資料來源:得勝者文教

財團法人大學入學考試中心基金會
113學年度分科測驗試題
數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

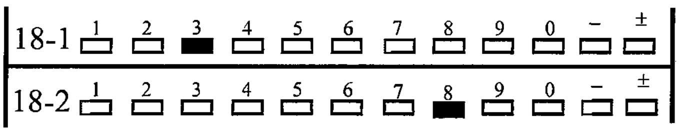
—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

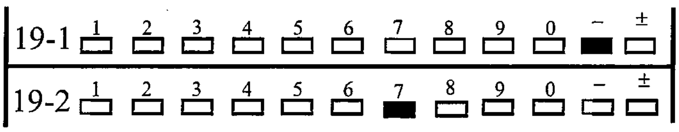
作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{\text{18-1}}{\text{18-2}}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 3 與第 18-2 列的 8 劃記，如：



例：若答案格式是 $\dfrac{\text{19-1}\ \text{19-2}}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 − 與第 19-2 列的 7 劃記，如：



選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

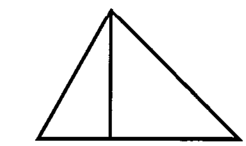
請記得在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

第壹部分、選擇（填）題（占76分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 如右圖所示，有一 ΔABC，已知 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}=12$，且 $\tan\angle B=\frac{3}{2}$、$\tan\angle C=\frac{2}{3}$。試問 $\overline{BC}$ 的長度為何？



5

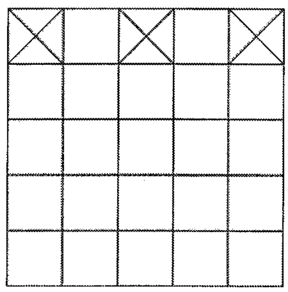
(1) 20　(2) 21　(3) 24
(4) 25　(5) 26

2. 坐標平面上，橢圓 Γ 的方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$（其中 a 為正實數）。若將 Γ 以原點 O 為中心，沿 x 軸方向伸縮為 2 倍、沿 y 軸方向伸縮為 3 倍後，所得到的新圖形會通過點 $(18,0)$。試問下列哪一個選項是 Γ 的焦點？

2

(1) $(0,3\sqrt{3})$　(2) $(-3\sqrt{5},0)$　(3) $(0,6\sqrt{13})$　(4) $(-3\sqrt{13},0)$　(5) $(9,0)$

3. 想在 5×5 的棋盤上擺放 4 個相同的西洋棋的城堡棋子。由於城堡會將同一行或是同一列的棋子吃掉，故擺放時規定每一行與每一列最多只能擺放一個城堡。在第一列的第一、三、五格（如圖示畫叉的格子）不擺放的情況下，試問共有多少種擺放方式？



4

(1) 216
(2) 240
(3) 288
(4) 312
(5) 360

資料來源：得勝者文教

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 一遊戲廠商將舉辦抽獎活動，廠商公告每次抽獎需使用掉一個代幣，且每次抽獎的中獎機率皆為 $\frac{1}{10}$。某甲決定先存若干個代幣，並在活動開始後進行抽獎，直到用完所有代幣才停止。試選出正確的選項。

1、4

(1) 某甲中獎一次所需要抽獎次數的期望值為 10

(2) 某甲抽獎兩次就中獎一次以上的機率為 0.2

(3) 某甲抽獎 10 次都沒中獎的機率小於抽獎 1 次就中獎的機率

(4) 某甲至少要存 22 個代幣，才能保證中獎的機率大於 0.9

(5) 某甲只要存足夠多的代幣，就可以保證中獎的機率為 1

5. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式。已知 $f(-2-3i)=0$（其中 $i=\sqrt{-1}$），且 $f(x)$ 除以 x^2+x-2 的餘式為 18。試選出正確的選項。

