Galois-Theorie in monoidalen Kategorien

Thomas S. Ligon

Bericht Nr. 35, 1978

Galois-Theorie in monoidalen Kategorien *)

Thomas S. Ligon

Abstract: The Galois theory of Chase and Sweedler [11], for commutative rings, is generalized to encompass commutative monoids in an arbitrary symmetric, closed, monoidal category with finite limits and colimits. The primary tool is the Morita theory of Pareigis [35,36,37], which also supplies a suitable definition for the concept of a "finite" object in a monoidal category. The Galois theory is then extended by an examination of "normal" sub-Hopf-monoids, and examples in various algebraic and topological categories are considered. In particular, symmetric, closed, monoidal structures on various categories of topological vector spaces are studied with respect to the existence of "finite" objects.

Inhaltsverzeichnis

*) Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades des Fachbereichs Mathematik der Ludwig-Maximilians-Universität München

Einleitung

Unter dem "Hauptsatz der Galois-Theorie" für endliche Körpererweiterungen versteht man im wesentlichen folgende Aussage: Die Fixkörperbildung erzeugt eine bijektive Abbildung zwischen den Untergruppen der Galois-Gruppe und den Zwischenkörpern der Körpererweiterung. Allgemeiner haben Chase, Harrison und Rosenberg [10] im Jahre 1965 eine Galois-Theorie von separablen, kommutativen Ringerweiterungen mit entsprechender Galois-Gruppe von Automorphismen entwickelt. Nach Jacobson [26] kann man anstelle einer separablen Körpererweiterung auch èine rein inseparable vom Exponenten 1 behandeln, wenn man anstelle der Galois-Gruppe (von Automorphismen) eine entsprechende p-Lie-Algebra (von Derivationen) verwendet. In [9] beschreibt Chase wie man, durch Verwendung höherer Derivationen, auch rein inseparable Körpererweiterungen mit höherem Exponenten erfassen kann. All diese Fälle können einheitlich behandelt werden, wenn man die Hopfalgebren-Formulierung benutzt. Hier betrachtet man die von der Galois-Gruppe erzeugte Gruppenalgebra, die p-universelle Hülle der p-Lie-Algebra der Derivationen, oder eine von höheren Derivationen erzeugte Algebra, jeweils mit einer kanonischen Hopfalgebren-Struktur. Diese allgemeine Form der Galois-Theorie für kommutative Ringerweiterungen wurde 1969 in einer Arbeit von Chase und Sweedler [11] behandelt. Das wichtigste Hilfsmittel in dieser Arbeit ist die Morita-Theorie, die alle Äquivalenzen von Modul-Kategorien charakterisiert. Die Galois-Theorie wurde auch auf Schiefkörper und unendliche Körpererweiterungen verallgemeinert, verwendet jedoch andere Techniken, die hier nicht behandelt werden sollen.

Alle bisherigen Galois-Theorien haben eine Einschränkung gemeinsam, nämlich eine Endlichkeits-Bedingung. Bei Chase, Harrison und Rosenberg [10], zum Beispiel, muß die Galois-Gruppe endlich und die Ringerweiterung endlich erzeugt und projektiv sein. In der Arbeit von Chase und Sweedler [11] läßt sich diese Endlichkeits-Bedingung als notwendige Voraussetzung für den Morita-

Satz erkennen. Auch die Theorie von Krull [30] ist nicht frei von dieser Einschränkung, denn es handelt sich dort um injektive bzw. projektive Limites endlicher Objekte.

Wir wollen in dieser Arbeit feststellen, inwieweit der Hauptsatz der Galois-Theorie von den speziellen Eigenschaften der unterliegenden Modul-Kategorie abhängt, und ob der Endlichkeits-Begriff durch einen allgemeineren kategorientheoretischen Begriff ersetzt werden kann. Unter anderem stellt sich dann die Frage, ob sich die Galois-Theorie so verallgemeinern läßt, daß sie auch unendlich dimensionale topologische Algebren und unendliche topologische Gruppen umfaßt. Als unterliegende Kategorie käme hier zum Beispiel die Kategorie der topologischen Vektorräume in Frage. Sie ist nicht abelsch: nicht jeder Monomorphismus (= stetige Injektion) ist auch ein Kern (= relativ offene, stetige Injektion). Da der Begriff "endlich erzeugt und projektiv" für die oben erwähnte Galois-Theorie sehr wichtig ist, fragen wir uns hier, wie man ihn verallgemeinern könnte. Dabei läßt sich der Begriff "projektiv" für beliebige Kategorien formulieren, ist in dieser topologischen Situation aber nicht fruchtbar, denn in Satz (10.9) wird unter anderem gezeigt, daß $\{0\}$ das einzige Kokern-projektive Objekt in der Kategorie der quasivollständigen, tonnelierten Räume ist. (Der Begriff "Kokern-projektiv" ist schwächer als "projektiv".) In dieser Arbeit wollen wir deshalb die Galois-Theorie ohne die vielen Hilfsmitteln der Theorie der Moduln oder der abelschen Kategorien entwickeln.

