Gravitace: od starověku k obecné teorii relativity

V této kapitole si připomeneme, jak se vyvíjely představy o gravitaci od názorů ve starověku přes newtonovskou fyziku (na jejíž některé aspekty se podíváme podrobněji) až k soudobé relativistické teorii gravitace. Vlastní seznámení s obecnou relativitou si necháme do další kapitoly.

2.1 Starověké představy

Starověkých představ nejen o gravitaci ale vůbec o silovém působení byla řada a nebudeme je zde blíže probírat.[1] Zmíníme jen pár základních představ, které se řadí do ***aristotelovské fyziky***.

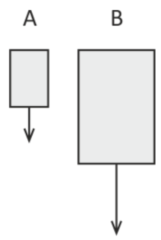
Podle těchto názorů byla Země středem vesmíru. Nebeská tělesa (tedy tělesa v tzv. *supralunární sféře*, jednoduše by šlo říci „za oběžnou dráhou Měsíce“) se pohybují svými vlastními pohyby, neuvažovalo se, že by na ně Země nějak působila.

V *sublunární sféře* (tedy fakticky na Zemi a v jejím blízkém okolí) lidé samozřejmě pozorovali, že tělesa padají k zemi – ale naopak, že například oheň stoupá vzhůru. Kvalitativně se toto dalo vysvětlit představou o čtyřech základních elementech, z nichž jsou všechna tělesa. Těmito elementy byly: **země, voda, vzduch** a **oheň**. Každý element se snaží dosáhnout svého **přirozeného místa**: země nejníž, nad ní voda, nad ní vzduch a pak oheň.

Kvalitativně to funguje. Například kámen (v němž je nejvíc elementu země) padá jak ve vzduchu, tak ve vodě – prostě proto, že chce dosáhnout svého přirozeného místa, které je níž. Naopak bublinky vzduchu ve vodě stoupají, protože jeho přirozené místo je výš, než přirozené místo vody. Podobně je tomu se stoupáním ohně ve vzduchu.[2]

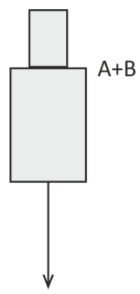
Co se pádu těles týče, aristotelovská fyzika tvrdila ještě jednu věc: **těžší tělesa padají rychleji** než lehčí. To je něco, co zdánlivě nepochybně plyne z pozorování: Těžký kámen při pádu jasně předstihne lehké peříčko.

Na druhou stranu lze proti uvedenému tvrzení vznést logickou námitku. Mějme dvě tělesa, lehčí těleso A a těžší těleso B. Podle aristotelovské fyziky těžší těleso B padá rychleji, než A.[3] (Viz obrázek vpravo.)



Ovšem co když tělesa A a B spojíme?

Situaci dle aristotelovské fyziky ukazuje obrázek níže: Spojená tělesa A a B jsou dohromady těžší než samotné B, musí tedy padat ještě ***rychleji***, než těleso B.



Ovšem můžeme uvažovat i jinak: Těleso A padalo pomaleji, než B, takže když jej připojíme k B, mělo by pád tělesa B *brzdit* – podle této úvahy by tedy spojená tělesa A a B měla padat ***pomaleji*** než samotné těleso B. Čili s tvrzením, že těžší tělesa padají rychleji, zjevně není něco v pořádku…

[1] Není ambicí této kapitoly být textem o historii fyziky; v této oblasti existuje řada knižních publikací, článků a dnes i materiálů ne internetu, kde mohou zájemci najít informace. Zájemci o hlubší rozbor vývoje představ o silovém působení mohou sáhnout po knize Maxe Jammera *Concepts of Force*.

[2] No není to krásná jednoduchá a snadno pochopitelná teorie? Kvalitativně vysvětluje to, co pozorujeme. A že neumožňuje kvantitativně předpovědět třeba rychlost pádu kamene? To se tehdy nevyžadovalo.

[3] Padá tedy s vyšší rychlostí; o zrychlení aristotelovská fyzika nemluvila.

2.2 Newton, jablko a Měsíc

Přeskočme teď zhruba dvě tisíciletí[4] a věnujme se tomu, jak gravitaci a její vliv na pohyb těles, popsal Isaac Newton.[5]

Newton formuloval **zákon všeobecné gravitace**: Tělesa se navzájem přitahují silou, která je úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti.

Dnes tento zákon zapisujeme vztahem[6]

$$F_g = G\frac{mM}{r^2} \tag{1}$$

a říkáme, že vyjadřuje sílu mezi dvěma hmotnými body o hmotnostech m a M, jejichž vzdálenost je r. Konstantu G nazýváme Newtonovou gravitační konstantou.[7] Gravitační síla má směr spojnice obou hmotných bodů (jde tedy o sílu centrální).

Připomeňme, že vztah (1) platí nejen pro sílu mezi hmotnými body. Stejnou silou se přitahují sféricky symetrická tělesa, r je pak vzdálenost jejich středů.

Myšlenka, že by síla mezi například Sluncem a planetami byla nepřímo úměrná r^2, se objevovala už předtím, než ji Newton publikoval v Principiích. Jak ale Newton dospěl k přesvědčení, že právě tato závislost na vzdálenosti je ta pravá?

V populárních výkladech se traduje, že na myšlenku všeobecné gravitace přišel, když mu při odpočinku v sadu spadlo na hlavu jablko.[8] Tohle je zjevně legenda; hezky se to poslouchá, ale že by jeden úder jablkem vyvolal v Newtonově hlavě hned celou teorii… Nicméně zrnko pravdy patrně v celé historce je: V roce 1665 vypukl v Cambridge mor, takže Newton odjel do svého rodného domu – a později prý vyprávěl, že se tam procházíval v sadu a přemýšlel, jaká síla nutí jablka padat k zemi.[9]

Nešlo jen o padající jablka a myšlenku, že je přitahuje Země. Newton si toto dal do souvislosti s pohybem Měsíce. I ten musí být přitahován Zemí, jinak by odlétl pryč!

Vidíme, že teď už jsme mnohem blíž současnému fyzikálnímu pojetí, než byly starověké představy, v nichž pro pohyb „na nebesích“ platily úplně jiné zákony než pro pohyby na Zemi. Novověká fyzika, už zhruba od Galilea, hledá zákonitosti, které jsou univerzální a platí všude.[10] [11]

---

[4] Ze čtvrtého století před naším letopočtem (Aristoteles: 384-322 př.n.l.) do sedmnáctého století našeho letopočtu (Newton: 1642-1727; *Principia* vyšla 1687).

[5] Přeskakujeme přitom i *Galilea Galileiho* (1564-1642), který kvantitativními experimenty ukázal, že pohyb padajících těles je rovnoměrně zrychlený.

[6] Newton jej v tomto tvaru nezapisoval.

[7] V české učebnicové literatuře bývala označována symbolem κ.

[8] Zadáte-li do Googlu dotaz *Newton jablko*, dostanete přes sto tisíc odkazů, v anglické verzi přes 70 milionů (i když některé se týkají firmy Apple ☺).

[9] Prý to někdy psal v dopise svému příbuznému a zřejmě to říkal i dalším osobám, například *Williamu Stukeleyovi*, který to popsal v Newtonově biografii vydané v r. 1752. Viz například https://www.history.com/news/did-an-apple-really-fall-on-isaac-newtons-head nebo stránku University v Yorku https://www.york.ac.uk/physics/about/newtonsappletree/, kde se dokonce dočtete (aniž by šlo o vtip), o jaký druh jabloní mohlo jít.

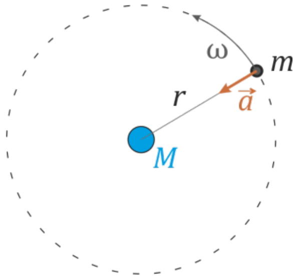
[10] Mohli bychom říci „jak v nebi, tak i na zemi“.

[11] Za zmínku stojí, že před Newtonem se pohyb nebeských těles snažil vykládat *René Descartes* zcela jiným mechanismem: planety podle něj unáší vířící kapalina vyplňující meziplanetární prostor. *Max von Laue* v *Dějinách fyziky* uvádí, že Newton věnoval značnou část Principií právě vyvrácení Descartovy teorie.

Co nás přesvědčí o tom, že mezi Sluncem a planetami opravdu působí síla nepřímo úměrná r^2 a úměrná hmotnosti dané planety? Silným argumentem je skutečnost, že ze vztahu (1) [12] lze odvodit všechny tři Keplerovy zákony [13]. Dnes bývá toto odvození součástí úvodního vysokoškolského kurzu mechaniky a využívá diferenciální a integrální počet [14]; Newton je v *Principiích* odvodil na základě geometrických úvah.

Jak si ale Newton mohl být jistý, že gravitační zákon platí stejně pro sílu, kterou Země přitahuje padající jablko, a pro sílu, kterou přitahuje Měsíc? [15] Pojďme si to ověřit způsobem, který lze využít i pro středoškoláky.

Budeme přitom uvažovat, že Měsíc obíhá kolem Země po kruhové dráze s poloměrem přibližně r = 384 tisíc km.[16] Úhlová rychlost pohybu Měsíce je $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$, kde T je perioda oběhu. Jako periodu oběhu musíme vzít tzv. *siderickou periodu*, tedy periodu oběhu vzhledem ke vzdáleným hvězdám.[17] Ta je asi 27,3 dne (přesněji: 27 dní, 7 hodin a 43 minut). Převedeno na sekundy to dá $T \doteq 2{,}36 \times 10^6$ s.



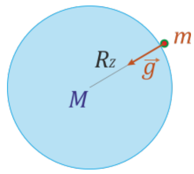
Dostředivé zrychlení Měsíce je

$$a = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \doteq \frac{1{,}52 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}}{5{,}57 \cdot 10^{12}\ \mathrm{s}^2} \doteq 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}\ . \qquad (2)$$

Za zrychlení, s nímž padá jablko, vezmeme normální tíhové zrychlení, $g \doteq 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Poměr obou zrychlení (zjištěný z pozorování a měření, tedy z experimentu) je

$$\left(\frac{a}{g}\right)_{\mathrm{exp}} \doteq \frac{2{,}72 \cdot 10^{-3}}{9{,}81} \doteq 2{,}77 \cdot 10^{-4}\ . \qquad (3)$$

Co pro tento poměr předpoví teorie, tedy Newtonův gravitační zákon? Ze vztahu (1) a 2. Newtonova zákona je $ma = GmM/r^2$, takže zrychlení $a = GM/r^2$. Na Zemi je gravitační zrychlení $g = GM/R_Z{}^2$, kde poloměr Země $R_Z \doteq 6378$ km. Poměr zrychlení Měsíce a jablka tedy podle teorie vychází



$$\left(\frac{a}{g}\right)_{\mathrm{teor.}} = \left(\frac{R_Z}{r}\right)^2 \doteq \left(\frac{6{,}378 \cdot 10^6}{384 \cdot 10^6}\right)^2 \doteq 2{,}76 \cdot 10^{-4}\ . \qquad (4)$$

[12] A z druhého Newtonova zákona a z toho, že gravitační síla je centrální.

[13] Ty předtím Johannes Kepler vyvodil z astronomických pozorování; publikoval je v letech 1609 a 1618.

[14] Viz např. prozatímní učební text https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Fyzikal/FyzI_KeplerovaUloha_ver01.pdf .

[15] Tedy že gravitace opravdu působí stejně „jak v nebi, tak i na zemi“.

[16] Budeme počítat se zaokrouhlenými hodnotami. Ve skutečnosti dráha Měsíce není přesně kruhová. Studenti si mohou dohledat třeba na Wikipedii, že minimální vzdálenost (perigeum) je asi 365 tisíc km a maximální vzdálenost asi 407 tisíc km. (Vzdálenosti středu Měsíce; pozor, Wikipedie udává vzdálenosti k povrchu Měsíce.) Střední vzdálenost se uvádí 384 400 km.