2、3、4

(1) $f(2+3i)=0$

(2) $f(-2)=18$

(3) $f(x)$ 的三次項係數為負

(4) $f(x)=0$ 恰有一正實根

(5) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心在第一象限

資料來源：得勝者文教

6. 坐標空間中，考慮滿足內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{15}$ 與外積 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-1,0,3)$ 的兩向量 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$。試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角 θ（其中 $0\le\theta\le\pi$，π 為圓周率）大於 $\frac{\pi}{4}$

3、4

(2) $\overrightarrow{u}$ 可能為 $(1,0,-1)$

(3) $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|\ge 2\sqrt{5}$

(4) 若已知 $\overrightarrow{v}$，則 $\overrightarrow{u}$ 可以被唯一決定

(5) 若已知 $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|$，則 $|\overrightarrow{v}|$ 可以被唯一決定

7. 坐標平面上，考慮兩函數 $f(x)=x^5-5x^3+5x^2+5$ 與 $g(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$ 的函數圖形（其中 π 為圓周率）。試選出正確的選項。

(1) $f'(1)=0$

1、2、5

(2) $y=f(x)$ 在閉區間 $[0,2]$ 為遞增

(3) $y=f(x)$ 在閉區間 $[0,2]$ 為凹向上

(4) 對任意實數 x，$g(x+6\pi)=g(x)$

(5) $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在閉區間 $[3,4]$ 皆為遞增

資料來源：得勝者文教

8. 設 z 為非零複數，且設 $\alpha=|z|$、β 為 z 的輻角，其中 $0\le\beta<2\pi$（其中 π 為圓周率）。對任一正整數 n，設實數 x_n 與 y_n 分別為 z^n 的實部與虛部。試選出正確選項。

(1) 若 $\alpha=1$ 且 $\beta=\dfrac{3\pi}{7}$，則 $x_{10}=x_3$

2、5

(2) 若 $y_3=0$，則 $y_6=0$

(3) 若 $x_3=1$，則 $x_6=1$

(4) 若數列 $\langle y_n\rangle$ 收斂，則 $\alpha\le1$

(5) 若數列 $\langle x_n\rangle$ 收斂，則數列 $\langle y_n\rangle$ 也收斂

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 設 a,b,c,d 為實數。已知兩聯立方程組 $\begin{cases}ax+by=2\\cx+dy=1\end{cases}$、$\begin{cases}ax+by=-1\\cx+dy=-1\end{cases}$ 的增廣矩陣經過相同的列運算後，分別得到 $\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&3\\0&1&2\end{array}\right]$、$\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&2\\0&1&-1\end{array}\right]$，則聯立方程組 $\begin{cases}ax+by=0\\cx+dy=1\end{cases}$ 的解為

$x=$ (9-1)(9-2) -7，$y=$ (9-3) 0。

10. 坐標平面上，設 Γ 為以原點為圓心的圓，P 為 Γ 與 x 軸的其中一個交點。已知通過 P 點且斜率為 $\dfrac{1}{2}$ 的直線交 Γ 於另一點 Q，且 $\overline{PQ}=1$，則 Γ 的半徑為 $\dfrac{\sqrt{\text{(10-1)}}}{\text{(10-2)}}$ 5 / 4。

（化為最簡根式）

資料來源：得勝者文教

11. 設實數 $a_1,a_2,\ldots,a_9$ 是公差為 2 的等差數列，其中 $a_1\neq 0$ 且 $a_3>0$。若 $\log_2 a_3,\log_2 b,\log_2 a_9$ 三數依序也成等差數列，其中 b 為 a_4,a_5,a_6,a_7,a_8 其中一數，則 $a_9=\dfrac{\text{⑪-1}\ \text{⑪-2}}{\text{⑪-3}}$。

2 5

2

（化為最簡分數）

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分） 此部份答案詳見答案卷

說明：本部分共有 2 題組，選擇題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。
選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

坐標空間中，考慮三個平面 $E_1:x+y+z=7$、$E_2:x-y+z=3$、$E_3:x-y-z=-5$。令 E_1 與 E_2 相交的直線為 L_3；E_2 與 E_3 相交的直線為 L_1；E_3 與 E_1 相交的直線為 L_2。根據上述，試回答下列問題。

(1, 2, 4)

