяет доказательство теоремы для функции одной переменной, поэтому здесь мы его приводить не будем. Однако ясно, что вследствие этой теоремы все теоремы, имеющие место для пределов последовательностей в $\Re^n$, автоматически переносятся на пределы функций.

Определение 3. Функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется непрерывной в точке $\overset{\circ}{x} =$

$(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$, если она определена в этой точке и $\lim\limits_{x \to \overset{\circ}{x}} f(x) = f(\overset{\circ}{x}) = f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$.

Определение 4. Функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется непрерывной на множестве M, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

На языке "$\epsilon - \delta$" определение непрерывности в точке $\overset{\circ}{x}$ функции $f(x)$ читается так: если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что как только выполнится условие $\left| x - \overset{\circ}{x} \right| < \delta$, так сразу же выполнится неравенство $\left| f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n) \right| < \varepsilon$.

Если через Δx_k обозначить разность $x_k - \overset{\circ}{x}_k = \Delta x_k$ и назвать приращением аргумента в точке $\overset{\circ}{x}$, а $\Delta u = f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$ - полным приращением функции в точке $\overset{\circ}{x}$, то непрерывность функции $f(x)$ в точке $\overset{\circ}{x}$ будет читаться так: если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что как только выполнится условие $\max\limits_{k=1,2,...,n} |\Delta x_k| < \delta$, так сразу же выполнится неравенство $|\Delta u| < \varepsilon$.

Теорема. Если $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g(x) = g(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывны в точке $\overset{\circ}{x}$, то непрерывны также $h(x) = f(x) \pm g(x)$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ и $h(x) = f(x) \big/ g(x)$, $(g(\overset{\circ}{x}) \neq 0)$.

Как мы знаем, непрерывная на сегменте функция одного переменного обладает рядом замечательных свойств: она ограничена, достигает своего наибольшего и наименьшего значения и так далее. Когда же мы рассматриваем функцию n переменных, являющейся непрерывной на множестве M, то спрашивается, какое множество в этом случае играет роль сегмента?

Оказывается, что если множество M *ограничено и замкнуто,* иными словами *компактно,* то непрерывная на нём функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ обладает следующими свойствами:

1. Она ограничена на этом множестве, то есть найдётся такое число K, что $|f(x)| \leqslant K$ для любой точки $x \in M$.

2. Она достигает своего наибольшего и наименьшего значения, то есть найдётся такая точка $x' \in M$, что $f(x') = \sup f(x)$ ($f(x') = \inf f(x)$).

Определение 5. Функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве M (множество M не обязательно компактно), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек x' и x'' из множества M, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема Кантора. Функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, непрерывная на компактном множестве M, равномерно непрерывна на этом множестве. (Без доказательства).

13.4 Дифференцируемость функции n переменных

Пусть на множестве $M \subseteq \Re^n$ задана функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и точка $\overset{\circ}{x} = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$ из множества M. Пусть $u(\overset{\circ}{x})$ - окрестность точки $\overset{\circ}{x}$.

Рассмотрим точку $x = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_{k-1}, \overset{\circ}{x}_k + \Delta x_k, \overset{\circ}{x}_{k+1}, ..., \overset{\circ}{x}_n) \in u(\overset{\circ}{x})$.

Разность

$$f(x) - f(\overset{\circ}{x}) = f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_{k-1}, \overset{\circ}{x}_k + \Delta x_k, \overset{\circ}{x}_{k+1}, ..., \overset{\circ}{x}_n) -$$
$$- f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_{k-1}, \overset{\circ}{x}_k, \overset{\circ}{x}_{k+1}, ..., \overset{\circ}{x}_n)$$

назовём *частным приращением* функции $f(x)$ в точке $\overset{\circ}{x}$ по аргументу x_k и обозначим $\Delta_{x_k} f$.

Определение 1. Предел отношения частного приращения функции $f(x)$ в точке $\overset{\circ}{x}$ к соответствующему приращению аргумента x_k, когда $\Delta x_k \to 0$ произвольным образом, называется *частной производной* функции $f(x)$ по аргументу x_k в точке $\overset{\circ}{x}$ и обозначается символом $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ или символом f'_{x_k}. Иначе: $\lim\limits_{\Delta x_k \to \infty} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} = f'_{x_k}$.

Пример. $z = e^{xy}$. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot e^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot e^{xy}$.

Определение 2. Если аргументы $x_1, x_2, ..., x_n$ функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$ имеют приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, не выводящие нас из некоторой окрестности $u(\overset{\circ}{x})$ точки $\overset{\circ}{x}$, то разность

$$\Delta f = f(x) - f(\overset{\circ}{x}) = f(\overset{\circ}{x_1 +} \Delta x_1, \overset{\circ}{x_2 +} \Delta x_2, ..., \overset{\circ}{x}_n + \Delta x_n) - f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$$

называется *полным приращением* функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$.

Определение 3. Функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *дифференцируемой в точке* $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$, если её полное приращение Δf может быть представлено в виде

$$\Delta f = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_n \cdot \Delta x_n + \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \alpha_2 \cdot \Delta x_2 + ... + \alpha_n \cdot \Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \Delta x_k,$$

где α_k - бесконечно малые функции, зависящие, вообще говоря, от всех Δx_k $(k = 1, 2, ..., n)$, и стремящиеся к нулю, когда все Δx_k стремятся к нулю, а A_k - постоянные, не зависящие от Δx_k.

Теорема 1. Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$, то она имеет частные производные в этой точке, причём $\frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} = A_k$.

Доказательство. Пусть функция функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$. Поскольку приращения аргументов произволны, рассмотрим частный случай, когда $\Delta x_1 \neq 0, \Delta x_2 = 0, ..., \Delta x_n = 0$. Тогда $\Delta f = \Delta_{x_1} f = A_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1$. Отсюда $\frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = A_1 + \alpha_1$. Поскольку при $\Delta x_1 \to 0$ и $\alpha_1 \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x_1 \to \infty} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = A_1$. С другой стороны, $\lim\limits_{\Delta x_1 \to \infty} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = \frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_1}$. Следовательно, $\frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_1} = A_1$. Рассуждая аналогично, покажем, что при любом k выполнено $\frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} = A_k$. Таким образом, $\Delta f = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \Delta x_k$.

Теорема 2. Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Действительно, из определения дифференцируемости $\Delta f = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cdot \Delta x_k + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \Delta x_k$ видим, что $\Delta f \to 0$, когда все $\Delta x_k \to 0$ одновременно. Иначе говоря, бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.

Итак, если функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$, то она непрерывна в этой точке и имеет в этой точке частные производные. Верно ли обратное утверждение? Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке $\overset{\circ}{x}$ частные производные. Дифференцируема ли эта функция в точке $\overset{\circ}{x}$?

Рассмотрим поучительный пример:

$$z = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)}, (x, y) \in \Re \backslash \{0, 0\} \\ 0, (x, y) = \{0, 0\} \end{cases}$$

Вопрос: как ведёт себя эта функция в точке $(x_0, y_0) = \{0, 0\}$? Видим: $\Delta_x z = \frac{(0+\Delta x) \cdot 0}{(0+\Delta x)^2 + 0} = 0$, следовательно, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Аналогично покажем, что $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. При $\Delta x = \Delta y$, $\Delta z = \frac{1}{2}$. Поскольку для дифференцируемой функции должно быть выполнено $\Delta z = \sum\limits_{k=1}^{2} \frac{\partial z(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k + \sum\limits_{k=1}^{2} \alpha_k \cdot \Delta x_k$, и при стремлении Δx и Δy к нулю произвольным образом Δz тоже должна стремиться к нулю, а она явно к нулю не стремится, ясно, что данная функция в точке $(x_0, y_0) = \{0, 0\}$ не дифференцируема. Более того, она в данной точке даже не непрерывна.

Таким образом, наличие частных производных в точке **не гарантирует** дифференцируемости функции в этой точке. А какие условия гарантируют дифференцируемость функции в точке? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 3. Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет частные производные по всем аргументам в окрестности $u(\overset{\circ}{x})$, причём все эти частные производные **непрерывны в точке** $\overset{\circ}{x}$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке $\overset{\circ}{x}$.

Доказательство. Для простоты проведём доказательство только для функции двух переменных. Для функции большего числа переменных доказательство аналогично. Пусть задана функция $z = f(x_1, x_2)$. Тогда

$$\Delta z = f(\overset{\circ}{x}_1 + \Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2) - f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) =$$

$$= f(\overset{\circ}{x}_1 + \Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2) - f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2) + f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2) - f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) =$$

$$= f'_{x_1}(\overset{\circ}{x}_1 + \theta_1 \Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2)\Delta x_1 + f'_{x_2}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2)\Delta x_2.$$

Мы можем применить здесь формулу конечных приращений Лагранжа, так как по условию теоремы все частные производные существуют в окрестности $u(\overset{\circ}{x})$. В силу непрерывности этих частных производных в точке $\overset{\circ}{x}$, имеем:

$$f'_x(\overset{\circ}{x}_1 + \theta_1 \Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2) = f'_{x_1}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) + \alpha_1$$

и

$$f'_{x_2}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2) = f'_{x_2}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 - бесконечно малые функции, которые стремятся к нулю, когда стремятся к нулю Δx_1 и Δx_2. Вследствие этого,

$$\Delta z = f'_{x_1}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)\Delta x_1 + f'_{x_2}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)\Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2,$$

что и требовалось доказать.

Глава 14

Дифференциалы и производные функций многих переменных

14.1 Дифференциал функции n переменных. Дифференцирование сложных функций

Определение 1. Дифференциалом df функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $\overset{\circ}{x}$ называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращения аргументов: $df = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$, где $dx_k \overset{def}{=} \Delta x_k$.

Теорема. Пусть функции $\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, ..., t_m) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, ..., t_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n(t_1, t_2, ..., t_m) \end{cases}$

дифференцируемы в точке $\overset{\circ}{t} = (\overset{\circ}{t}_1,\ \overset{\circ}{t}_2,\ \dots,\overset{\circ}{t}_m)$, а функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке

$$\overset{\circ}{x} = (\overset{\circ}{x}_1(\overset{\circ}{t}_1,\ \overset{\circ}{t}_2, ..., \overset{\circ}{t}_m),\ \overset{\circ}{x}_2(\overset{\circ}{t}_1,\ \overset{\circ}{t}_2, ..., \overset{\circ}{t}_m),\ \dots, \overset{\circ}{x}_n(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, ..., \overset{\circ}{t}_m)).$$

Тогда сложная функция

$$f(x(t)) = f(x_1(t_1, t_2, ..., t_m),\ x_2(t_1, t_2, ..., t_m),\ \dots, x_n(t_1, t_2, ..., t_m))$$

дифференцируема в точке $\overset{\circ}{t} = (\overset{\circ}{t}_1,\ \overset{\circ}{t}_2,\ \dots,\overset{\circ}{t}_m)$ и частные производные равны

$$\frac{\partial f}{\partial t_s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_s}.$$

Доказательство. Поскольку функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$, то её полное приращение в этой точке может быть записано в виде: $\Delta f = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \Delta x_k$. Поскольку $x(t)$ - тоже дифференцируемые функции, то $\Delta x_k = \sum\limits_{s=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial t_s} \cdot \Delta t_s + \sum\limits_{s=1}^{m} \beta_s \cdot \Delta t_s$. Подставим: $\Delta f = $

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} \left(\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial t_s} \Delta t_s \right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} \left(\sum_{s=1}^{m} \overset{(k)}{\underset{s}{\beta}} \Delta t_s \right) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial t_s} \Delta t_s \right) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\sum_{s=1}^{m} \overset{(k)}{\underset{s}{\beta}} \Delta t_s \right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_s} \right) \cdot \Delta t_s + \sum_{s=1}^{m} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} \overset{(k)}{\underset{s}{\beta}} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial x_k}{\partial t_s} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overset{(k)}{\underset{s}{\beta}} \right) \right] \cdot \Delta t_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_s} \right) \cdot \Delta t_s + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s \cdot \Delta t_s.$$

Таким образом, полное приращение сложной функции $f(x(t))$ имеет вид $\Delta f = \sum\limits_{s=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial t_s} \cdot \Delta t_s + \sum\limits_{s=1}^{m} \gamma_s \cdot \Delta t_s$, где $\frac{\partial f}{\partial t_s} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_s}$. Это и означает, что сложная функция $f(x(t))$ дифференцируема в точке $\overset{\circ}{t}$, а её частные производные в этой точке равны $\frac{\partial f(\overset{\circ}{x})}{\partial t_s} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k(\overset{\circ}{t})}{\partial t_s}$. Именно это и требовалось доказать.

14.2 Инвариантность формы первого дифференциала

Из определения дифференциала как главной части полного приращения функции, линейной относительно приращения аргументов, следует, что

$$df = \sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t_s}\right)\cdot\Delta t_s \equiv \sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t_s}\right)\cdot dt_s = \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial t_s}\cdot dt_s.$$

С другой стороны

$$df = \sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t_s}\right)\cdot dt_s = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial x_k}{\partial t_s}\cdot dt_s\right).$$

Но в силу определения дифференциала, $\sum\limits_{s=1}^{m}\frac{\partial x_k}{\partial t_s}\cdot dt_s = dx_k$. Поэтому $df = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot dx_k$, то есть первый дифференциал сохраняет свою форму, хотя x и не является независимой переменной, а является функцией t: $x_k = x_k(t_1, t_2, ..., t_m)$. Таким образом нами доказано **свойство инвариантности формы первого дифференциала** функции многих переменных.

Это свойство позволяет заключить, что если функции $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $v = v(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируемы в точке $\overset{\circ}{x}$, то:
1. $d(c\cdot u) = c\cdot du$,
2. $d(u\pm v) = du\pm dv$,
3. $d(u\cdot v) = u\cdot dv + vdu$,
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, если $v\neq 0$.

Докажем, например, справедливость третьей формулы; рассмотрим функцию $\omega = u\cdot v$ двух переменных u и v. Дифференциал этой функции равен $d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot dv$. Так как $\frac{\partial\omega}{\partial u} = v$, $\frac{\partial\omega}{\partial v} = u$, то $d\omega = u\cdot dv + v\cdot du$. В силу инвариантности формы первого дифференциала, выражение $u\cdot dv + v\cdot du$ будет дифференциалом функции $u\cdot v$ и в случае, когда u и v сами являются дифференцируемыми функциями каких-либо переменных.

14.3 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - дифференцируемая в окрестности точки $\overset{\circ}{x}$ функция. Тогда, как известно, возникает n функций $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ - частных производных. Каждая из них - суть снова функция n переменных и, если эти функции дифференцируемы в окрестности точки $\overset{\circ}{x}$, то от них снова можно брать частные производные: $\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \overset{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_k}$, $(s, k = 1, 2, ..., n)$. Затем: $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_k}\right) \overset{def}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial x_j\partial x_s\partial x_k}$, и так далее.

Пример. $z = e^{x^2+y^3}$. $z'_x = 2x\cdot e^{x^2+y^3}$. $z'_y = 3y^2\cdot e^{x^2+y^3}$. $z''_{xy} = (z'_x)'_y = 6xy^2\cdot e^{x^2+y^3}$. $z''_{yx} = (z'_y)'_x = \quad = 6xy^2\cdot e^{x^2+y^3}$.

В данном случае мы видим, что $z''_{xy} = z''_{yx}$, то есть смешанные производные равны. Вопрос: всегда ли это так? Ответ: нет, не всегда.

Теорема о смешанных производных. Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в окрестности $u(\overset{\circ}{x})$ имеет смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_s}$, которые **непрерывны в точке** $\overset{\circ}{x}$, то тогда эти смешанные производные равны между собой: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_s}$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проведём на примере функции двух переменных. В случае функции большего числа переменных доказательство будет полностью аналогично уже рассмотренному.

Рассмотрим выражение $I = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0, y_0)$. Обозначим $\varphi(y_0+\Delta y) \overset{def}{=} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)$, $\varphi(y_0) \overset{def}{=} f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$. Тогда исходное выражение примет вид $I = \varphi(y_0+\Delta y) - \varphi(y_0)$.

Применим к нему формулу конечных приращений Лагранжа: $I = \varphi(y_0+\Delta y) - \varphi(y_0) = \varphi'_y(y_0+\theta_1\Delta y)\cdot\Delta y = \left[f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_1\cdot\Delta y) - f'_y(x_0, y_0+\theta_1\cdot\Delta y)\right]\cdot\Delta y =$ (к выражению в квадратных скобках опять применим формулу конечных приращений Лагранжа) $= f''_{yx}(x_0+\theta_2\cdot\Delta x, y_0+\theta_1\cdot\Delta y)\cdot\Delta y\cdot\Delta x$.

Обозначим теперь $\psi(x_0+\Delta x) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)$, $\psi(x_0) = f(x_0, y_0+\Delta y) - \; - f(x_0, y_0)$. Тогда, рассуждая аналогично, получим $I = \psi(x_0+\Delta x) - \psi(x_0) = \psi'_x(x_0+\theta_3\cdot\Delta x)\cdot\Delta x = \quad = [f'_x(x_0+\theta_3\cdot\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_3\cdot\Delta x, y_0)]\cdot\Delta x = f''_{xy}(x_0+\theta_3\cdot\Delta x, y_0+\theta_4\cdot\Delta y)\cdot\Delta\cdot x\Delta y$.

В результате: $f''_{yx}(x_0+\theta_2\cdot\Delta x, y_0+\theta_1\cdot\Delta y)\cdot\Delta y\cdot\Delta x = f''_{xy}(x_0+\theta_3\cdot\Delta x, y_0+\theta_4\cdot\Delta y)\cdot\Delta y\cdot\Delta x$.

Сокращая на $\Delta y \cdot \Delta x$, рассмотрим предел, когда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и, пользуясь непрерывностью смешанных производных - для непрерывных функций знак предела можно заносить под знак функции - получим искомый результат: $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$, что и требовалось доказать.

При рассмотрении дифференциалов высших порядков необходимо рассматривать две ситуации.

(I.) $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ - n независимых аргументов.

(II.) $u = f(y_1, y_2, ..., y_m)$, где $\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_m = y_m(x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases}$ Иначе говоря, мы, в этом случае, имеем дело со сложной функцией n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Для первой ситуации всё просто: $du = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f$,

$d^2 u = \sum\limits_{s,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_s} dx_k dx_s \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f$, и так далее...

Для второй ситуации мы имеем: $du = \sum\limits_{s=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_s} \right) dx_s = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j} \cdot dy_j$.

$d^2 u = \sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} \cdot dy_i \cdot dy_j + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j} d^2 y_j$.

Глава 15

Приложения дифференциалов и производных функций многих переменных

15.1 Формула Тейлора для функции n переменных

Формула Тейлора для функции n переменных имеет вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n) +$$

$$+\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{s!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - \overset{\circ}{x}_n) \right)^s f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n) +$$

$$+ \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - \overset{\circ}{x}_n) \right)^{k+1} \times$$

$$\times f(x_1 + \theta(x_1 - \overset{\circ}{x}_1), x_2 + \theta(x_2 - \overset{\circ}{x}_2), ..., x_n + \theta(x_n - \overset{\circ}{x}_n)).$$

В частном случае функции двух переменных эта формула записывается в виде:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right) f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^2 f(x_0, y_0) + ...$$

$$... + \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^k f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^{k+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y).$$

Доказательство. Доказательство формулы проведём на примере функции двух переменных. В случае функции большего числа переменных доказательство будет полностью аналогично уже рассмотренному.

Пусть $z = f(x, y)$ - функция, дифференцируемая в окрестности точки (x_0, y_0) до $k+1$ порядка включительно, то есть существуют dz, d^2z, ..., d^kz, $d^{k+1}z$. Соединим точки M и M_0 прямой $\bar{x} = x_0 + t\Delta x$, $\bar{y} = y + t\Delta y$. При $t = 0$ имеем точку M_0, при $t = 1$ имеем точку M.

Обозначим $F(t) \overset{def}{=} f(x_0 + t\Delta x, y + t\Delta y)$. Очевидно, что функция $F(t)$ дифференцируема до $k+1$ порядка включительно. Представим $F(t)$ формулой Маклорена: $F(t) = F(0) + \frac{F'_t(0)}{1!}t + \frac{F''_{tt}(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{F^{(k)}_{t^k}(0)}{k!}t^k + \frac{F^{(k+1)}_{t^k}(\theta t)}{(k+1)!}t^{k+1}$; $(0 < \theta < 1)$.

Видим, что $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F'(0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y \overset{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y \right) f(x_0, y_0)$, $F''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2 \overset{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y \right)^2 f(x_0, y_0)$.

Продолжая аналогично:

$F^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0, y_0), \quad F^{(k+1)}(\theta t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{k+1} f(x_0 + \theta t\Delta x, y_0 + \theta t\Delta y).$

Положим $t = 1$ и учтём, что $F(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \equiv f(x, y)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Тогда:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right) f(x_0,y_0) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^2 f(x_0,y_0) + ...$$
$$... + \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^k f(x_0,y_0) +$$
$$+\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^{k+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),$$

что и утверждалось.

Часто эту формулу записывают в форме дифференциалов:

$$\Delta z \equiv f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{1!}\, dz\big|_{M_0} + \frac{1}{2!}\, d^2 z\big|_{M_0} + ... + \frac{1}{k!}\, d^k z\big|_{M_0} + \frac{1}{(k+1)!}\, d^{k+1} z\big|_{\tilde{M}}.$$

15.2 Локальный экстремум

Определение. Функция $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет в точке $\overset{\circ}{x}$ локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки $\overset{\circ}{x}$, что для **любой** точки x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(\overset{\circ}{x})$ $\left(f(x) \geqslant f(\overset{\circ}{x})\right)$.

Теорема 1. Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $\overset{\circ}{x}$ имеет локальный экстремум, и если в этой точке $\overset{\circ}{x}$ существуют частные производные первого порядка, то все эти частные производные равны нулю.

Доказательство. Зафиксируем все $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$, ... , $\overset{\circ}{x}_n$, кроме x_1 - её мы будем изменять. Тогда функция $f(x_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$ - это функция одного переменного. Но, поскольку при $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$ имеем экстремум, то выполняется необходимое условие достижения экстремума функцией одного переменного: $\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overset{\circ}{x}_1} = 0$. Рассуждая аналогично, покажем, что $\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\overset{\circ}{x}_2} = 0$, ... , $\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overset{\circ}{x}_n} = 0$. Тем самым мы получили необходимое условие достижения локального экстремума функцией n переменных.

Если мы дополнительно (!!!) потребуем дифференцируемости функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $\overset{\circ}{x}$, то необходимое условие может выглядеть так: $du|_{\overset{\circ}{x}} = 0$.

Действительно: $du|_{\overset{\circ}{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)\Big|_{\overset{\circ}{x}} = 0$, что и требовалось.

Но полученное необходимое условие, очевидно, ещё не является достаточным условием достижения функцией локального экстремума.

Пример. $z = xy$. $z'_x|_{(0,0)} = z'_y\big|_{(0,0)} = 0$, тогда как в окрестности этой точки функция может иметь как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, экстремума в этой точке нет, хотя необходимое условие выполнено.

Теорема 2 (для функции двух переменных). Пусть в окрестности точки (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема и все вторые частные производные непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда, если в точке (x_0, y_0), подозрительной на экстремум, величина $I = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$, то экстремум есть, если же $I = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0$, то экстремума в этой точке нет.

Доказательство. $\Delta z = dz|_{x_0,y_0} + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\right] + \frac{1}{2!}\left(\alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\right)$. Поскольку считаем выполненным необходимое условие достижения функцией экстремума, то первый дифференциал в подозрительной на экстремум точке полагаем равным нулю. Далее, проводя очевидные преобразования в квадратной скобке и полагая $f''_{xx} \neq 0$, получим:

$\Delta z = \frac{1}{2f''_{xx}}\left[(f''_{xx})^2\Delta x^2 + 2f''_{xy}f''_{xx}\Delta x\Delta y + (f''_{xy})^2\Delta y^2 - (f''_{xy})^2\Delta y^2 + f''_{yy}f''_{xx}\Delta y^2\right] +$
$+\frac{1}{2!}\left(\alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\right) =$
$= \frac{1}{2f''_{xx}}\left[\left(f''_{xx}\Delta x + f''_{xy}\Delta y\right)^2 + \left(f''_{yy}f''_{xx} - (f''_{xy})^2\right)\Delta y^2\right] + \frac{1}{2!}\left(\alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\right) \equiv$
$\equiv \frac{1}{2f''_{xx}}\left[\left(f''_{xx}\Delta x + f''_{xy}\Delta y\right)^2 + I\cdot\Delta y^2\right] + \frac{1}{2!}\left(\alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\right).$

Ясно, что $\frac{1}{2!}\left(\alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\right)$ - это бесконечно малая по сравнению с первыми слагаемыми величина, не влияющая на знак всего выражения. Если $I > 0$, то знак Δz устойчив и определяется только знаком второй производной f''_{xx}. Если же $I < 0$, то знак всего выражения определяется величинами Δx и Δy, то есть тем, в какую сторону мы отступаем от точки (x_0, y_0). Так, если $\Delta x = 0$, а $\Delta y \neq 0$, то Δz имеет один знак, а если $\Delta x \neq 0$, а $\Delta y = 0$ - другой. Это и говорит о том, что в этой точке экстремума нет. Теорема доказана.

15.3 Условный экстремум. Необходимые условия. Метод Лагранжа

Определение. Пусть задана функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n)$ от $n+m$ переменных и n независимых условий связи между этими переменными:

$$(*)\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = 0. \end{cases}$$

Говорят, что функция $f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n)$ при наличии связей $(*)$ имеет условный максимум в точке $(\mathring{x}, \mathring{y}) = (\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, ..., \mathring{x}_m, \mathring{y}_1, \mathring{y}_2, ..., \mathring{y}_n)$, координаты которой удовлетворяют условиям связи $(*)$, если существует такая окрестность этой точки, в пределах которой значения функции не превосходят значения функции $f(\mathring{x}, \mathring{y}) = f(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, ..., \mathring{x}_m, \mathring{y}_1, \mathring{y}_2, ..., \mathring{y}_n)$ в этой точке.

Пример. $\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$ Ясно, что поскольку должны выполняться оба этих соотношения, то мы имеем дело с пересечением параболоида $u = x^2 + y^2$ с плоскостью $x + y = 1$, параллельной оси u. Поэтому в этом примере экстремум ищется не на всей поверхности параболоида, а только на кривой, высекаемой на поверхности параболоида этой плоскостью.

Как решать задачу на отыскание условного экстремума? Есть два пути.

Путь первый: разрешаем $(*)$ относительно переменных $y_1, y_2, ..., y_n$: $y_s = \Phi_s(x_1, x_2, ..., x_m)$ и подставим в $u = f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n)$. После этого условный экстремум сводится к безусловному.

Пример. $\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$ $y = 1 - x$, $u = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$, $u'_x = 4x - 2 = 0$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $u''_{xx} = 4 > 0$; следовательно, в точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ - минимум.

Путь второй состоит в следующем. Если в точке M_0 с координатами $(\mathring{x}, \mathring{y})$ имеется локальный экстремум, то

$$(\alpha)\ du = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial y_n}dy_n\right)\Big|_{M_0} = 0.$$

Но $dy_1, ..., dy_n$ зависят от $dx_1, ..., dx_m$, так как из уравнений связи $(*)$ имеем:

$$(\beta)\quad\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}dx_2 ... + \frac{\partial F_1}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}dy_2 ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}dy_n = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}dx_2 ... + \frac{\partial F_2}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}dy_2 ... + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}dy_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2}dx_2 ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial F_n}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial F_n}{\partial y_2}dy_2 ... + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}dy_n = 0. \end{cases}$$

В связи с независимостью функций, $J = \frac{DF}{Dy} \neq 0$. По формулам Крамера $dy_1, dy_2, ..., dy_n$ можно выразить через $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ и подставить их в (α). Эти $dy_1, dy_2, ..., dy_n$ линейно выражаются через $dx_1, dx_2, ..., dx_m$: $dy_s = \sum\limits_{i=1}^{m} A_s^i dx_i$. Подставив в (α), имеем $du|_{M_0} = (P_1dx_1 + P_1dx_1 + ... + P_1dx_1)|_{M_0} =$

0. Отсюда, в силу независимости дифференциалов $dy_1, dy_2, ..., dy_n$, получим $P_1|_{M_0} = 0$, $P_2|_{M_0} = 0$, ... , $P_m|_{M_0} = 0$.