[17] Jinými slovy, vzhledem k inerciálnímu systému. Na Zemi jsme samozřejmě zvyklí brát dobu jeden měsíc jako dobu mezi dvěma úplňky. To odpovídá tzv. *synodické periodě*, tj. době, kdy se Měsíc vrátí do stejné polohy vůči spojnici Země-Slunce. (Jde tedy o dobu oběhu v soustavě, která se otáčí; spojnici Slunce-Země můžeme vzít za jednu z os takové soustavy.) Synodická perioda je asi 29 a půl dne (přesněji: 29 dnů 12 hodin a 44 minut).

Srovnání (3) a (4) je dostatečně přesvědčivé: tatáž síla, která přitahuje k Zemi jablka, přitahuje i Měsíc.

V našem odvození jsme samozřejmě provedli leckterá zanedbání.[18] Není tedy divu, že se výsledné hodnoty v (3) a (4) nepatrně liší. I pokud bychom brali ještě více zaokrouhlené hodnoty (vzdálenost Měsíce 380 tisíc km, periodu jeho oběhu zhruba 28 dní, tíhové zrychlení zhruba 10 m/s^2), vyjde teoretická a z měření zjištěná hodnota přibližně tatáž. Porovnání rozhodně vyloučí možnost, že by gravitační síla byla nepřímo úměrná třeba první nebo třetí mocnině vzdálenosti – druhá mocnina opravdu „sedí“.

Při diskusi s žáky[19] bude možná názornější vzít poměr tíhového zrychlení jablka a zrychlení Měsíce, tedy převrácenou hodnotu poměru (3):

$$\left(\frac{g}{a}\right)_{\exp} \doteq \frac{9,81}{2,72\cdot 10^{-3}} \doteq 3600 = 60^2 \tag{5}$$

a spočítat poměr vzdálenosti Země-Měsíc k poloměru Země:

$$\frac{r}{R_Z} \doteq \frac{384\cdot 10^6}{6,378\cdot 10^6} \doteq 60 \; . \tag{5}$$

Jasně je vidět, že poměr zrychlení je druhou mocninou poměru vzdáleností od středu Země.

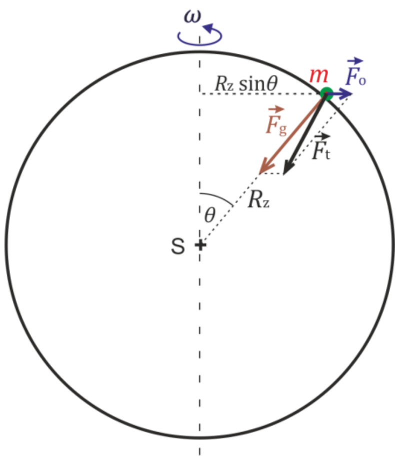
[18] Pohyb Měsíce jsme brali jako rovnoměrný pohyb po kružnici, u pádu jablka jsme nerozlišovali gravitační a tíhové zrychlení apod.

[19] Nebo s laiky, kdybyste třeba chtěli „věci kolem gravitace“ přiblížit svým nefyzikálním přátelům.

2.3 Odbočka: gravitační a tíhová síla

Když už jsme v poznámce na předchozí stránce zmínili rozdíl mezi gravitační a tíhovou silou, pojďme si připomenout, jak se liší. A to konkrétně na příkladu Země.

Gravitační síla je dána prostě tím, jak Země gravitačně přitahuje tělesa ve svém okolí.[20] Samozřejmě, že v konkrétním místě na povrchu *není* síla přesně dána vztahem (1), kam bychom za r dosadili poloměr Země; projevuje se v ní fakt, že Země nemá přesně tvar koule a vliv mají i lokální nehomogenity v rozložení hustoty.[21]



V rotující soustavě spojené se Zemí ovšem na všechna hmotná tělesa působí ještě odstředivá síla. Ta je – stejně jako gravitační síla – úměrná hmotnosti m daného tělesa. Při měření na daném místě tedy nerozlišíme sílu gravitační a odstředivou. Obě se skládají do jediné síly, tu nazýváme ***tíhová síla***. Směr tíhové síly ukazuje například olovnice. A co hladina vody v nádobě nebo v rybníce?[22]

Situaci ukazuje obrázek vpravo – ovšem velikost odstředivé síly v poměru ke gravitační je v něm výrazně přehnaná.

Připomeňme, jaká je velikost odstředivé síly, pro jednoduchost na rovníku.

Z periody rotace Země T = 86 164 s [23] vypočteme úhlovou rychlost $\omega = 2\pi/T \doteq 7{,}29\cdot10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. Na těleso hmotnosti m = 1 kg tedy působí na rovníku odstředivá síla

$$F_o = mR_Z\omega^2 \doteq 6{,}378\cdot10^{6}\cdot(7{,}29\cdot10^{-5})^2 \doteq 3{,}39\cdot10^{-2}\ \mathrm{N}\ . \qquad (6)$$

Porovnáme-li to se silou asi 9,81 N, kterou daný kilogram gravitačně přitahuje Země, dostáváme poměr odstředivé a gravitační síly na rovníku přibližně

$$\frac{F_o}{F_g} \doteq 3{,}5\cdot10^{-3}\ . \qquad (7)$$

To znamená, že kilogramové závaží je díky odstředivé síle na rovníku skoro o tři a půl gramu lehčí.[24]

---

[20] A také na povrchu a samozřejmě i pod povrchem.

[21] Mapování gravitačního pole pomáhá v užité geofyzice zjišťovat, co je pod povrchem země, například při hledání ložisek ropy, zemního plynu, rud apod. Zadejte do Googlu heslo *gravimetrie geofyzika* nebo *gravimetrická mapa* a dostanete řadu zajímavých odkazů.

[22] Ano, správně, je kolmá k tíhové síle. Tedy alespoň, když vítr na hladinu nefouká… nebo když se na hladině nešíří vlny vyvolané třeba vynořením ryby, skokem plavce, pádem meteoritu nebo jinou podobnou událostí. ☺ Ale vážněji: Dokážete jednoduše vysvětlit, proč je vodní hladina kolmá na směr, který ukazuje olovnice? Fyzikáři by to měli umět objasnit žákům různých věkových skupin… Na VŠ úrovni můžeme mluvit o ekvipotenciálních hladinách a o tom, že (a proč) je na ně kolmá intenzita pole, ale na SŠ a tím spíše na druhém stupni ZŠ tím asi rozzářené obličeje a výkřiky „teď už to chápu“ většinou nevyvoláte. ☺

[23] Jde o *siderickou* periodu rotace, tedy o periodu rotace vzhledem k inerciálnímu systému (tedy ke vzdáleným hvězdám). Tato perioda je kratší než *střední sluneční den*, který je 24 hodin, tedy 86 400 s. (Rozmyslete si, *proč* je střední sluneční den delší, než doba rotace vzhledem ke vzdáleným hvězdám.)

[24] Než se rozhodnete místo kariéry učitele nakupovat zlato na rovníku a pak ho prodávat na pólu, pomyslete kromě dopravních nákladů i na to, že na rovnoramenných vahách, kde se tíha zboží porovnává s tíhou závaží, působí vliv odstředivé síly stejně na zboží i závaží. A že pružinové, elektronické a další podobné váhy si obchodníci jistě přesnými závažími kalibrují. ☺

Upozornění (terminologického charakteru): Předchozí věta je řečena poněkud „volnějším jazykem“ a dalo by se namítnout, že vlastně není fyzikálně správně. Jaké námitky byste vůči ní vznesli?[25]

A ještě jedno upozornění, tentokrát faktické:

Ve skutečnosti se tíhové zrychlení na rovníku a na pólu liší ještě více, než udává vztah (7). Podle tabulek nebo internetových zdrojů je:

$$\begin{aligned} g_{\text{na rovníku}} &\doteq 9{,}780\,33\ \mathrm{m/s^2} \\ g_{\text{na pólu}} &\doteq 9{,}832\,18\ \mathrm{m/s^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Rozdíl přitažlivých sil působících na kilogramové závaží na pólu a na rovníku je tedy asi $5{,}2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}$. Rozdíl je větší díky tomu, že Země je na pólech poněkud zploštělá.[26]

Jaké otázky bychom si ohledně gravitační a tíhové síly mohli klást?

Jaké zajímavé otázky by nám mohli klást naši žáci? Nebo naopak, jakými otázkami bychom mohli (snad) povzbudit jejich zájem?

První otázka může být trochu „sci-fi“ a zároveň provokativní:

Jak rychle by se musela Země otáčet, abychom na rovníku nic nevážili?

Odstředivá síla by se v tomto případě musela rovnat gravitační:

$$m R_Z \omega^2 = G \frac{m M_Z}{R_Z^{\,2}} \tag{9}$$

Odtud $\dfrac{4\pi^2}{T^2} = \omega^2 = G\dfrac{M_Z}{R_Z^{\,3}} = \dfrac{g}{R_Z}$, takže perioda rotace T by byla $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_Z}{g}} \doteq 5\,066\ \mathrm{s}$, tedy asi 1 hodina a 24 minut.[27]

Stačilo by tedy, aby se Země otáčela jen asi 17-krát rychleji než dnes, a z rovníku bychom mohli družice do vesmíru vypouštět i středověkým katapultem! A pokud bychom se chtěli podívat do vesmíru sami, stačilo by na rovníku jen trochu vyskočit. „Drobnou nevýhodou“ by samozřejmě bylo, že ten, kdo by Zemi opustil nejdřív, by byl vzduch, takže na takto rotující Zemi by nebyla atmosféra…[28]

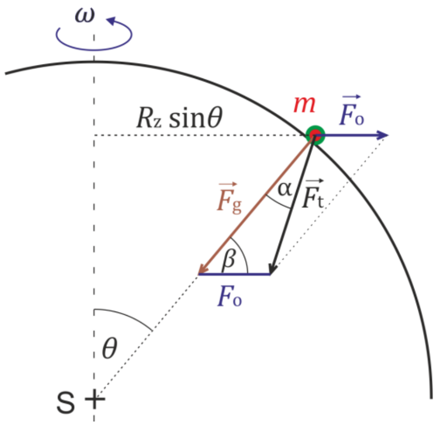
[25] Samozřejmě, říci „o tři a půl gramu lehčí“ opravdu není fyzikálně správně. Kilogramové závaží má tisíc gramů jak na rovníku, tak na pólu, a stejně tak i v beztížném stavu; jeho hmotnost se nemění. Co je na různých místech různé, je síla, kterou na něj Země (a odstředivá síla) působí, tedy také síla, kterou by závaží (v klidu vůči Zemi) natahovalo třeba pružinu, na které by bylo zavěšené. A tato síla (měřená v newtonech, ne v gramech) je na pólu větší na rovníku.
V praxi ovšem víme, co jsme danou nepřesnou větou chtěli říci. Pokud 1 kg závaží položíme na tytéž pružinové nebo elektronické váhy na rovníku a na pólu, ukáží váhy na rovníku nižší hodnotu.

[26] Uvádí se, že zploštění činí asi 21 km. To, že Země musí být díky rotaci na pólech zploštělá, odvodil už Newton.

[27] Alternativně můžeme tuto dobu spočíst úvahou, že bod na rovníku by se musel díky rotaci Země pohybovat první kosmickou rychlostí (asi 7,9 km/s); za periodu by urazil 40 tisíc km.

[28] Ostatně, oceány také ne, protože voda by se vypařila do vakua. Takže sci-fi, v níž by lidé roztočili Zemi rychleji, aby mohli snáze létat do vesmíru, by byla značně dystopická…

Jak se odchyluje svislý směr na rotující Zemi? (Oproti směru, kdy by se Země neotáčela.)



Budeme uvažovat Zemi ve tvaru koule. Na takové Zemi, kdyby se neotáčela, by olovnice mířila přesně do středu Země.[29]

Velikost odstředivé síly je

$$F_o = m R_Z \sin\theta\, \omega^2$$

Odchylku svislého směru od směru do středu Země, tedy směru mezi tíhovou silou F_t a gravitační silou F_g (viz obrázek) označíme α. Podle sinové věty platí (viz trojúhelník na obrázku)

$$\sin\alpha / \sin\beta = F_o / F_t \,.$$

Je ovšem $\sin\beta = \cos\theta$ [30], takže

$$\sin\alpha = \cos\theta \cdot \frac{F_o}{F_t} = \cos\theta \cdot \frac{m R_Z \sin\theta\, \omega^2}{F_t} \doteq \frac{m R_Z\, \omega^2}{F_g} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = $$
$$= \frac{m R_Z\, \omega^2}{mg} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{R_Z\, \omega^2}{2g} \cdot \sin(2\theta) \doteq 1{,}73 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(2\theta) \tag{10}$$

Pro ČR je $\theta \doteq 40°$ [31], takže $\sin(2\theta) \doteq 0{,}985$. Navíc, měřeno v radiánech, $|\alpha| \ll 1$, takže $\sin\alpha \doteq \alpha$ a z (10) tedy dostáváme $\alpha \doteq 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ radiánu. To se rovná asi jedné desetině stupně – takže odchylka svislého směru není nijak dramatická.