12. 已知三直線 L_1、L_2、L_3 有共同交點，試求此共同交點 P 的坐標。（非選擇題，4 分）

13. 試說明 L_1、L_2、L_3 中，任兩直線所夾的銳角皆為 60°。（非選擇題，4 分） 見詳解

（註：令 L_1 與 L_2 所夾的銳角為 α，L_2 與 L_3 所夾的銳角為 β，L_3 與 L_1 所夾的銳角為 γ）

14. 若坐標空間中第四個平面 E_4 與 E_1、E_2、E_3 圍出一個邊長為 $6\sqrt{2}$ 的正四面體，試求出 E_4 的方程式（寫成 $x+ay+bz=c$ 的形式）。（非選擇題，4 分）

$x+y-z=11$

$x+y-z=-13$

資料來源：得勝者文教

15-17 題為題組

坐標平面上，設Γ為三次函數 $f(x)=x^3-9x^2+15x-4$的函數圖形。根據上述，試回答下列問題。

15. 試問下列何者為 $f(x)$的導函數？（單選題，2 分）

4

(1) $x^2-9x+15$

(2) $3x^3-18x^2+15x-4$

(3) $3x^3-18x^2+15x$

(4) $3x^2-18x+15$

(5) $x^2-18x+15$

16. 試說明 $P(1,3)$為Γ上之一點，並求Γ在P點的切線L的方程式。（非選擇題，4 分） $y=3$

17. 承 16，試求Γ和L所圍成有界區域的面積。（非選擇題，6 分） 108

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 $X: x_1,x_2,\cdots,x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\mu_X^2\right)}$

6. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線（迴歸直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\sqrt{3}\approx 1.732,\sqrt{5}\approx 2.236,\sqrt{6}\approx 2.449,\pi\approx 3.142$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$，變異數 $Var(X)=np(1-p)$；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，變異數 $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$。

財團法人大學入學考試中心基金會

113學年度分科測驗

數學甲考科

答題卷

應試號碼、條碼、姓名（不得污損、塗改或破壞）

確認答題卷應試號碼與姓名正確無誤	
確認後考生簽名	請用正楷簽全名

※考試開始鈴響起，經確認確為本人之應試號碼與姓名後，於「確認後考生簽名」欄以正楷簽全名。使用備用答題卷者，請務必於「確認後考生簽名」欄簽全名。
※請詳閱試題本上作答注意事項與答題卷劃記及書寫注意事項。
※選擇題正確作答樣例： A B C D

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

注意：考生如未能劃滿方格，或不依試題本之作答注意事項劃記致機器無法正確辨識答案時，恐將影響成績。

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
9-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
9-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
9-3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
10-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
10-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
11-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
11-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
11-3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±

資料來源:得勝者文教

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

題號	作答區
	注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。

12　【請用黑色墨水的筆作答】

$E_1: x+y+z=7$ —①

$E_2: x-y+z=3$ —②

$E_3: x-y-z=-5$ —③

$\begin{cases} ①+②: x+z=10 \\ ①-②: 2y=4 \end{cases} \Rightarrow L_3: \begin{cases} x=t \\ y=2 \\ z=10-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} ②+③: 2x-2y=-2 \\ ②-③: 2z=8 \end{cases} \Rightarrow L_1: \begin{cases} x=r-1 \\ y=r \\ z=4 \end{cases}, r\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} ①+③: 2x=2 \\ ①-③: y+z=6 \end{cases} \Rightarrow L_2: \begin{cases} x=1 \\ y=s \\ z=6-s \end{cases}, s\in\mathbb{R}.$

$\because$ L_1、L_2、L_3 交於同一點 P,

即 $\begin{cases} t=r-1=1 \\ 2=r=s \\ 10-t=4=6-s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ r=2 \\ s=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{P(1,2,4)}$ ※