Eine mögliche gemeinsame Verallgemeinerung von der Theorie der k-Moduln und der Theorie der topologischen Vektorräume, die diese "additive" oder "abelsche" Struktur nicht berücksichtigt, besteht in der Theorie der monoidalen Kategorien. Eine monoidale Kategorie $(\underline{C}, \otimes, I)$ ist eine Kategorie $\underline{C}$, zusammen mit einem "Tensorprodukt", d.h. mit einem Bifunktor $\otimes: \underline{C} \times \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ und einem ausgezeichneten Objekt I derart, daß einige Axiome erfüllt sind, wie $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$ und $A \otimes I \cong A$, siehe z.B. MacLane [31]. Hierfür gibt es sehr viele Beispiele, wie $(\underline{Me}, \times, e)$, $(k\text{-}\underline{Mod}, \otimes_k, k)$ oder $(\underline{Ban}, \hat{\otimes}_\pi, \mathbb{K})$. Ein Monoid in einer solchen Kategorie ist dann nichts anderes als ein klassisches Monoid, eine k-Algebra oder eine Banach-Algebra. In einer monoidalen Kategorie lassen sich alle Grundbegriffe der Galois-Theorie, in der Hopfalgebren-Formulierung von Chase und Sweedler [11] ausdrücken. Außerdem ist die Theorie der monoidalen Kategorien in letzter Zeit um eine Morita-Theorie erweitert worden, in der insbesondere der Begriff "endlich erzeugt und projektiv" eine Verallgemeinerung findet, siehe Pareigis [35,36,37]. Ein k-Modul ist genau dann endlich erzeugt und projektiv, wenn der kanonische Morphismus $A \otimes_k A^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A,A)$ ein Isomorphismus ist. Allgemein nennen wir dann ein Objekt A einer monoidalen Kategorie "endlich", wenn der kanonische Morphismus $A \otimes A^* \longrightarrow [A,A]$ ein Isomorphismus ist, wobei $[-,-]$ den "inneren Hom-Funktor" und A^* das entsprechende "duale Objekt" bezeichnet, siehe Definition (1.4). Falls der kanonische Morphismus $A^* \otimes_{[A,A]} A \longrightarrow I$ auch ein Isomorphismus ist, heißt A "treuprojektiv". Diese Eigenschaft ist notwendig und hinreichend dafür, daß der Funktor $A \otimes - : \underline{C} \longrightarrow {}_{[A,A]}\underline{C}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist, nach der Morita-Theorie, siehe Satz (1.6).

Mit Hilfe der Morita-Theorie von Pareigis (zitiert in Kapitel 1) kann man nun die Arbeit von Chase und Sweedler [11] auf beliebige symmetrische abgeschlossene monoidale Kategorien verallgemeinern (Kapitel 2 und 4). Hierzu ist es notwendig, viele Beweise aus [11] durch neue Beweise zu ersetzen, (im Text wird im einzelnen darauf verwiesen), da Begriffe wie "kurze exakte Folge", "0-Objekt", "Annullator-Ideal" usw. in einer beliebigen monoidalen Kategorie keinen Sinn haben. Wir können jedoch einen großen Teil der Galois-Theorie unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen - als bisher benötigt wurde - entwickeln. Insbesondere wird dadurch gezeigt, daß die Galois-Theorie in großen Teilen völlig unabhängig von jeglicher "additiven Struktur" (abelsche Kategorie) der unterliegenden Kategorie der k-Moduln ist.