Jak moc je gravitační pole kolem nás nehomogenní?

Při pokusech, které provádíme při výuce, běžně považujeme gravitační pole ve třídě nebo laboratoři za homogenní. Je tomu opravdu tak?

Samozřejmě, přesně homogenní být nemůže. Strop třídy je dál od středu Země, než podlaha, takže u stropu musí být pole o něco slabší. Podívejme se, o kolik.

Gravitační zrychlení je dáno vztahem[32]

$$g = G \frac{M_Z}{r^2} \tag{11}$$

Změnu gravitačního zrychlení určíme derivací (11):

$$\Delta g = g(r + \Delta r) - g(r) \doteq \frac{dg}{dr} \cdot \Delta r = \frac{d}{dr}\left(\frac{GM_Z}{r^2}\right) \cdot \Delta r = -2 \frac{GM_Z}{r^3} \cdot \Delta r = -g \frac{2\Delta r}{r} \,. \tag{12}$$

Je-li výška místnosti 3 metry, je $2\Delta r / R_Z = 6\,\text{m} / 6378\,\text{km} \doteq 10^{-6}$. Takže u stropu je gravitační zrychlení asi o jednu milióntinu menší, než u podlahy.[33]

[29] Upřesnění: Toto platí, pokud je hustota Země sféricky symetrická. (Například lokální nehomogenity mohou olovnici ovlivňovat.)

[30] Protože $\theta + \beta = \pi/2$.

[31] Z obrázku je vidět, že β je zeměpisná šířka a ve stupních je $\theta = 90° - \beta$.

[32] K jeho získání stačí vydělit vztah (1) pro gravitační sílu hmotností tělesa *m* a uvážit, že $F_g = m\,g$.

[33] Byl by omyl myslet si, že tak malý poměr je neměřitelný. Gravimetry dnes umí měřit tíhové zrychlení s přesností 10^{-8} m/s^2.

Výsledek (12) lze odvodit i středoškolsky, bez použití derivací[34]:

$$\Delta g = g\left(r+\Delta r\right) - g\left(r\right) = \frac{GM_Z}{(r+\Delta r)^2} - \frac{GM_Z}{r^2} = GM_Z\left[\frac{1}{r^2+2r\Delta r+(\Delta r)^2} - \frac{1}{r^2}\right] \doteq$$

$$\doteq GM_Z\left[\frac{1}{r^2+2r\Delta r} - \frac{1}{r^2}\right] \doteq GM_Z\frac{r^2-(r^2+2r\Delta r)}{(r^2+2r\Delta r)\cdot r^2} \doteq GM_Z\frac{-2r\Delta r}{(r^2+2r\Delta r)\cdot r^2} \doteq \tag{13}$$

$$\doteq -2\frac{GM_Z}{r^3}\cdot\Delta r = -g\frac{2\Delta r}{r}$$

Směrem do výšky se tedy hodnota gravitačního zrychlení zmenšuje, na každý metr výšky asi o $3{\cdot}10^{-6}$ m/s^2. [35] Ovšem tato hodnota platí, jen když bychom stoupali nahoru třeba v balonu a pod námi by byl jen vzduch. Jsme-li v místech s vyšší nadmořskou výškou a pod námi je třeba pohoří, pak samozřejmě hmota toho pohoří nás také přitahuje a gravitační zrychlení tedy naopak trochu zvyšuje. Uvádí se, že pro běžnou hustotu hornin je toto zvýšení zhruba $1{\cdot}10^{-6}$ m/s^2, takže obecně lze očekávat, že g s nadmořskou výškou klesá zhruba o $2{\cdot}10^{-6}$ m/s^2.[36]

V naší odbočce o vztahu gravitační a tíhové síly jsme se dostali až k moderním měřením gravitačního zrychlení. Pojďme se vrátit zpět k historii, k tomu, jak se vyvíjely znalosti lidstva o gravitaci.

[34] Členy, které jsou ve výpočtu zobrazeny barevně (červenohnědě) v dalším kroku výpočtu zanedbáváme, protože jsou mnohem menší než další členy, s nimiž se sčítají. (Žáci a studenti jsou někdy vůči zanedbávání podezříraví. Těm, jimž se uvedené zanedbávání zdá podezřelé, snad může pomoci konkrétní dosazení číselných hodnot: (6 m)^2 je opravdu mnohem méně než 6 378 000 m · 6 m.)

[35] Plyne to z výsledku (12) ev. (13), kam dosadíme za r poloměr Země, hodnotu g a Δr = 1 m. Poznamenejme, že tíhové zrychlení se samozřejmě s výškou mění i proto, že se díky změně vzdálenosti od zemské osy mění i velikost odstředivé síly – ale sami si můžete spočítat, že vliv této změny je skoro o tři řády menší než výše spočtený vliv změny gravitační síly.

[36] Viz třeba článek na Wikipedii na https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_of_Earth, části Free air correction a Slab correction.
Pro vyjadřování malých změn a odchylek gravitačního zrychlení se v geofyzice mimo jednotek m/s^2 a jejich násobků, např. nm/s^2, používá i starší jednotka Gal (zavedená na počest Galilea Galileiho); 1 Gal=1 cm/s^2. Takže například $2{\cdot}10^{-6}$ m/s^2 = 0,2 mGal.

2.4 Henri Cavendish a jeho pokus

Se jménem *Henriho Cavendishe*[37] si obvykle spojujeme **Cavendishův pokus**, tedy měření přitažlivé síly mezi olověnými koulemi pomocí torzních vah. Člověk tak snadno získá představu, že Cavendish:

1) vymyslel daný experiment, 2) postavil přístroj pro příslušné měření a 3) pomocí tohoto pokusu určil hodnotu gravitační konstanty G.

Ani jedno ani druhé ani třetí přitom *není pravda*. Přesto Cavendish byl geniální fyzik a jeho pokus patří k nejdůležitějším na cestě, na níž fyzika zkoumala a zkoumá gravitaci. Jak to tedy ve skutečnosti bylo?

Experiment navrhl anglický geolog, astronom a přírodovědec *John Michell* [38]. Ten také torzní váhy pro experiment postavil, jenže v roce 1793 zemřel, než experiment uskutečnil. Přístroj pak prý v bednách poslali Cavendishovi, který ho zkompletoval a experiment v letech 1797-1798 provedl. Gravitační konstantu jím ovšem měřit nemohl, protože žádná taková konstanta ještě nebyla zavedena (!).[39]

Co tedy vlastně Cavendish svým pokusem určoval? Nikoli G, ale *hustotu Země*. Tuto hodnotu se fyzikové snažili určovat, protože s její pomocí by mohli určit hodnoty některých dalších veličin.[40]

Princip toho, jak Cavendish mohl změřit hustotu Země, si můžeme osvětlit vcelku jednoduše. Jestliže ρ_Z je průměrná hustota Země, pak síla, kterou Země působí na těleso o hmotnosti m na svém povrchu, je

$$F_{gZ} = G\frac{m M_Z}{R_Z^2} = Gm\,\frac{\frac{4}{3}\pi R_Z^3 \rho_Z}{R_Z^2} = \tfrac{4}{3}\pi G m\, R_Z \rho_Z \qquad (14)$$

Gravitační síla, kterou na stejné těleso působí velká olověná koule K je analogicky $F_{gK} = \frac{4}{3}\pi G m\, R_K \rho_K$.

Poměr obou sil je $\dfrac{F_{gZ}}{F_{gK}} = \dfrac{R_Z \rho_Z}{R_K \rho_K}$. Odtud $\rho_Z = \rho_K \dfrac{F_{gZ}}{F_{gK}} \cdot \dfrac{R_K}{R_Z}$. K určení hustoty Země tedy stačí znát hustotu olověné koule, poměr poloměrů koule a Země a poměr sil, kterými na stejné těleso působí Země a olověná koule – a právě tento poměr Cavendish určil svým pokusem.[41]

Na to, o jak citlivý pokus šlo, bylo jeho měření velmi přesné. Když se z hodnoty ρ_Z, kterou určil, vypočte hmotnost Země, souhlasí s dnes známou hodnotou na jedno procento!

---

[37] 1731 - 1810

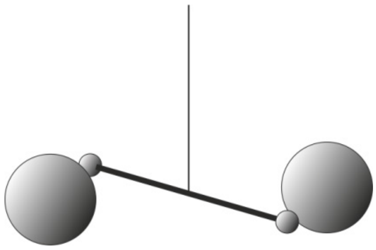
[38] Zjevně také špičkový vědec, jehož práce ovšem byla spíše v ústraní. Jako první (několik let před *Pierrem Simonem Laplacem*) například přišel s myšlenkou, že by mohly existovat hvězdy tak hmotné, že je světlo nedokáže opustit.

[39] Uvádí se, že první prací, která výrazně upozornila na to, že je třeba určovat univerzální přírodní konstantu, kterou dnes označujeme jako gravitační konstantu G, byla práce *C. V. Boyse* z r. 1892, tedy téměř o sto let po Cavendishově experimentu. O gravitační konstantě sice zřejmě fyzikové uvažovali dříve (byla zmíněna v názvu jedné práce z r. 1881), ale naprostá většina prací se soustřeďovala na určování hustoty planet. Blíže viz článek Clotfelter B. E.: *The Cavendish Experiment as Cavendish knew it*. Am. J. Phys.55, No.3, March 1987, p.210-213.

[40] Newton v *Principiích* určil relativní hustoty Jupitera, Saturnu a Slunce vůči hustotě Země. Určit hustotu Země pak znamenalo znát hustoty i dalších nebeských těles. (Navíc lze z hustoty Země a jejích rozměrů určit hmotnost Země, byť dnes spíše naopak počítáme hustotu Země z její hmotnosti.)

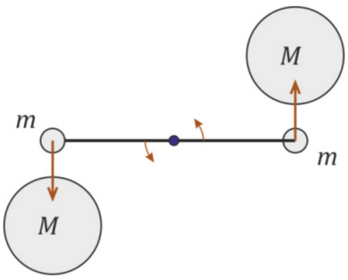
[41] Dnes můžeme prostě říci, že tímto pokusem měříme sílu mezi olověnou koulí a tělesem. Cavendish vycházel z periody kmitů torzního kyvadla a periody kmitů kyvadla v gravitačním poli Země – bližší podrobnosti lze najít v článku uvedeném o dvě poznámky výše.

Samotný Cavendishův pokus asi netřeba příliš připomínat, takže jen stručně[42]:

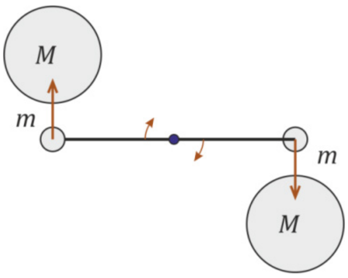


Měření se provádí pomocí torzních vah. Na koncích vahadla (tenké tyčinky) jsou kuličky hmotnosti m. Vahadlo visí na tenkém vlákně. Ze strany jsou k malým kuličkám přiblíženy velké olověné koule, každá s hmotností M.

Velké koule přitahují malé kuličky, takže vahadlo se natáčí. Situaci ukazuje obrázek vlevo (při pohledu shora, z bodu závěsu kyvadla). Síla, kterou je každá z kuliček přitahována, je samozřejmě velmi malá. (Z údajů o Cavendishově pokusu můžeme vypočítat, že byla řádu 10^{-7} N. [43]) Výhodou torzního kyvadla je, že moment síly potřebný k natočení vahadla o určitý úhel je úměrný čtvrté mocnině průměru závěsu; pro tenký závěs tedy může být velmi malý. K tomu, aby moment síly byl větší, navíc přispěje i dlouhé vahadlo. Proto lze torzním kyvadlem měřit i velmi malé síly.