Таким образом, чтобы найти точки, подозрительные на экстремум, необходимо найти вид функций P_1, P_2, ... $..., P_m$, приравнять их нулю и учесть условия связи. Иначе говоря, мы должны записать и решить систему $(m+n)$ уравнений с $(m+n)$ неизвестными:

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n,) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n,) = 0, \\ F_1(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n,) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n,) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, определим точки $\left(\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, ..., \overset{1}{x}_m, \overset{1}{y}_1, \overset{1}{y}_2, ..., \overset{1}{y}_n\right), ..., \left(\overset{s}{x}_1, \overset{s}{x}_2, ..., \overset{s}{x}_m, \overset{s}{y}_1, \overset{s}{y}_2, ..., \overset{s}{y}_n\right)$, подозрительные на экстремум.

Однако этот способ нахождения точек, подозрительных на экстремум, очень громоздок - из-за формул Крамера вычисления утомительны. Существует другой метод - *метод неопределённых множителей Лагранжа,* который заметно упрощает дело отыскания подозрительных на экстремум точек.

С этой целью умножим каждое равенство из (β) на свой неопределённый множитель $\lambda_1, \lambda_2, ...,$ $..., \lambda n$, сложим их, и сложим с равенством (α). Получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right) dx_1 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_m}\right) dx_m + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\right) dy_1 + ...$$
$$... + \left(\frac{\partial f}{\partial y_n} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_n}\right) dy_n = 0.$$

Вводя в рассмотрение вспомогательную функцию $\Phi = f + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k F_k$, имеем: $\sum\limits_{s=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} dx_s + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} dy_k = 0$. Неопределённые множители подберём так, чтобы все $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = 0$, $(k = 1, 2, ..., n)$,

то есть (I). $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_1} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial y_n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_n} = 0. \end{cases}$

Тогда $\sum\limits_{s=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} dx_s = 0$. Но, поскольку все x_s, $(s = 1, 2, ..., m)$ - независимые переменные, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0$,

или (II). $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_m} = 0. \end{cases}$ Вспомним, что плюс ко всему должны выполняться условия

связи $(*)$ $\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = 0. \end{cases}$

В итоге имеем систему $(2m+n)$ уравнений $(I), (II)$ и $(*)$ на $(2m+n)$ переменных $(x_1, x_2, ..., x_m)$, $(y_1, y_2, ..., y_n)$, и $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Решая эту систему, находим точки, подозрительные на экстремум.

Пример. $\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$ $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$. $\begin{cases} \Phi'_x = 2x + \lambda = 0, \\ \Phi'_y = 2y + \lambda = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$

Решая эту систему, найдем: $\lambda = -1$, и подозрительную на экстремум точку $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

15.4 Достаточные условия для условного экстремума

Мы рассмотрим следующие частные случаи:

(1). $z = f(x,y),\ \varphi(x,y) = 0.$
(2). $u = f(x,y,z),\ \varphi(x,y,z) = 0,\ \psi(x,y,z) = 0.$
(3). $u = f(x,y,z,),\ \varphi(x,y,z) = 0.$

(1). $\Phi(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y).$

$$\begin{cases} \Phi'_x = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ \Phi'_y = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем значения λ и точки, подозрительные на экстремум: $(\lambda_0, (x_0,y_0))$, $(\lambda_1, (x_1,y_1)), \ldots$ Поскольку $\varphi(x_0,y_0) = 0,\ \varphi(x,y) = 0,$ находим

$$\Delta\Phi = \Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \Delta f.$$

Поэтому

$$\Delta f = \Delta\Phi = \Phi'_x(x_0,y_0)dx + \Phi'_y(x_0,y_0)dy + \frac{1}{2}(a_{11}dx^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dy^2) + \alpha.$$

Здесь $\Phi'_x(x_0,y_0) = 0$ и $\Phi'_y(x_0,y_0) = 0$ вследствие выполнения необходимых условий, $a_{11} = \Phi''_{xx}(x_0,y_0),\ a_{12} = \Phi''_{xy}(x_0,y_0),\ a_{22} = \Phi''_{yy}(x_0,y_0),$ а α - бесконечно малая величина более высокого порядка. Из $\varphi(x,y) = 0$ следует: $\varphi'_x\big|_{(x_0,y_0)} dx + \varphi'_y\big|_{(x_0,y_0)} dy = 0,$ то есть $dy = -\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)} dx.$ Подставив в $\Delta\Phi,$ получим:

$$\Delta f = \Delta\Phi = \frac{1}{2}(a_{11}dx^2 + 2a_{12}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0)} dx^2 + a_{22}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)^2\Bigg|_{(x_0,y_0)} dx^2) + \alpha = \frac{1}{2}Kdx^2 + \alpha.$$

Поскольку α - бесконечно малая величина более высокого порядка, знак приращения функции определяется знаком величины K. Следовательно, достаточные условия состоят в следующем: если $K > 0$ - достигается условный минимум, если $K < 0$ - максимум, а если $K = 0$ - необходимо дополнительное исследование.

(2). $\Phi(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z).$

$$\begin{cases} \Phi'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0 \\ \Phi'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0 \\ \Phi'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0 \end{cases} + \begin{cases} \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, как и в предыдущем случае, найдём все $\lambda,\ \ \mu$ и все подозрительные на экстремум точки: $(\lambda_0, \mu_0, (x_0,y_0,z_0)),\quad (\lambda_1, \mu_1(x_1,y_1,z_1)), \ldots$. Считая выполненными необходимые условия достижения экстремума, имеем:

$$\Delta f = \Delta\Phi = \frac{1}{2}(a_{11}dx^2 + 2a_{12}dxdy + 2a_{13}dxdz + a_{22}dy^2 + 2a_{23}dydz + a_{33}dz^2) + \alpha,$$

где α - величины, бесконечно малые по сравнению с приведёнными,

$$a_{11} = \Phi''_{xx}(x_0,y_0,z_0),\ \ a_{12} = \Phi''_{xy}(x_0,y_0,z_0),\ \ a_{22} = \Phi''_{yy}(x_0,y_0,z_0), \ldots$$

и так далее. Из условий связи $\varphi(x,y,z) = 0$ и $\psi(x,y,z) = 0$ следует:

$$\begin{cases} \varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0\big|_{(x_0,y_0,z_0)}, \\ \psi'_x dx + \psi'_y dy + \psi'_z dz = 0\big|_{(x_0,y_0,z_0)}. \end{cases}$$

Разрешая относительно dy и dz, получим выражения вида: $dy = A(x_0,y_0,z_0)dx,\quad dz = B(x_0,y_0,z_0)dx.$ Подставив их в $\Delta f = \Delta\Phi$, получим: $\Delta f = \frac{1}{2}\tilde{K}dx^2 + \alpha.$ Поскольку α - бесконечно малая величина, знак приращения функции определяется знаком величины $\tilde{K}$. Следовательно, достаточные условия и в этом случае состоят в следующем: если $\tilde{K} > 0$ - достигается условный минимум, если $\tilde{K} < 0$ - максимум, а если $\tilde{K} = 0$ - необходимо дополнительное исследование.

(3). $\quad \Phi(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z). \quad \begin{cases} \Phi'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x, \\ \Phi'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y, \\ \Phi'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z, \\ \varphi(x,y,z) = 0. \end{cases}$ Как и в предыдущих двух случаях, решая эту систему, найдем значения λ и точки, подозрительные на экстремум: $(\lambda_0, (x_0, y_0, z_0))$, $(\lambda_1, (x_1, y_1, z_1)), \ldots$ Считая выполненными необходимые условия, имеем:

$$\Delta f = \Delta\Phi = \frac{1}{2}(a_{11}dx^2 + 2a_{12}dxdy + 2a_{13}dxdz + a_{22}dy^2 + 2a_{23}dydz + a_{33}dz^2) + \alpha,$$

где α - величины, бесконечно малые по сравнению с приведёнными,

$$a_{11} = \Phi''_{xx}(x_0, y_0, z_0), \quad a_{12} = \Phi''_{xy}(x_0, y_0, z_0), \quad a_{22} = \Phi''_{yy}(x_0, y_0, z_0), \ldots$$

и так далее. Из условия связи имеем: $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0|_{(x_0,y_0,z_0)}$, откуда

$$dz = -\left(\frac{\varphi'_x(x_0, y_0, z_0)}{\varphi'_z(x_0, y_0, z_0)}dx + \frac{\varphi'_y(x_0, y_0, z_0)}{\varphi'_z(x_0, y_0, z_0)}dy\right).$$

Подставив, получим выражение вида:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{11}dx^2 + 2\tilde{a}_{12}dxdy + \tilde{a}_{22}dy^2) + \alpha.$$

По теореме, доказанной нами для безусловного экстремума, мы знаем, что если $I = (\tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}^2) > 0$, экстремум есть, если $I < 0$, экстремума нет.

Пример. $\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases} \quad \Phi(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1). \quad \begin{cases} \Phi'_x = 2x + \lambda = 0, \\ \Phi'_y = 2y + \lambda = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$ Решая эту систему, найдем: $\lambda = -1$, и подозрительную на экстремум точку $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. $d^2\Phi = \frac{1}{2}(2dx^2 + 2dy^2)$. Но $dy = -\,dx$, поэтому $d^2\Phi = \frac{1}{2}(2dx^2 + 2dx^2) = 2dx^2$. В этом примере $K = 2 > 0$ - минимум.

Глава 16

Геометрические приложения дифференциалов и производных функций многих переменных

16.1 Касательная плоскость к поверхности $F(x, y, z) = 0$. Вектор нормали к поверхности

Всякое соотношение вида $F(x, y, z) = 0$ определяет поверхность в $\Re^3$. Точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называют *обыкновенной точкой поверхности,* если

$$(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 \neq 0$$

и *особой точкой,* если

$$(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 = 0.$$

Пусть M_0 - обыкновенная точка поверхности $F(x, y, z) = 0$. Зададим на этой поверхности кривую $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ так, что $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Пусть точке M_0 отвечает значение параметра t_0. Видим:

$$F'_x \cdot \frac{dx}{dt} + F'_y \cdot \frac{dy}{dt} + F'_z \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

для любой кривой, проходящей через точку M_0. Рассмотрим векторы

$$\vec{N} = \vec{i} \cdot F'_x(M_0) + \vec{j} \cdot F'_y(M_0) + \vec{k} \cdot F'_z(M_0)$$

и

$$\vec{\tau} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \cdot \dot{x}(t_0) + \vec{j} \cdot \dot{y}(t_0) + \vec{k} \cdot \dot{z}(t_0).$$

В терминах этих векторов для любой кривой, проходящей через точку M_0, предыдущее равенство имеет вид $(\vec{N} \cdot \vec{\tau}) = 0$. Вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ - вектор, касательный к кривой $\vec{r}(t)$, тогда $\vec{N}$ - вектор, ортогональный к касательной к любой кривой, проведённой на поверхности $F(x, y, z) = 0$ через точку M_0. Следовательно, вектор $\vec{N}$ - вектор, нормальный к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке M_0.

Плоскость $(\vec{N} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) = 0$, или, в других терминах,

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

называют *касательной плоскостью к поверхности* $F(x, y, z) = 0$ в точке M_0. Тогда вектор нормали к поверхности в точке M_0, можно записать в виде:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

16.2 Поверхность уровня. Градиент. Производная по направлению

Пусть Ω - некоторая область в $\Re^3$ (может быть, совпадающая с $\Re^3$), и пусть задана функция $u = f(x,y,z)$, где точка $(x,y,z) \in \Omega$. Рассмотрим геометрическое место точек (x,y,z), где функция постоянна, то есть $f(x,y,z) = C$. Такое соотношение определяет поверхность в Ω. Если C меняется в некотором интервале, то говорят, что заданы *поверхности уровня функции* $f(x,y,z)$ в области Ω.

Пример. $u = x^2+y^2+z^2$. Поверхностями уровня этой функции являются сферы $x^2+y^2+z^2 = C^2$ с центрами в начале координат.

Через каждую точку $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$ проходит только одна поверхность уровня, так как $f(x_0,y_0,z_0) = C$ и, следовательно, $f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)$ - единственная поверхность.

Запишем поверхность уровня в виде $F(x,y,z) \equiv f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) = 0$ и построим вектор $\vec{N}$, нормальный к этой поверхности уровня. Как мы только что показали в предыдущем пункте, искомый вектор нормали имеет вид: $\vec{N} = \vec{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$.

Определение 1. Вектор, нормальный в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ к поверхности уровня $f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)$ функции $u = f(x,y,z)$, называется *градиентом функции* $u = f(x,y,z)$ и обозначается символом $gr\vec{ad}\, u \equiv \vec{\nabla} u = \vec{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$ или $gr\vec{ad}\, u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$.

Пусть, далее, в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ задан единичный вектор $\vec{e}$, указывающий направление оси, проходящей через точку M_0. Выберем на этой оси произвольную точку $M \in \Omega$, где задана функция $u = f(x,y,z)$.

Определение 2. Предел отношения $\frac{u(M)-u(M_0)}{|MM_0|}$, где $|MM_0|$ - длина направленного от M к M_0 отрезка, когда $M \to M_0$, двигаясь по оси $\vec{e}$, называется производной по направлению от функции $u = f(x,y,z)$ и обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial e}$.

Согласно этому определению

$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_x, y_0+te_y, z_0+te_z) - f(x_0,y_0,z_0)}{t} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cdot e_x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cdot e_y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cdot e_z = (gr\vec{ad}\, u \cdot \vec{e})$.

Покажем,что градиент функции $u = f(x,y,z)$ в точке M_0 характеризует направление и величину максимального роста этой функции в точке M_0.

Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (gr\vec{ad}\, u \cdot \vec{e}) = \left| gr\vec{ad}\, u \right| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos\varphi = \left| gr\vec{ad}\, u \right| \cdot \cos\varphi.$$

Здесь φ - угол между градиентом и единичным вектором $\vec{e}$. Очевидно, что максимальное значение производной по направлению достигается при $\varphi = 0$, то есть когда направление оси $\vec{e}$ совпадает с направлением градиента функции $u = f(x,y,z)$.

Глава 17

Кратные интегралы

17.1 Квадрируемые и кубируемые фигуры. Свойства площадей и объёмов

Определение 1. Всякое ограниченное множество точек плоскости D называется *фигурой.*

Будем рассматривать многоугольники P, целиком лежащие внутри D, и многоугольники Q, целиком содержащие фигуру D. Площади этих многоугольников будем обозначать символами $S(P)$ и $S(Q)$. Так как множество P ограничено сверху, а множество $S(P)$ монотонно растёт и ограничено сверху, то существует точная верхняя грань $s = \sup\{S(P)\}$. Аналогично, множество $S(Q)$ - монотонно убывает и ограничено снизу, поэтому существует точная нижняя грань $S = \inf\{S(Q)\}$. Очевидно, что $s \leqslant S$.

Определение 2. Фигура D называется *квадрируемой,* если $s = S \stackrel{def}{=} S_D$. S_D называется *площадью фигуры* D .

Определение 3. Говорят, что множество точек K имеет площадь, равную нулю, если это множество может быть погружено в многоугольник Q сколь угодно малой площади, то есть для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует многоугольник Q, такой, что $S(Q) < \varepsilon$, где $Q \supset K$.

Теорема 1. Всякая непрерывная кривая конечной длины l имеет площадь, равную нулю (имеет меру нуль на плоскости).

Доказательство. Разобьём кривую $(n+1)$ точками на части длины $\frac{l}{n}$ и построим квадраты с центрами в этих точках с длиной стороны $\frac{2l}{n}$. Объединение этих квадратов и есть многоугольник, содержащий кривую. Площадь этого многоугольника $S \leqslant \left(\frac{2l}{n}\right)^2 \cdot (n+1) = 4l^2 \cdot \frac{n+1}{n^2}$. Но для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ неравенство $4l^2 \cdot \frac{n+1}{n^2} < \varepsilon$ выполнится, когда выполнится неравенство $\frac{n+1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{4l^2}$. Ясно, что всегда найдётся такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполнится $S < \varepsilon$.

Тем самым мы показали, что кривая может быть погружена в многоугольник сколь угодно малой площади. Теорема доказана.

Определение 1* . Всякое ограниченное множество Ω точек пространства называется *пространственной фигурой.*

Будем рассматривать многогранники P, целиком лежащие внутри D, и многогранники Q, целиком содержащие фигуру Ω. Объёмы этих многогранников будем обозначать символами $V(P)$ и $V(Q)$. Так как множество P ограничено сверху, а множество $V(P)$ монотонно растёт и ограничено сверху, то существует точная верхняя грань $v = \sup\{V(P)\}$. Аналогично, множество $V(Q)$ - монотонно убывает и ограничено снизу, поэтому существует точная нижняя грань $V = \inf\{V(Q)\}$. Очевидно, что $v \leqslant V$.

Определение 2* . Пространственная фигура Ω называется *кубируемой* (имеет пространственную меру), если $v = V = V_\Omega$. V_Ω называется *объёмом фигуры.*

Определение 3* . Говорят, что некоторое множество точек в пространстве имеет меру нуль (объём, равный нулю), если это множество можно заключить в многогранную фигуру сколь угодно малого объёма, то есть если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует многогранник Q такой, что $V(Q) < \varepsilon$.

Теорема 1* . Всякая гладкая ограниченная поверхность имеет объём, равный нулю (имеет меру нуль).

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1 для квадрируемых фигур, поэтому приводить здесь эти доказательства мы не будем.

17.2 Двойные и тройные интегралы. Определения

Двойной интеграл. Пусть D - квадрируемая фигура. Разобъём её произвольным образом непрерывными кривыми на n квадрируемых частей D_i. Площадь каждой части обозначим символом ΔS_i. Внутри каждой части D_i произвольным образом выберем точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Пусть в каждой точке D определена ограниченная функция двух переменных $f(x, y)$. Составим *интегральную сумму* $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Пусть $\lambda = \max\{d(D_i)\}$, где $\{d(D_i)\}$ - множество диаметров части D_i, $d = \max\{\rho(A, B)\}$ - максимальный диаметр разбиения, а $\rho(A, B)$ - расстояние между двумя произвольными точками $A \in D_i$ и $B \in D_i$.

Определение. Говорят,что существует двойной интеграл для функции $f(x, y)$ по области D и пишут $\int\limits_D\int f(x, y)dxdy$ $(\equiv \int\limits_D\int f(M)dS)$, если существует конечный предел J интегральных сумм при $\lambda \to 0$, то есть для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только выполнится неравенство $\lambda < \delta(\varepsilon)$, так сразу выполнится неравенство $|\sigma - J| < \varepsilon$ (пишут $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = \int\limits_D\int f(x, y)dxdy$), при условии, что этот предел не зависит ни от способа разбиения D на части, ни от выбора точек $M_i(\xi_i, \eta_i)$.

Тройной интеграл. Пусть Ω - кубируемая фигура и пусть $f(x, y, z)$ - ограниченная функция в Ω. Разобъём область Ω произвольным образом на n кубируемых частей Ω_i с объёмом $V_i = V(\Omega_i)$, в каждой такой области произвольно выбираем точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Составим *интегральную сумму* $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$. Пусть $\lambda = \max\{d(\Omega_1), d(\Omega_2), ..., d(\Omega_n)\}$, где $d(\Omega_i) = \max\{\rho(A, B)\}$ - максимальный диаметр разбиения, а $\rho(A, B)$ - расстояние между двумя произвольными точками $A \in \Omega_i$ и $B \in \Omega_i$.

Определение. Говорят, что существует тройной интеграл для функции $f(x, y, z)$, если существует конечный предел J интегральных сумм при $\lambda \to 0$, то есть существует $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = J$, не зависящий ни от способа разбиения Ω на части, ни от выбора точек $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$.

Пишут $J = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i = \int\int\limits_\Omega\int f(x, y, z)dV = \int\int\limits_\Omega\int f(x, y, z)dxdydz.$

Условия существования двойного интеграла.

Составим суммы Дарбу. Пусть $M_i = \sup f(x, y)$, где $(x, y) \in D_i$, и $m_i = \inf f(x, y)$, $(x, y) \in D_i$. Тогда $S = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta S_i$ - верхняя сумма Дарбу, $s = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta S_i$ - нижняя сумма Дарбу. Ясно, что $s \leqslant \sigma \leqslant S$.

Как и в случае однократных интегралов, имеет место теорема существования двойного интеграла (теорема об интегрируемости функции $f(x, y)$).

Теорема. Ограниченная на D функция $f(x, y)$ интегрируема тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение D на части, что $|S - s| < \varepsilon$.

Условия существования тройного интеграла.

Составим суммы Дарбу: $S = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta S_i$ - верхняя сумма Дарбу, $s = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta S_i$ - нижняя сумма Дарбу. Ясно, что $s \leqslant \sigma \leqslant S$.

Теорема. Ограниченная на множестве Ω функция $f(x, y, z)$ интегрируема на этом множестве тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение Ω

на части, что $|S-s|<\varepsilon$.

17.3 Классы интегрируемых функций и свойства двойного и тройного интеграла

Теорема 1. Всякая непрерывная в области D функция $f(x,y)$ интегрируема в этой области.

Доказательство. Поскольку D, вследствие квадрируемости, компактное (то есть ограниченное и замкнутое) множество, то непрерывная на этом множестве функция $f(x,y)$ является на этом множестве равномерно непрерывной функцией. Это значит, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что как только выполнится неравенство $\lambda<\delta(\varepsilon)$, так сразу выполнится неравенство $|M_i-m_i|<\frac{\varepsilon}{S(D)}$, где $S(D)$ - площадь области D. Тогда $|S-s|=\left|\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta S_i\right|<\frac{\varepsilon}{S(D)}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i=\frac{\varepsilon}{S(D)}S(D)=\varepsilon$. Тем самым мы показали, что всегда существует такое разбиение области D (иначе говоря, такое измельчение разбиения области D), что разность между верхней и нижней суммами Дарбу можно сделать меньше любого сколь угодно малого числа - условие интегрируемости функции.

Теорема 2. Если ограниченная в области D функция $f(x,y)$ непрерывна в этой области всюду, за исключением некоторого множества меры нуль, то она интегрируема в D.

Доказательство. Проведём разбиение области D следующим образом. Пусть D_1 - та часть D, которая содержит множество меры нуль, остальные части разбиения - $D_2,\ D_3,...,D_n$ - назначим произвольным образом. Тогда

$$|S-s|=\left|\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta S_i\right|=\left|(M_1-m_1)\Delta S_1+\sum_{k=2}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta S_k\right|\leqslant$$

$$\leqslant|M_1-m_1|\,\Delta S_1+\sum_{k=2}^{n}|M_k-m_k|\Delta S_k.$$

Множество меры нуль всегда можно заключить в многоугольник сколь угодно малой площади, поэтому всегда можно считать, что $\Delta S_1<\frac{\varepsilon}{2(M_1-m_1)}$. Здесь, поскольку функция $f(x,y)$ ограничена в D, разность (M_1-m_1) - конечное число. В остальных частях разбиения функция $f(x,y)$ непрерывна, поэтому всегда, за счёт измельчения разбиения, можно сделать так, чтобы $|M_k-m_k|<\frac{\varepsilon}{2S(D\setminus D_1)}$, $(k=2,3,...n)$. В итоге, $|S-s|<\varepsilon$ - условие интегрируемости функции выполнено. Теорема доказана.

Теорема 1*. Всякая непрерывная в области Ω функция $f(x,y,z)$ интегрируема в этой области.

Теорема 2*. Если ограниченная в области Ω функция $f(x,y,z)$ непрерывна в этой области всюду, за исключением некоторого множества меры нуль, то она интегрируема в Ω.

Доказательство этих теорем слово в слово повторяет доказательство теорем 1 и 2 для двойных интегралов, поэтому повторять их мы здесь не будем.

Свойства двойного интеграла.

1°. $\int\limits_D\int(f(x,y)\pm g(x,y))dxdy=\int\limits_D\int f(x,y)dxdy\pm\int\limits_D\int g(x,y)dxdy$

2°. $\int\limits_D\int C\cdot f(x,y)dxdy=C\cdot\int\limits_D\int f(x,y)dxdy.$

3°. Если $D=D_1\cup D_2$, $D_1\cap D_2=\emptyset$, D_1 и D_2 - квадрируемые фигуры, а $f(x,y)$ интегрируема и в D_1, и в D_2, то $\int\limits_D\int f(x,y)dxdy=\int\limits_{D_1}\int f(x,y)dxdy+\int\limits_{D_2}\int f(x,y)dxdy.$

4°. $\left|\int\limits_D\int f(x,y)dxdy\right|\leqslant\int\limits_D\int|f(x,y)|dxdy.$

5°. Теорема о среднем. Если $f(x,y)$ - непрерывная в области D функция, то существует точка $(\xi,\eta)\in D$ такая, что $\int\limits_D\int f(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\cdot S(D).$

6°. Если $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$, то $m\cdot S(D)\leqslant\int\limits_D\int f(x,y)dxdy\leqslant M\cdot S(D).$

Свойства тройного интеграла.

1*. $\iiint\limits_{\Omega} (f(x,y,z) \pm g(x,y,z))\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dxdydz.$

2*. $\iiint\limits_{\Omega} C \cdot f(x,y,z)dxdydz = C \cdot \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz.$

3*. Если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_1 и Ω_2 - кубируемые фигуры, а $f(x,y,z)$ интегрируема и в Ω_1, и в Ω_2, то $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dxdydz.$

4*. $\left| \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \right| \leqslant \iiint\limits_{\Omega} |f(x,y,z)|\,dxdydz.$

5*. Теорема о среднем. Если $f(x,y,z)$ - непрерывная в области Ω функция, то существует точка $(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega$ такая, что $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta) \cdot V(\Omega).$

6*. Если $m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$, то $m \cdot V(D) \leqslant \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \leqslant M \cdot V(D).$

Все перечисленные выше свойства вытекают непосредственно из определения двойных и тройных интегралов и свойств их интегральных сумм.

17.4 Вычисление двойных и тройных интегралов в случае прямоугольных областей

Теорема 1. Если существует двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ в прямоугольнике $D: \left\{ \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array} \right\}$, и для любого $x \in [a,b]$ существует интеграл $u(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$, то существует и повторный интеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$ и выполняется равенство $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx.$

Доказательство. Разобъём прямоугольник D на частичные прямоугольники D_{ik} прямыми, параллельными координатным осям:

$$\left\{ \begin{array}{c} a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = d \end{array} \right\}, \quad D_{ik} = \left\{ \begin{array}{c} x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \\ y_{k-1} \leqslant y \leqslant y_k \end{array} \right\}.$$

Пусть $M_{ik} = \sup f(x,y)$, где $(x,y) \in D_{ik}$, $m_{ik} = \inf(x,y)$, $(x,y) \in D_{ik}$, Ясно, что $m_{ik} \leqslant f(x,y) \leqslant M_{ik}$. Тогда $m_{ik} \cdot \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} dy \leqslant \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i,y)dy \leqslant M_{ik} \cdot \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} dy$, или $m_{ik} \cdot \Delta y_k \leqslant \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i,y)dy \leqslant M_{ik} \cdot \Delta y_k$. Суммируем: $\sum\limits_{k=1}^{m} m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int\limits_c^d f(\xi_i,y)dy \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} M_{ik}\Delta y_k$. Умножим это выражение на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и просуммируем по i от $i = 1$ до $i = n$: $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m} m_{ik}\Delta y_k \Delta x_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\int\limits_c^d f(\xi_i,y)dy \right) \Delta x_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m} M_{ik}\Delta y_k \Delta x_i$. Видим, что посредине здесь стоит интегральная сумма, отвечающая функции $u(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$, а слева и справа - нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие двойному интегралу $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$. Следовательно, $s \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} u(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S$. Увеличивая число элементов разбиения m и n до бесконечности, то есть при $m \to \infty$ и $n \to \infty$, так, что при этом $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_i, \to 0$, мы получим $s = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, $S = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$. Это значит $\int\limits_a^b u(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, что и утверждалось. Теорема доказана.