Wenn S ein kommutatives Monoid in einer monoidalen Kategorie $\underline{C}$ ist, und A ein kommutatives Hopfmonoid, dessen Dual A^* in geeigneter Weise auf S operiert, dann nennen wir S A-Galoissch über I, falls S treuprojektiv über I ist, und der Morphismus γ: $S \otimes S \longrightarrow S \otimes A$ ein Isomorphismus ist, siehe Definition (2.2). Beispiel (2.3) erläutert diese Bedingung für den Fall, daß S eine Körpererweiterung von I ist. In Satz (2.11) zeigen wir, daß diese Bedingung dazu äquivalent ist, daß φ: $S \# A^* \rightarrow [S,S]$ ein Isomorphismus ist. In Satz (2.17) wird eine dritte Charakterisierung des Begriffs "Galoissch" angegeben, diesmal mittels des Fixobjekts der A*-Operation und der kanonischen Morphismen eines Morita-Kontextes.

In Kapitel 3 wird eine abgeschwächte Frobenius-Eigenschaft für endliche Hopfmonoide H bewiesen, nämlich, daß ein Objekt P existiert, mit $H^* \cong P \otimes H$ in $\underline{C}_H$. Im Gegensatz zum Modulfall wissen wir hier nur, daß P endlich ist und nicht, daß es "Rang 1" hätte.

Kapitel 4 befaßt sich mit Untermonoiden eines Galoisschen Monoides S. Hier wird der "Hauptsatz der Galois-Theorie", Satz (4.11), bewiesen. Er liefert eine ordnungsumkehrende Injektion von dem Verband der (in $\underline{C}$ zerfallenden) Unterhopfmonoide von A* in den Verband der (in $\underline{C}$ zerfallenden) Untermonoide von S.

Diese Verallgemeinerung der Galois-Theorie ist auch als Axiomatisierung aufzufassen, wie sie die Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts geprägt hat. Der Gruppenbegriff, zum Beispiel, wurde anhand von gewissen Mengen von Transformationen in der Geometrie entdeckt, aber erst die axiomatische Formulierung als Menge mit Verknüpfung hat es ermöglicht, Gruppenstrukturen allgemein zu studieren und universell anzuwenden. Ein anderes Beispiel liefert die Theorie der abelschen Kategorien. Diese Theorie, die die "additive" Struktur von Modulkategorien untersucht, ist eine angemessene Grundlage für die homologische Algebra und fand eine Berechtigung in der Entdeckung, daß Garbenkategorien oft abelsch sind, auch wenn sie zu keiner Modulkategorie isomorph sind. In ähnlicher Weise kann man die Theorie der monoidalen Kategorien als Studium der "multiplikativen" Struktur, die unter anderem auch Modulkategorien besitzen, auffassen. Somit ist die vorliegende Arbeit eine Entwicklung der Galois-Theorie auf der Basis einer "multiplikativen Struktur", ohne Hilfe einer "additiven Struktur".

Die allgemeine Galois-Theorie in monoidalen Kategorien wird dann in Kapitel 5 weitergeführt, indem wir "normale" Unterhopfmonoide untersuchen. Hier sind auch Aussagen zu finden, die im Spezialfall der Modultheorie noch nicht bewiesen waren. Sei H' eine Unterhopfalgebra einer endlichen kokommutativen Hopfalgebra H und sei $H'^{+} = Ke(\varepsilon_{H'})$ (d.h. deren Augmentationsideal). In Satz (5.3) (siehe auch Bemerkung (5.4)) zeigen wir, daß H' genau dann normal in H im Sinne von Newman [33] (d.h. $HH'^{+} = H'^{+}H$) ist, wenn für alle $a \in H$, $b \in H'$ folgt, daß $a_1 b\lambda(a_2) \in H'$ ist. Für den Fall eines Gruppenrings (bzw. einer Hülle einer Lie-Algebra) reduziert sich diese letzte Bedingung auf die Definition eines Normalteilers (bzw. eines Lie-Ideals), siehe Lemma (7.6). In Satz (5.5) zeigen wir dann, daß das Fixmonoid eines normalen Unterhopfmonoids wieder Galoissch ist.