V pokusu jsou velké olověné koule nejdříve umístěny tak, jak ukazuje obrázek výše, pak se přesunou tak, aby přitahovaly kuličky na opačnou stranu, viz obrázek vpravo. Vahadlo se tedy natočí na druhou stranu.



Nesmíme si ovšem představovat, že se vahadlo natočí rychle. Zrychlení, které gravitační síla od velké koule udělí malé kuličce, je $a = GM/r^2$, kde r je vzdálenost středů kuliček. Pro $r \doteq 0{,}2\,\mathrm{m}$ a $M \doteq 150\,\mathrm{kg}$ (viz přesnější hodnoty v poznámce dole) vychází zrychlení asi $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ m/s^2. Z toho plyne, že za 100 sekund se malá kulička pohne jen asi o milimetr![44]

Dnes se Cavendishův pokus používá k určení hodnoty gravitační konstanty G. Jak už bylo uvedeno výše, výsledek původního Cavendishova měření se s výsledky dnešních měření shoduje na asi 1 %. Přesnost současných měření je samozřejmě vyšší; relativní nejistota v určení G je řádu 10^{-5}. To je ovšem výrazně horší než například přesnost určení hmotnosti elektronu nebo protonu, ta je řádu 10^{-10}. Přesnější určení hodnoty G tak zůstává i dnes výzvou.[45]

---

[42] Ale zato s uvedením některých parametrů původního Cavendishova pokusu.

[43] Malé kuličky v Cavendishově pokusu byly z olova a měly průměr dva palce, tedy poloměr 2,54 cm. Tomu odpovídá hmotnost necelých 780 g. Velké olověné koule měly každá hmotnost 348 liber, tedy necelých 158 kg. Vzdálenost středů velké koule a malé kuličky byla v rovnovážné poloze 8,85 palců, tedy asi 22,5 cm.
Z Newtonova gravitačního zákona pak vyplývá, že přitažlivá síla byla asi $1{,}6 \cdot 10^{-7}$ N. Vahadlo bylo dlouhé 73,3 palců, tedy asi 1,86 m.

[44] Na tento výpočet stačí středoškolský vzorec $s = \frac{1}{2}at^2$. Poznamenejme, že při našem výpočtu zrychlení jsme uvažovali kuličky volné, tedy zanedbávali jsme moment síly, jímž na vahadlo působí závěs (a také moment setrvačnosti vahadla a sílu, kterou na kuličku působí vzdálenější koule).

[45] Relativní nejistota G se někdy udává $2{,}2 \cdot 10^{-5}$ (v tabulkách https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Category?view=pdf&Frequently+used+constants.x=89&Frequently+used+constants.y=14), někdy $4{,}7 \cdot 10^{-5}$ (viz např. https://physicsworld.com/a/gravitational-constant-mystery-deepens-with-new-precision-measurements/). Relativní nejistoty se často udávají v ppm (*parts per milion*), např. tedy 47 ppm. Jednotlivá měření, která aspirují i na vyšší přesnost, se však někdy liší až o 500 ppm, viz např. https://physicsworld.com/a/gravitational-constant-mystery-deepens-with-new-precision-measurements/; patrně v měřeních nejsou zohledněny všechny systematické chyby. Měřit G přesně evidentně není jednoduché.

2.5 Čím popisovat gravitační pole: intenzita a potenciál

Dosud jsme vzájemné přitahování těles popisovali gravitační silou – například šlo o sílu, kterou Země přitahuje jablko nebo Měsíc. Představa newtonovské fyziky byla, že Země na Měsíc působí „přímo do dálky“, bez nějakého zprostředkujícího média.[46]

Alternativně můžeme říci, že Země ve svém okolí vytváří ***gravitační pole*** a toto pole pak ovlivňuje pohyb jablka nebo Měsíce. Připomeňme, jak lze gravitační pole popisovat.

Gravitační síla mezi Zemí a tělesem hmotnosti m je dána vztahem (1), tedy

$$F_g = G\frac{mM}{r^2} \,. \tag{15}$$

Tato síla ovšem závisí na hmotnosti tělesa; je různá pro různě těžká jablka. Samotné gravitační pole ovšem nezávisí na tom, jaké jablko ke zkoumání síly použijeme. Je tedy přirozené charakterizovat pole poměrem síly na jablko a hmotnosti jablka:

$$I_g = \frac{F_g}{m} = G\frac{M}{r^2} \,. \tag{16}$$

Veličina, kterou jsme označili I_g, je **intenzita gravitačního pole**. Závisí jen na hmotnosti Země (která budí dané gravitační pole) a vzdálenosti od středu Země (tedy na místě, kde v gravitačním poli jsme).

Síla, kterou gravitační pole působí na hmotný bod hmotnosti m je samozřejmě $F_g = m I_g$.[47] Ovšem gravitační sílu běžně vyjadřujeme pomocí gravitačního zrychlení g [48]:

$$F_g = m g \,. \tag{17}$$

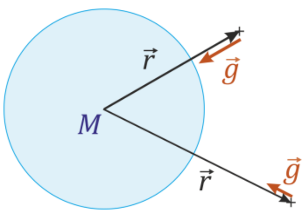
Je tedy zřejmé, že **intenzita gravitačního pole je rovna gravitačnímu zrychlení**.[49] Fakticky jde o jednu a tutéž veličinu, $I_g \equiv g$. [50]

Dosud jsme uváděli jen vztahy pro velikost veličin. Síla, gravitační zrychlení a tedy i intenzita gravitačního pole jsou ovšem vektorové veličiny, takže stojí za to připomenout vztahy i ve vektorovém tvaru:

$$\vec{F}_g = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \,, \qquad \vec{F}_g = m\vec{g} \,, \qquad \vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \,, \tag{18}$$

a samozřejmě $\vec{I}_g \equiv \vec{g}$.

V různých místech jsou přirozeně obecně různé intenzity pole (různá gravitační zrychlení), jak to ukazuje obrázek.



[46] Takové působení se někdy vystihuje latinským termínem „actio in distanc“. Newton sám o tom, jak vlastně gravitace působí na dálku, žádné hypotézy nevytvářel. (Ve shodě se svým známým výrokem „hypotheses non fingo“, který je uveden ve druhém vydání *Principií* z roku 1713.)

[47] Plyne to už z její definice (16).

[48] Hmotný bod pohybující se jen pod vlivem gravitační síly má zrychlení $a = g$, takže podle 2. Newtonova zákona $mg = ma = F_g$

[49] Oboje samozřejmě bráno v témže bodě.

[50] Vztah (16) je tedy totožný se vztahem $g = GM/r^2$, který jsme již využili výše pro výpočet gravitačního zrychlení v gravitačním poli Země, viz (11).

Gravitační pole lze kromě intenzity charakterizovat také **gravitačním potenciálem** φ_g. Potenciál je skalár, přesněji řečeno skalární funkce polohy: $\varphi_g = \varphi_g(\vec{r})$.

Popis pole pomocí potenciálu rozpracoval zejména *Pierre-Simon Laplace*.[51] Odvodil přitom rovnici, dnes nesoucí jeho jméno, kterou splňuje potenciál ve vakuu:

$$\Delta\varphi_g = 0 \,.^{52} \tag{19}$$

V místech, kde není vakuum, ale látka hustoty ρ, splňuje gravitační potenciál *Laplaceovu-Poissonovu rovnici*

$$\Delta\varphi_g = 4\pi G \rho \,.^{53} \tag{20}$$

Připomeňme, že potenciál souvisí s potenciální energií; hmotný bod o hmotnosti m má v místě $\vec{r}$ potenciální energii

$$V = m\,\varphi_g(\vec{r}) \,. \tag{21}$$

Z potenciální energie lze určit sílu jako $\vec{F}_g = -\mathrm{grad}\, V$, takže analogicky lze z potenciálu určit intenzitu pole, tedy gravitační zrychlení:

$$\vec{g} = -\mathrm{grad}\,\varphi_g \,. \tag{22}$$

Jednoduše můžeme říci, že sílu z intenzity a analogicky gravitační zrychlení z potenciálu určujeme derivováním, obráceně např. potenciál z intenzity integrováním.[54]

Jak by šla souvislost potenciálu a intenzity resp. potenciální energie a síly přiblížit bez diferenciálního a integrálního počtu, třeba zájemcům z řad středoškoláků v rámci nějakého semináře? Nejspíš na příkladu sféricky symetrického gravitačního pole, například gravitačního pole Země.

V gravitačním poli Země[55] je potenciální energie hmotného bodu (nebo jablka ☺) o hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu Země

$$V = -G\frac{mM}{r} \,. \tag{23}$$

(Toto platí pro $r > R_Z$, uvnitř Země je potenciální energie jiná.)

---

[51] *Pierre-Simon, marquis de Laplace* (1749-1827) byl francouzský fyzik, matematik a astronom. (Jeho přínos ke všem těmto disciplínám je neocenitelný; stačí se podívat na dlouhý článek o něm na anglické Wikipedii.) Teorii potenciálu rozpracoval v publikacích z let 1784-1787. Se samotnou ideou potenciálu v souvislosti s gravitací přišel již o něco dříve (1777) *Joseph Louis Lagrange* a podobnou myšlenku prý navrhl již v r. 1743 *Alexis Clairaut*.

[52] Asi netřeba připomínat, že operátor $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ se nazývá *Laplaceův operátor*.

[53] Odvodil ji v roce 1812 *Simeón Dennis Poisson* (1781-1840). Řešením této rovnice je vztah pro výpočet potenciálu $\varphi_g(\vec{r}) = -G\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$. Laplaceovu a Laplaceovu-Poissonovu rovnici i vztah pro výpočet potenciálu asi znáte spíše z elektrostatiky (kde místo G je $1/(4\pi\varepsilon_0)$, místo hustoty hmoty je hustota náboje a místo gravitačního samozřejmě elektrostatický potenciál).

[54] Je $V(\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, podobně $\varphi_g(\vec{r}) = \varphi_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$.

[55] To zde bereme jako sféricky symetrické, podobně jako ve všech úvahách výše v této kapitole.

Když hmotný bod (nebo jablko nebo závaží) klesne v gravitačním poli ze vzdálenosti r na $r-\Delta r$ od středu Země, vykoná práci $F_g \cdot \Delta r$.[56] Závaží koná práci na úkor poklesu potenciální energie, takže

$$F_g \cdot \Delta r = V(r) - V(r-\Delta r) \ . \tag{24}$$

Dosazením (23) do (24) dostáváme

$$\begin{aligned} F_g \cdot \Delta r &= -G\frac{mM}{r} - \left(-G\frac{mM}{r-\Delta r}\right) = G\,mM\left(\frac{1}{r-\Delta r} - \frac{1}{r}\right) = \\ &= G\,mM\left(\frac{r-(r-\Delta r)}{(r-\Delta r)\,r}\right) = \frac{G\,mM}{r^2}\left(\frac{\Delta r}{1-(\Delta r/r)}\right) \doteq \frac{G\,mM}{r^2}\cdot\Delta r \end{aligned} \ . \tag{25}$$

Odtud už okamžitě[57] získáme očekávaný výsledek

$$F_g = \frac{G\,mM}{r^2} \ . \tag{26}$$

Podobně z potenciálu $\varphi_g = -G\dfrac{M}{r}$ odvodíme vztah pro gravitační zrychlení $g = -G\dfrac{M}{r^2}$.

A jak odvodit intenzitu a potenciál gravitačního pole **uvnitř** Země? Nebo pro jednoduchost alespoň uvnitř homogenní koule? Gravitační pole se v newtonovské fyzice formálně chová analogicky jako pole elektrostatické – takže využijte své znalosti elektrostatiky![58]

A ještě jedna poznámka:

I když zde mluvíme o gravitačním poli, v newtonovské fyzice šlo vlastně stále jen o formální popis působení na dálku. Gravitační pole nebylo chápáno jako něco, co by mohlo existovat samostatně. Pohled na pole jako na zvláštní objekt přinesl do fyziky (v případě elektromagnetického pole) až Michael Faraday – a v případě gravitačního pole vlastně až Albert Einstein.