13　【請用黑色墨水的筆作答】

取 $\begin{cases} L_1 \text{ 之方向向量 } \vec{L_1}=(1,1,0) \\ L_2 \quad〃 \quad〃 \quad \vec{L_2}=(0,1,-1) \\ L_3 \quad〃 \quad〃 \quad \vec{L_3}=(1,0,-1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{L_1}\cdot\vec{L_2}=1=|\vec{L_1}|\cdot|\vec{L_2}|\cdot\cos\alpha \\ \vec{L_2}\cdot\vec{L_3}=1=|\vec{L_2}|\cdot|\vec{L_3}|\cdot\cos\beta \\ \vec{L_3}\cdot\vec{L_1}=1=|\vec{L_3}|\cdot|\vec{L_1}|\cdot\cos\gamma \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\frac{1}{2} \\ \cos\beta=\frac{1}{2} \\ \cos\gamma=\frac{1}{2} \end{cases}$　$\because$ α,β,γ 皆為銳角　$\therefore \underline{\alpha=\beta=\gamma=60^\circ}$ ※

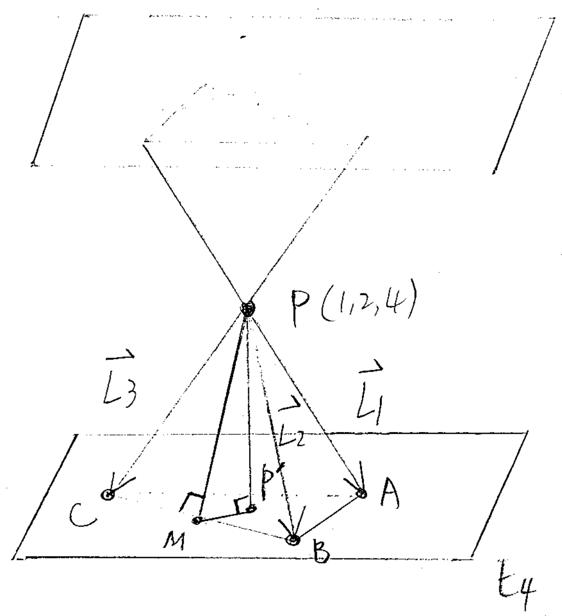
資料來源：得勝者文教

作　答　區

題號　注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。

14

【請用**黑色墨水的筆**作答】



1° 先將 P 投影至 E4 上，得 P'

且 P' 恰為正△ABC之重心

2° $\because |\vec{L_1}|=|\vec{L_2}|=|\vec{L_3}|=6\sqrt{2}$

令 M 為 $\overline{BC}$ 中點，

$\therefore\ \overline{PM}=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$

可知 $\overline{PP'}=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{P'M}^2}=\sqrt{48}$

3° E4 之法向量 $=\frac{\vec{L_1}+\vec{L_2}+\vec{L_3}}{3}\ //\ (1,1,-1)$

$\therefore$ E4：$x+y-z=k$

4° $d(P,E_4)=\overline{PP'}=\sqrt{48}=\frac{|1+2-4-k|}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow k=11 \vee -13 \Rightarrow$ E4：$x+y-z=11 \vee -13$ ※

15　1　2　3　**4**　5　6　7　8　9　0　−　±　【請用 **2B 鉛筆**作答】

16

【請用**黑色墨水的筆**作答】

$f'(x)=3x^2-18x+15$

$\Rightarrow f'(1)=3\cdot 1^2-18\cdot 1+15=0$

切線 L 方程式：$y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$

$=0\cdot(x-1)+3$

$\Rightarrow L: y=3$ ※

資料來源：得勝者文教

作　答　區

題號　注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。

17

【請用**黑色墨水的筆**作答】

$x^3-9x^2+15x-4=3$

$\Rightarrow x^3-9x^2+15x-7=0$

$\Rightarrow (x-1)^2(x-7)=0 \Rightarrow \Gamma$ 和 L 交於 $(1,3)$ 和 $(7,3)$

所求有界區域面積 $=\left|\int_1^7(x^3-9x^2+15x-7)\,dx\right|$

$=\left|\frac{1}{4}x^4-3x^3+\frac{15}{2}x^2-7x\Big|_1^7\right|$

$=|-108|$

$=108$ ※