Nachdem die Galois-Theorie auf monoidale Kategorien verallgemeinert ist, wird sie in verschiedenen Spezialfällen untersucht. Die Konstruktionen in Kapitel 6 lassen sich in bestimmten Fällen als Moduln mit zusätzlichen Strukturen auffassen; die Galois-Theorie betrifft dann Galoissche Objekte, die eine weitere Struktur besitzen. In einem Fall kommen gerade die normalen Objekte heraus, siehe Lemma (6.9) und Folgerung (6.10). Kapitel 7 untersucht die Spezialisierung auf den klassischen Fall der Galois-Theorie von Ringen und Körpern. Die Beispiele in diesen Kapiteln zeigen die Reichweite der allgemeinen Theorie in "rein algebraischen" Fällen.

Die andere wesentliche Spezialisierung, die wir untersuchen, ist die auf den "topologischen Fall", d.h. auf die Situation, in der die unterliegende Kategorie $\underline{C}$ eine geeignete Kategorie von topologischen Vektorräumen ist. In den Kapiteln 8 bis 11 werden Kategorien von topologischen Vektorräumen auf die Frage hin untersucht, inwieweit interessante Beispiele von "endlichen" Objekten im Sinne von Definition (1.4) (d.h., daß der kanonische Morphismus $E \otimes E^* \longrightarrow [E,E]$ ein Isomorphismus ist) existieren. Die Aussagen basieren auf bekannten Eigenschaften der entsprechenden Räume, sind aber in der angegebenen Formulierung, die durch unsere Fragestellung bedingt ist, sonst nirgends in der Literatur zu finden. Dazu müssen wir zuerst wissen, welche dieser Kategorien symmetrisch und abgeschlossen monoidal sind. Dabei wollen wir ein "endliches" Objekt in einer solchen Kategorie erst dann als interessant betrachten, wenn es unendlich-dimensional ist. Daß diese Untersuchung sinnvoll ist, liegt in den folgenden Tatsachen begründet:

1) Der Begriff "endlich" ist eine Verstärkung des Begriffs "reflexiv" (siehe Lemma (3.6)). Bekanntlich existieren viele reflexive, unendlich dimensionale topologische Vektorräume.

2) Die Kategorie der Banach-Räume ist bekanntlich symmetrisch und abgeschlossen monoidal mit dem vervollständigten projektiven Tensorprodukt. Hier sind die "endlichen" Objekte aber ganau alle endlich dimensionalen Banach-Räume (siehe Beispiel (8.9) und Satz (8.10).)

3) Für fast alle wichtigen nuklearen Räume E, insbesondere für alle Fréchet-nuklearen Räume, gilt der folgende kanonische Isomorphismus: $E \hat{\otimes} E'_\beta \longrightarrow \mathcal{L}_\beta(E,E)$, siehe Köthe [29].

Um, diesen Hinweisen folgend, "endliche" Objekte zu suchen, müssen wir zuerst möglichst viele topologische Tensorprodukte von nicht notwendig normierten topologischen Vektorräumen beschreiben, siehe Kapitel 8. Dies erfolgt am zweckmäßigsten mit dem Begriff der Hypostetigkeit. Dadurch wird es möglich, sowohl viele Topologien auf dem algebraischen Tensorprodukt als auch die entsprechenden "Abschlußfunktoren" [E,-] auf direktem Wege zu konstruieren. Insbesondere müssen wir nicht auf den Freydschen Satz über die Existenz von adjungierten Funktoren zurückgreifen, wie es U. Seip [47] für die Kategorie der kompaktbestimmten Räume tut.

Bei dieser Untersuchung erwies sich ein Verträglichkeits-Satz von S. Dierolf [15] als sehr nützlich. In Kapitel 9 beweisen wir eine verallgemeinerte Version dieses Satzes, sowie neue Anwendungen. Sei L ein Epireflektor und R ein Monokoreflektor; dann gilt: $LRL = RL \iff RLR = LR$.

In Kapitel 10 betrachten wir eine der für die Analysis wichtigsten Kategorien topologischer Vektorräume, die der quasivollständigen, tonnelierten Räume. Wir zeigen, daß sie symmetrisch und abgeschlossen monoidal ist, eine Eigenschaft, die für diese Kategorie in der Literatur nicht behandelt wird. Es ist aber gerade diese Eigenschaft, die zur Untersuchung der kompaktbestimmten (bzw. folgenvollständigen, kompaktbestimmten) Räume geführt hat, siehe z.B. Dubuc und Porta [18] und [19]. Nach Seip [47] ist es auch diese Eigenschaft, die es möglich macht, das Differentialkalkül für nicht normierte Räume zu entwickeln.