---

[56] Bereme $\Delta r \ll r$, takže F_g je prakticky konstantní. Práci může vykonat například tak, že klesající závaží je zavěšeno na laně a to třeba otáčí hřídelí nějakého dynama. (Pozn.: Uvažujeme $\Delta r > 0$, takže práce, kterou přitažlivá síla vykoná, je kladná. Přitom $\Delta r > 0$ zde znamená *pokles* r, protože bereme $\Delta r = r - (r - \Delta r)$.)

[57] Přesněji řečeno po limitě $\Delta r \to 0$, aby se z přibližné rovnosti stala přesná. Obejdeme se přitom jistě bez formální znalosti limit.

[58] Nápověda: Ve sféricky symetrickém případě lze pomocí Gaussovy věty ukázat, že intenzita resp. přitažlivá síla ve vzdálenosti *r* od centra koule je dána jen hmotou *uvnitř* sféry o poloměru *r*. V případě homogenní koule intenzita resp. síla od povrchu koule k centru lineárně klesá k nule. (Země ovšem není homogenní koule, takže u ní je pokles jiný, graf lze najít např. na https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_of_Earth.)

2.6 Slapové síly

Vysvětlení slapových jevů – tedy přílivu a odlivu – se věnoval už Isaac Newton; správně přitom popsal slapové síly. Souvislost přílivu a odlivu s Měsícem přitom byla známa už dříve. [59]

Podívejme se, jak lze slapové jevy pokud možno jednoduše vysvětlit. Nebudeme se přitom zabývat tím, že skutečný příliv a odliv jsou výrazně ovlivňovány tím, jak se voda žene k pobřeží, do úzkých zálivů apod. Budeme proto[60] uvažovat Zemi jako planetu prakticky celou pokrytou oceánem, s rovným mořským dnem a případně jen s několika ostrovy (které celkově chování vody významněji neovlivní), abychom měli vůči čemu měřit výšku mořské hladiny.

Jednoduché (ale nesprávné) vysvětlení slapových jevů

Na první pohled je vysvětlení díky přitažlivosti Měsíce názorné a jednoduché. Měsíc přitahuje Zemi i vodu na ní. Část vody, která je blíž Měsíci, je přitahována více, takže na Zemi vytvoří „kopeček“. Situaci přehledně ukazuje obrázek. Na místě A, které je „pod kopečkem“ je právě příliv. Na místě B přitahuje Měsíc vodu směrem ke středu Země, takže tam zřejmě voda bude blíž ke středu Země než pevný povrch (třeba ostrovů), proto tam musí být odliv. Jak se Země otáčí, příliv a odliv se dostávají na různá místa. Jednoduché, že?

Jednoduché – ale nesprávné – vysvětlení přílivu a odlivu.
(Pohled ze směru zemské osy, na severní pól.)

Jenže:

Kdyby toto vysvětlení bylo správné, byl by příliv zhruba jednou za den[61] a odliv také, zhruba po dvanácti hodinách po přílivu. Ale ono to tak není, příliv nastává přibližně **dvakrát** za 24 hodin[62], právě tak odliv. To musí správná teorie slapových jevů vysvětlit. [63]

Správné vysvětlení

Slapové jevy samozřejmě lze vysvětlit pomocí newtonovské fyziky. Správný výpočet dá dva „kopečky“ v místech označených na obrázku[64] A a B (tedy v částech Země nejbližších k Měsíci a nejvzdálenějších od Měsíce) a snížení hladiny v místech označených C a D.

[59] Měsíc jako původce slapových jevů navrhl začátkem 17. století Johannes Kepler; o souvislosti Měsíce se slapy uvažoval už Ptolemaios. Oba prý přitom vycházeli ze starších pozorování.

[60] Podobně, jako to dělal Newton.

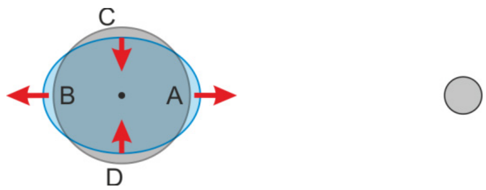
[61] Míníme tím: za den a noc, tedy za 24 hodin.

[62] Proč ne přesně dvakrát za 24 hodin? Inu, protože Měsíc nesetrvává na jednom místě, ale obíhá kolem Země, tedy mění svou polohu vzhledem ke spojnici Země-Slunce. Doba mezi po sobě následujícími přílivy je proto přibližně 12 hodin a 25 minut.

[63] My suchozemci s přílivem a odlivem tak častou zkušenost nemáme, pro přímořské národy je to běžná součást života. Je zajímavé, jak uvádí stránka Wikipedie https://en.wikipedia.org/wiki/Theory_of_tides, že Galileo Galilei se na základě své (nesprávné) teorie domníval, že v Atlantiku a v Pacifiku nastává příliv a odliv opravdu jen jednou za den. Známou zkušenost ze Středozemního moře (příliv a odliv dvakrát denně) vysvětloval sekundárními vlivy.

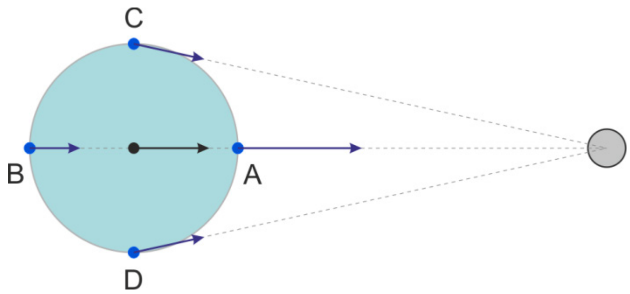
[64] Poznámka: Stejně jako na předchozím obrázku zde vůbec neodpovídají měřítka vzdáleností (Až na vzájemnou velikost Země a Měsíce). Měsíc je nakreslen mnohem blíže Zemi, než odpovídá zobrazeným rozměrům Země a Měsíce – při tisku na stránku A4 by měl být správně ve vzdálenosti 60 cm, ale to by se nám na stránku nevešlo. Naopak je výrazně přehnána výška přílivu a odlivu.

Vodu tedy v místech, kde je hladina zvýšena (A a B), musí slapové síly táhnout nahoru, tady od středu Země. V místech, kde je hladina nižší (C a D) musí síly naopak tlačit vodu směrem ke středu Země.



Jak je to možné, když Měsíc přitahuje všechnu vodu k sobě (na obrázku tedy směrem doprava)?

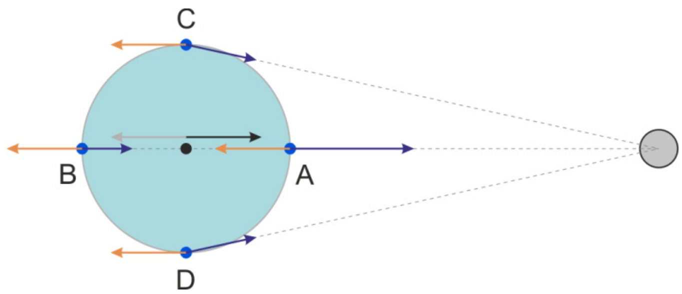
Vtip je v tom, že musíme uvažovat **rozdíly sil**.



Vodu (a jablka a libovolná závaží) přitahuje Měsíc víc, když jsou k němu blíž, tedy v bodě A, než když jsou dále (v bodě B). Navíc gravitační síla od Měsíce na tělesa v bodech C a D míří trochu jinými směry než na tělesa v bodech A a B, viz obrázek vlevo.

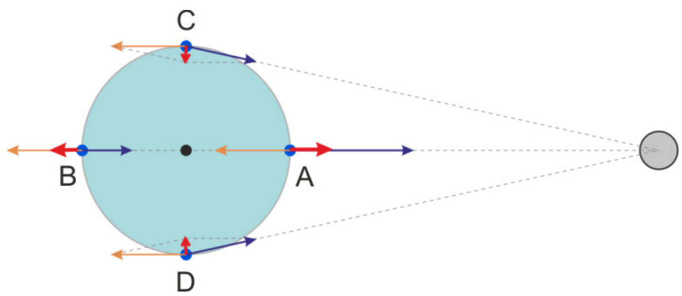
Možná nyní namítnete „No a co? Síly pořád míří doprava!“ [65] To je pravda – a kdyby byla Země (resp. její střed) v klidu vůči inerciálnímu systému, ovlivňovaly by vodu jen uvedené přitažlivé síly.[66] Zemi ale nemůžeme „přitlouct na hřebíček“ v nějakém inerciálním systému!

Země je ale přitahována Měsícem, takže se směrem k němu pohybuje se zrychlením. [67] To znamená, že Země, i kdyby se neotáčela, *není inerciální soustavou*. Pohybuje se zrychleně směrem k Měsíci, takže v soustavě s ní spojené působí na všechna tělesa setrvačná síla v opačném směru – viz obrázek vpravo.



Celkovou sílu na jablko nebo na kapku vody dostaneme složením přitažlivé síly od Měsíce (ta je v bodě A větší, v bodě B menší) a setrvačné síly dané zrychleným pohybem Země (ta je v bodech A, B C i D stejná[68]).

Výsledek složení gravitačních a setrvačných sil ukazuje následující obrázek. Slapové síly jsou v něm zakresleny červeně. Vidíme, že opravdu mají směr, který vysvětluje, proč příliv a odliv nastávají dvakrát denně.



Tak – a teď to ještě vyjádřit matematicky a spočíst velikost slapových sil. A pokud možno i to, do jaké výšky voda při přílivu stoupne.

[65] Nebo to namítnou vaši žáci, když jim to budete vysvětlovat.

[66] A příliv a odliv by pak opravdu nastávaly jen jednou za 24 hodin.

[67] Jde o stejné zrychlení, jaké by měl hmotný bod umístěný ve středu Země, tedy $G M_M / r_0^2$, kde r_0 je vzdálenost středů Země a Měsíce. Poznamenejme, že momentálně neuvažujeme vliv Slunce, k němu dojdeme dále.

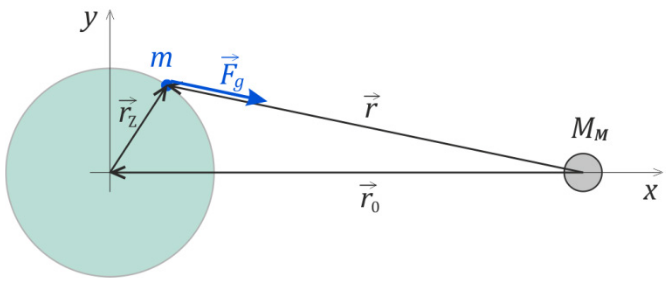
[68] Protože všechny body mají stejné zrychlení směrem k Měsíci.

Výpočet slapových sil

Situaci budeme popisovat v systému souřadnic, jehož počátek je ve středu Země a jehož osy zachovávají svůj směr vůči vzdáleným hvězdám.[69]

Situaci ukazuje obrázek. Vektor $\vec{r}_0 = (-r_0, 0, 0)$ spojuje střed Měsíce se středem Země; r_0 je vzdálenost středů Měsíce a Země. Vektor $\vec{r}_Z = (x, y, 0)$ spojuje střed Země s tělesem hmotnosti m na povrchu Země a $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_Z = (x - r_0, y, 0)$ spojuje střed Měsíce s daným tělesem. Vzdálenost středu Měsíce a tělesa je

$$r = |\vec{r}| = \left((x - r_0)^2 + y^2\right)^{1/2} . \tag{27}$$



Síla, kterou Měsíc přitahuje těleso, je[70]

$$\vec{F}_g = -G\frac{M_M m}{r^3}\,\vec{r} . \tag{28}$$

Pro další výpočet spočteme *x*-ovou a *y*-ovou složku síly $\vec{F}_g$ do členů prvního řádu v (x/r_0) a (y/r_0).[71] Nejprve v tomto přiblížení vyjádříme člen $1/r^3$. Z (27) po úpravách dostáváme:

$$\frac{1}{r^3} = r^{-3} = \left[r_0^{\,2}\cdot\left(\left(1-\frac{x}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_0}\right)^2\right)\right]^{-3/2} = r_0^{-3}\cdot\left(1 - \frac{2x}{r_0} + \left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_0}\right)^2\right)^{-3/2} \doteq$$
$$\doteq r_0^{-3}\cdot\left(1-\frac{2x}{r_0}\right)^{-3/2} \doteq r_0^{-3}\cdot\left[1-\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{r_0}\right] = \frac{1}{r_0^3}\cdot\left(1+3\frac{x}{r_0}\right) \tag{29}$$

Z (28) a (29) pak po úpravách[72] plyne

$$F_{gx} \doteq -G\frac{M_M m}{r_0^3}\cdot\left(1+3\frac{x}{r_0}\right)\cdot(x - r_0) = G\frac{M_M m}{r_0^2}\cdot\left(1+3\frac{x}{r_0}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{r_0}\right) \doteq G\frac{M_M m}{r_0^2}\cdot\left(1+2\frac{x}{r_0}\right) \tag{30}$$

a $$F_{gy} \doteq -G\frac{M_M m}{r_0^3}\cdot\left(1+3\frac{x}{r_0}\right)\cdot y \doteq -G\frac{M_M m}{r_0^3}\cdot y . \tag{31}$$

---

[69] Je to tedy neinerciální systém (protože jeho počátek, tedy střed Země, se pohybuje zrychleně), ale je to systém nerotující (protože osy zachovávají směr vůči vzdáleným hvězdám, tedy vůči inerciálním systémům). To znamená, že v tomto systému nepůsobí žádná odstředivá síla. Jediná setrvačná síla, která v něm působí je dána zrychleným pohybem systému.