Меняя роли x и y, то есть требуя существования интеграла $v(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ для любого $y \in [c,d]$, мы получим, что $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$. Это значит, что $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy =$

$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx.$

Теорема 2. Если существует тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ для прямоугольного параллелепипеда $\Omega : \left\{ \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \\ p \leqslant z \leqslant q \end{array} \right\}$ и для $\forall x \in [a,b]$, $\forall y \in [c,d]$ существует интеграл $u(x,y) = \int\limits_p^q f(x,y,z)dz$, то существует и повторный интеграл $\iint\limits_D \left(\int\limits_p^q f(x,y,z)dz\right)dxdy$ и имеет место равенство $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_p^q f(x,y,z)dz\right)dxdy.$

Доказательство. Плоскостями, параллельными координатным плоскостям, разобъём параллелепипед Ω на $n \cdot m \cdot s$ малых параллелепипедов Ω_{ikl} :

$$\left\{ \begin{array}{c} a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b \\ c = y_0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant ... \leqslant y_{m-1} \leqslant y_m = d \\ p = z_0 \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ ... \ \leqslant z_{s-1} \leqslant z_s \ = q \end{array} \right\}.$$

Пусть $M_{ikl} = \sup f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \Omega_{ikl}$ и $m_{ikl} = \inf f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \Omega_{ikl}$. Пусть (ξ_i, η_k) - произвольная точка в Ω_{ik}, - проекции параллелепипеда Ω_{ikl} на плоскость xOy, тогда

$$\int\limits_{z_{l-1}}^{z_l} m_{ikl}dz \leqslant \int\limits_{z_{l-1}}^{z_l} f(\xi_i, \eta_k, z)dz \leqslant \int\limits_{z_{l-1}}^{z_l} M_{ikl}dz,$$

то есть

$$m_{ikl} \cdot \Delta z_l \leqslant \int\limits_{z_{l-1}}^{z_l} f(\xi_i, \eta_k, z)dz \leqslant M_{ikl} \cdot \Delta z_l.$$

Просуммируем:

$$\sum_{l=1}^{s} m_{ikl} \cdot \Delta z_l \leqslant \int\limits_p^q f(\xi_i, \eta_k, z)dz \leqslant \sum_{l=1}^{s} M_{ikl} \cdot \Delta z_l.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{s} m_{ikl} \cdot \Delta x_i \Delta y_k \Delta z_l \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} u(\xi_i, \eta_k)\Delta x_i \Delta y_k \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{s} M_{ikl} \cdot \Delta x_i \Delta y_k \Delta z_l.$$

Посередине стоит интегральная сумма, отвечающая функции $u(x,y) = \int\limits_p^q f(x,y,z)dz$, а слева и справа - нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающая тройному интегралу $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ Увеличивая число элементов разбиения m, n и s до бесконечности, то есть при $m \to \infty$, $n \to \infty$, и $s \to \infty$, так, что при этом $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_i, \to 0$, и $\Delta z_i \to 0$, мы получим $s = S = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_p^q f(x,y,z)dz\right)dxdy$. Поскольку проекция параллелепипеда Ω на плоскость xOy - это прямоугольник $D : \left\{ \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array} \right\}$, то, расставляя пределы интегрирования по этой области, имеем:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_p^q f(x,y,z)dz\right)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d \left[\int\limits_p^q f(x,y,z)dz\right] dy\right]dx.$$

Глава 18

Приложения кратных интегралов

18.1 Вычисление двойных и тройных интегралов в случае криволинейных областей

Двойные интегралы. Пусть D - простейшая криволинейная область: она ограничена двумя непрерывными кривыми $y = Y_1(x)$ и $y = Y_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

Теорема. Если существует двойной интеграл $\int\limits_D\int f(x,y)dxdy$ и для любого $x \in [a,b]$ существует интеграл $u(x) = \int\limits_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x,y)dy$, то существует повторный интеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$ и имеет место равенство $\int\limits_D\int f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \equiv \int\limits_a^b dx \int\limits_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x,y)dy.$

Доказательство. Пусть $c = \min Y_1(x)$, $d = \max Y_2(x)$, $x \in [a,b]$. Заключим криволинейную область D в прямоугольник $D^* = \left\{ \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array} \right\}$ и рассмотрим ограниченную функцию $f^*(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} f(x,y), \ \ (x,y) \in D \\ 0, \ \ (x,y) \in D^*/D \end{array} \right\}$. В прямоугольнике D^* рассмотрим интеграл от функции $f^*(x,y)$: $\int\limits_{D^*}\int f^*(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f^*(x,y)dy \right) dx = \int\limits_D\int f(x,y)dxdy =$

$$= \underbrace{\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^{Y_1(x)} f^*(x,y)dy \right) dx}_{=0} + \int\limits_a^b \left(\underbrace{\int\limits_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f^*(x,y)dy}_{\int\limits_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x,y)dy} \right) dx + \underbrace{\int\limits_a^b \left(\int\limits_{Y_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy \right) dx}_{=0} =$$

$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$

В итоге: $\int\limits_D\int f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$, что и утверждалось.

Аналогично, если область D ограничена кривыми $x = X_1(y)$ и $x = X_2(y)$ и горизонтальными прямыми $y = c$ и $y = d$, то $\int\limits_D\int f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{X_1(y)}^{X_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$

Тройные интегралы. Пусть Ω - z-цилиндрическая область, ограниченная снизу и сверху поверхностями $z = Z_1(x,y)$ и $z = Z_2(x,y)$. Пусть D - проекция этой области на плоскость xOy.

Теорема. Если существует тройной интеграл $\int\int\limits_\Omega\int f(x,y,z)dxdydz$ и для $\forall (x,y) \in D$ существует интеграл $u(x,y)=\int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, то существует и повторный интеграл $\iint\limits_D \left(\int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$ и имеет место равенство

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy.$$

Доказательство. Заключим область Ω в параллелепипед $\Omega^*: \left\{\begin{array}{c} a\leqslant x\leqslant b \\ c\leqslant y\leqslant d \\ p\leqslant z\leqslant q \end{array}\right\}$ и рассмотрим в этом прямоугольном параллелепипеде Ω^* ограниченную функцию

$$f^*(x,y,z)=\left\{\begin{array}{c} f(x,y,z),(x,y,z)\in\Omega \\ 0,\quad (x,y,z)\in\Omega^*/\Omega \end{array}\right\}.$$

В прямоугольном параллелепипеде Ω^* рассмотрим интеграл от функции $f^*(x,y,z)$: $\iint\limits_{\Omega^*}\int f^*(x,y,z)dxdydz$. Аналогично тому, как мы это сделали для двойного интеграла, покажем, что $\iiint\limits_{\Omega^*} f^*(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, а также что

$\iiint\limits_{\Omega^*} f^*(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D^*}\left(\int\limits_p^q f(x,y,z)dz\right)dxdy = \iint\limits_D \left(\int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy.$

В итоге: $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$, что и утверждалось.

Продолжая рассуждения для двойного интеграла, фигурирующего в формуле, покажем, что

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{Y_1(y)}^{Y_2(y)} dy \int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

18.2 Криволинейные координаты на плоскости

Криволинейные координаты на плоскости. Пусть заданы две квадрируемые области D и Δ.

Будем считать, что в D задана декартова система координат (xOy). Каждой точке в этой системе координат соответствует радиус-вектор $\vec{r}=\vec{i}\cdot x+\vec{j}\cdot y$.

Так же будем считать, что и в Δ задана декартова система координат (uOv), и каждой точке в этой системе координат соответствует радиус-вектор $\vec{\rho}=\vec{i}\cdot u+\vec{j}\cdot v$.

Определение. Говорят, что в области D заданы криволинейные координаты (u,v) со значениями в Δ, если задано биективное, непрерывное и непрерывно-дифференцируемое отображение $F:\Delta\to D$, то есть заданы функции $\left\{\begin{array}{c} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{array}\right\}$, где $(u,v)\in\Delta$, такие, что существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, причём матрица Якоби $J=\left[\begin{array}{cc} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{array}\right]$ в Δ имеет полный ранг. Это означает, что определитель матрицы Якоби (якобиан) отличен от нуля: $\det J\neq 0$.

В силу биективности, то есть взаимной однозначности, существует обратное отображение F^{-1} : $D\to\Delta$, задаваемое функциями $\left\{\begin{array}{c} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{array}\right\}$, такими, что существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ и ранг матрицы $J^{-1}=\left[\begin{array}{cc} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{array}\right]$ полон.

Заметим здесь, что задание функций $\left\{\begin{array}{c} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{array}\right\}$ означает, что в D задан радиус-вектор $\vec{r}(u,v)=\vec{i}\cdot x(u,v)+\vec{j}\cdot y(u,v)$.

Рассмотрим в области Δ прямую $u = u_0$. В области D ей отвечает гладкая линия, определяемая параметрическими уравнениями $x = x(u_0, v)$, $y = y(u_0, v)$ (или, что то же, $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$). Параметром здесь служит v.

Аналогично, каждой прямой из Δ $v = v_0$ в области D отвечает линия, определяемая уравнениями $x = x(u, v_0)$, $y = y(u, v_0)$, или $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$. Здесь параметр - u.

Эти линии в области D, в которые отображение $F : \Delta \to D$, переводит прямые, параллельные координатным осям, из Δ, называются *координатными линиями* u и v в области D.

Из взаимной однозначности отображения $\left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right\}$ следует, что через каждую точку $(x,\ y)$ области D проходит единственная линия $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$, отвечающая постоянному значению u, и единственная линия $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$, отвечающая постоянному значению v. Следовательно, величины u и v можно рассматривать как координаты (отличные, конечно, от декартовых) точек области D. Так как эти координатные линии, отвечающие этим координатам, будут, вообще говоря, кривыми (а не прямыми, как в случае декартовой координатной сетки), то величины u и v называются *криволинейными координатами* точек в области D.

Таким образом, переменные u и v имеют двоякий геометрический смысл: во-первых, - это декартовы координаты точек области Δ, во-вторых, это - криволинейные координаты точек области D. В соответствии с этим каждое соотношение вида $\Phi(u, v) = 0$ можно рассматривать как уравнение (в декартовых координатах) некоторой кривой λ, лежащей в области Δ, и как уравнение (в криволинейных координатах) кривой l, лежащей в D и являющейся образом кривой λ при отображении $F : \Delta \to D$.

Пусть в области D задана гладкая кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Покажем, что $\frac{d\vec{r}}{dt}$ - это вектор, касательный к данной кривой.

Рассмотрим две точки M_0 и M этой кривой, отвечающие значениям парамера t_0 и $t_0 + \Delta t$. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ - это вектор $\overrightarrow{(M_0 M)}$, соединяющий точки M и M_0. Тогда отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ - вектор, совпадающий по направлению с вектором $\overrightarrow{(M_0 M)}$.

Устремим точку M вдоль нашей кривой к точке M_0, так, что $\Delta t \to 0$. Получим: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Очевидно, что в результате мы получили вектор, касательный к данной кривой, что и утверждалось.

Соответственно этому, производные $\overrightarrow{r'_u}$ и $\overrightarrow{r'_v}$ - векторы, касательные к координатным линиям $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ и $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$, которые мы можем рассматривать как базисные векторы - некоторые аналоги векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ декартовой системы координат на плоскости.

Пусть в области Δ задана некоторая гладкая кривая $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$. Касательный вектор к этой кривой $\overrightarrow{\rho'_t} = \vec{i} \cdot u'_t + \vec{j} \cdot v'_t$ является линейной комбинацией двух базисных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Отображение $F : \Delta \to D$ переводит заданную кривую $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ в опять-таки гладкую кривую $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$, являющуюся образом этой кривой. Поскольку существуют непрерывные производные u'_t и v'_t, существует и непрерывная производная $\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{r'_u} \cdot u'_t + \overrightarrow{r'_v} \cdot v'_t$ и мы видим, что вектор, касательный к образу заданной кривой, представляется как линейная комбинация базисных векторов $\overrightarrow{r'_u}$ и $\overrightarrow{r'_v}$.

18.3 Площадь в криволинейных координатах

Площадь в криволинейных координатах. При выводе формулы замены переменных в двойном интеграле основной шаг состоит в том, чтобы выразить через криволинейные координаты площадь области. Здесь имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ или, что то же, $\left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right\}$ - биективное, непрерывное и непрерывно-дифференцируемое отображение $F : \Delta \to D$, якобиан J которого отличен от нуля. Тогда $S = \int\limits_D\int dxdy = \int\limits_\Delta\int |\det J|\, dudv$.

Доказательство. Проведём наши рассуждения на "физическом уровне строгости".

Рассмотрим в области D две пары бесконечно близких координатных линий. Пусть первая из этих пар отвечает значениям u_0 и $u_0+\Delta u$ координаты u, а вторая пара - значениям v_0 и $v_0+\Delta v$ координаты v. Эти координатные линии вырезают в области D бесконечно малый элемент площади ΔS, который с точностью до малых выше первого порядка можно считать параллелограммом.

Площадь этого параллелограмма равна $\Delta S = |[(\vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u,v)) \times (\vec{r}(u, v+\Delta v) - \vec{r}(u,v))]|$. Но $\vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u,v) = \overrightarrow{r'_u} \cdot \Delta u + \vec{\alpha} \cdot \Delta u$, $\vec{r}(u, v+\Delta v) - \vec{r}(u,v) = \overrightarrow{r'_v} \cdot \Delta v + \vec{\beta} \cdot \Delta v$, где $\vec{\alpha} \to 0$, и $\vec{\beta} \to 0$, когда $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$. Тогда $\Delta S = \left|\left[\overrightarrow{r'_u} \times \overrightarrow{r'_v}\right]\right| \Delta u \Delta v +$ (б/м высшего порядка) $= \left|\det \begin{bmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{bmatrix}\right| \Delta u \Delta v +$ (б/м высшего порядка) $= |\det J| \, \Delta u \Delta v +$ (б/м высшего порядка).

Разобъём область D с помощью криволинейных координат на n таких параллелограммов. Площадь каждого из них приближенно, с точностью до бесконечно малых выше первого, равна $\Delta S \approx |\det J| \, \Delta u \Delta v$.

Площадь S области D получится суммированием площадей всех этих параллелограммов: $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i$. Устремляя максимальный диаметр разбиения к нулю, а число элементов разбиения к бесконечности, получим в пределе:

$$S = \int\limits_D\int dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\det J| \, \Delta u_i \Delta v_i = \int\limits_\Delta\int |\det J| \, dudv.$$

18.4 Криволинейные координаты в пространстве

Пусть заданы кубируемые области Ω и T. Будем считать, что в области Ω задана декартова система координат и каждой точке этой области соответствует радиус-вектор $\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z$

Будем так же считать, что и в T задана декартова система координат и каждой точке этой области соответствует радиус-вектор $\vec{\rho} = \vec{i} \cdot u + \vec{j} \cdot v + \vec{k} \cdot w$.

Определение. Говорят, что в Ω заданы криволинейные координаты (u, v, w) со значениями в T, если задано биективное, непрерывное и непрерывное-дифференцируемое отображение $F : T \to \Omega$, то есть заданы непрерывно-дифференцируемые функции $\left\{ \begin{array}{c} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array} \right\}$, где $(u,v,w) \in T$ так, что матрица Якоби $J = \begin{bmatrix} x'_u \; x'_v \; x'_w \\ y'_u \; y'_v \; y'_w \\ z'_u \; z'_v \; z'_w \end{bmatrix}$ имеет полный ранг.

То, что ранг матрицы Якоби полон, означает, что определитель матрицы Якоби - якобиан - отличен от нуля: $\det J \neq 0$.

Отметим также, что задание функций $\left\{ \begin{array}{c} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array} \right\}$ означает, что в области Ω задан радиус-вектор $\vec{r}(u,v,w) = \vec{i} \cdot x(u,v,w) + \vec{j} \cdot y(u,v,w) + \vec{k} \cdot z(u,v,w)$.

Рассмотрим в области T плоскость, определённую условием $u = u_0$. Ясно, что это плоскость, параллельная координатной плоскости $(v0w)$. Отображение $F : T \to \Omega$, переведёт её в некоторую поверхность области Ω. Декартовы координаты точек этой поверхности - суть $\left\{ \begin{array}{c} x = x(u_0,v,w) \\ y = y(u_0,v,w) \\ z = z(u_0,v,w) \end{array} \right\}$. Придавая u_0 различные значения, получим некоторое семейство поверхностей, зависящее от u как от параметра.

Плоскости области T $v = v_0$ и $w = w_0$ переходят при отображении $F : T \to \Omega$ в два аналогичных семейства поверхностей области Ω.

Это три семейства поверхностей называются *координатными поверхностями.* Вследствие биективности отображения, через каждую точку области Ω проходит только по одной поверхности каждого из трёх семейств.

Полностью аналогично тому, как это было сделано при введении криволинейных координат на плоскости, вводятся *координатные линии* и *криволинейные координаты* u, v и w точки в пространстве.

Соответственно, легко показать, что производные $\overrightarrow{r'_u}$, $\overrightarrow{r'_v}$, и $\overrightarrow{r'_w}$ - векторы, касательные к координатным линиям $\vec{r}=\vec{r}(u,v_0,w_0)$, $\vec{r}=\vec{r}(u_0,v,w_0)$, и $\vec{r}=\vec{r}(u_0,v_0,w)$, и которые мы, как и в предыдущем случае, можем рассматривать как базисные.

18.5 Объём в криволинейных координатах

Найдём теперь выражение объёма в криволинейных координатах.

Рассмотрим некоторую пространственную область Ω, в которой введены криволинейные координаты (u,v,w), связанные с декартовыми координатами (x,y,z) формулами $\left\{\begin{array}{c} x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w) \\ z=z(u,v,w) \end{array}\right\}$ так, что матрица Якоби $J=\left[\begin{array}{ccc} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{array}\right]$ имеет полный ранг, а определитель матрицы Якоби отличен от нуля: $\det J\neq 0$.

Задание этих функций означает, что в области Ω задан радиус-вектор $\vec{r}(u,v,w)=\vec{i}\cdot x(u,v,w)+\vec{j}\cdot y(u,v,w)+\vec{k}\cdot z(u,v,w)$.

Рассмотрим три пары бесконечно близких между собой координатных поверхностей. Пусть первая из этих пар задаётся фиксированными значениями первой координаты, равными соответственно u и $u+\Delta u$, вторая - значениями v и $v+\Delta v$ второй координаты и третья - значениями w и $w+\Delta w$ третьей координаты. Эти три пары поверхностей вырезают в пространстве бесконечно малый параллелепипед. Найдём объём ΔV этого параллелепипеда:
$\Delta V=|([\vec{r}(u+\Delta u,v,w)-\vec{r}(u,v,w)]\cdot[\vec{r}(u,v+\Delta v,w)-\vec{r}(u,v,w)]\cdot[\vec{r}(u,v,w+\Delta w)-\vec{r}(u,v,w)])|$. Но
$\vec{r}(u+\Delta u,v,w)-\vec{r}(u,v,w)=\overrightarrow{r'_u}\cdot\Delta u+\vec{\alpha}\cdot\Delta u$,
$\vec{r}(u,v+\Delta v,w)-\vec{r}(u,v,w)=\overrightarrow{r'_v}\cdot\Delta v+\vec{\beta}\cdot\Delta v$,
$\vec{r}(u,v,w+\Delta w)-\vec{r}(u,v,w)=\overrightarrow{r'_w}\cdot\Delta w+\vec{\gamma}\cdot\Delta w$,
где $\vec{\alpha}\to 0$, $\vec{\beta}\to 0$, и $\vec{\gamma}\to 0$, когда $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$ и $\Delta w\to 0$.
Поэтому
$\Delta V=\left|\overrightarrow{(r'_u}\cdot\overrightarrow{r'_v}\cdot\overrightarrow{r'_w})\right|\Delta u\Delta v\Delta w+$ (б/м высшего порядка) $=$
$=\left|\det\left[\begin{array}{c} x'_ux'_vx'_w \\ y'_uy'_vy'_w \\ z'_uz'_vz'_w \end{array}\right]\right|\cdot\Delta u\Delta v\Delta w+$ (б/м высшего порядка) $=$
$=|\det J|\cdot\Delta u\Delta v\Delta w+$ (б/м высшего порядка).

Разобъём область Ω с помощью близких координатных поверхностей на n таких параллелепипедов. Объём каждого из них, с точностью до бесконечно малых выше первого, равен $\Delta V\approx|\det J|\cdot\Delta u\Delta v\Delta w$.

Объём V области Ω получится суммированием объёмов всех этих параллелепипедов: $V\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i$. Устремляя максимальный диаметр разбиения к нулю, а число элементов разбиения к бесконечности, получим в пределе: $V=\int\int\limits_{\Omega}\int dxdydz=\int\int\limits_{T}\int|\det J|\,dudvdw$.

18.6 Замена переменных в двойных интегралах

Пусть существует двойной интеграл $\int\int\limits_{D} f(x,y)dxdy$, где D - область, ограниченная кусочно-гладкими дугами кривых. Пусть $\left\{\begin{array}{c} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{array}\right\}$ - переход к криволинейным координатам, где $x(u,v)$ и $y(u,v)$ - непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов такие, что якобиан преобразования $\det J\neq 0$. Сетка криволинейных координат разбивает область D на части площади ΔS_i. Выбрав в каждой из этих частей произвольную точку (x_i,y_i), составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Площадь ΔS_i каждой из частей, как мы знаем из предыдущего пункта, может быть вычислена по формуле $\Delta S_i = \int\int\limits_{\Delta_i} |\det J|\, dudv$. Воспользовавшись теоремой о среднем, будем иметь: $\Delta S_i = |J(u_i^*, v_i^*)|\, \Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ - площадь области Δ_i. Заменив в интегральной сумме каждую из величин ΔS_i найденным выражением, получим: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, |J(u_i^*, v_i^*)|\, \Delta\sigma_i$. Точка (u_i^*, v_i^*) получается в результате применения теоремы о среднем, и её выбор в каждой из частичных областей ΔS_i от нас не зависит. Напротив, точка (x_i, y_i) выбирается в каждой из частичных областей Δ_i совершенно произвольно. Поэтому мы можем положить $x_i = x(u_i^*, v_i^*), y_i = y(u_i^*, v_i^*)$, то есть выбрать ту точку области D_i, которая соответствует точке (u_i^*, v_i^*) области Δ_i. Тогда рассматриваемая интегральная сумма примет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x(u_i^*, v_i^*), y(u_i^*, v_i^*))\, |J(u_i^*, v_i^*)|\, \Delta\sigma_i$, а это не что иное, как интегральная сумма для интеграла $\int\int\limits_{\Delta} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)| dudv$. Если теперь неограниченно измельчать разбиение области Δ на части Δ_i, то в силу непрерывности соответствия, максимальные диаметры областей D_i, тоже будут стремиться к нулю. При этом рассматриваемая сумма должна стремиться с одной стороны к двойному интегралу $\int\int\limits_{D} f(x,y) dxdy$, с другой стороны, к интегралу $\int\int\limits_{\Delta} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)| dudv$. Следовательно, эти интегралы равны: $\int\int\limits_{D} f(x,y) dxdy = \int\int\limits_{\Delta} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)| dudv$. Это и есть формула замены переменных в двойном интеграле.

18.7 Замена переменных в тройных интегралах

Пусть существует тройной интеграл $\int\int\int\limits_{\Omega} f(x,y,z) dxdydz$, где Ω - область, ограниченная кусочно-гладкими поверхностями. Пусть $\left\{ \begin{array}{c} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array} \right\}$ - переход к криволинейным координатам, где $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ - непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов такие, что якобиан преобразования $\det J \neq 0$. Координатными поверхностями разобъём область Ω на множество малых параллелепипедов Ω_i. Выбрав в каждом из этих параллелепипедов произвольную точку (x_i, y_i, z_i), составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$. Объём ΔV_i каждого из этих параллелепипедов, как мы знаем, может быть вычислен по формуле $\Delta V_i = \iiint\limits_{T_i} |J(u,v,w)| dudvdw$. Применим к этому интегралу теорему о среднем. Получим: $\Delta V_i = |J(u_i^*, v_i^*, w_i^*)|\, \Delta\omega_i$, где $\Delta\omega_i$ - объём частичной области T_i, а (u_i^*, v_i^*, w_i^*) - некоторая точка, принадлежащая частичной области T_i. Заменив в интегральной сумме каждую из величин ΔV_i найденным выражением, получим: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, |J(u_i^*, v_i^*, w_i^*)|\, \Delta\omega_i$. В этой сумме каждая из точек (x_i, y_i, z_i) выбирается внутри соответствующей области Ω_i произвольно. В частности, мы можем положить $x_i = x(u_i^*, v_i^*, w_i^*)$, $y_i = y(u_i^*, v_i^*, w_i^*)$, $z_i = z(u_i^*, v_i^*, w_i^*)$, то есть выбрать ту точку области Ω_i, которая соответствует точке (u_i^*, v_i^*, w_i^*) области T_i. Тогда интегральная сумма примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(u_i^*, v_i^*, w_i^*), y(u_i^*, v_i^*, w_i^*), z(u_i^*, v_i^*, w_i^*)\, |J(u_i^*, v_i^*, w_i^*)|\, \Delta\omega_i,$$

а это не что иное, как интегральная сумма для интеграла

$$\iiint\limits_{T} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\, |J(u,v,w)|\, dudvdw.$$

Если теперь неограниченно измельчать разбиение области T на части T_i, то в силу непрерывности соответствия, максимальные диаметры областей Ω_i, тоже будут стремиться к нулю. При этом рассматриваемая сумма должна стремиться с одной стороны к тройному интегралу $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dxdydz$, с другой стороны, к интегралу

$$\iiint\limits_{T} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\, |J(u,v,w)|\, dudvdw.$$

Таким образом, эти интегралы представляют собой пределы одной и той же интегральной суммы. Следовательно, они равны, то есть

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,dudvdw.$$

Это и есть формула замены переменных в тройном интеграле.

Глава 19

Криволинейные интегралы

19.1 Криволинейные интегралы 1-го рода и их свойства

Сначала мы определим криволинейные интегралы 1-го рода для кривых, заданных на плоскости, а затем, уже по аналогии, для кривых, заданных в пространстве.

Предварительно вспомним определение гладкой и кусочно-гладкой кривой.

Определение. Кривая $\left\{ \begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\}$, заданная на сегменте $t \in [\alpha, \beta]$, называется *гладкой,* если существуют непрерывные производные $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$, не обращающиеся одновременно в нуль для всех $t \in [\alpha, \beta]$. Кривая называется *кусочно-гладкой,* если она непрерывна и состоит из конечного числа гладких кусков кривой.

Криволинейные интегралы 1-го рода на плоскости. Пусть AB - гладкая дуга кривой. Пусть $f(M)$ (или $f(x,y)$ при выборе декартовых координат на плоскости) – функция, заданная в точках этой дуги. Произвольным образом разобъём нашу дугу на части точками $A = A_0,\ A_1,\ A_2,\ \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1},\ \dots, A_n = B$. На каждой частичной дуге $(A_{i-1}A_i)$ произвольным образом выберем точку M_i и составим сумму $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$, где Δl_i - длина дуги $(A_{i-1}A_i)$. Сумму σ назовём *интегральной суммой, соответствующей данному разбиению и выбору точек* M_i.

Определение. Если существует не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_i конечный предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$ (где $\lambda = \max \Delta l_i$), то этот предел называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции $f(M)$ по кривой AB и обозначается $\int\limits_{AB} f(M)dl$, (или $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$ при выборе декартовой системы координат).

При этом следует иметь в виду, что переменные x и y не являются независимыми, а связаны условием, что точка (x, y) лежит на кривой AB.

Нетрудно убедиться в том, что понятие криволинейного интеграла 1-го рода на самом деле почти не отличается от обычного понятия определённого интеграла функции одной переменной и легко к нему сводится.

Действительно, если дуга AB задана в *натуральной* параметризации, то есть когда роль параметра играет длина дуги, а уравнение кривой имеет вид $\left\{ \begin{array}{c} x = x(l) \\ y = y(l) \end{array} \right\}$, $t \in [0, L]$, то интегральная сумма будет иметь вид $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x(l_i), y(l_i))\Delta l_i$, где l_i - значение параметра, отвечающее точке M_i. Легко видеть, что это - обычная интегральная сумма, отвечающая определённому интегралу $\int\limits_0^L f(x(l), y(l))dl$.

Если же кривая AB задана в общей параметризации, то вспомнив, что $dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$, получим $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$. В частности, если кривая задана в явном виде

$y = y(x)$, то $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+(y'_x)^2}dx.$

Если дуга AB задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, то переходя к параметрической форме задания кривой $\left\{ \begin{array}{l} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{array} \right\}$, $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, получим

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(r'_\varphi)^2 + r^2}d\varphi.$$

Геометрическая интерпретация криволинейного интеграла 1-го рода (для $f(x,y) > 0$) проста: это площадь цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси $0z$ и высотой, равной $f(x,y)$.

Свойства криволинейных интегралов 1-го рода. Свойства криволинейных интегралов вполне аналогичны свойствам определённых интегралов и сразу вытекают из формулы, сводящей криволинейный интеграл к определённому. Перечислим основные из них.