Kapitel 11 behandelt andere Kategorien, die in analoger Weise konstruiert werden, insbesondere die oben erwähnten kompaktbestimmten Räume. Schließlich werden in den Kapiteln 10 und 11 Beispiele von konkreten topologischen Vektorräumen diskutiert, um Aufschluß über die Eigenschaft "endlich" zu gewinnen. Hier stellt sich heraus, daß die wichtigsten und bekannten unendlich dimensionalen Räume nicht "endlich" in unserem Sinne sind. Diese Untersuchung wirft damit viel Licht auf eine Frage, die für die Theorie der monoidalen Kategorien wichtig ist, bringt aber keine neuen Aussagen in der Theorie der topologischen Algebren.

Meinem Betreuer bei dieser Arbeit, Herrn Prof. Dr. B. Pareigis, möchte ich für viele anregende und kritische Diskussionen danken. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. W. Roelcke und Frau Dr. S. Dierolf.

1. Bezeichnung und Morita-Sätze in monoidalen Kategorien

In diesem Kapitel werden zunächst die allgemeine Bezeichnung und Begriffsbildung für das Folgende festgelegt. Dann werden einige Ergebnisse aus der Morita-Theorie, die nachher wesentlich benutzt wird, zitiert.

(1.1) Bezeichnung $(\underline{C}, \otimes, I)$ bezeichnet eine monoidale Kategorie $\underline{C}$, mit Bifunktor $\otimes$ und neutralem Objekt I, wie in MacLane [31] und Pareigis [35]. Wir nehmen weiterhin an, daß $\underline{C}$ symmetrisch ist, mit funktoriellem Isomorphismus $\tau: A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$. $\underline{C}$ soll auch abgeschlossen sein, und $[M,-]$ bezeichnet den zu $- \otimes M$ rechtsadjungierten Funktor, wobei M^* eine Abkürzung für $[M,I]$ ist. Auf jeden Fall wird auch angenommen, daß $\underline{C}$ Differenzkerne und -kokerne besitzt, um die erforderlichen Konstruktionen durchführen zu können. Ein Monoid A, mit Multiplikation ∇ und Einheit η wird genauso definiert wie ein Monoid in $(Me, \times, \{e\})$ oder eine assoziative, unitäre Algebra in $(k\text{-Mod}, \otimes_k, k)$. Die Einheit $\eta_A \in \underline{C}(I,A)$ wird auch manchmal mit 1_A bezeichnet. Dual zu (A, ∇, η) definiert man ein Komonoid (C, Δ, ε). Hopfmonoide, mit Antipode λ, werden so definiert wie Hopfalgebren in $(k\text{-Mod}, \otimes_k, k)$. $\underline{\text{MonC}}$ (bzw. $\underline{\text{CMonC}}$, $\underline{\text{KomonC}}$, $\underline{\text{HopfmonC}}$, $\underline{\text{CHopfmonC}}$) bezeichnet die Kategorie der Monoide (bzw. kommutativen Monoide, Komonoide, Hopfmonoide, kommutativen (nicht notwendig kokommutativen) Hopfmonoide) in $\underline{C}$. Für $A \in \underline{\text{MonC}}$ wird ein A-Linksobjekt so definiert, wie eine A-Menge in $(Me, \times, \{e\})$ oder ein A-Linksmodul in $(k\text{-Mod}, \otimes_k, k)$. Dual dazu definieren wir, für $C \in \underline{\text{KomonC}}$, ein C-Linkskoobjekt. Die Kategorie der A-Linksobjekte (bzw. A-Rechtsobjekte, C-Linkskoobjekte, C-Rechtskoobjekte) wird bezeichnet mit ${}_A\underline{C}$

(bzw. $\underline{C}_A$, ${}^C\underline{C}$, $\underline{C}^C$). Wir benutzen auch die <u>elementweise Notation</u> von Pareigis [35], mit $A(X) := \underline{C}(X,A)$ für $A,X \in \underline{C}$. Ein Morphismus $h \in \underline{C}(A,B)$ heißt <u>rational surjektiv</u>, falls $h(I)\colon A(I) \longrightarrow B(I)$ surjektiv ist.