[70] M_M je hmotnost Měsíce.

[71] Budeme tedy zanedbávat členy druhého a vyššího řádu, např. $(x/r_0)^2$, $(y/r_0)^2$, $xy/(r_0)^2$ apod. Můžeme si to dovolit, protože poměr poloměru Země R_Z ke vzdálenosti Země-Měsíc (tedy r_0) je $R_Z/r_0 \doteq 1/60 \ll 1$, takže $|x/r_0| \ll 1$ a $|y/r_0| \ll 1$. V úpravách ve (29) jsou některé zanedbávané členy vyznačeny barevně.

[72] Při úpravách, jak už bylo řečeno, zanedbáváme členy x^2 a xy, podobně jako jsme to dělali v (29).

Abychom dostali výslednou slapovou sílu, musíme ke gravitační síle přičíst ještě sílu setrvačnou[73] [74]:

$$\vec{F}_{\text{setrv.}} = -m\,\vec{a}_Z = -m\left(-\frac{GM_M}{r_0^3}\,\vec{r}_0\right) = \frac{GM_M m}{r_0^3}\,\vec{r}_0 \qquad (32)$$

Její složky jsou

$$F_{\text{setrv.}x} = m\frac{GM_M m}{r_0^3}(-r_0) = -\frac{GM_M m}{r_0^2}, \qquad F_{\text{setrv.}y} = 0 \ . \qquad (33)$$

A s výpočtem slapových sil už jsme prakticky hotovi. Zbývá sečíst gravitační a setrvačnou sílu, $\vec{F}_S = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{setrv.}}$. Z (30), (31) a (33) dostáváme:

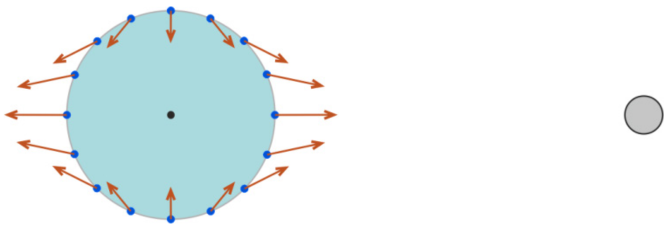
$$F_{Sx} = F_{gx} + F_{\text{setrv.}x} = G\frac{M_M m}{r_0^2}\cdot\left(1+2\frac{x}{r_0}\right) - \frac{GM_M m}{r_0^2} = 2\frac{GM_M m}{r_0^3}\cdot x \ .$$

$$F_{Sy} = F_{gy} + F_{\text{setrv.}y} = -\frac{GM_M m}{r_0^3}\cdot y \ .$$

Výsledná slapová síla tedy je[75]

$$\vec{F}_S = \frac{GM_M m}{r_0^3}\left(2x, -y, 0\right) \ . \qquad (34)$$ [76]

Slapové síly v různých bodech ukazuje obrázek:



Z výsledku (34) vidíme, že slapové síly klesají se *třetí* mocninou vzdálenosti. Kdyby se Měsíc přiblížil k Zemi na poloviční vzdálenost, byly by slapové síly osmkrát větší.

Dosazením konkrétních hodnot do (34) se můžeme přesvědčit, že slapová síla působící třeba na 1 kg vody je poměrně malá; činí maximálně asi $1{,}1\cdot10^{-6}$ N, tedy jen asi desetimiliόntinu tíhy té vody. Může tak malá síla pozorovatelně ovlivnit výšku hladiny? Pojďme to spočíst.

[73] Ve vztahu (32) je $\vec{a}_Z$ zrychlení, které Zemi uděluje Měsíc.

[74] Laskavý čtenář jistě ocení, co vše z přednášky Mechanika z prvního semestru si zde zopakujeme… ☺

[75] Ve výsledném vztahu už nepíšeme „rovná se přibližně“. Jsme si vědomi, že jsme zanedbávali členy vyššího řádu; nepřesnost, které jsme se dopustili, můžeme řádově odhadnout na 1/60, tedy asi jeden a půl procenta.

[76] Síly jsme počítali v rovině *xy*, proto je *z*-ová složka síly nulová.

O kolik stoupne a klesne hladina

Pro výpočet výšky hladiny je podstatné uvědomit si, že **hladina je ekvipotenciální plocha**.[77] Na hladině tedy bude konstantní potenciál sil, které na vodu působí – a to jsou slapové síly a gravitační síla Země.[78]

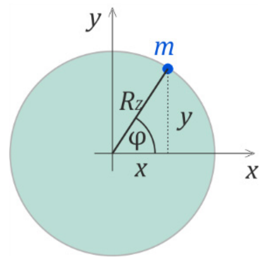
Potenciál slapových sil můžeme buď spočítat ze síly resp. intenzity $\vec{F}_S/m$ integrací[79] nebo z (34) „odhadneme“, že potenciál bude

$$\varphi_S = \frac{GM_M}{r_0^3} \cdot \left(\frac{1}{2} y^2 - x^2 \right) \tag{35}$$

a přesvědčíme se, že $-\mathrm{grad}\,(m\,\varphi_S)$ dá opravdu sílu (34).[80]

Polohu bodu na povrchu Země budeme vyjadřovat pomocí úhlu φ, viz obrázek[81]. Je tedy $x = R_Z \cos\varphi$, $y = R_Z \sin\varphi$. Vztah pro potenciál slapových sil dá po úpravě

$$\varphi_S = \frac{GM_M}{r_0^3} \cdot R_Z^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - 1 \right) . \tag{36}$$



Hladinu vody budeme brát ve vzdálenosti $R_Z + h$ od středu Země. h je převýšení hladiny[82] oproti stavu, kdy by nepůsobily slapové síly; samozřejmě závisí na φ. Potenciál gravitačního pole Země je

$$\begin{aligned} \varphi_g &= -G\frac{M_Z}{R_Z + h} = -G\frac{M_Z}{R_Z\left(1 + h/R_Z\right)} \doteq -G\frac{M_Z}{R_Z} \cdot \left(1 - h/R_Z\right) = \\ &= -G\frac{M_Z}{R_Z} + G\frac{M_Z}{R_Z^2} \cdot h = \text{konst.} + G\frac{M_Z}{R_Z^2} \cdot h \end{aligned} \quad . \tag{37}$$

Celkový potenciál slapových sil a gravitačního pole Země je tedy (až na aditivní konstantu)

$$\varphi_{S+Z} = \frac{GM_M}{r_0^3} \cdot R_Z^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - 1 \right) + G\frac{M_Z}{R_Z^2} \cdot h . \tag{38}$$

Výšku hladiny (resp. převýšení nad stavem, kdy by nepůsobily slapové síly) získáme, když položíme $\varphi_{S+Z} = 0$.[83] Z (38) pak plyne

$$G\frac{M_Z}{R_Z^2} \cdot h = -\frac{GM_M}{r_0^3} \cdot R_Z^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - 1 \right) \quad \Rightarrow \quad h = R_Z \cdot \frac{M_M}{M_Z} \cdot \left(\frac{R_Z}{r_0} \right)^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) . \tag{39}$$

---

[77] Jednoduše a názorně: Kdyby měla kapka na některém místě hladiny vyšší energii než na jiném (třeba proto, že by na hladině byl „kopeček“), sklouzla by do místa s nižší energií.

[78] A samozřejmě také odstředivá síla daná rotací Země, ale ta působí jen „zploštění na pólech“ a nezpůsobuje příliv a odliv; proto ji do našich úvah nebudeme započítávat.

[79] Již výše jsme připomněli vztah $\varphi_g(\vec{r}) = \varphi_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$; za $\vec{g}$ zde dosadíme intenzitu slapových sil.

[80] Opravdu dá, přesvědčte se sami parciálním derivováním podle *x* a *y*.

[81] Připomeňme, že se díváme ze směru kolmého k ekliptice. Bod, v němž potenciál určujeme, je tedy v průsečíku ekliptiky s povrchem Země. Osa x míří směrem k Měsíci.

[82] Je-li h<0, pak naopak snížení hladiny.

[83] Tato volba konstanty v potenciálu vede k tomu, že pokud by Měsíc nebyl přítomen, vyjde h=0, což je rozumné.

Kolik vyjde při dosazení konkrétních hodnot? Poměr hmotností Měsíce a Země je $M_M/M_Z \doteq 0{,}0123$.[84] Poměr poloměru Země a vzdálenosti Země-Měsíc jsme už uváděli výše, je asi 1/60. Dosazení do (39) dá

$$h \doteq 36\,\text{cm} \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) \tag{40}$$

Maximální zvýšení hladiny je tedy asi 36 cm, maximální snížení asi 18 cm. Z našich výpočtů tedy vychází, že rozdíl ve výšce hladiny při přílivu a odlivu by měl činit asi 54 cm.

A co Slunce?

Slunce působí na vodu na Zemi podobně jako Měsíc: Na straně přivrácené ke Slunci a na straně odvrácené od Slunce je voda slapovými silami tažena výš, na stranách kolmých ke spojnici Země-Slunce naopak tlačena níž. Analogicky k (39) je změna výšky hladiny

$$h_{\text{vliv Slunce}} = R_Z \cdot \frac{M_S}{M_Z} \cdot \left(\frac{R_Z}{r_{ZS}}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right). \tag{41}$$ [85]

Po dosazení konkrétních hodnot vyjde $h_{\text{vliv Slunce}} \doteq 16{,}5\,\text{cm} \cdot (1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi)$. Vliv slapových sil od Slunce je tedy necelou polovinou vlivu Měsíce.

Oba vlivy se **sčítají**, když jsou Slunce, Země a Měsíc (alespoň zhruba) v jedné přímce – tedy když je Měsíc **v úplňku nebo v novu**. Pak je příliv **nejvyšší**.[86]

Když jsou naopak spojnice Země s Měsícem a se Sluncem na sebe (alespoň zhruba) kolmé – tedy když je měsíc **v první nebo poslední čtvrti**, slapové síly od obou těles se **odečítají**, příliv je **nejnižší**.[87]

Ve skutečnosti je to složitější…

Víme, že ve skutečnosti je výška přílivu a odlivu na řadě míst mnohem větší, i přes 10 metrů.[88] Je to způsobeno tím, že Země není planeta celá pokrytá vodou, se stejně hlubokým dnem, a voda se na ní „nesrovná“ do stavu odpovídajícího statické rovnováze (z čehož vycházel náš výpočet). Voda je ve skutečnosti hnána k pobřeží nebo do ústí řek a vystupuje díky tomu výrazně výš. Díky uvedeným faktorům také příliv nenastává přesně ve chvíli, kdy je Měsíc nejvýš nad obzorem, ale může být o řadu hodin opožděn. Po oceánu se navíc změna výšky hladiny šíří jako vlna, je tedy potřeba počítat s rychlostí jejího šíření. [89] [90] Navíc jsme v našem zjednodušeném modelu nepočítali s tím, že zemská osa je skloněna vůči ekliptice, že sklon vůči ekliptice má i oběžná dráha Měsíce a že vzdálenost Měsíce a Slunce od Země nejsou přesně konstantní… Reálné slapové jevy jsou opravdu složité.