1°. **Линейность.** Если $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы на дуге AB, $C_1 = const$ и $C_2 = const$, то $\int\limits_{AB} [C_1 f(M) \pm C_2 g(M)]dl = C_1 \int\limits_{AB} f(M)dl \pm C_2 \int\limits_{AB} g(M)dl.$

2°. **Монотонность.** Если $f(M)$ - неотрицательная интегрируемая функция, то всегда $\int\limits_{AB} f(M)dl \geqslant 0.$

3°. **Аддитивность.** Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB, то $\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{AC} f(M)dl + \int\limits_{CB} f(M)dl$, причём интеграл слева существует тогда и только тогда, когда существуют оба интеграла справа.

4°. **Оценка по модулю.** Если $f(M)$ интегрируема на AB, то $|f(M)|$ тоже интегрируема и $\left|\int\limits_{AB} f(M)dl\right| \leqslant \int\limits_{AB} |f(M)|\, dl.$

5°. **Теорема о среднем.** Если $f(M)$ непрерывна на AB, то на этой дуге найдётся такая точка M^*, что $\int\limits_{AB} f(M)dl = f(M^*) \cdot L$, где L - длина дуги AB.

6°. $\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{BA} f(M)dl$, то есть выбор направления на дуге AB не влияет на величину интеграла.

Криволинейные интегралы 1-го рода в пространстве. Определение криволинейного интеграла 1-го рода, сформулированное выше для плоской кривой, дословно переносится на случай функции $f(M)$, заданной вдоль некоторой пространственной кривой. Если эта кривая AB задана параметрическими уравнениями $\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\}$, $t \in [\alpha, \beta]$, то криволинейный интеграл 1-го рода, взятый вдоль этой кривой, сводится к определённому интегралу по формуле

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt.$$

Условия существования и основные свойства пространственных криволинейных интегралов вполне аналогичны тем, которые были сформулированы для плоского случая.

19.2 Криволинейные интегралы 2-го рода и их свойства

Пусть AB **- дуга гладкой плоской кривой** и пусть $\vec{F}(x,y) = \vec{i} \cdot P(x,y) + \vec{j} \cdot Q(x,y)$ - непрерывная векторная функция, определённая в точках дуги AB. Разобьём произвольным образом дугу AB на части и внутри каждой части произвольно выберем точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Обозначим $\vec{r}_i = \vec{i} \cdot x_i +$

$\vec{j}\cdot y_i$, $\quad \vec{r}_{i-1}=\vec{i}\cdot x_{i-1}+\vec{j}\cdot y_{i-1}$, $\quad \Delta\vec{r}_i=\vec{r}_i-\vec{r}_{i-1}=\vec{i}\cdot(x_i-x_{i-1})+\vec{j}\cdot(y_i-y_{i-1})=\vec{i}\cdot\Delta x_i+\vec{j}\cdot\Delta y_i$. Составим интегральную сумму для данной векторной функции: $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\vec{r}_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i\right)$.

Определение. Если существует не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_i конечный предел интегральных сумм σ при $\lambda\to 0$ (где $\lambda=\max\Delta l_i$), то этот предел называется криволинейным интегралом 2-го рода от векторной функции $\vec{F}(x,y)$ вдоль дуги AB и обозначается символом $\int\limits_{AB}\left(\vec{F}(M)d\vec{r}\right)\equiv\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Как вычислять этот интеграл? Пусть $\vec{r}=\vec{r}(t)$, где $t\in[\alpha,\beta]$ - векторное уравнение нашей дуги. Тогда $\Delta\vec{r}_i=\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})=\dot{\vec{r}}(t_i^*)\Delta t_i$ - по формуле конечных приращений Лагранжа. Если существует интеграл $\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, то в качестве точки M_i можно выбрать любую точку, в том числе и ту точку, в которой выполняется формула Лагранжа, то есть точку с радиус-вектором $\vec{r}(t_i^*)$. В итоге

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}\left(x(t_i^*),y(t_i^*)\right)\cdot\dot{\vec{r}}(t_i^*)\right)\Delta t_i=\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(x(t_i^*),y(t_i^*)\right)\cdot\dot{x}(t_i^*)+Q\left(x(t_i^*),y(t_i^*)\right)\cdot\dot{y}(t_i^*)\right]\Delta t_i.$$

Если теперь неограниченно измельчать разбиение нашей дуги на части, то есть в пределе при $\lambda\to 0$ (где $\lambda=\max\Delta l_i$), получим:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(x(t),y(t))\cdot\dot{x}(t)+Q(x(t),y(t))\cdot\dot{y}(t)]dt.$$

В частности, когда $y=y(x)$, где $x\in[a,b]$, то

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{a}^{b}[P(x,y(x))+Q(x,y(x))\cdot y'_x(x)]dx.$$

Если кривая задана с помощью натурального параметра l, то есть в виде $\vec{r}=\vec{r}(l)$, где l - длина дуги, то удобно ввести единичный вектор τ, касательный к нашей кривой: $\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{dl}=\vec{i}\cdot\cos\alpha+\vec{j}\cdot\sin\alpha$. Тогда $d\vec{r}=\vec{\tau}\cdot dl$ и криволинейный интеграл 2-го рода можно представить в виде криволинейного интеграла 1-го рода: $\int\limits_{AB}\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)=\int\limits_{AB}\left(\vec{F}\cdot\vec{\tau}\right)dl$, или, в координатной форме,

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{AB}[P(x,y)\cdot\cos\alpha+Q(x,y)\cdot\sin\alpha]dl.$$

Эти формулы устанавливают связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода.

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода. Ввиду тесной связи между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода, которую мы только что установили, очевидно, что свойства $\mathbf{1}^\circ$ - $\mathbf{5}^\circ$ криволинейных интегралов 1-го рода сохранятся и для криволинейных интегралов 2-го рода.

Изменится только последнее свойство - свойство $\mathbf{6}^\circ$. Криволинейный интеграл 2-го рода зависит от направления движения по дуге, а именно: $\int\limits_{AB}\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)=-\int\limits_{BA}\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)$, так как при движении в обратном направлении, то есть от точки B к точке A, имеем: $\Delta_{(BA)}\vec{r}_i=(\vec{r}_{i-1}-\vec{r}_i)=-(\vec{r}_i-\vec{r}_{i-1})=-\Delta_{(AB)}\vec{r}_i$, поэтому интегральная сумма, а значит и сам интеграл, меняют свой знак на обратный.

Часто приходится рассматривать криволинейные интегралы, взятые по замкнутому контуру. Под замкнутым контуром на плоскости мы понимаем такую кривую $\left\{\begin{array}{c}x=x(t)\\ y=y(t)\end{array}\right\}$, где $(a\leqslant t\leqslant b)$, что $x(a)=x(b)$ и $y(a)=y(b)$. Для замкнутого контура существует только два направления обхода (ориентации): против часовой стрелки (положительная ориентация) и по часовой стрелке (отрицательная ориентация).

Мы будем, как правило, рассматривая замкнутый контур, считать его ориентированным положительно, а криволинейный интеграл 2-го рода по отрицательно ориентированному контуру заменять интегралом, взятом в положительном направлении, но со знаком минус перед интегралом.

Пусть теперь AB - дуга гладкой пространственной кривой, и пусть $\vec{F}(x,y) = \vec{i}\cdot P(x,y,z)+\vec{j}\cdot Q(x,y,z)+\vec{k}\cdot R(x,y,z)$ - непрерывная векторная функция, определённая в точках дуги AB. Разобъём произвольным образом дугу AB на части и внутри каждой части произвольно выберем точку $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. Аналогично тому, как это было сделано для плоской кривой, составим сумму

$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(M_i)\cdot\Delta\vec{r}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i\right)$, где
$\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} = \vec{i}\cdot(x_i - x_{i-1}) + \vec{j}\cdot(y_i - y_{i-1}) + \vec{k}\cdot(z_i - z_{i-1}) = \vec{i}\cdot\Delta x_i + \vec{j}\cdot\Delta y_i + \vec{k}\cdot\Delta z_i$.

Предел этих сумм назовём криволинейным интегралом 2-го рода от вектор-функции $\vec{F}(x,y)$ вдоль пространственной кривой AB и обозначим $\int\limits_{AB}\left(\vec{F}(M)\cdot d\vec{r}\right) = \int\limits_{AB} P(M)dx+Q(M)dy+R(M)dz$.

С помощью рассуждений, дословно повторяющих те, которые были проведены для плоского случая, устанавливается формула, сводящая криволинейный интеграл 2-го рода к криволинейному интегралу 1-го рода $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz = \int\limits_{AB}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dl$, где α, β, γ - углы между касательной к кривой AB и осями координат.

Если гладкая кривая AB задана уравнениями $\left\{\begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\}$, причём точке A отвечает $t=\alpha$, а точке B отвечает $t=\beta$, то имеет место равенство

$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\dot{x} + Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\dot{y} + R\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\dot{z}\right]dt$, сводящее криволинейный интеграл 2-го рода к определённому интегралу.

Глава 20

Формула Грина

20.1 Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейными интегралами 2-го рода и двойными интегралами.

Определение 1. Пусть D - некоторая область плоскости. Область D называется *односвязной,* если она удовлетворяет условию: каков бы ни был замкнутый контур γ, лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром (конечная) часть плоскости целиком принадлежит D.

Иначе говоря, односвязность области означает отсутствие в ней "дырок". Любой замкнутый контур, лежащий в такой области, можно стянуть в точку , не выходя за пределы этой области.

Определение 2. Если область не односвязна, она называется *многосвязной.*

Определение 3. Множество называется M *связным,* если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат M.

Определение 4. Область D называется *m-связной,* если граница этой области состоит из m связных компонент.

Пусть D - односвязная или m-связная область и Γ - её граница, состоящая из $m \geqslant 1$ замкнутых контуров.

Определение 5. Говорят, что Γ - положительно ориентированная граница области D, если на Γ выбрано направление движения по контурам γ_i, при котором область D остаётся слева.

Теорема Грина. Пусть D - m-связная ($m \geqslant 1$) область, а $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$ - граница области D. Пусть также $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - непрерывные функции вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Тогда $\oint\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int\int\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$, где $\oint\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \oint\limits_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) + \oint\limits_{\gamma_2} (Pdx + Qdy) + ... + \oint\limits_{\gamma_m} (Pdx + Qdy)$.

Доказательство. Доказательство проведём в 4 этапа.

Первый этап доказательства состоит в том, чтобы для области $\widehat{D}$, ограниченной слева и справа вертикальными отрезками $x = a$ и $x = b$ (отрезки прямых (A_4, A_1) и (A_2, A_3)), а снизу и сверху - кусочно-гладкими кривыми $y = Y_1(x)$ и $y = Y_2(x)$ (дугами $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$), доказать следующее равенство:

$$\oint\limits_{A_1 A_2 A_3 A_4 A_1} P(x,y)dx = -\int\int\limits_{\widehat{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

В самом деле, имеем:

$$\int\int\limits_{\widehat{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx = \int\limits_a^b P(x,y)|_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} dx = \int\limits_a^b P(x, Y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x, Y_1(x))dx =$$

$$= \int\limits_{\cup A_4A_3} P(x,y)dx - \int\limits_{\cup A_1A_2} P(x,y)dx = -\int\limits_{\cup A_1A_2} P(x,y)dx - \int\limits_{\cup A_3A_4} P(x,y)dx - \underbrace{\int\limits_{\cup A_2A_3} P(x,y)dx}_{=0,\ (x=a,\ dx=0)} -$$

$$- \underbrace{\int\limits_{\cup A_4A_1} P(x,y)dx}_{=0\ (x=a,\ dx=0)} = -\oint\limits_{A_1A_2A_3A_4A_1} P(x,y)dx.$$

Первый этап доказательства завершён.

Второй этап доказательства состоит в том, чтобы этот результат распространить на любую область, которую можно разбить на конечное число областей рассмотренного выше вида.

Действительно, пусть область D с границей Γ разбита на части D_i, $(i = 1, 2, ..., n)$, для каждой из которых имеет место равенство $\int\int\limits_{\widehat{D}_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_{\gamma_i} P(x,y)dx$, где γ_i - граница области D_i. Просуммировав эти равенства по i от 1 до n, мы слева получим двойной интеграл, взятый по всей области D, а справа получится сумма криволинейных интегралов, взятых по контурам γ_i. Каждый из этих контуров состоит из линий, ограничивающих область D, и вспомогательных линий, с помощью которых область D разбивается на части. Но каждая их этих вспомогательных линий входит в состав ровно двух контуров γ_i, следовательно, по каждой из них криволинейный интеграл будет взят дважды, причём в двух противоположных направлениях. Поэтому при суммировании интегралов вида $\oint\limits_{\gamma_i} P(x,y)dx$ интегралы по всем вспомогательным линиям взаимно уничтожаются и останется лишь интеграл по границе области D, то есть мы получим равенство $\int\int\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx$. Второй этап доказательства завершён.

Третий этап. Поменяем теперь x и y местами и рассмотрим область, ограниченную горизонтальными отрезками $y = c$ и $y = d$ и кривыми $x = X_1(y)$ и $x = X_2(y)$. Пусть функция $Q(x,y)$ и её производная $\frac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны в области D, включая её границу. Записав двойной интеграл $\int\int\limits_{\widehat{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$ в виде $\int\limits_c^d \left(\int\limits_{X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy$ и повторяя почти дословно рассуждения, проведённые на первом этапе доказательства, получим равенство $\int\int\limits_{\widehat{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{A_1A_2A_3A_4A_1} Q(x,y)dy.$

Четвёртый этап состоит в доказательстве равенства $\int\int\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy$ для любой многосвязной области. Доказательство этой формулы слово в слово повторяет рассуждения, проведённые для доказательства аналогичной формулы на втором этапе.

Объединяя формулы, полученные на втором и четвёртом этапах, получим окончательно:
$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$

Это и есть формула Грина, которую мы хотели установить.

20.2 Условие независимости криволинейного интеграла от пути

Пусть D - односвязная область, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - непрерывные функции вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Тогда следующие четыре условия равносильны между собой (то есть выполнение одного из них автоматически влечёт выполнение всех остальных):

1°. $\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ по любому замкнутому в области D пути.

2°. Интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути, соединяющего любые две точки A и B из области D.

3°. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = dU(x,y)$, то есть выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой однозначной функции $U(x,y)$, определённой в области D.

4°. В области D всюду выполнено $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство. Доказательство проведём по следующей логической схеме: $4 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$, то есть покажем, что из четвёртого условия следует первое, из первого - второе, из второго - третье, а из него опять четвёртое. Тем самым будет доказана равносильность всех четырёх условий.

Пусть **выполнено условие 4**$^\circ$: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по формуле Грина имеем

$\oint\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\int\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$ для любого замкнутого контура $C \in D$ - **условие 1**$^\circ$ **выполнено** для любого замкунутого контура C, целиком лежащего внутри области D.

Рассмотрим далее любые две точки $A \in D$ и $B \in D$ и соединим их двумя различными непрерывными кривыми C_1 и C_2, целиком лежащими внутри области D. По условию 1° интеграл, взятый по любому замкнутому пути, равен нулю: $\oint\limits_{AC_1BC_2^-A} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$, или $\int\limits_{AC_1B} P(x,y)dx+Q(x,y)dy + \int\limits_{BC_2^-A} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\limits_{AC_1B} P(x,y)dx+Q(x,y)dy - \int\limits_{AC_2B} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$.

Следовательно, $\int\limits_{AC_1B} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\limits_{AC_2B} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Условие 2° **доказано.**

Пусть теперь интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования, а зависит только от положения точек A и B. Тогда если точку A зафиксировать, то интеграл будет однозначной функцией координат x и y точки B : $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = U(x,y)$.

Покажем, что эта функция $U(x,y)$ дифференцируема и что $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$. Достаточно показать первое равенство, второе доказывается аналогично.

Дадим аргументу x приращение Δx и рассмотрим горизонтальный отрезок, соединяющий точки $B_1(x,y)$ и $B_1(x+\Delta x, y)$. Интеграл, взятый по пути, соединяющему эти две точки, равен $U(x+\Delta x, y) - U(x,y) = \int\limits_{ABB_1} (P(x,y)dx+Q(x,y)dy) - \int\limits_{AB} (P(x,y)dx+Q(x,y)dy) = \int\limits_{BB_1} (P(x,y)dx+Q(x,y)\underbrace{dy}_{=0}) = \int\limits_x^{x+\Delta x} P(x,y)dx = \ = P(x+\theta\Delta x, y)\cdot\Delta x$. (В последнем равенстве мы использовали теорему о среднем для интегралов). Отсюда $\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y)$. Тогда $\frac{\partial U}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x,y)$.

Таким образом, $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.

Условие 3° **доказано.**

На этом доказательство практически закончено, так как если $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$, то из-за $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ имеем $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Условие 4° **доказано.** Доказательство теоремы закончено.

Как найти функцию, полный дифференциал которой есть заданное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$?

С этой целью интегрируем равенство $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, рассматривая y как параметр. Получим: $U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ - произвольная функция аргумента y. Равенство $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$ в силу условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ даёт: $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \varphi(y)\right) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}dx + \varphi'_y(y) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \varphi'_y(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'_y(y) = Q(x,y)$, откуда $\varphi'_y(y) = Q(x_0,y)$. Интегрируя это выражение по y, получим $\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C$, где C - произвольная постоянная.

Окончательно, $U(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C$.

Глава 21

Геометрия поверхностей

21.1 Сведения из дифференциальной геометрии поверхностей

Определение 1. Простым куском поверхности называется множество точек S в E_3, которое можно биективно отобразить на односвязную область $\Delta \in E_2$.

Определение 2. Поверхностью называется множество точек в E_3, получаемых соединением конечного числа или счетного числа простых кусков поверхности.

В дальнейшем мы будем иметь дело в основном с простыми кусками поверхности. В этом случае отнесём E_2 к прямоугольным координатам $\{u, v\}$, а E_3 – к прямоугольным координатам $\{x, y, z\}$. Поскольку задано биективное, то есть взаимно-однозначное отображение из $\Delta \in E_2$ в $S \in E_3$, то каждой точке поверхности S с координатами (x, y, z) ставится в соответствие одна и только одна точка области Δ с координатами (u, v). Следовательно, декартовы координаты (x, y, z) точек поверхности S представляют собой функции координат (u, v) области $\Delta \in E_2$: $\left\{ \begin{array}{c} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{array} \right\}$.
Это и есть параметрическое уравнение поверхности.

Три скалярных уравнения можно заменить одним векторным уравнением: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, или, более подробно, $\vec{r} = \vec{i} \cdot x(u, v) + \vec{j} \cdot y(u, v) + \vec{k} \cdot z(u, v)$.

В частности, если простой кусок поверхности задаётся уравнением $z = z(x, y)$, то векторное уравнение поверхности имеет вид: $\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z(x, y)$.

Если в области Δ задать кривую $\{u = u(t), v = v(t)\}$, то на поверхности S возникнет кривая $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$. Касательный вектор к этой кривой имеет вид $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\dot{v}$. Очевидно, что этот касательный вектор является линейной комбинацией векторов $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

Каков геометрический смысл этих векторов? Если взять координатную линию $v = const$, то вдоль этой линии u является параметром и вектор $\vec{r}_u \overset{def}{=} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ будет вектором, касательным к координатной линии $v = const$. Аналогично, вектор $\vec{r}_v \overset{def}{=} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ - это вектор, касательный к координатной линии $u = const$. Векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ называются *координатными векторами.*

Рассмотрим всевозможные кривые, проходящие через данную точку M, и касательные векторы к ним в этой точке. каждый из этих векторов представляет собой линейную комбинацию векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, то есть лежит в определяемой этими векторами плоскости. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к данной поверхности в точке M.

Поскольку векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ лежат в касательной плоскости, вектор $\vec{N} = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v]$ нормален к касательной плоскости, и, стало быть, нормален к поверхности S.

Вычислим вектор $\vec{N}$ и направляющие косинусы вектора $\vec{N}$, нормального к поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

$$\vec{N} = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{array} \right| = \vec{i} \cdot \left| \begin{array}{cc} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{array} \right| + \vec{j} \cdot \left| \begin{array}{cc} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{array} \right| + \vec{k} \cdot \left| \begin{array}{cc} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{array} \right| \equiv \vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B + \vec{k} \cdot C.$$

Таким образом, вектор $\vec{N}$ имеет компоненты $A = \begin{vmatrix} y'_u z'_u \\ y'_v z'_v \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} z'_u x'_u \\ z'_v x'_v \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} x'_u y'_u \\ x'_v y'_v \end{vmatrix}$.

Длина этого вектора: $\left|\vec{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Соответствующий единичный вектор: $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, $|\vec{n}| = 1$.

Тогда $\vec{n} = \vec{i} \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \vec{j} \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \vec{k} \cdot \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \vec{i} \cdot \cos\alpha + \vec{j} \cdot \cos\beta + \vec{k} \cdot \cos\gamma$.

Направляющие косинусы, следовательно:

$\cos\alpha \equiv \cos(\vec{N}, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta \equiv \cos(\vec{N}, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma \equiv \cos(\vec{N}, z) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

В частности, когда поверхность задаётся уравнением $z = z(x, y)$, имеем $\vec{r}_x = \vec{i} + \vec{k} \cdot z'_x$, $\vec{r}_y = \vec{j} + \vec{k} \cdot z'_y$,

$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & z'_x \\ 0 & 0 & z'_y \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot z'_x - \vec{j} \cdot z'_y + \vec{k}$. $\left|\vec{N}\right| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$, то есть в этом случае

$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}$, $\cos\beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}$.

Уравнение касательной плоскости к данной поверхности S в точке M имеет вид

$$\left((\vec{\rho} - \vec{r}) \cdot \vec{N}\right) = 0,$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки касания, $\vec{\rho}$ - радиус-вектор текущей точки касательной плоскости.

Если поверхность S задаётся уравнением $z = z(x, y)$, то подставив в уравнение касательной плоскости вместо $(\vec{\rho} - \vec{r})$ вектор $\vec{i} \cdot (x - x_0) + \vec{j} \cdot (y - y_0) + \vec{k} \cdot (z - z_0)$, а вместо нормального вектора $\vec{N}$ его выражение $\vec{N} = -\vec{i} \cdot z'_x - \vec{j} \cdot z'_y + \vec{k}$, получим уравнение плоскости, касающейся поверхности $z = z(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) : $z - z_0 = z'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + z'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0)$.

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, которое определяет z как дифференцируемую функцию от x и y, то $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Подставим эти выражения вместо z'_x и z'_y в уравнение касательной плоскости, получим $(x - x_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = 0$. В результате получили уравнение плоскости, касательной к поверхности $F(x, y, z) = 0$. Здесь значения производных $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ берутся в точке касания (x_0, y_0, z_0).

Вычислим длину дуги кривой, расположенной на поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Выбрав за параметр длину дуги, её уравнение можно записать в виде $\vec{r} = \vec{r}(u(l), v(l))$. Так как вектор $\frac{d\vec{r}}{dl}$ имеет длину, равную единице, то $(d\vec{r})^2 = (dl)^2$. Но $d\vec{r} = \vec{r}_u \cdot du + \vec{r}_v \cdot dv$, следовательно, $(dl)^2 = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)du^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)dudv + (\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v)dv^2$. Воспользуемся обозначениями $g_{11} = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)$, $g_{12} = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)$, $g_{22} = (\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v)$, тогда $(dl)^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$.

Это выражение представляет собой квадратичную форму относительно переменных du и dv, и, при этом, очевидно, положительно определённую. Она называется *первой квадратичной формой* поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Коэффициенты g_{11}, g_{12} и g_{22} квадратичной формы - это, очевидно, те самые коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22}, которые отвечают реперу $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ в плоскости, касательной к поверхности в рассматриваемой точке. Эти коэффициенты зависят от точки поверхности. Кроме того, они зависят, конечно, от выбора параметризации поверхности.

21.2 Площадь поверхности

Пусть поверхность S задаётся уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, где $(u, v) \in \Delta$. Прежде всего, нам необходимо дать определение площади поверхности. Для этого поверхность S, ограниченную кусочно-гладким контуром, разобъём кусочно-гладкими кривыми на n частей S_i и в каждой части произвольным образом выберем точку M_i. Проведём через точку M_i касательную к S плоскость и спроектируем S_i на эту плоскость.

Определение. Площадью поверхности S мы назовём предел (если он существует) сумм площадей проекций, взятых по всем элементам разбиения при условии, что максимум диаметров этих элементов стремится к нулю.

Поверхность, для которой существует конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_i, называется *квадрируемой.*

Заметим, что данное определение не зависит от выбора системы координат.

Теорема. Пусть $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, где $(u,v)\in\Delta$, определяет гладкую поверхность S (то есть $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ непрерывны в Δ). Тогда поверхность S - квадрируема и площадь этой поверхности равна $S=\int\int\limits_{\Delta}\sqrt{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}dudv$, где g_{ij} - коэффициенты 1-ой квадратичной формы поверхности.

Доказательство. Разобъём поверхность S на части S_i. В каждой части выберем точку M_i и проведём в ней касательную плоскость. Введём местную систему декартовых координат, выбрав за начало точку M_i, нормаль в этой точке - за направление оси $M_i\ \ z$, а касательную плоскость - за плоскость (xy). Координаты x, y и z произвольной точки поверхности S_i можно записать как функции u и v : $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$. (Правильнее было бы писать $x=x_i(u,v)$, $y=y_i(u,v)$, $z=z_i(u,v)$, потому что эти уравнения соответствуют i -ой системе координат, связанной с касательной плоскостью и нормалью в точке M_i, но мы не будем загромождать формулы излишними на данный момент индексами.) Проекция поверхности S_i на касательную плоскость в точке M_i определяется уравнениями $x=x(u,v)$, $y=y(u,v), z=0$. Пользуясь выражением для площади плоской фигуры в криволинейных координатах (см. лекцию 49), мы можем записать площадь этой проекции в виде $S_{\Delta_i}=\left|\left[\overrightarrow{r'_u}\times\overrightarrow{r'_v}\right]_i\right|\Delta u_i\Delta v_i+$ (б/м высшего порядка), где Δ_i - та область, которую пробегают переменные u и v, когда точка (x,y,z) пробегает элемент S_i.

Сумма площадей проекций всех частичных поверхностей S_i на соответствующие касательные плоскости равна $S=\sum\limits_{i=1}^{n}S_{\Delta_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\left[\overrightarrow{r'_u}\times\overrightarrow{r'_v}\right]_i\right|\Delta u_i\Delta v_i+$ (сумма б/м высшего порядка). Предел этого выражения при неограниченном измельчении разбиения поверхности мы и назвали площадью поверхности. Этот предел существует и равен интегралу $\int\int\limits_{\Delta}|[\vec{r}_u\times\vec{r}_v]|dudv$, поскольку первое слагаемое выражения - есть интегральная сумма этого интеграла, а предел второго слагаемого равен нулю.