<u>(1.2) Definition</u> Ein <u>Morita-Kontext</u> (A,B,P,Q,f,g) besteht aus:

(a) $A, B \in \underline{\mathrm{Mon}C}$,

(b) $P \in {}_A\underline{C}_B$, $Q \in {}_B\underline{C}_A$,

(c) $f \in {}_A\underline{C}_A(P \otimes_B Q, A)$, $g \in {}_B\underline{C}_B(Q \otimes_A P, B)$, und

(d) zwei kommutativen Diagrammen:

$$\begin{tikzcd} P \otimes_B Q \otimes_A P \arrow[r, "f \otimes_A id_P"] \arrow[d, "id_P \otimes_B g"'] & A \otimes_A P \arrow[d, "\wr\wr"] \\ P \otimes_B B \arrow[r, "\cong"] & P \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Q \otimes_A P \otimes_B Q \arrow[r, "g \otimes_B id_Q"] \arrow[d, "id_Q \otimes_A f"'] & B \otimes_B Q \arrow[d, "\wr\wr"] \\ Q \otimes_A A \arrow[r, "\cong"] & Q. \end{tikzcd}$$

<u>(1.3) Definition</u> Sei $B \in \underline{\mathrm{Mon}C}$, $P \in \underline{C}_B$. $({}_B[P,P], B, P, {}_B[P,B], \tilde{f}, \tilde{g})$ heißt <u>kanonischer Morita-Kontext</u>, mit $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ definiert durch:

$$\begin{array}{ccc} {}_B\underline{C}_{{}_B[P,P]}({}_B[P,B], {}_B[P,B]) & \cong & {}_B\underline{C}_B({}_B[P,B] \otimes_{{}_B[P,P]} P, B) \\ \omega & & \omega \\ id_{{}_B[P,B]} & \longmapsto & \tilde{g} \end{array}$$

$${}_{{}_B[P,P]}\underline{C}_B(P \otimes_B {}_B[P,B] \otimes_{{}_B[P,P]} P, P) \ni id_P \otimes_B \tilde{g} \longmapsto$$

$$\tilde{f} \in {}_{{}_B[P,P]}\underline{C}_{{}_B[P,P]}(P \otimes_B {}_B[P,B], {}_B[P,P]), \quad \text{d.h.}$$

$\tilde{g}(q \otimes p) = q\langle p\rangle$ und $\tilde{f}(p' \otimes q')\langle p''\rangle = p'(q'\langle p''\rangle)$

$\bigwedge X, Y, Z \in \underline{C}$, $q \otimes p \in ({}_B[P,B] \otimes_{{}_B[P,P]} P)(X)$,

$p' \otimes q' \in (P \otimes_B {}_B[P,B])(Y)$, $p'' \in P(Z)$.

Diese Bezeichnung, wie auch die nächste Definition, enthält einen Seitenwechsel gegenüber der Schreibweise von Pareigis [35]. Wir müssen $[M,-]$ als rechtsadjungiert zu $- \otimes M$ betrachten, und nicht zu $M \otimes -$, können uns aber der üblichen Schreibweise in der Galois-Theorie leichter anpassen. Wir haben jetzt einen kanonischen Morphismus $kan: [M,N] \otimes M \longrightarrow N: f \otimes m \longmapsto f\langle m\rangle$ und schreiben sowohl Morphismen als auch E[illegible]ente von $[M,A](X)$ links von den Argumenten.

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}([M,N], [M,N]) & \cong & \underline{C}([M,N] \otimes M, N) \\ \text{id} & \longmapsto & \text{kan}. \end{array}$$

<u>(1.4) Definition</u> Sei $B \in \underline{MonC}$, $P \in \underline{C}_B$. P heißt

(a) <u>endlich über B</u>, falls $\tilde{f}$ aus (1.3) ein Isomorphismus ist,

(b) <u>endlich erzeugt projektiv über B</u>, falls
$$P \otimes {}_B[P,B] \xrightarrow{kan} P \otimes_B {}_B[P,B] \xrightarrow{\tilde{f}} {}_B[P,P]$$
rational surjektiv ist,

(c) <u>treuprojektiv über B</u>, falls P endlich ist und $\tilde{g}$ aus (1.3) ein Isomorphismus ist,

(d) ein <u>Progenerator über B</u>, falls P endlich erzeugt projektiv über B ist, und
$${}_B[P,B] \otimes P \xrightarrow{kan} {}_B[P,B] \otimes_{{}_B[P,P]} P \xrightarrow{\tilde{g}} B$$
rational surjektiv ist.