---

[84] To se dá dobře pamatovat… (Lépe než hodnota $M_M \doteq 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$.)

[85] r_{ZS} je vzdálenost Země od Slunce (asi $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m) a M_S hmotnost Slunce (asi $2 \cdot 10^{30}$ kg).

[86] A nejvyšší je samozřejmě také rozdíl mezi přílivem a odlivem. Ve starších českých pramenech se to označuje půvabným termínem *skočné dmutí*. (Nověji: *skočný příliv.* Angličtina používá název *spring tide*.)

[87] Starší český název pro to je *hluché dmutí*. (Ev. *hluchý* příliv. V angličtině: *neap tide*.)

[88] Jako rekord se uvádí přes 16 m, viz např. stránku Wikipedie https://en.wikipedia.org/wiki/Tide .
16 m je zřejmě hodnota nejvyššího rozdílu přílivu a odlivu, jako průměrná hodnota na daném místě (záliv Fundy v Novém Skotsku), se v jiném pramenu uvádí 38,4 stop, viz https://tidesandcurrents.noaa.gov/faq.html#08.

[89] Dynamickou teorii slapů počítající s tím, že voda v oceánech není ve statické rovnováze, vypracoval jako první Pierre Simon Laplace; o dalších, kdo v této oblasti přispěli (a o dalších složitostech se slapy spojených) viz např. odkaz v předchozí poznámce. (A mnoho desítek odkazů na dané webové stránce.)

[90] Uvedené vlivy mohou způsobit třeba to, že na některých místech je jeden z přílivů za 24 hodin výrazně slabší než druhý, případně je prakticky nepozorovatelný, takže to vypadá, že se tam příliv opakuje ne dvakrát, ale jen jednou za 24 hodin.

Slapové síly nepůsobí jen na vodu

Slapové síly působí i na samotnou Zemi, takže i ta (protože není tuhá) se jejich vlivem nepatrně natahuje a smršťuje. Uvádí se, že tyto změny dosahují na rovníku dvacet centimetrů i více.[91]

Za co ještě slapy mohou: zpomalování rotace Země

Kdyby se Země neotáčela[92], mířila by vzdutí oceánu ve směru spojnice Země-Měsíc, jak to ukazuje horní obrázek v boxu vpravo.

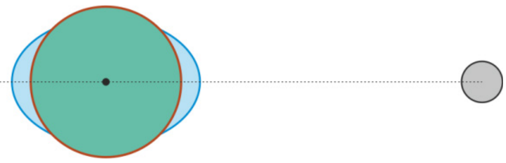
Protože se ale Země otáčí, strhuje vodu částečně ve směru rotace, viz dolní obrázek.

Ovšem když Země působí na vodu, musí voda naopak působit na Zemi, a to **proti směru její rotace**. To znamená, že zemskou rotaci nutně zpomaluje.

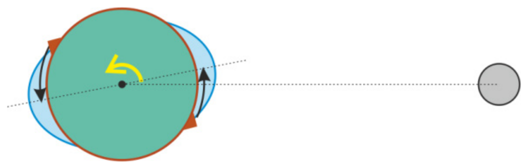
Uvádí se, že ztráty (mechanické) energie díky slapům jsou v průměru asi 3,75 TW.[93]

Naměřené zpomalování zemské rotace není velké, prodloužení dne činí necelé dvě milisekundy za století[94], čili necelých 20 μs za rok. Za dlouhá časová období se to však nakumuluje. Za 300 miliónů let dělá prodloužení dne asi hodinu a půl – a z fosilních dat bylo opravdu vyvozeno, že před tři sta milióny let byla délka dne jen 22 a půl hodiny.[95] [96]

Takto by vypadaly slapy, kdyby se Země neotáčela:



Protože se ale Země otáčí, strhává slapové vzdutí zčásti ve směru rotace:



A co s tím souvisí: vzdalování Měsíce

Zpomalování rotace Země díky slapovým jevům má ještě jeden důsledek. Když se zmenší úhlová rychlost ω, zmenší se i velikost momentu hybnosti Země,

$$L_Z = J_Z\,\omega\,. \qquad (42)$$
[97]

Ovšem Země s Měsícem tvoří izolovanou soustavu[98] – takže celkový moment hybnosti Země a Měsíce je konstantní. Čili když se zmenšuje L_Z, musí se *zvětšovat* moment hybnosti Měsíce. (Ten je dán vzdáleností Měsíce a rychlostí jeho oběhu.) Lze ukázat, že díky zvětšování momentu hybnosti se Měsíc od Země nutně **vzdaluje**. Vzdalování se skutečně naměřilo, činí necelé 4 cm za rok.

---

[91] Pro podrobnosti si vyhledejte např. stránku Wikipedie „Earth tides“. Ta zmiňuje mimo jiné i další vliv: mořské dno se trochu zvedá a klesá vlivem měnící se tíhy vody díky přílivu a odlivu v oceánech. Je také zajímavé přečíst si, že při některých dnešních přesných fyzikálních a astronomických měřeních se už pohyb povrchu Země díky slapovým jevům musí brát v úvahu.

[92] Vzhledem ke spojnici Země-Měsíc.

[93] Viz stránku Wikipedie https://en.wikipedia.org/wiki/Tide a příslušný odkaz v její části „Dissipation“. Hodnota v TW znamená ztráty energie za 1 s, kinetická energie rotace Země se tedy za 1 s sníží o asi 3,75 TJ.

[94] Různé zdroje uvádějí hodnotu prodlužování dne 1,7 až 1,8 ms za století.

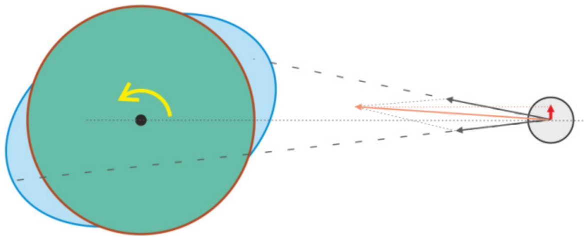
[95] Viz např. informaci v článku https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674984718301009.

[96] Poznamenejme, že rychlost rotace Země ovlivňují i další faktory (například vlivy, které mění její moment setrvačnosti), ty zde nebudeme diskutovat.

[97] Moment setrvačnosti Země zde bereme konstantní.

[98] Vliv Slunce pro následující úvahu můžeme zanedbat, při přesnějších výpočtech se s ním samozřejmě počítá.

Kvantitativně si vzdalování Měsíce přibližně spočteme v Dodatku A této kapitoly. Můžeme ale vliv slapů na Měsíc nějak názorně pochopit kvalitativně?



Vysvětlení naznačuje obrázek vpravo. Jsou na něm naznačeny síly od „kopečků“ vody, které jsou díky rotaci Země posunuty vůči spojnici Země-Měsíc. „Kopeček“ bližší k Měsíci působí o trochu vyšší silou a jeho úhel vzhledem ke spojnici Země-Měsíc je větší, než je tomu pro vzdálenější „kopeček“. Výsledná síla má složku kolmou na zmíněnou spojnici. (V obrázku je vyznačena malou červenou šipkou.) A právě tato složka síly působí moment síly, díky němuž se zvětšuje moment hybnosti Měsíce.

A ještě: vázaná rotace Měsíce

Podobně jako Měsíc působí slapovými silami na Zemi, působí také Země slapovými silami na Měsíc. V minulosti proto slapové síly také zpomalovaly rotaci Měsíce. A to až do té doby, než se rotace (vůči spojnici Země-Měsíc) zastavila. To znamená, že perioda otáčení Měsíce (vzhledem k inerciálnímu systému) je rovna jeho oběžné době. Proto směrem k Zemi Měsíc ukazuje stále jen jednu – přivrácenou – stranu.[99] Takovéto rotaci říkáme *vázaná rotace* a vykazuje ji řada měsíců planet.

Slapovým silám jsme zde věnovali poměrně hodně místa.[100] [101] Ještě se k nim vrátíme v souvislosti s neutronovými hvězdami a černými dírami. Pojďme zatím ještě na chvíli zpět k historickému vývoji názorů na gravitaci.

[99] Kolem dané orientace Měsíc drobně osciluje, takže ve skutečnosti můžeme pozorovat o něco více než polovinu jeho povrchu.

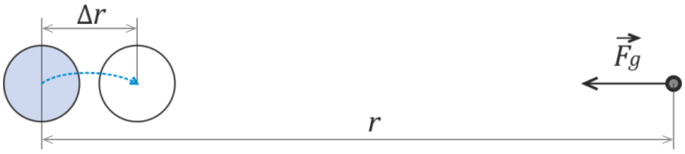
[100] Také proto, že na jejich rozbor nebyl čas v úvodním kurzu mechaniky.

[101] Další informace a výpočty můžete najít třeba v disertační práci T. France „Vybrané gravitační jevy ve vesmíru a jejich přiblížení středoškolákům“ dostupné na https://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~franc/Disertacni_prace.pdf.

2.7 Neslučitelnost gravitace a speciální teorie relativity

Newtonova teorie gravitace dokázala vysvětlit pohyb planet a dalších těles ve sluneční soustavě a zaznamenala řadu pozoruhodných úspěchů, například při objevu Neptunu.

Ovšem gravitace je v newtonovské teorii silou působící do dálky **okamžitě**. Ve vztahu $F_g = G\dfrac{mM}{r^2}$ je r okamžitou vzdáleností hmotných bodů resp. těles, které se přitahují. Posuneme-li jedno těleso třeba o Δr blíže k druhému (viz obrázek), stoupne **okamžitě** síla na druhé těleso.



Například když přiblížíme nějaké závaží třeba o metr směrem k Měsíci, měla by okamžitě stoupnout síla, kterou toto závaží působí na tělesa na Měsíci. (Samozřejmě není reálné tak malou změnu změřit, ale jde o princip.) Pokud posuneme závaží směrem k Proximě Centauri, měla by se tam okamžitě změnit síla, kterou naše závaží přitahuje objekty v dané soustavě. Kdyby šlo tak malou sílu detekovat, mohli bychom k Proximě Centauri posílat zprávy (třeba morseovkou) bez jakéhokoli zdržení.[102]

Ovšem v roce 1905 vytvořil Albert Einstein speciální teorii relativity (STR).[103] Z této teorie plyne, že maximální rychlost šíření signálů je rovna rychlosti světla ve vakuu. Jakákoli zpráva proto k Proximě Centauri nemůže dojít dříve než asi za čtyři roky.[104] A gravitace podle Newtona by to měla stihnout okamžitě!

Je vidět, že Newtonova teorie gravitace je se speciální teorií relativity zcela zřejmě **neslučitelná**. Navíc pokusy tuto teorii nějak jednoduše modifikovat, aby nebyla s STR ve sporu, nevedly k úspěchu.[105]

Problém je hlubší a netýká se jen Newtonovy teorie. Ukázalo se, že gravitaci nelze jednoduše „zakomponovat" do speciální teorie relativity, ale že se musí změnit sama STR. **Gravitace** totiž (díky tomu, že působí na všechna tělesa a že ji nelze odstínit) **fakticky znemožňuje definovat inerciální systém**[106] – tedy základní koncept, na němž stojí celá speciální teorie relativity.

To neznamená, že speciální relativita je špatná, jen v sobě nezahrnuje gravitaci. Relativistickou teorii gravitace se ovšem vybudovat podařilo. Dokázal to, po řadě let tvrdé práce, sám Albert Einstein vytvořením **obecné teorie relativity**.

Do východisek této teorie a některých jejích důsledků nahlédneme v následující kapitole.

---

[102] Jinými slovy to lze vyjádřit tak, že v Newtonově teorii je rychlost šíření gravitační interakce nekonečná.

[103] Nemusíme připomínat, že STR vysvětlila nejen Michelsonův pokus, ale i výsledky řady dalších experimentů, takže šlo o teorii velmi úspěšnou – ostatně je i jedním ze základních kamenů současné fyziky.