Для завершения доказательства остается установить, что $|[\vec{r}_u\times\vec{r}_v]|=\sqrt{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}$. Пусть ω угол между векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Тогда

$$|[\vec{r}_u\times\vec{r}_v]|=|\vec{r}_u|\cdot|\vec{r}_v|\cdot\sin\omega=$$

$$=|\vec{r}_u|\cdot|\vec{r}_v|\cdot\sqrt{1-\cos^2\omega}=\sqrt{(\vec{r}_u)^2(\vec{r}_v)^2-|\vec{r}_u|^2|\vec{r}_v|^2\cos^2\omega}=\sqrt{(\vec{r}_u)^2(\vec{r}_v)^2-(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)^2}=$$

$$=\sqrt{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}.$$

Таким образом

$$S=\int\int\limits_{\Delta}\sqrt{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}dudv.$$

Подкоренное выражение в последней формуле принято обозначать так: $(g_{11}g_{22}-(g_{12})^2)\overset{def}{=}g(u,v)$. Тогда формула для вычисления площади поверхности примет вид

$$S=\int\int\limits_{\Delta}\sqrt{g(u,v)}\,dudv.$$

Замечание. С вектором $\vec{N}=[\vec{r}_u\times\vec{r}_v]$ мы уже встречались выше (см. лекцию 20). Там мы установили , что этот вектор имеет компоненты $\vec{N}=[\vec{r}_u\times\vec{r}_v]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x'_u&y'_u&z'_u\\x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}y'_u&z'_u\\y'_v&z'_v\end{vmatrix}+\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}z'_u&x'_u\\z'_v&x'_v\end{vmatrix}+$ $\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}x'_u&y'_u\\x'_v&y'_v\end{vmatrix}\equiv\vec{i}\cdot A+\vec{j}\cdot B+\vec{k}\cdot C$. Его длина равна $\left|\vec{N}\right|=|[\vec{r}_u\times\vec{r}_v]|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Следовательно, формулу площади поверхности можно переписать так:

$$S=\int\int\limits_{\Delta}\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv.$$

Если поверхность задана явным выражением $z = z(x, y)$, то, как мы видели выше (см. лекцию 52), $\vec{N} = -\vec{i} \cdot z'_x - \vec{j} \cdot z'_y + \vec{k}$. $\left|\vec{N}\right| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$, и формула площади поверхности в этом случае имеет вид:

$$S = \int\int\limits_{\Delta} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy.$$

Так как $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{1}{\cos(\vec{N}, z)}$, то формулу площади поверхности можно представить в виде:

$$S = \int\int\limits_{\Delta} \frac{dxdy}{\cos(\vec{N}, z)}.$$

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, которое определяет z как дифференцируемую функцию от x и y, то $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Подставим эти выражения вместо z'_x и z'_y в формулу для вычисления площади поверхности, получим:

$$S = \int\int\limits_{\Delta} \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} dxdy.$$

Глава 22

Поверхностные интегралы

22.1 Поверхностные интегралы 1-го рода и их свойства

Пусть S - гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей Γ и пусть в точках $M \in S$ задана ограниченная функция $f(M)$. Разобъём поверхность S произвольным образом на n частей S_i, в них произвольно выберем точки M_i и составим сумму, которую мы будем называть интегральной суммой: $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, где ΔS_i - площадь элемента S_i. Пусть $\lambda = \max\{d_i\}$, где $d_i = \max\{\rho(A,B)\}$, а $\rho(A,B)$ - расстояние между точками $A \in S_i$ и $B \in S_i$, и пусть точки A и B пробегают всё множество точек S_i.

Определение. Если при $\lambda \to 0$ существует конечный предел интегральной суммы σ, не зависящий ни от способа разбиения поверхности S на части S_i, ни от выбора точек $M_i \in S_i$, то этот предел называется поверхностным интегралом 1-го рода и обозначается символом $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \sigma = \int\limits_S\int f(M)dS$.

Точку $M \in S$ можно задать декартовыми координатами (x, y, z). Поэтому функцию $f(M)$, определённую в точках поверхности S, мы будем обозначать также $f(x, y, z)$, а соответствующий поверхностный интеграл - символом $\iint\limits_S f(x, y, z)dS$. Вопрос: когда этот интеграл существует и как его вычислять?

Теорема. Пусть S - гладкая поверхность , описываемая уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, где $(u, v) \in \Delta$, и пусть существует поверхностный интеграл 1-го рода $\iint\limits_S f(M)dS$. Тогда существует и двойной интеграл $\iint\limits_\Delta f\left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right) \cdot \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}dudv$ и имеет место равенство

$$\iint\limits_S f(M)dS = \iint\limits_\Delta f\left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right) \cdot \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}dudv$$

Доказательство. Рассмотрим интегральную сумму, соответствующую поверхностному интегралу 1-го рода $\int\limits_S\int f(M)dS$: $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$. Здесь ΔS_i - площадь элемента поверхности S_i. Площадь элемента поверхности S_i , как мы знаем, может быть вычислена по формуле $\Delta S_i = \int\limits_{\Delta_i}\int \sqrt{g(u, v)}\, dudv$. Применим к этой формуле теорему о среднем для двойного интеграла от непрерывной функции: $\Delta S_i = \int\limits_{\Delta_i}\int \sqrt{g(u, v)}dudv = g(u_i^*, v_i^*) \cdot S(\Delta_i)$, где (u_i^*, v_i^*) - некоторая точка, принадлежащая области Δ_i, а $S(\Delta_i)$ - площадь этой области.

Поскольку в интегральной сумме в качестве точки M_i можно выбрать любую точку, принадлежащую элементу S_i, интегральную сумму, отвечающую поверхностному интегралу 1-го рода, запишем в виде
$\sigma = \sum\limits_{i}^{n} f(x(u_i^*, v_i^*), y(u_i^*, v_i^*), z(u_i^*, v_i^*))g(u_i^*, v_i^*) \cdot S(\Delta_i)$, а это - не что иное, как интегральная сумма, отвечающая двойному интегралу $\int\limits_\Delta\int f\left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right) \cdot \sqrt{g(u, v)}dudv$.

Согласно условию теоремы, конечный предел при $\lambda \to 0$ интегральных сумм поверхностного интеграла существует, не зависит от выбора точек M_i и равен $\iint\limits_S f(M)dS$. Следовательно, существует и не зависит от выбора точек M_i предел интегральных сумм двойного интеграла $\iint\limits_\Delta f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\cdot\sqrt{g(u,v)}dudv$ и эти интегралы равны между собой: $\iint\limits_S f(M)dS = \iint\limits_\Delta f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\cdot\sqrt{g(u,v)}dudv$. Теорема доказана.

В частном случае, когда поверхность S задана в явном виде $z = z(x,y)$, где $(x,y)\in D$, имеем (см. лекцию 20) : $\vec{r}_x = \vec{i} + \vec{k}\cdot z'_x$, $\vec{r}_y = \vec{i} + \vec{k}\cdot z'_y$,

$$g_{11} = 1 + (z'_x)^2,\ \ g_{22} = 1 + (z'_y)^2,\ \ g_{12} = z'_x\cdot z'_y,\ \sqrt{g}\ = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)}.$$

Поэтому

$$\iint\limits_S f(M)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy = \iint\limits_D \tfrac{f(x,y,z(x,y))}{|\cos\gamma(x,y)|}dxdy.$$

Аналогично, если поверхность S задана уравнением $x = x(y,z)$, то

$$\iint\limits_S f(M)dS = \iint\limits_D f(x(y,z),y,z)\cdot\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}dydz = \iint\limits_D \tfrac{f(x(y,z),y,z)}{|\cos\alpha(y,z)|}dydz.$$

Если поверхность S задана как $y = y(x,z)$, то

$$\iint\limits_S f(M)dS = \iint\limits_D f(x,y(x,z),z)\cdot\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}dxdz = \iint\limits_D \tfrac{f(x,y(x,z),z)}{|\cos\beta(x,z)|}dxdz.$$

Свойства поверхностных интегралов 1-го рода.

1°. $\iint\limits_S (k_1\cdot f(M)\ \pm\ k_2\cdot g(M))dS\ =\ k_1\cdot\iint\limits_S f(M)dS\ \pm\ k_2\cdot\iint\limits_S g(M)dS$, где $k_1 = const$, $k_2 = const$.

2°. Если $S = \overline{S}\cup\overline{\overline{S}}$, то $\iint\limits_S f(M)dS = \iint\limits_{\overline{S}} f(M)dS + \iint\limits_{\overline{\overline{S}}} f(M)dS$.

3°. $\left|\iint\limits_S f(M)dS\right| \leqslant \iint\limits_S |f(M)|\,dS$.

4°. Если функция $f(x,y,z,)$ непрерывна на гладкой поверхности S, то на этой поверхности существует точка $M^*(x^*,y^*,z^*)$, такая, что в этой точке выполняется равенство

$$\iint\limits_S f(M)dS = f(M^*)\cdot S,$$

или, что то же,

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = f(x^*,y^*,z^*)\cdot S,$$

где S - площадь поверхности, на которой определена функция $f(x,y,z)$.

5°. Если $f(x,y,z,) > 0$ во всех точках поверхности S, то $\iint\limits_S f(x,y,z,)dS > 0$.

22.2 Ориентация поверхности и поверхностные интегралы 2-го рода

Прежде чем переходить к определению поверхностного интеграла 2-го рода, необходимо ввести понятие *ориентированной поверхности.* Для этого необходимо ввести понятие *стороны поверхности.*

Пусть S - гладкая поверхность. Возьмём на S некоторую внутреннюю точку M_0, проведём через неё нормаль к S и выберем на этой нормали одно из двух возможных направлений. Это можно сделать, если фиксировать определённый единичный вектор $\vec{n}$, нормальный к S в точке M_0. Проведём теперь на поверхности S через точку M_0 какой-либо замкнутый контур C, не имеющий общих точек с границей поверхности, и будем передвигать единичный вектор $\vec{n}$ из точки M_0 вдоль C так, чтобы этот вектор всё время оставался нормальным к S и его направление менялось при этом движении непрерывно. Поскольку вектор $\vec{n}$ всё время остаётся нормальным к S, то имеются две возможности: либо при возвращении в точку M_0 вектор $\vec{n}$ возвращается в первоначальное положение, либо в результате обхода по контуру C вектор $\vec{n}$ меняет своё направление на противоположное.

Определение. Гладкая поверхность S называется *двусторонней,* если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не имеющему общих точек с её границей, не меняет направления нормали к поверхности. Если же на поверхности существует замкнутый контур, при обходе по которому направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется *односторонней.*

Односторонние поверхности называют *неориентируемыми.*

Простейшим примером односторонней поверхности может служить так называемый *лист Мёбиуса.*

Замечание. Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой,* а выбор определённой её стороны - *ориентацией.*

С понятием стороны поверхности тесно связано понятие ориентации её границы. При рассмотрении этого понятия не будем ограничиваться только односвязными областями, а будем рассматривать также и m - связные области, ограниченные контурами C_1, C_2, ... , C_m, то есть, вообще говоря, мы будем иметь дело с составными границами $C = \bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i$.

Определение. Направление обхода граничного контура C_i считаем *положительным,* то есть согласованным с ориентацией поверхности S, если наблюдатель, расположенный на поверхности так, что направление вектора нормали совпадает с направлением от ног к голове, обходит контур C_i, оставляя все точки поверхности S слева от себя. Противоположное направление обхода мы считаем *отрицательным.*

Определение. Пусть γ - произвольный замкнутый контур, целиком принадлежащий ориентированной поверхности S и ограничивающий какую либо часть этой поверхности. Положительным считается тот обход контура γ, при котором ограниченная этим контуром поверхность остаётся слева.

Перейдём к определению поверхностного интеграла 2-го рода. Пусть S - двустороняя поверхность, в точках которой определена векторная функция $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} \cdot P(x, y, z) + \vec{j} \cdot Q(x, y, z) + \vec{k} \cdot R(x, y, z)$. Выберем ориентацию поверхности S (то есть сторону поверхности), зафиксировав единичный вектор нормали $\vec{n}(x, y, z) = \vec{i} \cdot \cos\alpha(x, y, z) + \vec{j} \cdot \cos\beta(x, y, z) + \vec{k} \cdot \cos\gamma(x, y, z)$ в каждой точке $M(x, y, z)$ поверхности S (то есть зафиксировав поле нормалей на поверхности).

Определение. Интеграл вида $\int\limits_S\int \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS = \int\limits_S\int [P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma]\, dS$ называется поверхностным интегралом 2-го рода от векторной функции $\vec{F}(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности S.

Поскольку dS - бесконечно-малый элемент площади, то $\cos\alpha \cdot dS$ - есть проекция элемента dS на плоскость $y0z$, и поэтому $\cos\alpha \cdot dS$ обозначим символом $dydz$, аналогично, обозначим $\cos\beta \cdot dS$ - символом $dzdx$, а $\cos\gamma \cdot dS$ - символом $dxdy$. Поэтому $\int\limits_S\int \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS = \int\limits_S\int P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$.

22.3 Вычисление поверхностных интегралов 2-го рода

Теорема. Если кусочно-гладкая поверхность S задана параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v),$$

где $(u, v) \in \Delta$, то

$$\int\limits_S\int P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \int\limits_\Delta\int [P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot A(u, v) + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot B(u, v) +$$

$$+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot C(u,v)]dudv.$$

Доказательство.

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz \ + \ Q(x,y,z)dxdz \ + \ R(x,y,z)dxdy \ =$$

$$= \ \iint\limits_S \left[P(x,y,z) \ \cos\alpha + \ Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right] dS =$$

$$= \iint\limits_\Delta [P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cos\alpha + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cos\beta +$$

$$+ \ R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cos\gamma] \ \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv.$$

Мы знаем, что

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{N}\cdot\vec{i}\right)}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \ \cos\beta = \frac{\left(\vec{N}\cdot\vec{j}\right)}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\left(\vec{N}\cdot\vec{k}\right)}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Подставив эти формулы в предыдущее выражение, получим

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_\Delta [P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot A(u,v) + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot B(u,v)+$$

$$+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot C(u,v)]dudv.$$

Это и есть требуемый результат. Теорема доказана.

Глава 23

Формулы Остроградского - Гаусса и Стокса

23.1 Формула Остроградского - Гаусса

Формула Остроградского - Гаусса устанавливает связь между тройным интегралом по пространственной области Ω и поверхностным интегралом 2-го рода, взятым по внешней стороне поверхности S, ограничивающей эту область:

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Доказательство. При выводе этой формулы мы будем предполагать, что Ω - пространственная область, которая допускает разбиение на конечное число как "z - цилиндрических" областей, так и на конечное число "x - цилиндрических" и "y - цилиндрических" пространственных областей.

Пусть Ω^* – "z - цилиндрическая" область, с верхней "шапочкой" $z = Z_2(x,y)$ и нижней "шапочкой" $z = Z_1(x,y)$, которые мы обозначим символами S_2 и S_1 соответственно, и боковой поверхностью S_3 с образующими, параллельными оси z.

Рассмотрим функцию $R(x,y,z)$ - непрерывную вместе со своей производной $\frac{\partial R}{\partial z}$ в области Ω^*, включая её границу.

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega^*} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} \left(\int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x,y,Z_2(x,y))dxdy - \iint\limits_{D} R(x,y,Z_1(x,y))dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{S_3} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy.$$

Здесь интеграл $\iint\limits_{S_2} R(x,y,z)dxdy$ - это поверхностный интеграл по верхней "шапочке" $z = Z_2(x,y)$, интеграл $\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy$ - поверхностный интеграл по нижней "шапочке" $z = Z_1(x,y)$, знак перед этим интегралом сменился из-за того, что вектор нормали к этой поверхности образует тупой угол с положительным направлением оси z, интеграл $\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)dxdy$ по боковой поверхности S_3 очевидно равен нулю, поскольку площадь проекции этой поверхности на плоскость $x0y$ равна нулю. В результате в правой части равенства мы получили поверхностный интеграл 2-го рода по внешней стороне всей поверхности S, ограничивающей область Ω^*.

Окончательно:

$$\iiint\limits_{\Omega^*} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz \ = \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_S R(x,y,z) \cdot \cos\alpha \, dS.$$

Это равенство справедливо и для любой области Ω, которую можно разбить на конечное число "z-цилиндрических" областей. В самом деле, разобъём Ω на такие части Ω_i и напишем для каждой из них доказанное только что равенство и просуммируем эти равенства. Слева мы получим тройной интеграл, взятый по всей области Ω, а справа - сумму поверхностных интегралов, взятых по частям поверхности S, ограничивающей Ω.

Пусть сейчас Ω^{**} - "x - цилиндрическая" пространственная область, а $P(x,y,z)$ и $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}$ - суть непрерывные функции в области Ω^{**}, включая её границу. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано выше, получим:

$$\int\int\limits_{\Omega^{**}}\int \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} dxdydz = \int\int\limits_S P(x,y,z)dydz = \int\int\limits_S P(x,y,z) \cdot \cos\beta \, dS.$$

Это равенство остаётся в силе и тогда, когда область Ω состоит из конечного числа "x - цилиндрических" частей:

$$\int\int\limits_{\Omega}\int \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} dxdydz = \int\int\limits_S P(x,y,z)dydz = \int\int\limits_S P(x,y,z) \cdot \cos\beta \, dS.$$

Аналогично получим:

$$\int\int\limits_{\Omega}\int \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} dxdydz = \int\int\limits_S Q(x,y,z)dzdx = \int\int\limits_S Q(x,y,z) \cdot \cos\gamma \, dS.$$

Пусть теперь Ω - некоторая область, которую можно представить как конечное число "z - цилиндрических" областей, так и как конечное число областей двух других видов, и пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ вместе со своими производными $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}$, $\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}$, $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$ непрерывны в этой области всюду, включая её границу. Тогда справедливы все три полученных равенства. Сложив их, получим

$$\int\int\limits_{\Omega}\int \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right) dxdydz =$$
$$= \int\int\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy,$$

или в других обозначениях:

$$\int\int\limits_{\Omega}\int \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right) dxdydz =$$
$$= \int\int\limits_S [P(x,y,z) \cdot \cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma] dS.$$

Это и есть формула Остроградского - Гаусса.

Из формулы Остроградского - Гаусса легко получить выражение для объёма области Ω в виде поверхностного интеграла по замкнутой поверхности S, - границе этой области.

Подберём функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, и $R(x,y,z)$ так, чтобы $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = 1$. Тогда получим $\int\int\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \int\int\limits_\Omega\int dV = V$, где V - объём, ограниченный поверхностью S.

В частности, положив $P = \frac{1}{3}x$, $Q = \frac{1}{3}y$, $R = \frac{1}{3}z$, мы получим для вычисления объёма удобную формулу

$$V = \frac{1}{3}\int\int\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

23.2 Формула Стокса

Формула Стокса связывает криволинейные интегралы с поверхностными. Пусть в некоторой области пространства определена векторная функция $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} \cdot P(x,y,z) + \vec{j} \cdot Q(x,y,z) + \vec{k} \cdot R(x,y,z)$, то есть задано векторное поле. Пусть также эта пространственная область содержит гладкую поверхность S, ограниченную ориентируемым контуром C. Пусть компоненты векторного поля $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ - непрерывные функции вместе со своими частными производными в рассматриваемой области (а следовательно, автоматически, и на поверхности S, и на контуре C.)

Введём в рассмотрение следующее векторное поле:

$$\vec{W} \stackrel{def}{=} [\vec{\nabla} \times \vec{F}] = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \overrightarrow{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \overrightarrow{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \overrightarrow{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

При всех высказанных выше предположениях имеет место **формула Стокса:**

$$\oint\limits_C \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = \int\limits_S\int \left(\vec{W} \cdot \vec{n}\right) dS,$$

или, в подробной (координатной) форме записи:

$$\oint\limits_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_S\int \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \int\limits_S\int \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cdot \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \cos\gamma\right] dS.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай задания поверхности в виде $z = Z(x,y)$, где $(x,y) \in D$. Преобразование криволинейного интеграла проведём по схеме: $\oint\limits_C \to \oint\limits_\Gamma \to \int\limits_D\int \to \int\limits_S\int$, то есть криволинейный интеграл по пространственному контуру C преобразуем в криволинейный интеграл по плоскому контуру Γ, затем с помощью формулы Грина переведём его в двойной интеграл по области D и, наконец, этот последний интеграл преобразуем в поверхностный интеграл по S.

Для удобства вывода формулы Стокса рассмотрим сначала только "одну треть" криволинейного интеграла $J_1 = \oint\limits_C P(x,y,z)dx$.

Заметим прежде всего, что $J_1 = \oint\limits_C P(x,y,z)dx = \oint\limits_\Gamma P(x,y,Z(x,y))dx$, поскольку контур C лежит на поверхности S, заданной уравнением $z = Z(x,y)$. Далее, применив формулу Грина, получим $J_1 = \oint\limits_\Gamma P(x,y,Z(x,y))dx = -\int\limits_D\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy$ (здесь P - сложная функция от x и y, и мы учли это при вычислении производной от P по y.)

Воспользовавшись теперь выражениями для направляющих косинусов нормали (см. лекцию 21, п. 21.1), получим, что $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. Поэтому $J_1 = -\int\limits_D\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) dxdy$. Преобразуем теперь этот двойной интеграл в поверхностный (см. лекцию 54, п.11.19.).

Получаем $J_1 = -\int\limits_S\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \cos\beta\right) \frac{dxdy}{\cos\gamma} = -\int\limits_S\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \cos\beta\right) dS.$

Таким образом, $\oint\limits_C P(x,y,z)dx = \int\limits_S\int \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \cos\gamma\right) dS.$

Мы предполагали, что поверхность S задана уравнением $z = Z(x,y)$. Зададим теперь ту же поверхность S уравнением $y = Y(x,z)$. Рассуждения, аналогичные проведённым выше, дают

$\oint\limits_C Q(x,y,z)dy = \int\limits_S\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \cos\alpha\right) dS.$

Аналогично, $\oint\limits_C R(x,y,z)dz = \int\int\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cdot\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\cos\beta\right)dS.$

Складывая все эти три равенства, получаем $\oint\limits_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$
$= \int\int\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\cos\gamma\right]dS.$ Формула Стокса доказана.

Замечание. При выводе формулы Стокса мы пользовались декартовой системой координат. Но ни криволинейный, ни поверхностный интегралы не зависят от способа задания поверхности S и её границы C. Поэтому формула Стокса $\oint\limits_C \left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = \int\int\limits_S \left(\vec{W}\cdot\vec{n}\right)dS$ остаётся в силе и при любом другом способе задания поверхности, например с помощью параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$.

23.3 Условие независимости криволинейного интеграла от пути в пространстве

Теорема. Пусть $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ - функции, непрерывные вместе со своими частными производными в некоторой поверхностно-односвязной (т.е. без "дырок"на границе) пространственной области Ω и на её границе. Тогда следующие четыре утверждения равносильны между собой:

1°. $\oint\limits_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$ по любому замкнутому пути $C \in \Omega$.

2°. $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ не зависит от пути, соединяющего точки $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$.

3°. В Ω существует функция $U(x,y,z)$ такая, что $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = dU(x,y,z)$.

4°. $\vec{W} \stackrel{def}{=} [\vec{\nabla}\times\vec{F}] = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$ то есть выполняются равенства:

$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$

Доказательство этой теоремы проводится по замкнутой схеме: $4 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$ и практически слово в слово повторяет аналогичную теорему о независимости криволинейного интеграла от пути на плоскости, доказанную нами в лекции 20 (см. п.20.2). Поэтому приводить доказательство этой теоремы мы здесь не будем.

В заключение **найдём функцию** $U(x,y,z)$ **такую, что**

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = dU(x,y,z).$$

Для этого проинтегрируем по x выражение $\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z)$. Получим $U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + A(y,z)$, где $A(y,z)$ - произвольная пока функция указанных в скобках аргументов.

Далее: $Q(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}dx + \frac{\partial A(y,z)}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial A(y,z)}{\partial y} = Q(x,y,z) - Q(x_0,y,z) + \frac{\partial A(y,z)}{\partial y}.$

Следовательно, $\frac{\partial A(y,z)}{\partial y} = Q(x_0,y,z)$. Проинтегрировав это выражение по y, получим $A(y,z) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + B(z)$, тогда $U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + B(z).$

Найдём теперь функцию $B(z)$.

Имеем: $R(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}dx + \int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial Q(x_0,y,z)}{\partial z}dy + \frac{\partial B(z)}{\partial z} = \int\limits_{x_o}^{x}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}dx + \int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial R(x_0,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial B(z)}{\partial z} =$
$R(x,y,z) - R(x_0,y,z) + R(x_0,y,z) - R(x_0,y_0,z) + \frac{\partial B(z)}{\partial z}$, откуда $\frac{\partial B(z)}{\partial z} = R(x_0,y_0,z) \to B(z) = \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz.$

В итоге

$U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz.$

Глава 24

Базовые сведения о рядах

24.1 Основные определения теории числовых рядов. Критерий Коши сходимости числового ряда

Рассмотрим бесконечную числовую последовательность $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ и из членов этой последовательности составим бесконечную сумму $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, которую назовём *числовым рядом.* Обозначим далее $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ... , $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, ..., которые далее будем называть первой, второй, третьей, ... , n - ой *частичной суммой* ряда.

Определение 1. Если существует конечный предел n - ой частичной суммы ряда при $n \to \infty$, то есть существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \Re$, то говорят, что *ряд сходится;* если же предел не существует, или он равен бесконечности, говорят, что *ряд расходится.* Предел S называют *суммой ряда* и пишут $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

Пример 1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, ... , $S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0$, то есть предел частичных сумм не существует. Данный ряд расходится.

Пример 2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n + ...$ $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Видим, что если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, ряд сходится. Если же $q = 1$, $S_n = n + 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, и если $|q| > 1$, то конечного предела частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$ не существует, в обоих этих случаях ряд расходится.

Поскольку вопрос о сходимости ряда сводится к сходимости последовательности частичных сумм $\{S_n\}$, то к этой последовательности применим критерий Коши.

Критерий Коши (сходимости ряда). Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) :$ $n > N(\varepsilon)$ и для всех натуральных p, было выполнено $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, или $|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$, или $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$.

Необходимый признак сходимости ряда. Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходился, необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Действительно, критерий Коши при $p = 1$ даёт: для для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) :$ $n > N(\varepsilon)$ выполняется $|a_{n+1}| < \varepsilon$, а значит и $|a_n| < \varepsilon$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, что и утверждается.

Из этой теоремы следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, или же этот предел не существует, то ряд расходится.

Но если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то можно ли утверждать, что ряд сходится? Достаточно ли этого условия для сходимости ряда? Ответ: нет, не достаточно. В этом нас убеждает простой **пример**: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+....$ Этот ряд называется *гармоническим рядом.* Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Но, по критерию Коши, при $p=n$ имеем $\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right|>\left|\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}\right|=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$. Видим: $|S_{n+p}-S_n|>\frac{1}{2}$ и никогда не может быть выполнено $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$ для $\forall\varepsilon>0$. Таким образом, гармонический ряд - расходящийся ряд, несмотря на то, что необходимое условие выполнено.

24.2 Ряды с положительными членами

Ряды с положительными членами - это ряды вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$, где все $a_k\geqslant 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

Доказательство. Действительно, последовательность $\{S_1,S_2,...,S_n,...\}$ - неубывающая, и если она ограниченна, то она имеет предел.

Обратно, если ряд с положительными членами сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена сверху суммой этого ряда.

Теорема 2. Если начиная с некоторого номера k_0 члены рядов с положительными членами $\sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\infty}a_k$ и $\sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\infty}b_k$ связаны неравенствами $a_k\leqslant c\cdot b_k$, (где $c>0$; $const$), то из сходимости большего (второго) ряда следует сходимость меньшего (первого) ряда. Из расходимости меньшего (первого) ряда следует расходимость большего (второго) ряда.

Доказательство. Видим, что $S_n^{(a)}\leqslant c\cdot S_n^{(b)}$, где $S_n^{(a)}$ и $S_n^{(b)}$ составлены из рядов, у которых отброшены первые k_0 членов. Если второй ряд сходится, то $\{S_n^{(b)}\}$ - ограниченная последовательность, следовательно, ограниченной является последовательность $\{c\cdot S_n^{(b)}\}$, тем более является ограниченной последовательность $\{S_n^{(a)}\}$. Тогда, на основании теоремы 1, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ - сходится. Если же первый ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ - расходится, то $\{S_n^{(a)}\}$ - неограниченная последовательность, вследствие этого неограниченной является последовательность $\{S_n^{(b)}\}$, и поэтому второй ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ расходится.

Пример 1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{k}$; но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится. Следовательно, расходится и исследуемый ряд.

Пример 2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+....$ Но $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot...\cdot k}<\frac{1}{1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot...\cdot2}=\frac{1}{2^{k-1}}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ сходится (это сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}<1$), то и исходный ряд сходится.

Теорема 3. (Признак сходимости Даламбера). Если $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=L$, то ряд с положительными членами $\sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\infty}a_k$ сходится, если $L<1$, и расходится, если $L>1$.

Доказательство. Разберём случай, когда $L<1$. Нам дано, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=L$. Это означает, что для $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что как только $n>N(\varepsilon)$, так сразу выполнится неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|<\varepsilon$, или, что то же, $L-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_kn}<L+\varepsilon$.

Зададимся $\varepsilon>0$ так, что бы $L+\varepsilon<1$. Поскольку величина ε выбирается произвольно, этого всегда можно добиться (положим, например, $\frac{1-L}{2}=\varepsilon$). Обозначим $L+\varepsilon=q$. Для заданного $\varepsilon>0$ найдём такой номер N_0, что для всех $n>N_0$ выполнится неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\varepsilon=q$. Иначе говоря, для всех $n>N_0$ одновременно выполнятся неравенства $\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}}<q$, $\frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}}<q$, $\frac{a_{N_0+3}}{a_{N_0+2}}<q$, ... , $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$. Перемножим эти неравенства. Получим, что начиная с номера N_0

и для всех номеров, превосходящих этот номер, выполнится неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_{N_0}} < q^{n+1-N_0}$, или $a_{n+1} < q^{n+1} \cdot \frac{a_{N_0}}{q^{N_0}}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ при $|q| < 1$ сходится, то, по теореме 2, сходится и исследуемый ряд.