<u>(1.5) Lemma</u> Falls I Kokern-projektiv in $\underline{C}$ ist, sind die Begriffe "endlich über B", und "endlich erzeugt projektiv über B", sowie "treuprojektiv über B" und "Progenerator über B" zueinander äquivalent.

<u>Beweis</u> Nach Pareigis [37], 5.3 ist $\tilde{f}$ genau dann ein Isomorphismus, wenn es rational surjektiv ist. Da kan ein

Kokern ist, ist $\mathrm{kan}(I)\colon (P \otimes {}_B[P,B])(I) \longrightarrow$

$\longrightarrow (P \otimes_B {}_B[P,B])(I)$ surjektiv, falls I Kokern-projektiv ist.

Der folgende Satz wurde in Pareigis [37], 5.1, 5.2, 5.3 und 5.4 bewiesen.

(1.6) Satz (Morita-Pareigis) Sei $(\underline{C}, \otimes, I)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie und (A,B,P,Q,f,g) ein Morita-Kontext in $\underline{C}$. Dann gilt:

(a) f und g sind genau dann rational surjektiv, wenn P treuprojektiv über A, und Q treuprojektiv über B ist.

(b) Falls f (bzw. g) rational surjektiv ist, ist f (bzw. g) ein Isomorphismus.

(c) Falls f und g rational surjektiv sind, gilt:

(i) man hat kanonische Isomorphismen:

$P \xrightarrow{\cong} {}_B[Q,B]$ in ${}_A\underline{C}_B$,

$Q \xrightarrow{\cong} {}_A[P,A]$ in ${}_B\underline{C}_A$,

$A \xrightarrow{\cong} {}_B[Q,Q]$ in ${}_A\underline{C}_A$ und in $\underline{\mathrm{MonC}}$,

$B \xrightarrow{\cong} {}_A[P,P]$ in ${}_B\underline{C}_B$ und in $\underline{\mathrm{MonC}}$, und

(ii) $P \otimes -\colon {}_B\underline{C} \longrightarrow {}_A\underline{C}$ und $Q \otimes -\colon {}_A\underline{C} \longrightarrow {}_B\underline{C}$ sind zueinander inverse Äquivalenzen von Kategorien.

(1.7) Bemerkung Da wir voraussetzen, daß $\underline{C}$ abgeschlossen ist, erhält $P \otimes -$ Kokerne, und auch das Tensorieren über einem Monoid ist assoziativ, wie in Definition (1.2) benutzt wurde. Ohne die Abgeschlossenheit von $\underline{C}$ ist die Situation komplizierter, siehe Pareigis [37].

2. Der Begriff "Galoissch"

Falls S ein Monoid ist, auf das ein Hopfmonoid A* in geeigneter Weise operiert, definieren wir den Begriff "S ist A-Galoissch über I" so, daß er mit dem klassischen Begriff übereinstimmt. In Satz (2.11) wird eine andere Charakterisierung angegeben, und Satz (2.17) beschreibt den Begriff mittels eines Morita-Kontextes.

Die folgende Definition entspricht der einer "A*-Modul-Algebra" in Sweedler[50], Seite 153 bzw. eines "A-Objekts" in Chase und Sweedler [11], Seite 55.

(2.1) Definition Sei $S \in \underline{\text{MonC}}$, $A \in \underline{\text{HopfmonC}}$, $\alpha \in \underline{C}(S, S \otimes A)$ und $\beta \in \underline{C}(A^* \otimes S, S)$.

(a) S heißt A*-Objekt-Monoid, falls

(i) $(S, \beta) \in {}_{A^*}\underline{C}$, siehe (1.1), und

(ii) $\beta(x \otimes ss') = \beta(x_1 \otimes s)\beta(x_2 \otimes s')$ und

$\beta(x \otimes 1) = \varepsilon(x)\, 1_S \quad \bigwedge X, Y, Z \in \underline{C}$, $x \in A^*(X)$, $s \in S(Y)$, $s' \in S(Z)$.