[104] Proxima Centauri je vzdálena asi 4,22 světelného roku.

[105] Takovým pokusem byla Nordströmova teorie gravitace, která (zjednodušeně řečeno) nahradila Laplaceův operátor v rovnici (20) d´Alembertovým operátorem $\Box$. Její předpovědi se rozcházely s výsledky experimentů.

[106] Přesněji řečeno, inerciální systém nejde zavést globálně, v celém prostoru. (Blíže viz v další kapitole, pokud jste ji ještě nečetli, nezoufejte, že této upřesňující poznámce nejspíš nerozumíte.)

Dodatek A: Zpomalování rotace Země a vzdalování Měsíce

Problém, který chceme diskutovat, je následující:

> Jak kvantitativně souvisí zpomalování rotace Země (které nastává díky slapovým jevům) se vzdalováním Měsíce?

Oba efekty jsou naměřeny.

1) Zpomalování rotace Země

Naměřená rychlost zpomalování rotace Země se uvádí 1,7 až 1,8 milisekund za století, tedy cca 18 µs za rok. (To znamená, že perioda rotace Země T_Z se za rok prodlouží o $\Delta T_Z \doteq 1{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$.) Alternativně se uvádí změna úhlové rychlosti rotace Země ω_Z; například článek [107] uvádí, že průměrné zpomalení úhlové rychlosti Země získané z fosilních dat je přibližně $6{\cdot}10^{-7}$ rad/(rok)^2. To znamená, že za rok se ω_Z zmenší o $|\Delta\omega_Z| \doteq 6{\cdot}10^{-7}$ rad/rok $\doteq 6{\cdot}10^{-7}$ rad/(3,16·10^7 s) $\doteq 1{,}9{\cdot}10^{-14}\,\mathrm{s}^{-1}$. [108]

Změna periody a úhlové rychlosti spolu samozřejmě souvisí. Je $\omega = 2\pi/T$; zderivováním podle času a úpravou dostaneme $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\pi}{T^2}\frac{dT}{dt} = -\frac{\omega}{T}\frac{dT}{dt}$. Změny ω i T můžeme vyjádřit pomocí derivací jako $\Delta\omega \doteq \frac{d\omega}{dt}\cdot\Delta t$, $\Delta T \doteq \frac{dT}{dt}\cdot\Delta t$. (V našem případě má jít o změny za rok, takže by bylo $\Delta t = 1$ rok.) Celkově tedy dostáváme

$$\Delta\omega = -\frac{\omega}{T}\Delta T \ .\text{[109]} \tag{43}$$

Protože T_Z = 86 164 s (jeden siderický den) a

$$\omega_Z \doteq 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} \ , \tag{44}$$

dostáváme z (43) při dosazení $\Delta T_Z \doteq 1{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$ změnu úhlové rychlosti **za rok**:

$$\Delta\omega_Z \doteq -1{,}5{\cdot}10^{-14}\ \mathrm{s}^{-1} \ , \tag{45}$$

vcelku ve shodě s tím, co je uvedeno ve výše zmíněném článku.[110]

2) Rychlost vzdalování Měsíce

Pomocí laserového odražeče umístěného na Měsíci bylo naměřeno, že průměrná vzdálenost Měsíce od Země se za rok zvětšuje asi o 3,8 cm.

---

[107] https://iopscience.iop.org/article/10.3847/0004-6256/151/4/103

[108] 1 rok = 31 556 952 s $\doteq$ 3,16·10^7 s. Jednotku výsledku bychom mohli také psát rad/s, ale radián je bezrozměrná veličina, tak ho uvádět nemusíme.

[109] Možná názornější tvar tohoto výsledku je $\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta T}{T}$; relativní změny úhlové rychlosti a periody jsou až na znaménko stejné. (Pozn.: Ve výsledcích už nepíšeme „rovná se přibližně" i když víme, že přesně by byl jen výsledek zapsaný pomocí diferenciálů. Ale změny jsou tak malé, že chyba, které se dopouštíme, je proti nejistotám daných veličin zanedbatelná.)

[110] Rozdíl patrně může být způsobený jednak nejistotou hodnoty uvedené v daném článku a jednak tím, že 18 µs za rok je současná měřená hodnota; před stovkami miliónů let mohla být změna rychlosti poněkud větší, protože Měsíc byl blíže.

Při našich výpočtech budeme dále pro jednoduchost předpokládat, že střed Země je nehybné silové centrum[111] a že Měsíc se kolem něj pohybuje po kruhové dráze. Dále budeme předpokládat, že moment setrvačnosti Země se nemění. [112] Při těchto zjednodušeních a v důsledku toho, že na rotaci Země působí i další vlivy, zřejmě nebudou výsledky našich výpočtů nijak exaktní – jde nám o to, odhadnout diskutované efekty alespoň řádově.[113]

Jak se zmenšuje energie rotace Země

Podívejme se nejprve na kinetickou energii rotace Země. Ta je

$$E_k = \frac{1}{2} J_Z \cdot \omega_Z^2 \; . \tag{46}$$

Moment setrvačnosti Země můžeme odhadnout pomocí vztahu pro homogenní kouli ($J = \frac{2}{5} mR^2$), což po dosazení dá asi 10^{38} kg·m^2. Reálně bude moment setrvačnosti menší, protože Země není homogenní a těžší prvky jsou soustředěny více v jejích hlubších vrstvách a v jádru. Uvádí se, že

$$J_Z \doteq 8 \cdot 10^{37}\,\mathrm{kg\,m^2} \; . \tag{47}$$

Při změně úhlové rychlosti o $\Delta\omega_Z$ se E_k změní o

$$\Delta E_k \doteq \frac{dE_k}{d\omega_Z} \cdot \Delta\omega_Z = \frac{d}{d\omega_Z}\left(\frac{1}{2} J_Z \cdot \omega_Z^2\right) \cdot \Delta\omega_Z = J_Z \cdot \omega_Z \cdot \Delta\omega_Z \tag{48}$$

Konkrétně je (z (47) a (44)) $J_Z \cdot \omega_Z \doteq 5{,}8 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$.[114] Ze (48) pak po dosazení (45) dostaneme změnu kinetické energie rotace Země **za rok**:

$$\Delta E_k \doteq -9 \cdot 10^{19}\,\mathrm{J} \tag{49}$$

Pokles kinetické energie za jednu sekundu je výkon, který se disipuje (tedy mění na jiné formy energie):

$$P = -\frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \frac{9 \cdot 10^{19}\,\mathrm{J}}{3{,}16 \cdot 10^7\,\mathrm{s}} \doteq 3 \cdot 10^{12}\,\mathrm{W} = 3\,\mathrm{TW} \tag{50}$$

To je vcelku v dobré shodě s výše zmíněnou hodnotou 3,7 TW, kterou pro disipovaný výkon uvádí Wikipedie.[115]

[111] Vzhledem k poměru hmotností Měsíce a Země tím způsobíme chybu jen něco přes jedno procento.

[112] Při změně momentu setrvačnosti např. díky přesunům hmot v nitru Země nebo tání ledovců na pólech a přesunu vody k rovníku se samozřejmě mění také ω a může se měnit E_k v důsledku změn potenciální energie, ale nám jde o změny způsobené slapovými silami, a ty moment setrvačnosti nemění.

[113] Jestliže je naměřené vzdalování Měsíce necelé 4 cm za rok, nebude nám vadit, jestliže z našich teoretických odhadů vyjde 2 cm nebo 6 cm – kdyby náš model neodpovídal realitě, mohly by nám z něj vyjít výsledky typu 4 mikrometry nebo 4 kilometry za rok (nebo by z něj dokonce mohlo vyjít, že se Měsíc má přibližovat).

[114] Je to velikost momentu hybnosti rotující Země.

[115] Zároveň nám tento údaj ukazuje, že světovou produkci elektřiny by rozhodně nešlo pokrýt z přílivových elektráren. (Světová výroba elektrické energie za rok je asi 25 tisíc TWh, tedy 9·10^{19} J, což odpovídá výkonu asi 3·10^{12} W, čili stejnému, jakým se brzdí otáčení Země díky slapovým silám. A celou na Zemi disipovanou energii v přílivových elektrárnách určitě nevyužijeme.)

Vzdalování Měsíce

Moment hybnosti daný rotací Země je $L_z = J_Z \cdot \omega_Z$. Díky poklesu úhlové rychlosti (45) se L_z za rok změní o

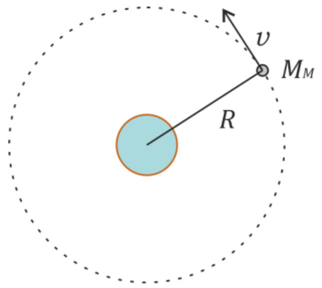
$$\Delta L_Z = J_Z \cdot \Delta\omega_Z \doteq 8 \cdot 10^{37}\,\mathrm{kg\,m^2} \cdot (-1{,}5 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{s^{-1}}) = -1{,}2 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} \,. \qquad (51)$$

Protože celkový moment soustavy Země-Měsíc se zachovává, musí se o stejnou hodnotu zvýšit velikost momentu hybnosti Měsíce:

$$\Delta L_M \doteq 1{,}2 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} \,. \qquad (52)$$

Jaký to má vliv na vzdálenost Měsíce?
Vyjdeme z 3. Keplerova zákona. Ten říká, že doba oběhu T a poloměr dráhy R splňují vztah

$$\frac{R^3}{T^2} = \mathrm{konst.} \qquad (53)$$



Levou stranu (53) upravíme: $R^3/T^2 = \frac{1}{4\pi^2} R \cdot (2\pi R/T)^2 = \frac{1}{4\pi^2} R \cdot \upsilon^2$.
To znamená, že

$$R \cdot \upsilon^2 = \mathrm{konst.}\ ^{116} \qquad (54)$$

Moment hybnosti Měsíce je

$$L_M = R \cdot M_M\, \upsilon \,, \qquad (55)$$

a ten již do vztahu (54) lehce „namontujeme“. Vynásobíme-li (54) M_M^2, bude levá strana této rovnice $M_M^2 \cdot R \cdot \upsilon^2 = (R \cdot M_M\, \upsilon)^2 / R$; pravá strana bude opět konstanta[117]. Dosadíme-li sem (55), dostaneme

$$\frac{L^2}{R} = \mathrm{konst.} \qquad (56)$$

Je tedy $R = k \cdot L^2$ [118], a odtud $\Delta R = \frac{dR}{dL}\Delta L = 2kL\Delta L = 2kL^2 \frac{\Delta L}{L}$, čili

$$\Delta R = 2R\frac{\Delta L}{L} \,. \qquad (57)$$

Dosazení konkrétních hodnot[119] dá pro změnu vzdálenosti Měsíce za rok výsledek

$$\Delta R \doteq 2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}\ \frac{1{,}2 \cdot 10^{24}}{2{,}9 \cdot 10^{34}} \doteq 3{,}2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \,, \qquad (58)$$

tedy asi 3,2 cm za rok; opět v dobré shodě s uváděnou naměřenou hodnotou 3,8 cm. Můžeme tedy říci, že vzdalování Měsíce díky slapovým jevům v zásadě rozumíme.

---

[116] Totéž jsme mohli získat ze vztahu pro rychlost oběhu družice resp. z toho, že dostředivou silou při kruhovém oběhu Měsíce je přitažlivost Země, pro niž platí Newtonův gravitační zákon.

[117] Byť samozřejmě jiná než v (54).

[118] Už odtud je vidět, že při zvětšování momentu hybnosti L poloměr dráhy roste, tedy Měsíc se vzdaluje. Je zajímavé všimnout si, že z (54), při zvětšování poloměru dráhy Měsíce jeho rychlost klesá, a to i když výsledná síla díky slapovým jevům Měsíc urychluje. To není ale žádná speciální „záhada“ spjatá se slapovými silami, je to prostě důsledek zákonitostí orbitální dynamiky.

[119] Moment hybnosti orbitálního pohybu Měsíce získáme po dosazení konkrétních hodnot do (55), průměrná rychlost oběhu Měsíce je asi 1022 m/s. Výsledná hodnota je $L_M \doteq 2{,}9 \cdot 10^{34}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$.