Разберём теперь случай, когда $L > 1$. Зададимся $\varepsilon > 0$ так, что бы $L - \varepsilon > 1$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдём такой номер N_0, что для всех $n > N_0$ выполнится неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon = q$, то есть для всех $n > N_0$ одновременно выполнятся неравенства $\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} > q$, $\frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}} > q$, $\frac{a_{N_0+3}}{a_{N_0+2}} > q$, ... , $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q$. Перемножим эти неравенства. Получим, что начиная с номера N_0 и для всех номеров, превосходящих этот номер, выполнится неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_{N_0}} > q^{n+1-N_0}$, или $a_{n+1} > q^{n+1} \cdot \frac{a_{N_0}}{q^{N_0}}$. Но так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ при $|q| > 1$ расходится, то, по теореме 2, расходится и исследуемый ряд. Теорема доказана.

Теорема 4. (Радикальный признак сходимости Коши). Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$, то ряд с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если $L < 1$, и расходится, если $L > 1$.

Доказательство. Пусть $L < 1$. Нам дано, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$. Это означает, что для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что как только $n > N(\varepsilon)$, так сразу выполнится неравенство $\left|\sqrt[k]{a_k} - L\right| < \varepsilon$, или, что то же, $L - \varepsilon < \sqrt[k]{a_k} < L + \varepsilon$.

Зададимся $\varepsilon > 0$ так, что бы $L + \varepsilon < 1$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдём такой номер N_0, что для всех $n > N_0$ выполнится неравенство $\sqrt[k]{a_k} < L + \varepsilon = q$, или $a_k < q^k$. Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ при $|q| < 1$ сходится, то, на основании теоремы 2, ряд, исследуемый нами, сходится.

Пусть теперь $L > 1$. Зададимся $\varepsilon > 0$ так, что бы $L - \varepsilon > 1$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдём такой номер N_0, что для всех $n > N_0$ выполнится неравенство $\sqrt[k]{a_k} > L - \varepsilon = q$, или $a_k > q^k$. Но так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ при $|q| > 1$ расходится, то, на основании теоремы 2, исследуемый нами ряд также расходится. Теорема доказана.

Теорема 5. (Интегральный признак сходимости Коши). Пусть $f(x) > 0$ - невозрастающая функция при $x > 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, если сходится несобственный интеграл первого рода $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Пусть интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$ сходится. Видим, что

$$f(2) \leqslant \int\limits_1^2 f(x)dx,\ f(3) \leqslant \int\limits_2^3 f(x)dx,\ \dots\ ,\ f(n) \leqslant \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx,\ \dots\ .$$

Тогда

$$S_n = f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leqslant \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + \dots + \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx < K,$$

где $K = const$, так как интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$ сходится. Частичные суммы исследуемого ряда с положительными членами ограничены и, следовательно, по теореме 1, ряд сходится.

Пример. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\lambda}$ - обобщённый гармонический ряд. $f(k) = \frac{1}{k^\lambda}$, $f(x) = \frac{1}{x^\lambda}$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\lambda}dx = \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_1^{\infty}$. Очевидно, что интеграл, а вместе с ним и ряд, сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \leqslant 1$.

Глава 25

Знакопеременные ряды

25.1 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Пусть нам дан числовой ряд $\sum\limits_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$.

Определение 1. Ряд $\sum\limits_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ (где a_k - вещественные числа любого знака) называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, составленный из абсолютных значений членов этого ряда.

Теорема 1. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Действительно, для заданного числового ряда $\sum\limits_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ признак Коши сходимости ряда даёт: $|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ и для любого натурального p, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится. Таким образом, $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, критерий Коши выполнен, ряд сходится.

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ называется *условно сходящимся,* если он сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится.

Пример. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$. $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $|a_k| = \frac{1}{k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - это гармонический ряд, он расходится.

Покажем, что исследуемый знакопеременный ряд сходится. Для этого рассмотрим частичные суммы S_n этого ряда. Если n - чётное, то есть $n = 2m$, то $S_{2m} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m})$. Ясно, что последовательность частичных сумма растёт. С другой стороны $S_{2m} = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - ... - (\frac{1}{2m-2} - \frac{1}{2m-1}) - \frac{1}{2m} < 1$, то есть данная последовательность частичных сумм ограничена сверху. Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Если $n = 2m-1$, то $S_{2m-1} = S_{2m} + \frac{1}{2m}$; $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} + \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{2m} = S + 0 = S$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тем самым мы доказали, что знакопеременный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ сходится, и сходится условно.

Какие арифметические операции можно проводить с условно сходящимися рядами? Одним из важнейшим свойств суммы конечного числа слагаемых является переместительное свойство: от перестановки мест слагаемых сумма не меняется. Сохраняется ли это свойство для бесконечных рядов?

Ответ: для абсолютно сходящихся рядов - да, для условно сходящихся рядов - нет. Чтобы доказать, что для условно сходящихся рядов, если переставить местами члены ряда, переместительное свойство не выполняется, достаточно привести хотя бы один пример.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + ...$. Мы знаем, что этот ряд сходится, его сумму мы выше обозначили через S. Переставим сейчас члены ряда так, чтобы после положительного члена стояли два отрицательных: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + ... + (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) + ...$. Покажем, что этот ряд сходится, но имеет сумму $S^* = \frac{1}{2}S$. Действительно, $S^*_{3m} = \sum\limits_{k=1}^{m} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \sum\limits_{k=1}^{m} (\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \frac{1}{2} S_{2m}$.

$S_{3m-1}^* = S_{3m}^* + \frac{1}{4m} = \frac{1}{2}S_{2m} + \frac{1}{4m}$; $S_{3m-2}^* = S_{3m-1}^* + \frac{1}{4m-2} = \frac{1}{2}S_{2m} + \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m}$. Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m}^* = \frac{1}{2}S$; $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m-1}^* = \frac{1}{2}S$; $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m-2}^* = \frac{1}{2}S$; то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^* = \frac{1}{2}S$. Тем самым мы показали, что в результате указанной выше перестановки членов ряда сумма условно сходящегося ряда изменилась.

Теорема Римана. (Принимаем без доказательства). Если ряд сходится условно, то каково бы ни было число $R \in \Re$, можно так переставить члены ряда, что сумма преобразованного ряда будет равна R.

Теорема Коши. (Принимаем без доказательства). Если ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного перестановкой членов, сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и данный ряд.

Таким образом, переместительное свойство сохраняется лишь для абсолютно сходящихся рядов.

25.2 Признаки сходимости рядов, члены которых имеют произвольные знаки

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ - ряд, члены которого имеют какие угодно знаки. Для установления абсолютной сходимости этого ряда строим ряд с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ и применим любой из признаков сходимости (Даламбера, радикальный или интегральный признаки Коши и так далее.) Если же ряд сходится условно, то эти признаки бессильны. Здесь нужны более тонкие признаки сходимости. Такими признаками являются, в частности, признак Абеля и признак Дирихле.

Для их рассмотрения проведём полезную для дальнейшего исследования оценку, указанную **Абелем**. Рассмотрим частичные суммы $S_1^{(a)} = a_1$, $S_2^{(a)} = a_1 + a_2$, $S_3^{(a)} = a_1 + a_2 + a_3$, ... ,$S_n^{(a)} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Выражая через множители a_k эти суммы, $a_1 = S_1^{(a)}$, $a_2 = S_2^{(a)} - S_1^{(a)}$, $a_3 = S_3^{(a)} - S_2^{(a)}$, ... ,$a_n = S_n^{(a)} - S_{n-1}^{(a)}$, сумму S_n можно записать в виде $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = S_1^{(a)} \cdot b_1 + (S_2^{(a)} - S_1^{(a)}) \cdot b_2 + (S_3^{(a)} - S_2^{(a)}) \cdot b_3 + ... + (S_n^{(a)} - S_{n-1}^{(a)}) \cdot b_n$. Если раскрыть скобки и иначе сгруппировать члены, то и получим окончательную формулу $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = S_1^{(a)} \cdot (b_1 - b_2) + S_2^{(a)} \cdot (b_2 - b_3) + S_3^{(a)} \cdot (b_3 - b_4) + ... + S_{n-1}^{(a)} \cdot (b_{n-1} - b_n) + S_n^{(a)} \cdot b_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k^{(a)} \cdot (b_k - b_{n+1}) + S_n^{(a)} \cdot b_n$.

Основываясь на полученной формуле, выведем теперь следующую оценку для сумм указанного вида.

Лемма Абеля. Если множители b_k не возрастают (или не убывают), а все суммы $S_k^{(a)}$ ограничены по абсолютной величине числом M : $\left|S_k^{(a)}\right| \leqslant M$, $(k = 1, 2, ..., n)$, то $|S_n| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leqslant M \cdot (|b_1| + 2\,|b_n|)$.

Действительно, поскольку все разности в полученной выше формуле одного знака, имеем: $|S_n| \leqslant \left|\sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k^{(a)} \cdot (b_k - b_{n+1}) + S_n^{(a)} \cdot b_n\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left|S_k^{(a)}\right| \cdot |b_k - b_{n+1}| + \left|S_n^{(a)}\right| \cdot |b_n| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} M \cdot |b_k - b_{n+1}| + M \cdot |b_n| \leqslant M(|b_1 - b_n| + |b_n|) \leqslant M(|b_1| + 2\,|b_n|)$.

Нетрудно видеть, что если множители b_k не возрастают и положительны, то оценку можно упростить: $|S_n| \leqslant M \cdot b_1$.

Признак Абеля. Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$. Этот ряд сходится, если: ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а числа b_k - образуют монотонную и ограниченную последовательность (то есть для любых k выполнено $|b_k| \leqslant K$).

Доказательство. Покажем, что для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$, при указанных в теореме условиях, выполнен критерий Коши $|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} \cdot b_{n+1} + a_{n+2} \cdot b_{n+2} + ... + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| < \varepsilon$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, для него выполнен критерий сходимости Коши: по заданному $\varepsilon_a > 0$ найдётся такой номер N, что при всех $n > N$ неравенство $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon_a$ будет выполняться, каково бы ни было p. Следовательно, за число M, фигурирующее в лемме, можно принять ε_a. Имеем тогда при $n > N$: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \cdot b_k\right| \leqslant \varepsilon_a \cdot (|b_{n+1}| + 2\,|b_{n+p}|) \leqslant 3K \cdot \varepsilon_a \overset{def}{=} \varepsilon$, что и доказывает сходимость исследуемого ряда.

Признак Дирихле. Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$. Этот ряд сходится, если частичные суммы $S_k^{(a)}$ ограничены по абсолютной величине $\left|S_k^{(a)}\right| \leqslant K$ $(k = 1, 2, ..., n)$, а числа b_k - образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Доказательство. Поскольку числа b_k - образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю, то по заданному $\varepsilon_b > 0$ найдётся такой номер N, что при всех $n > N$ будет выполнено неравенство $|b_n| < \varepsilon_b$. Кроме того, очевидно, что $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| = \left|S_{n+p}^{(a)} - S_n^{(a)}\right| \leqslant 2K$, и можно в лемме положить $M = 2K$. Тогда при всех $n > N$ и при любых p : $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \cdot b_k\right| \leqslant 2K \cdot (|b_{n+1}| + 2\,|b_{n+p}|) \leqslant 6K \cdot \varepsilon_b \stackrel{def}{=} \varepsilon$. Сходимость ряда доказана.

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot b_k$ числа b_k - образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю, то ряд сходится, а его сумма $S < b_1$.

Доказательство. Очевидно, что для данного ряда условия признака Дирихле выполнены. Следовательно, этот ряд сходится. Вторая часть утверждения следует из того, что $S = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_3 - b_4) - ... < b_1$.

25.3 Функциональная последовательность и равномерная сходимость

Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_n(x), ...$ определённых на множестве X. Если зафиксировать точку $x_0 \in X$, функциональная последовательность превратится в числовую: $\{f_n(x_0)\} = f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0), ..., f_n(x_0), ...$.

Определение 1. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *сходящейся в точке* x_0 , если сходится последовательность $\{f_n(x_0)\}$. Точка x_0 называется *точкой сходимости* последовательности $\{f_n(x)\}$.

Определение 2. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке множества X, то говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве X и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

На языке $\varepsilon \div N$ это определение читается так: функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся к функции $f(x)$ на множестве X, если при каждом фиксированном $x \in X$ для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon, x)$, что неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполнится сразу, как только выполнится $n > N(\varepsilon, x)$.

Отметим, что номер N зависит и от ε, и от x : значения функций $f_n(x)$ и $f(x)$ меняются от точки к точке, поэтому, при заданном ε, неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ начинает выполняться, в зависимости от выбора точки, при разных значениях N.

Однако среди всех сходящихся функциональных последовательностей особое значение имеют функциональные последовательности, сходящиеся *равномерно* на сегменте $[a, b]$.

Определение 3. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполнится **сразу для всех** $\mathbf{x \in [a, b]}$, как только выполнится $n > N(\varepsilon)$.

Пример 1. $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$. Видим, что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Эта сходимость равномерная, так как $\left|\frac{1}{n} \sin nx - 0\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ для $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ сразу.

Пример 2. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0, +\infty)$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0$, то есть последовательность сходится к функции $f(x) = 0$. Но эта сходимость неравномерная, поскольку при фиксированном x за счёт увеличения n мы можем добиться выполнения неравенства $\left|\frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \varepsilon$ для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Однако, положив после этого $x = \frac{1}{n}$, получим $|f_n(x)| = 1 < \varepsilon$. Это противоречие показывает, что независимо от $x \in [0, +\infty)$ добиться выполнения неравенства $\left|\frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0\right| < \varepsilon$ невозможно.

Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Для равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ и для любого натурального p неравенство $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ выполнялось бы **сразу для всех** $\mathbf{x \in [a, b]}$. (Без доказательства).

25.4 Функциональные ряды и равномерная сходимость функциональных рядов

Если на множестве X задана функциональная последовательность $\{u_n(x)\}$, то из элементов этой последовательности мы можем образовать функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$.

Определение 1. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *сходящимся,* если сходится последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ называют *суммой ряда* и пишут $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Определение 2. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *равномерно сходящимся* к своей сумме $S(x)$, если к функции $S(x)$ равномерно сходится последовательность его частичных сумм $S_n(x)$, то есть если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ выполнялось бы сразу для всех $x \in X$.

Так как $S(x) = S_n(x) + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \overset{def}{=} S_n(x) + r_n(x)$, то это определение эквивалентно следующему: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N(\varepsilon) : \; n < N(\varepsilon),\; |r_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in X$.

Поскольку равномерная сходимость ряда сводится к равномерной сходимости последовательности частичных сумм, то критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда формулируется так:

Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Для равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ и для любого натурального p неравенство $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$ выполнялось бы сразу для всех $x \in X$.

Определение. Если для всех $x \in X$ выполнено неравенство $|u_k(x)| < a_k = const$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *мажорирующим рядом* или *мажорантой* для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса. Если мажорантный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием Коши. Поскольку мажорантный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, критерий сходимости Коши для него выполнен. Следовательно,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

сразу для всех $x \in X$, а это означает, что критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда выполнен. Функциональный ряд сходится равномерно, что и требовалось доказать.

Если к исследуемому ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ признак Вейерштрасса оказался применим, то этот ряд необходимо абсолютно сходящийся. Более того, одновременно с этим рядом будет равномерно сходящимся и ряд, составленный из абсолютных величин его членов: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$.

Между тем возможны случаи, когда функциональный ряд сходится равномерно, будучи неабсолютно сходящимся. Подобные случаи заведомо не охватываются признаком Вейерштрасса. Для их исследования нужны более тонкие признаки.

Сейчас мы установим признаки, относящиеся к функциональным рядам вида:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \cdot b_k(x) = a_1(x) \cdot b_1(x) + a_2(x) \cdot b_2(x) + .. + a_n(x) \cdot b_n(x) + \dots$, где $a_k(x)$ и $b_k(x), (k = 1, 2, 3, \dots)$ - суть функции от $x \in X$.

Признак Абеля. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) + \dots$ сходится равномерно на множестве X, а функции $b_k(x)$ при каждом $x \in X$ образуют монотонную последовательность и в совокупности - при любых x и n - ограничены: $|b_n(x)| \leqslant M$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \cdot b_k(x)$ сходится равномерно X.

Доказательство. Доказательство аналогично прежнему (см. предыдущую лекцию.) Покажем, что для исследуемого ряда, при указанных в теореме условиях, выполнен критерий Коши. Ввиду равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, номер $N(\varepsilon)$ находится независимо от x, а затем с помощью леммы Абеля получаем, как и выше, при $n > N(\varepsilon)$ оценку: $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \cdot b_k(x) \right| < \varepsilon \left(|b_{n+1}(x)| + 2 \, |b_{n+p}(x)| \right) \leqslant 3M\varepsilon$ сразу для всех $x \in X$. Утверждение доказано.

Признак Дирихле. Пусть частичные суммы $S_n^{(a)}(x)$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) + \dots$ в совокупности - при любых x и n - ограничены: $\left| S_n^{(a)}(x) \right| \leqslant K$, а функции $b_k(x)$ при каждом $x \in X$ образуют монотонную последовательность, которая сходится к нулю равномерно на множестве X. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \cdot b_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство. Доказательство проводится полностью аналогично тому, как это было сделано при доказательстве признака Дирихле в прошлой лекции. Отметим только, что номер $N(\varepsilon)$ можно выбрать независимо от x именно ввиду равномерного стремления $b_k(x)$ к нулю.

Глава 26

Функциональные ряды

26.1 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Раномерно сходящиеся функциональные ряды обладают рядом очень полезных свойств. Ниже мы приведём (без доказательства) эти свойства.

Теорема 1. Если члены ряда $u_k(x)$ определены на сегменте $[a,b]$ и непрерывны в точке $x_0 \in [a,b]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a,b]$, то сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ - непрерывная функция в точке x_0.

Следствие. Если члены ряда $u_k(x)$ - непрерывные функции на сегменте $[a,b]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a,b]$, то сумма ряда $S(x)$ - непрерывная функция для всех $x_0 \in [a,b]$.

Смысл теоремы: Если функциональный ряд сходится равномерно, то его сумма - непрерывная функция.

Замечание. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится неравномерно на множестве X, это не означает, что его сумма обязательно будет разрывной функцией. Действительно, рассмотрим пример: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{kx}{1+k^2x^2} - \frac{(k-1)x}{1+(k-1)^2x^2}\right)$. $S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. $S(x) = 0$. Ряд на сегменте $[0,1]$, сходится неравномерно, так как $|S_n(x) - S(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{1}{n}$. То есть независимо от x только за счёт увеличения n эту разность сделать меньше любого наперёд заданного числа невозможно. Тем не менее, функция $S(x) = 0$ - то есть прямая - ось x - есть непрерывная функция.

Теорема 2. Пусть функции $u_k(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно в данной окрестности. Пусть также $\lim\limits_{x\to x_0} u_k(x) = a_k$. Тогда $A:$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, и $B:$ $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to x_0} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Иначе говоря, возможен предельный переход под знаком бесконечной суммы, если функциональный ряд сходится равномерно.

Теорема 3. Если функции $u_k(x)$ непрерывны на сегменте $[a,b]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на этом сегменте, то $\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_{x_0}^{x} u_k(x) dx\right)$, где $x \in [a,b]$ и $x_0 \in [a,b]$ - две произвольные точки сегмента $[a,b]$. Последний ряд сходится раномерно на указанном сегменте.

Смысл этой теоремы очевиден: возможно почленное интегрирование равномерно сходящегося ряда.

Замечание. Как и раньше, эта теорема не утверждает, что если ряд сходится неравномерно, то почленное интегрирование невозможно.

Теорема 4. Пусть функции $u_k(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ и имеют на этом сегменте производные $u'_k(x)$, включая правосторонние и левосторонние производные в точках a и b. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на сегменте $[a, b]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно на этом сегменте. Тогда сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и выполнено равенство $S'(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$.

Иначе говоря, при выполнении условий теоремы возможно почленное дифференцирование ряда.

26.2 Степенные ряды и их абсолютная сходимость

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ... ,$$

где c_k - постоянные числа, $a = const$. Если положить $x - a = \tilde{x}$, то наш ряд будет выглядеть так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\tilde{x}^k = c_0 + c\tilde{x}_1 + c_2\tilde{x}^2 + ... + c_n\tilde{x}^n + ...$$

В дальнейшем мы тильду над $\tilde{x}$ опускаем и будем рассматривать только ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Областью сходимости степенного ряда может быть сегмент, полусегмент, интервал, он может выродиться в одну точку или совпасть со всей числовой прямой. Например, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ по признаку Даламбера сходится на всей числовой оси, при любом значении x, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ сходится только при $|x| < 1$.

Как же определить область сходимости? Ответим сначала на вопрос об абсолютной сходимости степенного ряда.

Теорема. Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится при $x = \alpha$, то он сходится абсолютно для любого $x \in (-|\alpha|, |\alpha|)$.

Доказательство. Нам дано, что числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\alpha^k$. Это означает, что выполнено необходимое условие сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n\alpha^n = 0$, то есть последовательность $\{c_n\alpha^n\}$ - это бесконечно малая последовательность, а любая бесконечно малая последовательность - ограничена: $|c_n\alpha^n| \leqslant M = const$ при всех $n = 0, 1, 2, 3, ...$. Пусть $|x| < |\alpha|$. Положим $\frac{|x|}{|\alpha|} = q$. Очевидно, что $0 \leqslant q < 1$. Тогда $|c_n x^n| = |c_n\alpha^n| \cdot \left|\frac{x}{\alpha}\right|^k \leqslant M \cdot q^k$. Но ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M \cdot q^k$ сходится, так как $q < 1$. Следовательно, степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится по признаку сравнения рядов. Что и требовалось доказать.

26.3 Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Теорема 1. Если область сходимости степенного ряда не вырождается в точку $x = 0$ и не совпадает со всей числовой осью, то существует конечный интервал $(-R, +R)$, называемый интервалом сходимости, в каждой внутренней точке которого ряд сходится абсолютно, а в каждой точке вне сегмента $[-R, +R]$ расходится.

Доказательство. Рассмотрим множество $\{|x'|\}$, где x' пробегает множество всех точек сходимости степенного ряда.Обозначим через $R = \sup\{|x'|\}$. Очевидно, что $R < \infty$, так как иначе, в силу теоремы из предыдущего пункта, наш ряд сходился бы абсолютно на всей числовой оси. В силу определения числа R как точной верхней грани, при $|x| > R$ наш ряд расходится. Легко видеть, что при $|x| < R$ ряд сходится абсолютно. Действительно, по определению точной верхней грани найдётся x' такое, что $|x| < |x'| < R$. Но тогда, в силу предыдущего пункта, в точке x ряд сходится абсолютно, что и утверждалось. Число R называется *радиусом сходимости.*

Замечание. На концах интервала сходимости степенные ряды могут вести себя по-разному. Например, ряды $I = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, $II = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k+1}$, $III = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$, $IV = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2}$ имеют интервал сходимости $-1 < x < +1$, но для ряда IV область сходимости - $[-1, +1]$, для ряда III - $[-1, +1)$, для ряда II - $(-1, +1]$, а для ряда I - область сходимости $x \in (-1, +1)$.

Укажем сейчас некоторые способы вычисления радиуса сходимости произвольного степенного ряда.

Теорема 2. (Способ Даламбера). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l$ $(0 \leqslant l < \infty)$, то радиус сходимости $R = \frac{1}{l}$, причём при $l = \infty$ полагают $R = 0$, при $l = 0$ полагают $R = +\infty$.

Доказательство. Применим к исследованию сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x| \cdot l$. Если $l = 0$, то $|x| \cdot 0 = 0$ и ряд сходится абсолютно при любом вещественном x, то есть $R = +\infty$. Если $l = \infty$ и $|x| \neq 0$, то $|x| \cdot l = \infty$ и ряд расходится при любом $x \neq 0$, то есть $R = 0$. Если $0 \leqslant l < \infty$, то при $|x| \cdot l < 1$ ряд сходится абсолютно при $|x| < \frac{1}{l} = R$, а при $|x| \cdot l > 1$ ряд расходится.

Теорема 3. (Способ Коши). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$ $(0 \leqslant l < \infty)$, то $R = \frac{1}{l}$. При этом $R = 0$, когда $l = \infty$, и $R = \infty$, если $l = 0$.

Доказательство. Применим к исследованию сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ признак Коши:
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n \cdot x^n|} = |x| \cdot l$. Если $|x| \cdot l < 1$, ряд сходится, если $|x| \cdot l > 1$, ряд расходится. Если $l = 0$, то $|x| \cdot 0 = 0$ и ряд сходится абсолютно при любом вещественном x, то есть $R = +\infty$. Если $l = \infty$ и $|x| \neq 0$, то $|x| \cdot l = \infty$ и ряд расходится при любом $x \neq 0$, то есть $R = 0$. Если $0 \leqslant l < \infty$, то при $|x| \cdot l < 1$ ряд сходится абсолютно при $|x| < \frac{1}{l} = R$, а при $|x| \cdot l > 1$ ряд расходится.

26.4 Равномерная сходимость степенного ряда

Теорема. (О равномерной сходимости степенного ряда). Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится равномерно на каждом замкнутом интервале, лежащем строго внутри интервала сходимости степенного ряда.

Доказательство. Пусть $-R < -\alpha \leqslant x \leqslant \beta < R$. Покажем, что на сегменте $[\alpha, \beta]$ степенной ряд сходится равномерно. Возьмём $x_0 = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, $x_0 \in (-R, +R)$. Тогда для всех $x \in [\alpha, \beta]$ выполнено неравенство $|x| < |x_0|$, $|c_n x^n| < |c_n x_0^n|$. Но числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ сходится и сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|c_k x_0^k\right|$, который является мажорантой. По признаку Вейерштрасса ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|c_k x_0^k\right|$ сходятся на сегменте $[\alpha, \beta]$ равномерно.

Замечание 1. Часто в теореме рассматривают случай, когда $\alpha = -r, \beta = r$, где $0 < r < R$. Сегмент равномерной сходимости в таком случае есть $[-r, r]$.

Замечание 2. Если степенной ряд сходится на конце интервала сходимости $x = R$, а при $x = -R$ расходится, то сегментом равномерной сходимости является сегмент $[-r, R]$. Если степенной ряд сходится при $x = -R$, а при $x = R$ расходится, то сегментом равномерной сходимости является сегмент $[-R, r]$. Наконец, если степенной ряд сходится на концах сегмента при $x = \pm R$, то сегмент равномерной сходимости - суть сегмент $[-R, R]$.

Теорема. (О непрерывности суммы степенного ряда). Сумма степенного ряда непрерывна в каждой точке внутри интервала сходимости.

Доказательство. Если точка x лежит внутри интервала сходимости $(-R, R)$ (естественно, предполагается, что интервал сходимости не вырождается в точку), то её всегда можно включить в замкнутый интервал $[-r, r]$, где $0 < r < R$. Но так как степенной ряд сходится равномерно в данном сегменте, то сумма ряда $S(x)$ - непрерывная функция в точке x. Аналогично дело обстоит и в случаях, когда интервал сходимости - суть $[-r, R]$, $[-R, r]$ или $[-R, R]$.

26.5 Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема. (О почленном дифференцировании степенного ряда). Пусть степенной ряд сходится $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ в интервале сходимости $(-R, R)$. Тогда его можно почленно дифференцировать во внутренних точках интервала сходимости: $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k x^{k-1}$. Интервал сходимости ряда производных остаётся тем же - $(-R, R)$.

Доказательство. Действительно, какое бы ни взять x, где $|x| < R$, существует такое $r < R$, что $|x| < r < R$ и на сегменте $[-r, r]$ степенной ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k x^{k-1}$ сходится равномерно. Тогда, по свойству о почленном дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов, имеем $S'(x) = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$. Радиус сходимости продифференцированного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k x^{k-1}$ равен:

$$R^* = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n \cdot c_n}{(n+1) \cdot c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R$$

- радиус сходимости исходного степенного ряда. Таким образом, $R^* = R$. Теорема доказана.

Замечание. Процесс дифференцирования, очевидно, можно продолжать сколько угодно раз. Следовательно, степенной ряд имеет производные любого порядка.

Теорема. (О почленном интегрировании степенного ряда). Степенной ряд $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ можно почленно интегрировать в интервале сходимости: $\int\limits_0^x S(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$. Интервал сходимости почленно проинтегрированного степенного ряда совпадает с интервалом сходимости исходного степенного ряда.

Доказательство. Действительно, для любого x, где $|x| < R$, существует такое $r < R$, что $|x| < r < R$ и на сегменте $[-r, r]$ степенной ряд $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится равномерно. Тогда его можно почленно интегрировать: $\int\limits_0^x S(x)dx = \int\limits_0^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \int\limits_0^x x^k dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$. Радиус сходимости получившегося ряда равен

$$R^* = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n \cdot (n+2)}{c_{n+1} \cdot (n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R$$

- радиус сходимости исходного степенного ряда. Таким образом, $R^* = R$. Теорема доказана.

26.6 Ряды Тейлора и степенные ряды

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ на интервале $(-R, R)$, если на этом интервале ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится и его сумма равна $f(x)$, то есть $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Докажем, прежде всего, что одна и та же функция $f(x)$ не может иметь два различных разложения вида $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Теорема 1. Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k = f(x)$, сходящийся на интервале $(-R, R)$, является рядом Тейлора - Маклорена своей суммы, то есть коэффициенты c_k разложения функции $f(x)$ в степенной ряд однозначно определяются по формуле $\mathrm{c_k} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Доказательство. Имеем: $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \ldots$. Как мы знаем, этот ряд можно дифференцировать сколько угодно раз, то есть справедливо:

$$f'(x) = c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot x + 3 \cdot c_3 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot c_n \cdot x^{n-1} + (n+1) \cdot c_{n+1} \cdot x^n + \ldots ,$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3 x + 3 \cdot 4 \cdot c_4 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot c_n \cdot x^{n-2} + (n+1) \cdot n \cdot c_{n+1} \cdot x^{n-1} + \ldots ,$$

....

$$f^{(k)}(x) = k! \cdot c_k + (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_k \cdot x + \ldots .$$

Положим в этих равенствах $x = 0$, получим:

$$f(0) = c_0, \;\; f'(0) = c_1, \;\; f''(0) = 1 \cdot 2 \cdot c_2, \;\; \ldots \;, \;\; f^{(k)}(0) = k! \cdot c_k, \; \ldots ,$$

откуда

$$c_0 = f(0), \;\; c_1 = f'(0), \;\; c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \; \ldots \;, \;\; c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \; \ldots,$$

а это и есть коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора - Маклорена.

Вопрос: если функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема на интервале $(-R, R)$ и для неё формально построен ряд $f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \ldots$, то будет ли его сумма равна $f(x)$?

Ответ: вообще говоря, нет!

Поучительный пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Эта функция бесконечно дифференцируема на всей числовой оси, причем $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, ... , $f^{(n)}(0) = 0$, ... Следовательно, все коэффициенты формального ряда Тейлора - Маклорена для этой функции равны нулю, а сам ряд сходится на всей числовой оси и его сумма равна нулю, в то время как сама данная функция равна нулю только при $x = 0$. Иначе говоря, $S(x) \neq f(x)$.

Спрашивается, когда же функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Тейлора - Маклорена, сходящийся к самой этой функции?

Теорема 2. Для того, чтобы функцию $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ можно было представить степенным рядом $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ имела производные всех порядков, и чтобы остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора - Маклорена $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$ стремился к нулю при $n \to \infty$ для всех $x \in (-R, R)$.

Необходимость. Дано: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Но тогда, по теореме 1, $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$. Отсюда ясно, что $|f(x) - S_n(x)| = \left| f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right) \right| = |R_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Достаточность. Дано: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$, где $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что $\left| f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right) \right| = |f(x) - S_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $x \in (-R, R)$. Следовательно, ряд $f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$ сходится и его сумма $S(x)$ равна $f(x)$. Теорема доказана.

Глава 27

Ряд Фурье

27.1 Некоторые сведения о периодических функциях

Определение. Функция $F(x)$ называется *периодической,* если существует такое число $T \neq 0$, называемое *периодом функции*, что $F(x+T) = F(x)$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

В физике простейшим примером является "гармоника": $f(x) = A\sin(\omega x+\varphi)$, где A – амплитуда, ω – частота, φ – начальная фаза гармоники. Видно, что $f(x+\frac{2\pi}{\omega}) = f(x)$ и, следовательно, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период гармоники.

Для любой периодической функции $F(x+kT) = F(x+(k-1)T+T) = F(x+(k-1)T) = F(x+(k-2)T+T) = F(x+(k-2)T) = ... = F(x)$, так что kT, где $k > 1$ - целое число, также период нашей функции. Аналогично, $F(x-T) = F((x-T)+T) = F(x)$ и, следовательно, $-kT$, где $k > 1$ - целое число, тоже период той же функции. Пусть теперь T_1 и T_2 являются периодами для функции $F(x)$. Но тогда $T_1 \pm T_2$ - также период функции $F(x)$.

Можно доказать (мы этого делать не будем), что если $F(x)$ - непрерывная периодическая функция, отличная от тождественной константы, то она имеет наименьший положительный период, который и называется *периодом* данной периодической функции $F(x)$.

Пусть на сегменте $[a, a+T]$ задана непериодическая функция $f(x)$. Построим из неё периодическую функцию с периодом T, совпадающую с функцией $f(x)$ на отрезке $[a, a+T]$. С этой целью достаточно сделать перенос графика функции $f(x)$ вправо и влево на расстояние T, $2T$, $3T, ...,$ и так далее. Этот процесс называется *периодическим продолжением* функции $f(x)$ за пределы сегмента $[a, a+T]$ с периодом T. При этом функция $F(x)$ не получает, вообще говоря, однозначного определения в точках $a \pm kT$.

Вычислим, наконец, интеграл от периодической с периодом T функции $F(x)$:

$$\int\limits_a^{a+T} F(x)dx = \int\limits_a^{T} F(x)dx + + \int\limits_T^{a+T} F(x)dx =$$

(во втором интеграле сделаем замену переменных: $x - T = \xi$)

$$= \int\limits_a^{T} F(x)dx + \int\limits_0^{a} F(\xi)d\xi \equiv \int\limits_a^{T} F(\xi)d\xi + \int\limits_0^{a} F(\xi)d\xi = \int\limits_0^{T} F(\xi)d\xi.$$

Таким образом, **интеграл от периодической с периодом T функции по любому отрезку длины T имеет одно и то же значение:** $\int\limits_a^{a+T} F(x)dx = \int\limits_0^{T} F(x)dx.$

27.2 Ряд Фурье и коэффициенты Эйлера-Фурье

Перейдём к формулировке нашей основной цели. Для этого рассмотрим счётное множество простейших гармоник вида $A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k)$, $k = 1, 2, 3, ...,$ с частотами $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ - то есть набор гармоник с кратными частотами. Составим следующий функциональный ряд:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k).$$

Если этот ряд сходится, к функции $S(x)$, то очевидно, что эта функция является периодической функцией с периодом T. Целесообразно преобразовать ряд к следующему виду:

$$A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k) = A_k \sin\varphi_k \cos\frac{2\pi k}{T}x + A_k \cos\varphi_k \sin\frac{2\pi k}{T}x.$$

Введём обозначения:

$$A_0 = \frac{a}{2};\ \ a_k = A_k \sin\varphi_k;\ \ b_k = A_k\cos\varphi_k;\ \ T = 2l,$$

тогда

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi k}{l}x + b_k \sin\frac{\pi k}{l}x\right)$$

- разложение функции $S(x)$ в тригонометрический ряд.

Необходимо ответить на следующие два вопроса:

1°. Какую периодическую функцию с периодом $2l$ можно разложить в тригонометрический ряд?

2°. Как по заданной функции $S(x)$ найти коэффициенты разложения $a_0,\ a_k,\ b_k,$ если это разложение возможно?

Ответим сначала на второй вопрос. С этой целью рассмотрим следующую систему функций $\frac{1}{2},\ \ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l},\ \ \cos\frac{2\pi}{l}x,\ \sin\frac{2\pi}{l},\ \ \cos\frac{3\pi}{l}x,\ \sin\frac{3\pi}{l},\ldots$, которая называется *основной тригонометрической системой.* Докажем, что основная тригонометрическая система ортогональна на отрезке $[-l,l]$, то есть интеграл от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл от квадрата функции отличен от нуля.

В самом деле:

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi k}{l}xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{\pi k}\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x\Big|_{-l}^{l} = 0,$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi k}{l}xdx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{\pi k}\cdot\cos\frac{\pi k}{l}x\Big|_{-l}^{l} = 0.$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi k}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[\sin\frac{\pi(n+k)}{l}x + \sin\frac{\pi(n-k)}{l}x]dx = 0,\ \ n\neq k.$$

Аналогично покажем, что

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi k}{l}x\cdot\cos\frac{\pi n}{l}xdx = 0$$

и

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi k}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}xdx = 0,\ \ n\neq k.$$

Если $n = k,$ то

$$\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{\pi k}{l}xdx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}(1+\cos^2\frac{2\pi k}{l})dx = l,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{\pi k}{l}xdx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}(1-\cos^2\frac{2\pi k}{l})dx = l,$$

$$\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{l}{2}.$$

После этого решим вопрос о коэффициентах $a_0,\ a_k,\ b_k$. Если данный тригонометрический ряд сходится равномерно, его можно почленно интегрировать. Его можно почленно интегрировать и тогда, когда он умножается на любую интегрируемую функцию.

Имеем: $\int\limits_{-l}^{l} S(x)dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-l}^{l} dx + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{\pi k}{l}xdx + b_k\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{\pi k}{l}xdx\right] = a_0\cdot l.$

Отсюда $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} S(x)dx.$

$$\int_{-l}^{l} S(x)\cdot\cos\frac{\pi k}{l}xdx = \frac{a_0}{2}\cdot\underbrace{\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi k}{l}xdx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\underbrace{\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi k}{l}x\cdot\cos\frac{\pi n}{l}xdx}_{=0,\ if\ n\neq k;\quad =l,\ if\ n=k} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\cdot\underbrace{\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\cos\frac{k\pi}{l}xdx}_{=0}.$$

Отсюда

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S(x)\cdot\cos\frac{\pi k}{l}dx.$$

Аналогично:

$$\int_{-l}^{l} S(x)\cdot\sin\frac{\pi k}{l}xdx = \frac{a_0}{2}\cdot\underbrace{\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi k}{l}xdx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot\underbrace{\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi k}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}xdx}_{=0} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\underbrace{\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi k}{l}x\cdot\cos\frac{\pi n}{l}xdx}_{=0,\ if\ n\neq k;\quad =l,\ if\ n=k}.$$

Отсюда

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S(x)\cdot\sin\frac{\pi k}{l}dx.$$

Найденные числа $a_0,\ a_k,\ b_k$ называются коэффициентами Эйлера-Фурье.

Рассмотрим сейчас любую интегрируемую на сегменте $[-l,l]$ функцию $f(x)$. Тогда по приведённым выше формулам мы можем вычислить интегралы и найти коэффициенты Эйлера-Фурье для любой интегрируемой функции $f(x)$. После того как мы вычислим $a_0,\ a_k,\ b_k,$ мы можем составить тригонометрический ряд $\frac{a}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k}{l}x + b_k\sin\frac{\pi k}{l}x\right).$

Этот ряд назовём рядом Фурье и символически мы запишем это так:

$$f(x) \sim \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k}{l}x + b_k\sin\frac{\pi k}{l}x\right).$$

Знак соответствия "$\sim$" мы пока не можем заменить на знак равенства, так как мы ещё не знаем, любую ли интегрируемую функцию (а кроме требования интегрируемости мы никаких требований не выдвигали) можно разложить в ряд Фурье.

27.3 Основная теорема о сходимости тригонометрического ряда

Для того, чтобы сформулировать основную теорему о сходимости тригонометрического ряда, необходимо дать следующие определения.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на сегменте $[a,b]$, если она непрерывна на этом сегменте всюду за исключением конечного числа точек разрыва первого рода. Такая функция в каждой точке $x \in [a,b]$ имеет конечные правые и левые предельные значения: $f(x+0) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} f(x+\varepsilon)$; $f(x-0) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} f(x-\varepsilon)$. В каждой точке непрерывности $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$. На концах отрезка существуют конечные $f(a+0)$ и $f(b-0)$.

Определение 2. Кусочно-непрерывную на сегменте $[a,b]$ функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на сегменте $[a,b]$, если производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых, однако, существуют конечные правые и левые предельные значения $f'(x+0) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} f'(x+\varepsilon)$; $f'(x-0) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} f'(x-\varepsilon)$, а также конечные $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$. Это означает, что в каждой точке $x \in [a,b]$ существуют конечные правосторонние и левосторонние производные:

$$f'(x+0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \tfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t};\, f'(x-0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \tfrac{f(x-t)-f(x-0)}{t}.$$

Сформулируем основную теорему о сходимости тригонометрических рядов Фурье (без доказательства).

Теорема. Если функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на сегменте $[-l,l]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in [-l,l]$, причём для суммы ряда $S(x) = \frac{a}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k}{l} x + b_k \sin \frac{\pi k}{l} x\right)$ выполняются следующие условия:

1°. $S(x) = f(x)$, если $x \in (-l,l)$ и точка x является точкой непрерывности функции $f(x)$.

2°. $S(x) = \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$, если $x \in (-l,l)$ и точка x является точкой разрыва функции $f(x)$.

3°. $S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0)-f(l-0)}{2}$.

27.4 Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

Легко показать, что $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx$ для чётных функций и $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0$ для функций нечётных.

В самом деле,

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx =$$

(в первом интеграле сделаем замену $x = -\,\xi$)

$$= \int_{l}^{0} f(-\xi)d(-\xi) + \int_{0}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(-\xi)d\xi + \int_{0}^{l} f(x)dx \equiv \int_{0}^{l} f(-x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Если функция чётная, то есть выполнено $f(-x) = f(x)$, то интегралы складываются, а если функция нечётная, $f(-x) = -f(x)$, то интегралы уничтожаются.

Ясно, что $\{\frac{1}{2},\, \cos \frac{k\pi}{l} x\}$ - множество чётных, а $\{\sin \frac{k\pi}{l} x\}$ - множество нечётных функций.

Пусть $f(x)$ - чётная функция, тогда и $f(x)\cdot \cos \frac{k\pi}{l} x$ - чётная функция, $a_k = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cdot \cos \frac{k\pi}{l} x dx$, а поскольку $f(x)\cdot \sin \frac{k\pi}{l} x$ - нечётная функция, $b_k = 0$.

Таким образом, для чётной функции тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos \frac{k\pi}{l} x,$$

где

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cdot\cos\frac{k\pi}{l}xdx, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

Пусть $f(x)$ - нечётная функция, тогда и $f(x)\cdot\cos\frac{k\pi}{l}x$ - нечётная функция и $a_0 = 0,\ a_k = 0$. Тогда $f(x)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x$ - чётная функция, $b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}xdx$.

Следовательно, для нечётной функции тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

где

$$b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}xdx, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

27.5 Комплексная форма записи ряда Фурье

Пусть $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right)$.

По формуле Эйлера $e^{i\frac{k\pi}{l}x} = \cos\frac{k\pi}{l}x + i\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad e^{-i\frac{k\pi}{l}x} = \cos\frac{k\pi}{l}x - i\sin\frac{k\pi}{l}x$.

Отсюда $\cos\frac{k\pi}{l}x = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{k\pi}{l}x} + e^{-i\frac{k\pi}{l}x}\right), \quad \sin\frac{k\pi}{l}x = \frac{i}{2}\left(-e^{i\frac{k\pi}{l}x} + e^{-i\frac{k\pi}{l}x}\right)$.

Подставим эти выражения в тригонометрический ряд Фурье. Получим:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}\cdot e^{i\frac{k\pi}{l}x}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k + ib_k}{2}\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}x}\right).$$

Обозначим коэффициенты следующим образом:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Тогда имеем:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cdot e^{i\frac{k\pi}{l}x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{i\frac{k\pi}{l}x}$$

- это и есть ряд Фурье, записанный в комплексной форме.

Как вычислить коэффициенты c_k ? Имеем

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\left(\cos\frac{k\pi}{l}\xi - i\sin\frac{k\pi}{l}\xi\right)d\xi = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}\xi}d\xi,$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\left(\cos\frac{k\pi}{l}\xi + i\sin\frac{k\pi}{l}\xi\right)d\xi = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\cdot e^{i\frac{k\pi}{l}\xi}d\xi.$$

Следовательно, при любом целом $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$ имеем: $c_k = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}\xi}d\xi$.

Таким образом, комплексная форма записи ряда Фурье имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{i\frac{k\pi}{l}x},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(\xi) \cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}\xi} d\xi.$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{ax}$, заданную на отрезке $[-\pi,\ \pi]$.

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{a\xi} \cdot e^{-i\frac{k\pi}{\pi}\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(a-ik)\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(a-ik)}\ e^{(a-ik)\xi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(a-ik)} \left(e^{a\pi} \cdot e^{-ik\pi} - e^{-a\pi} \cdot e^{ik\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(a-ik)} \operatorname{sh} a\pi.$$

Таким образом, $e^{ax} = \frac{sha\pi}{\pi} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{ikx}}{a-ik}$.

Глава 28

Несобственные интегралы

28.1 Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Как нам хорошо известно, понятие определённого интеграла как предела интегральной суммы предполагает сегмент $[\,a,\ b\,]$ конечным. А как быть, когда функция определена на полуинтервалах $[\,a,\ +\infty)$, или $(-\infty,\ b\,]$, или, даже, $(-\infty,\ +\infty)$?

Определение. *Несобственным интегралом первого рода* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется предел вида $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$, при условии, что при любом $A > a$ существует собственный интеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$.

Если обозначить $F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty} F(A) = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$. Если указанный предел существует и он конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится,* если же этот предел не существует или равен $\pm\infty$, то говорят, что несобственный интеграл *расходится.*

Аналогично имеем $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_B^a f(x)dx$. Также очевидно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Легко заметить, что интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx$ заменой x на $-x$ сводится к интегралу вида $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. Поэтому достаточно изучать лишь интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и исследовать их на сходимость.

Геометрически интерпретация несобственного интеграла первого рода очень проста: это площадь криволинейной трапеции, у которой одна из границ или обе вместе отодвинуты бесконечно далеко.

Пример 1. $\int\limits_0^\infty \cos x dx = \lim\limits_{A\to\infty}(\sin A - \sin 0) = \lim\limits_{A\to\infty}\sin A$. Этот предел не существует, интеграл расходится.

Пример 2. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to\infty}(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \lim\limits_{A\to\infty} \ln\frac{A}{a}, & \lambda = 1, \\ \lim\limits_{A\to\infty} \frac{A^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda \neq 1. \end{cases}$ Видим, что при $\lambda \leqslant 1$ пределы равны бесконечности и, следовательно, интеграл расходится. При $\lambda > 1$ предел равен $\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ - это конечное число, и, следовательно, в этом случае интеграл сходится.

Поскольку $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty} F(A)$, а предел функции сводится к пределу числовой последовательности $\{F(A_n)\}$ при $\forall A_n \to \infty$ (см. теорему 1 лекции 2), то

$$\int\limits_a^{A_n} f(x)dx = \int\limits_a^{A_1} f(x)dx + \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx + \int\limits_{A_2}^{A_3} f(x)dx + ... + \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx,$$

и, следовательно, исследование сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сводится к исследованию сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$, где $A_0 \equiv a$. Поэтому многие критерии сходимости числовых рядов переносятся на несобственные интегралы первого рода. В частности, для приведённого выше числового ряда критерий Коши сходимости будет выглядеть так:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \int\limits_{A_{k-1}}^{A_k} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)dx + \int\limits_{A_{n+1}}^{A_{n+2}} f(x)dx + ... + \int\limits_{A_{n+p-1}}^{A_{n+p}} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{A_n}^{A_{n+p}} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

для любого выбора последовательности $A_n \to \infty$, при $n \to \infty$ и для любого натурального числа p. Следовательно, критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода можно сформулировать так:

Критерий Коши. Для сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $A(\varepsilon)$, что при всех A' и $A'' > A(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon$ (или $\lim\limits_{\substack{A' \to \infty \\ A'' \to \infty}} \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx = 0$.)

28.2 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов первого рода

Определение 1. Несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится интеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\, dx$.

Теорема 1. Если несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием Коши. Так как интеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\, dx$ сходится абсолютно, то критерий Коши для него выполнен. Поэтому $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \left|\int\limits_{A'}^{A''} |f(x)|\, dx\right| < \varepsilon$ при всех A' и $A'' > A(\varepsilon)$. Тем самым мы показали, что критерий Коши выполнен и для исходного интеграла. Теорема доказана.

Теорема 2. Если для всех достаточно больших x $|f(x)| \leqslant g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ вытекает абсолютная сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием Коши. Так как интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ сходится, то критерий Коши для него выполнен. Поэтому $\left|\int\limits_{A'}^{A''} |f(x)|dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{A'}^{A''} g(x)dx\right| < \varepsilon$. Тем самым мы доказали абсолютную сходимость исходного интеграла. Теорема доказана.

Аналогично можно показать, что если $|f(x)| \geqslant g(x)$ и $f(x)$ сохраняет знак, а интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

Теорема 3. Пусть существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|\cdot x^{\lambda}=k$. Тогда, если $0\leqslant k<\infty$ и $\lambda>1$, интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится абсолютно; если $0\leqslant k<\infty$ и $\lambda\leqslant 1$, а $f(x)$ сохраняет знак при достаточно больших x, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится.

Доказательство. Если при $\lambda>1$ $0\leqslant k<\infty$, то при достаточно больших x имеем $|f(x)|\cdot x^{\lambda}<2k$, $|f(x)|<\frac{2k}{x^\lambda}$ при $k>0$, и $|f(x)|\cdot x^{\lambda}<1$, $|f(x)|<\frac{1}{x^\lambda}$ при $k=0$. Согласно теореме 2, при $\lambda>1$ интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится абсолютно.

Аналогично, при $\lambda\leqslant 1$ и $0\leqslant k<\infty$, то при достаточно больших x и при $k<\infty$, $|f(x)|\cdot x^{\lambda}>\frac{k}{2}$, или $|f(x)|>\frac{k}{2x^\lambda}$. Так как здесь $\lambda\leqslant 1$, наш интеграл расходится.

При $k=\infty$, $|f(x)|\cdot x^{\lambda}>1$, или $|f(x)|>\frac{1}{x^\lambda}$. При $\lambda\leqslant 1$ интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится.

Определение 2. Интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется условно сходящимся, если он сходится, в то время как интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ расходится.

Теорема Абеля - Дирихле. Пусть функция $\varphi(x)$ - непрерывна, а функция $\psi(x)$ - непрерывно дифференцируема на интервале $a\leqslant x<\infty$. Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x){\cdot}\psi(x)dx$ сходится, если первообразная $F(a)=\int\limits_a^A\varphi(x)dx$ ограничена для любого $A\in[a,\infty)$, а $\psi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x\to\infty$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием Коши. Для этого рассмотрим интеграл $\int\limits_{A'}^{A''}\varphi(x){\cdot}\psi(x)dx$ и подсчитаем его по частям. Положим $u=\psi(x)$, $dv=\varphi(x)dx$, тогда $du=\psi'(x)dx$, $v=F(x)$. $\int\limits_{A'}^{A''}\varphi(x){\cdot}\psi(x)dx=F(A'')\psi(A'')-F(A')\psi(A')-\int\limits_{A'}^{A''}F(x)\psi'(x)dx$. Поскольку первообразная $F(a)=\int\limits_a^A\varphi(x)dx$ ограничена, то $\int\limits_{A'}^{A''}F(x)\psi'(x)dx\leqslant M\cdot\int\limits_{A'}^{A''}\psi'(x)dx=M\cdot(\psi(A'')-\psi(A'))$. Таким образом, $\int\limits_{A'}^{A''}\varphi(x){\cdot}\psi(x)dx=M\psi(A'')-M\psi(A')=M\cdot(\psi(A'')-\psi(A'))$. По условию теоремы, функция $\psi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x\to\infty$. Следовательно, $\psi(A'')\to 0$, $\psi(A')\to 0$ при $A''\to\infty$, $A'\to\infty$. Тогда и сам интеграл стремится к нулю, когда пределы интегрирования стремятся к нулю: $\lim\limits_{\substack{A'\to\infty\\A''\to\infty}}\int\limits_{A'}^{A''}F(x)\psi'(x)dx=0$. Критерий Коши выполнен, и, следовательно, интеграл сходится. Теорема доказана.

Пример. Интеграл Френеля. $\int\limits_0^\infty\sin(x^2)dx=\int\limits_0^\infty\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$, здесь сделана замена $x^2=t$. В полученном интеграле $\sin t=\varphi(t)$ - функция с ограниченной первообразной, $\psi(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\to 0$ при $t\to\infty$. Условия теоремы Абеля - Дирихле выполнены, интеграл Френеля сходится.

28.3 Интегралы от неограниченных функций с конечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a,b]$ всюду, за исключением, может быть, конечного числа точек, называемых "особыми точками", в которых функция $f(x)$ неограничена.

Пример 1. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x\in[0,1),\\ 1, & x=1.\end{cases}$ Ясно,что точка $x=1$ является особой точкой этой функции.

Пример 2. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ Точка $x=0$ является особой точкой. В окрестности этой точки функция $f(x)$ является неограниченной, но заметим, что при $x\to 0$ функция $f(x)$ не стремится к бесконечности, так как функция бесчисленное число раз пересекает ось $0x$.

Определение. Если точка $x=b$ является особой точкой и если интеграл $\int\limits_a^{b-\lambda} f(x)dx$ существует при любом λ, $(0<\lambda<b-a)$, то предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\int\limits_a^{b-\lambda} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *несобственным интегралом второго рода.*

Если предел существует и он конечен, то говорят, что несобственный интеграл второго рода *сходится.*

Если же предела не существует, или он равен $\pm\infty$, то несобственный интеграл второго рода *расходится.*

Аналогично, $\lim\limits_{\mu\to 0}\int\limits_{a+\mu}^{b} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$ - несобственный интеграл второго рода, когда особой точкой является левый конец сегмента.

$\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \mu\to 0}}\int\limits_{a+\mu}^{b-\lambda} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$ - несобственный интеграл второго рода, когда особыми точками являются оба конца сегмента.

Наконец, $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \mu\to 0}}\left(\int\limits_a^{c-\lambda} f(x)dx+\int\limits_{c+\mu}^{b} f(x)dx\right)=\int\limits_a^b f(x)dx$ - несобственный интеграл второго рода, когда особой точкой является внутренняя точка сегмента $[a,b]$.

Нас интересует сходимость таких интегралов. При этом мы ограничимся лишь интегралами вида $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\int\limits_a^{b-\lambda} f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}F(\lambda)$, так как все остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично.

Аналогично тому, как исследование сходимости несобственных интегралов первого рода было сведено к исследованию сходимости числового ряда, так и исследование сходимости несобственных интегралов второго рода может быть сведено к исследованию числовых рядов вида

$$\int\limits_a^{b-\lambda_1} f(x)dx+\int\limits_{b-\lambda_1}^{b-\lambda_2} f(x)dx+\int\limits_{b-\lambda_2}^{b-\lambda_3} f(x)dx+...+\int\limits_{b-\lambda_{n-1}}^{b-\lambda_n} f(x)dx+...$$

при любом выборе последовательности $\lambda_n\to 0$, при $n\to\infty$. Критерий Коши сходимости этого числового ряда:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\int\limits_{b-\lambda_k}^{b-\lambda_{k+1}} f(x)dx\right|=\left|\int\limits_{b-\lambda_{n+1}}^{b-\lambda_{n+p}} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

для любого выбора последовательности $\lambda_n\to 0$, при $n\to\infty$ и для любого натурального числа p. Следовательно, критерий Коши сходимости несобственных интегралов второго рода можно сформулировать так:

Критерий Коши. Для сходимости несобственного интеграла второго рода $\lim\limits_{\lambda\to 0}\int\limits_a^{b-\lambda} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех λ' и $\lambda''<\delta(\varepsilon)$ выполнялось $\left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$

Абсолютная и условная сходимость для несобственных интегралов второго рода определяется точно так же, как и в случае несобственных интегралов первого рода. Точно так же, как в несобственных интегралах первого рода, из абсолютной сходимости несобственных интегралов второго рода следует сходимость этих интегралов.

Используя критерий Коши, легко доказать следующую теорему сравнения:

Теорема 1. Если верхний предел b интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ - единственная особая точка подынтегральной функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ и $|f(x)| < g(x)$ для всех x, достаточно близких к b, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Доказательство. Воспользуемся критерием сходимости Коши:

$$\left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} |f(x)|\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, критерий Коши для него выполнен, но тогда он выполнен и для интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. Следовательно, этот интеграл сходится. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $x = b$ - особая точка функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ и интеграл $\int\limits_a^{b-\lambda} f(x)dx$ существует при каждом $\lambda \in (0, b-a)$. Тогда, если при всех x, достаточно близких к точке b, функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leqslant \frac{k}{(b-x)^\alpha}$, где $0 < k < \infty$ и $\alpha < 1$, то несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно.

Если же для всех x, достаточно близких к точке b, $|f(x)| \geqslant \frac{k}{(b-x)^\alpha}$, где $0 < k < \infty$ и $\alpha \geqslant 1$, а функция $f(x)$ сохраняет знак при указанных x, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием Коши:

$$\left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} |f(x)|\,dx\right| \leqslant k\left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx\right| = k\left|\frac{(\lambda')^{1-\alpha} - (\lambda'')^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right| \to 0$$

при λ' и $\lambda'' \to 0$, если $\alpha < 1$.

Таким образом, при $\alpha < 1$ критерий Коши выполнен, следовательно, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно.

Рассмотрим случай, когда $|f(x)| \geqslant \frac{k}{(b-x)^\alpha}$. То, что функция $f(x)$ для всех x, достаточно близких к точке b, сохраняет знак, означает, что в окрестности этой точки $f(x) = |f(x)|$ или $f(x) = -|f(x)|$. В обоих случаях

$$\left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} |f(x)|\,dx\right| \geqslant k\left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx\right| = \begin{cases} k\left|\frac{(\lambda')^{1-\alpha}-(\lambda'')^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|, \alpha > 1, \\ k\left|\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right|, \alpha = 1. \end{cases}$$

Ясно, что при $\lambda' \to 0$ и $\lambda'' \to 0$ произвольным образом так, что $\lambda' \neq \lambda''$, и при $\alpha \geqslant 1$ интеграл $\left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x)dx\right|$ меньше любого наперёд заданного числа сделать невозможно, критерий Коши не выполнен, интеграл расходится.

Теорему 2 можно модифицировать следующим образом.

Теорема 3. Пусть $f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^\alpha}$. Тогда если функция $g(x)$ ограничена по модулю и $\alpha < 1$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно. Если функция $g(x)$ сохраняет знак в окрестности точки b, $|g(x)| \geqslant const > 0$, и $\alpha \geqslant 1$, то несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2, поэтому приводить его мы не будем.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx.$ $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{\sin x}{x} \equiv \frac{1}{x^{p-1}} \cdot g(x).$ Интеграл сходится абсолютно, если $p-1<1$, или $p<2$.

Комбинированные несобственные интегралы возникают, когда и пределы интегрирования бесконечны, и подинтегральная функция неограничена в окрестности особой точки. Чтобы справиться с ними, необходимо разбить интеграл на сумму несобственного интеграла первого рода и несобственного интеграла второго рода.

Пример. $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = \int\limits_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx + \int\limits_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx.$

28.4 Главное значение расходящегося интеграла

Определение 1. Если не существует конечного предела $\lim\limits_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx$, то есть несобственный интеграл первого рода расходится, но существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^A f(x)dx$, то этот предел называется *главным значением* расходящегося интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. В этом случае пишут $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^A f(x)dx.$

Определение 2. Если не существует конечного предела $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0 \\ \mu\to 0}} \left(\int\limits_a^{c-\lambda} f(x)dx + \int\limits_{c+\mu}^b f(x)dx \right)$, то есть несобственный интеграл второго рода расходится, но существует конечный предел вида $\lim\limits_{\lambda\to 0} \left(\int\limits_a^{c-\lambda} f(x)dx + \int\limits_{c+\lambda}^b f(x)dx \right)$, то его называют *главным значением* расходящегося интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. В этом случае пишут $v.p. \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0} \left(\int\limits_a^{c-\lambda} f(x)dx + \int\limits_{c+\lambda}^b f(x)dx \right).$

Пример. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim\limits_{\substack{\lambda\to 0 \\ \mu\to 0}} \left(\int\limits_a^{c-\lambda} \frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\mu}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \lim\limits_{\substack{\lambda\to 0 \\ \mu\to 0}} \left(\ln|c-x|\Big|_a^{c-\lambda} + \ln|c-x|\Big|_{c+\mu}^b \right) =$

$= \lim\limits_{\substack{\lambda\to 0 \\ \mu\to 0}} \left(\ln|\lambda| - \ln|a-c| + \ln|b-c| - \ln|\mu| \right) = \lim\limits_{\substack{\lambda\to 0 \\ \mu\to 0}} \left(\ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right| + \ln\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| \right).$

Если $\lambda=\mu$, то $\ln\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| = 0$ и $v.p. \int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|.$

Глава 29

Интегралы, зависящие от параметра

29.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра, и их свойства

Пусть функция $f(x,\alpha)$ задана в прямоугольнике $\Pi : \left\{ \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant \alpha \leqslant d \end{array} \right\}$ и интегрируема по x при каждом $\alpha \in [c,d]$. Тогда интеграл $J(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$ называется *собственным интегралом, зависящим от параметра* α на сегменте $[c,d]$.

Какими свойствами обладает функция $J(\alpha)$? Когда эта функция непрерывна, при каких условиях она является дифференцируемой или интегрируемой по параметру α?

Теорема 1. (О непрерывности по параметру). Если $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике Π, то $J(\alpha)$ является непрерывной функцией параметра α на сегменте $[c,d]$.

Доказательство. По теореме Кантора непрерывная на компактном множестве функция $f(x,\alpha)$ является на этом множестве равномерно непрерывной функцией. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой пары точек (x',α') и (x'',α'') из прямоугольника Π выполнится неравенство $|f(x',\alpha') - f(x'',\alpha'')| < \varepsilon$, как только выполнятся неравенства $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ и $|\alpha' - \alpha''| < \delta(\varepsilon)$. В частности, когда $x' = x'' = x$, а $|\alpha' - \alpha''| < \delta(\varepsilon)$, пусть выполнится неравенство $|f(x,\alpha') - f(x,\alpha'')| < \varepsilon/(b-a)$. Задавшись ε, оценим разность:

$$\left|J(\alpha') - J(\alpha'')\right| = \left|\int\limits_a^b f(x,\alpha')dx - \int\limits_a^b f(x,\alpha'')dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b \left|f(x,\alpha') - f(x,\alpha'')\right| dx\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\int\limits_a^b dx = \varepsilon.$$

Бесконечно малому изменению аргумента $\alpha \in [c,d]$ соответствует бесконечно малое изменение функции $J(\alpha)$ при любых $\alpha' \in [c,d]$ и $\alpha'' \in [c,d]$. Это означает равномерную (и уж тем более простую) непрерывность функции $J(\alpha)$ на сегменте $[c,d]$, что и утверждалось.

Теорема 2. (О дифференцируемости по параметру). Если $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ - непрерывные функции в прямоугольнике Π, то $\frac{dJ}{d\alpha} \equiv J'_\alpha = \frac{d}{d\alpha}\left(\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx\right) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}dx$ - знак производной можно занести под интеграл.

Доказательство. $\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int\limits_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx$. Подинтегральная функция в правой части равенства непрерывна по x, и поэтому она интегрируема по Риману. Применяя к ней формулу конечных приращений Лагранжа, получим $\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int\limits_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)dx$. Составим и оценим разность следующего вида:

$$\left|\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} - \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right| = \left|\int\limits_a^b \left(f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x,\alpha)\right)dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_a^b \left|f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x,\alpha)\right|dx\right|.$$

Поскольку $f'_\alpha(x,\alpha)$ равномерно непрерывна на сегменте $[c,d]$, то для любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|\Delta\alpha| < \delta(\varepsilon)$ выполнится $|f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x,\alpha)| < \varepsilon/(b-a)$. Поэтому $\left|\int\limits_a^b |f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x,\alpha)|dx\right| < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot \int\limits_a^b dx = \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon$. Таким образом, $\left|\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} - \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|$

$< \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int\limits_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. (О дифференцируемости по параметру в случае, когда пределы интегрирования зависят от параметра). Если $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ - непрерывные функции в прямоугольнике П, а $x_1(\alpha)$ и $x_2(\alpha)$ - дифференцируемые функции при $x_1(\alpha)\in[a,b]$ и $x_2(\alpha)\in[a,b]$, когда $\alpha\in[c,d]$, то производная интеграла $J(\alpha) = \int\limits_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} f(x,\alpha)dx$ по параметру α существует и равна следующему выражению: $J'_\alpha(\alpha) = \int\limits_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx + f(x_2(\alpha),\alpha)\cdot\frac{\partial x_2(\alpha)}{\partial\alpha} - f(x_1(\alpha),\alpha)\cdot\frac{\partial x_1(\alpha)}{\partial\alpha}$.

Доказательство. Видим, что $J(\alpha) = F(x_1(\alpha),x_2(\alpha),\alpha)$. Функция трёх переменных $F(u,v,\alpha) = \int\limits_u^v f(x,\alpha)dx$ имеет непрерывные частные производные, равные $F'_v = f(v,\alpha)$, $F'_u = -f(u,\alpha)$, $F'_\alpha = \int\limits_u^v f'_\alpha(x,\alpha)dx$ (см. лекцию 12, раздел "формула Ньютона-Лейбница"). Следовательно, учитывая правила дифференцирования сложной функции $F(x_1(\alpha),x_2(\alpha),\alpha)$, получим: $J'_\alpha(\alpha) = F'_{x_1}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha} + F'_{x_2}\cdot\frac{dx_2}{d\alpha} + F'_\alpha = -f(x_1(\alpha),\alpha)\cdot\frac{dx_1}{d\alpha} + f(x_2(\alpha),\alpha)\cdot\frac{dx_2}{d\alpha} + \int\limits_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx$. Теорема доказана.

Теорема 4. (Об интегрировании по параметру). Если $f(x,\alpha)$ - непрерывная в прямоугольнике П : $\left\{\begin{array}{c} a\leqslant x\leqslant b \\ c\leqslant\alpha\leqslant d \end{array}\right\}$ функция, то $\int\limits_c^d J(\alpha)d\alpha = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx\right)d\alpha = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha\right)dx$.

Эта теорема - есть следствие теоремы о сведении двойного интеграла к повторному.

29.2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра, и их равномерная сходимость

Пусть $f(x,\alpha)$ - функция, определённая для $x\in[x,\infty)$ и $\alpha\in[c,d]$, а интеграл $H(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$ сходится при любом $\alpha\in[c,d]$, то есть существует конечный предел $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x,\alpha)dx$. Тогда $H(\alpha)$ - является функцией аргумента α.

Аналогично обстоит дело и с несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра.

Пусть $f(x,\alpha)$ - функция, определённая для $x\in[x,b)$ и $\alpha\in[c,d]$, неограничена при $x\to b-0$ и при любом $\alpha\in[c,d]$ существует интеграл $K(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$, то есть существует конечный предел $K(\alpha) = \lim\limits_{\lambda\to+0}\int\limits_a^{b-\lambda} f(x,\alpha)dx$. Тогда $K(\alpha)$ является функцией аргумента α.

Весьма важным для последующего является понятие равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Определение 1. Интеграл $H(\alpha)$ называется равномерно сходящимся по параметру $\alpha\in[c,d]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $A>\Delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|H(\alpha)-\int\limits_a^A f(x,\alpha)dx\right| = \left|\int\limits_A^\infty f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon$ **сразу для всех** $\alpha\in[c,d]$.

Определение 2. Интеграл $K(\alpha)$ называется равномерно сходящимся по параметру $\alpha\in[c,d]$, если любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\lambda<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|K(\alpha)-\int_a^{b-\lambda} f(x,\alpha)dx\right| = \left|\int_a^b f(x,\alpha)dx - \int_a^{b-\lambda} f(x,\alpha)dx\right| = \left|\int_{b-\lambda}^b f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon$$

сразу для всех $\alpha\in[c,d]$.

Пример. $H(\alpha)=\int\limits_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx$. Пусть $\alpha\in[0,1]$. Этот интеграл сходится, так как $\int\limits_A^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx=\int\limits_A^\infty e^{-\alpha x}d(\alpha x)=\int\limits_{\alpha A}^\infty e^{-t}dt=-\,e^{-t}|_{\alpha A}^\infty=e^{-\alpha A}$. При $\alpha=0$ $H(0)=0$, а для $\alpha>0$ $e^{-\alpha A}\to 0$ при $A\to\infty$.

Но $H(\alpha)$ не является равномерно сходящимся интегралом, поскольку при любых сколь угодно больших значениях A можно положить $\alpha=\frac{1}{A}$, тогда $H(\alpha)=e^{-1}$ и ясно, что $H(\alpha)$ не может быть сделано меньше любого наперёд заданного числа для всех α сразу. Но если положить $\alpha\in[p,1]$, где $p>0$ - фиксированное число, то $H(\alpha)$ будет сходиться равномерно, так как $e^{-\alpha A}\leqslant e^{-pA}<\varepsilon$ при $A>[\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\varepsilon}]\equiv\Delta(\varepsilon)$.

Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра.

Для равномерной сходимости интеграла $H(\alpha)$ на сегменте $[c,d]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало $\Delta(\varepsilon)>0$ такое, что при всех $A'>\Delta(\varepsilon)$ и $A''>\Delta(\varepsilon)$ неравенство $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon$ выполнялось **сразу для всех** $\alpha\in[c,d]$.

Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра.

Для равномерной сходимости интеграла $K(\alpha)$ на сегменте $[c,d]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\lambda'<\delta(\varepsilon)$ и $\lambda''<\delta(\varepsilon)$ неравенство $\left|\int\limits_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon$ выполнялось **сразу для всех** $\alpha\in[c,d]$.

Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Если для всех $x\in[x,\infty)$ и $\alpha\in[c,d]$ выполняется неравенство $|f(x,\alpha)|\leqslant g(x)$, а интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится, то интегралы $\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$ и $\int\limits_a^\infty |f(x,\alpha)|\,dx$ сходятся равномерно на сегменте $[c,d]$.

Доказательство. Для доказательства проверим выполнение критерия Коши:

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,\alpha)\;dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{A'}^{A''}|f(x,\alpha)|\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{A'}^{A''} g(x)dx\right|<\varepsilon,$$

так как интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится и, следовательно, критерий Коши для этого интеграла выполнен. Следовательно, критерий Коши выполнен и для интеграла $\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$, и для интеграла $\int\limits_a^\infty |f(x,\alpha)|\,dx$. Теорема доказана.

Пример. Интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx$ сходится равномерно при всех $0<\alpha_0<\alpha<\infty$, как бы мало α_0 не отличалось от нуля. В самом деле, $f(x,\alpha)=e^{-\alpha x^2}$, $g(x)=e^{-\alpha_0 x^2}$, $e^{-\alpha x^2}\leqslant e^{-\alpha_0 x^2}$, когда $\alpha\in[\alpha_0,\infty)$, а интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_0 x^2}dx$ сходится.

29.3 Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра

Мы ранее уже видели, что исследование сходимости несобственных интегралов $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сводится к исследованию сходимости числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^\infty\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$, где $A_0\equiv a$. Исследование сходимости несобственных интегралов второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$ так же может быть сведено к исследованию числовых рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{b-\lambda_{n-1}}^{b-\lambda_n} f(x)dx$.

Вследствие этого многие критерии сходимости числовых рядов переносятся на несобственные интегралы первого и второго рода.

Можно также ожидать, что свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра, во многом повторяют свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Перечислим без доказательства свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 1*. Если $f(x,\alpha)$ - непрерывная функция для $x \in [x,\infty)$ и $\alpha \in [c,d]$, а интеграл $H(\alpha) = \int\limits_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ сходится равномерно на сегменте $[c,d]$, то $H(\alpha)$ - непрерывная функция.

Теорема 2* (о дифференцируемости по параметру). Пусть $f(x,\alpha)$ и $f'_\alpha(x,\alpha)$ - непрерывные функции на полуполосе $\begin{cases} a \leqslant x < \infty, \\ c \leqslant \alpha \leqslant d \end{cases}$, интеграл $H(\alpha) = \int\limits_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx$ сходится равномерно на сегменте $[c,d]$. Тогда $H(\alpha)$ является дифференцируемой функцией на $[c,d]$, и $H'_\alpha(\alpha) = \int\limits_a^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx$.

Теорема 4* (об интегрируемости по параметру). Если $f(x,\alpha)$ - функция, непрерывная на полуполосе $\begin{cases} a \leqslant x < \infty, \\ c \leqslant \alpha \leqslant d \end{cases}$, а интеграл $H(\alpha) = \int\limits_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ сходится равномерно на сегменте $[c,d]$, то выполняется равенство: $\int\limits_c^d H(\alpha)d\alpha = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{\infty} f(x,\alpha)dx\right)d\alpha = \int\limits_a^{\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha\right)dx$.

Глава 30

Некоторые несобственные интегралы, зависящие от параметра

30.1 Классы несобственных интегралов, зависящих от параметра, вычисляемых с помощью дифференцирования и интегрирования по параметру

1°. Интеграл Пуассона - Эйлера. $\mathrm{P} = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx$. Сделаем подстановку $x = ut$, где u – параметр, $dx = udt$. Тогда $\mathrm{P} = \int\limits_0^\infty e^{-u^2t^2} udt$. Умножим этот интеграл на e^{-u^2} и проинтегрируем результат по параметру u: $\mathrm{P} \int\limits_0^\infty e^{-u^2} du = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty e^{-u^2t^2} udt \right) e^{-u^2} du$. Отсюда: $\mathrm{P}^2 = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} udu \right) dt = \int\limits_0^\infty \left(-\frac{1}{2} \left. \frac{e^{-(1+t^2)u^2}}{1+t^2} \right|_0^\infty \right) dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\mathrm{P}^2 = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{P} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Следствие 1. $\mathrm{P}(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx$, $\alpha > 0$. Сделаем замену: $\sqrt{\alpha} x = t$. Тогда $\mathrm{P}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Следствие 2. $J(\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx$, $\alpha > 0$. Используя мажорантный признак Вейерштрасса, легко показать, что интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_0^\infty (-x) e^{-\alpha x^2} \sin \beta x dx$ сходится равномерно по параметру β при $0 \leqslant \beta < \infty$. Следовательно, мы имеем право заносить знак производной под интеграл. Продифференцируем исходный интеграл по параметру β: $J'_\beta(\alpha, \beta) = \int\limits_0^\infty (-x) e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = -\frac{1}{2\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x d(\alpha x^2)$. Вычисляя этот интеграл по частям, получим очень простое дифференциальное уравнение $J'_\beta(\alpha, \beta) = -\frac{\beta}{2\alpha} J(\beta)$. Решая его, получим $J(\beta) = Ce^{-\frac{\beta}{4\alpha}}$. Постоянную интегрирования C найдём из условия $J(0) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = C$. Следовательно, $J(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta}{4\alpha}}$.

30.2 Гамма-функция Эйлера и её свойства

Сейчас мы приступаем к изучению специальных функций, а именно к изучению Гамма и Бета функций Эйлера, которые ещё называются интегралами Эйлера второго и первого рода. Эти функции не относятся к классу элементарных функций, рассмотрением которых мы до сих пор ограничивались.

Гамма - функция - это комбинированный несобственный интеграл, зависящий от параметра p: $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$. Особые точки - 0 и ∞. Для исследования поведения интеграла в окрестности этих особых точек представим интеграл в виде $\int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = \int\limits_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int\limits_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Первый интеграл сходится при $p > 0$, так как в окрестности нуля $x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1}$, а второй интеграл сходится при любых p, поскольку $x^{p-1}e^{-x} = \frac{x^{p-1}}{e^x} = \frac{x^{p-1}}{1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots} = \frac{x^{p-1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n}$. Отсюда видно, что при $x \to \infty$ экспонента "сильнее" любой степенной функции и интеграл сходится при любом значении параметра p. Коротко, это можно сформулировать так: в первом случае подинтегральная функция мажорируется функцией x^{p-1}, во втором - функцией e^{-x}.

Таким образом, интеграл $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится при любом $0 < p < \infty$.

Свойство 1. Интеграл $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[p_0, P_0]$, где $p_0 > 0$, $P_0 < \infty$.

Доказательство. $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = \int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int\limits_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$. Заметим, что интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно при $p_0 \leqslant p \leqslant \infty$ по мажорантному признаку, поскольку $e^{-x}x^{p-1} \leqslant x^{p_0-1}$ когда $x \in (0,1)$, а $p \geqslant p_0 > 0$, а мажоранта $\int\limits_0^1 x^{p_0-1}dx = \left.\frac{x^{p_0}}{p_0}\right|_0^1$ сходится при $p_0 > 0$. Второй же интеграл $\int\limits_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно при $-\infty < p \leqslant P_0 < \infty$, поскольку $e^{-x}x^{p-1} \leqslant e^{-x}x^{p_0-1}$ для $x \in [1, +\infty)$ и при $-\infty < p \leqslant P_0 < \infty$, а мажоранта $\int\limits_1^\infty e^{-x}x^{P_0-1}dx$ - сходится.

Подводя итоги, мы можем сказать, что оба интеграла сходятся равномерно для $p \in [p_0, P_0]$.

Свойство 2. $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ является непрерывной функцией для $p \in (0, \infty)$.

Доказательство. В самом деле, для любого $\bar{p} \in (0, \infty)$ всегда найдутся p_0 и P_0 такие, что $\bar{p} \in [p_0, P_0]$, но так как несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно на каждом таком отрезке, то $\Gamma(p)$ является непрерывной функцией своего аргумента.

Свойство 3. $\Gamma(p)$ - дифференцируемая функция, имеющая производные любого порядка.

Доказательство. Продифференцируем $\Gamma(p)$ по p под знаком интеграла. Получим $\Gamma'(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}\ln x\, e^{-x}dx$. Такое равенство справедливо, так как интеграл в правой части сходится равномерно для любого $p \in [p_0, P_0]$, поскольку интегралы $\int\limits_0^1 x^{p-1}\ln x\, e^{-x}dx$ и $\int\limits_1^\infty x^{p-1}\ln x\, e^{-x}dx$ по мажорантному признаку Вейерштрасса сходятся равномерно. В данном случае мажоранты - суть $x^{p_0-1}\,|\ln x|$ и $x^{P_0-1}\,|\ln x|\,e^{-x}$.

Аналогично доказывается существование $\Gamma^{(k)}(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}\ln^k xe^{-x}dx$, $k = 2, 3, \ldots$.

Свойство 4. Рекуррентная формула для Гамма-функции: $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$.

Доказательство. $p\,\Gamma(p) = p\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$. Возьмём этот интеграл по частям. Положим $u = e^{-x}$, $dv = x^{p-1}dx$, тогда $du = -e^{-x}dx$, $v = \frac{1}{p}x^p$. В результате $p\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx =$
$= x^pe^{-x}|_0^\infty + \int\limits_0^\infty x^pe^{-x}dx = \Gamma(p+1)$.

Таким образом, $p\,\Gamma(p) = \Gamma(p+1)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. $\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n) = n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\Gamma(n-2) = \ldots = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot\Gamma(1) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$, поскольку $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}dx = 1$.

Таким образом, $\Gamma(n+1) = n!$

Следствие 2. $\Gamma(a+n) = (a+n-1)\cdot\Gamma(a+n-1) = \ldots = (a+n-1)\cdot(a+n-2)\cdot\ldots\cdot(a+1)\cdot\Gamma(a)$, $\forall a > 0$.

При $a=\frac{1}{2}$, $\Gamma(n+\frac{1}{2})=(n-\frac{1}{2})\cdot(n-\frac{3}{2})\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1}{2^n}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})$. Но $\Gamma(\frac{1}{2})=\int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\quad(x=t^2,\ dx=2tdt)\quad=2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dx=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$.

Таким образом, $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$.

30.3 Бета-функция и её свойства

Бета-функция - это несобственный интеграл второго рода, зависящий от двух параметров p и q: $\mathrm{B(p,q)}\overset{\text{def}}{=}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. Он сходится при $p>0,\ q>0$. Приведённая выше формула - основная для определения бета-функции. Часто для бета-функции используют другое выражение через комбинированный несобственный интеграл. Для этого сделаем замену переменной $x=\frac{z}{1+z}$. Тогда $1-x=\frac{1}{1+z}$, $dx=\frac{1}{(1+z)^2}dz$. В итоге имеем: $\mathrm{B(p,q)}=\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{z^{p-1}}}{\mathrm{(1+z)^{p-1}}}\cdot\frac{1}{(1+z)^{q-1}}\cdot\frac{dz}{(1+z)^2}=\int\limits_0^\infty\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$. Таким образом, имеем два равноценных представления для бета-функции $\mathrm{B(p,q)}$:

$\mathrm{B(p,q)}=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ и $\mathrm{B(p,q)}=\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$.

Свойство 1. Симметричность. $\mathrm{B(p,q)}=\mathrm{B(q,p)}$

Доказательство. В интеграле $\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ сделаем замену $\mathrm{1-x=t},\ \mathrm{dx=-dt}$. Тогда $\mathrm{B(p,q)}=-\int\limits_1^0\mathrm{(1-t)^{p-1}}t^{q-1}dt=\int\limits_0^1 t^{q-1}\mathrm{(1-t)^{p-1}}dt=\mathrm{B}(q,p)$, что и требовалось доказать.

Свойство 2. Формула понижения. Если $q>1$, то $\mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\,\mathrm{B}(p,q-1)$, если же $p>1$, то $\mathrm{B}(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\,\mathrm{B}(p-1,q)$.

Доказательство. Возьмём интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ по частям. Для этого положим

$$u=(1-x)^{q-1},\ du=(q-1)(1-x)^{q-2}d(-x),\ \ dv=x^{p-1}dx,\ v=\frac{1}{p}\,x^p.$$

Получим:

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{1}{p}x^p(1-x)^{(q-1)}\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=\frac{q-1}{p}\int\limits_0^1 x^{p-1}[1-(1-x)](1-x)^{q-2}dx=$$

$$=\ \frac{q-1}{p}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{(q-1)-1}dx-\frac{q-1}{p}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{(q-1)}dx.$$

$\mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p,q-1)-\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p,q)$. $\mathrm{B}(p,q)\left(1+\frac{q-1}{p}\right)=\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p,q-1)$.

Окончательно, $\mathrm{B}(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\,\mathrm{B}(p-1,q)$, что и утверждалось.

Вследствие симметрии аргументов, аналогичная формула имеет место и в случае если $p>1$. Для этого в последней формуле надо поменять местами p и q.

Свойство 3. Связь между бета и гамма функциями Эйлера. $\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Доказательство. В формуле $\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ сделаем замену $x=\alpha z$, $(\alpha>0)$, $dx=\alpha dx$, получим $\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty\alpha^{p-1}z^{p-1}e^{-\alpha z}\alpha dz=\int\limits_0^\infty\alpha^p z^{p-1}e^{-\alpha z}dz$. $\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}=\int\limits_0^\infty z^{p-1}e^{-\alpha z}dz$. Заменим в последней формуле α на $1+t$,

p на $p+q$: $\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty z^{p+q-1}e^{-(1+t)z}dz$. Умножим полученное выражение на t^{p-1} и проинтегрируем результат по t от 0 до ∞: $\Gamma(p+q)\cdot\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = \int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty z^{p+q-1}e^{-(1+t)z}dz\right)t^{p-1}dt$. Поменяем порядок интегрирования в правой части: $\Gamma(p+q)\cdot \mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-z}e^{-tz}z^{p+q-1}dt\right)dz = \int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty z^{q-1}e^{-z}dz\right)(zt)^{p-1}e^{-(zt)}d(zt) = \Gamma(q)\cdot\Gamma(p)$.

Таким образом, $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, что и утверждалось.

Свойство 4. Формула дополнения. $\mathrm{B}(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, $0 < p < 1$.

С учетом предыдущего свойства, эта формула примет вид $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$. Эта формула называется формулой дополнения. (Без доказательства).

Литература

[1] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб.: Издательство «Лань», 2022.

[2] В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2021.

[3] Б. М. Будак, С. В. Фомин. Кратные интегралы и ряды. 3-е изд., М.: Физматлит, 2002.

[4] Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999г.

Оглавление

Альпин Тимур Юрьевич
Даишев Ринат Абдурашидович

ПОСОБИЕ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ: ЧАСТЬ I

Учебное пособие