(b) S heißt A-Koobjekt-Monoid, falls

(i) $(S, \alpha) \in \underline{C}^A$, siehe (1.1), und

(ii) $\alpha \in \underline{\text{MonC}}(S, S \otimes A)$.

Wie in Chase und Sweedler [11], Seite 138 sieht man, daß die Definitionen (a) und (b) zueinander äquivalent sind, falls A endlich ist, und α und β sich unter dem folgenden Isomorphismus entsprechen:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{C}(S, S \otimes A) & \cong & \underline{C}(S, [A^*, S]) & \cong & \underline{C}(A^* \otimes S, S) \\ \alpha & & \longmapsto & & \beta \end{array}$$

(2.2) Definition Sei $S \in \underline{\text{MonC}}$, $A \in \underline{\text{HopfmonC}}$ und (S, α) ein A-Koobjekt-Monoid.

(a) Sei $\gamma := (\nabla_S \otimes id_A)(id_S \otimes \alpha) \in$ <u>MonC</u>$(S \otimes S, S \otimes A)$,

d.h. $\gamma(x \otimes y) = xy_1 \otimes y_2 \bigwedge X, Y \in \underline{C}, x \in S(X), y \in S(Y)$

wenn man $\alpha(y) = y_1 \otimes y_2$ setzt.

(b) S heißt <u>A-Galoissch über I</u>, falls

(i) S ist treuprojektiv über I, und

(ii) γ ist ein Isomorphismus in $\underline{C}$.

<u>(2.3) Beispiel</u> Sei K ein Körper, $\underline{C}$ = K-Mod, und S eine endlich dimensionale Körpererweiterung von K.

(a) Sei G eine endliche Gruppe und $A^* :=$ KG die Gruppenalgebra. Dann ist S genau dann ein A^*-Objekt-Monoid, wenn G auf S durch Automorphismen operiert, siehe Sweedler [50], Seite 139. Da S endlich dimensionaler K-Vektorraum ist, ist S ein Progenerator (treuprojektiv) in K-Mod. S ist genau dann A-Galoissch über K, wenn es eine separable Galoissche Körpererweiterung mit Galois-Gruppe G im klassischen Sinne ist, siehe Sweedler [50], Theorem (10.2.1) und Bourbaki [2], (V.10).

(b) Sei charK = p und L eine endlich dimensionale p-Lie-Algebra über K. $A^* = U^{[p]}(L)$ bezeichne die p-universelle Hülle von L. Dann ist S genau dann ein A^*-Objekt-Monoid, wenn L auf S durch Derivationen operiert, siehe Sweedler [50], Seite 139. S ist genau dann A-Galoissch über K, wenn es eine rein inseparable Galoissche Körpererweiterung von K mit Derivationsalgebra L im Sinne von Jacobson [26], Seite 186 ist, siehe auch Sweedler [50], (10.2.1).

(c) Sei jetzt K nur ein kommutativer Ring, S eine kommutative Ringerweiterung von K und G eine endliche Gruppe. Analog zu (a) ist nun S genau dann A-Galoissch über K, wenn es der Definition von Chase, Harrison und Rosenberg [10] entspricht.

Das folgende Lemma, das wir für den nächsten Satz benötigen, entspricht der Aussage, daß ein Modul, der einen Epimorphismus auf den Grundring zulässt, ein Generator ist.

<u>(2.4) Lemma</u> Seien $A \in \underline{\mathrm{Mon}C}$, $P \in {}_A\underline{C}$ und sei $h \in {}_A\underline{C}(P,A)$ rational surjektiv. Dann ist $\tilde{g} \in {}_A\underline{C}_A({}_A[P,A] \otimes P,\ A)$ aus (1.3) rational surjektiv.

<u>Beweis</u> Seien h' und $\bar{h}$ definiert durch:

$$\begin{array}{ccccccc} {}_A\underline{C}(P,A) & \cong & {}_A\underline{C}(P \otimes I,\ A) & \cong & \underline{C}(I,\ {}_A[P,A]) & = & {}_A[P,A](I) \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & & & & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ h & & \longmapsto & & & & h' \end{array}$$

$\bar{h}\colon P(I) \longrightarrow A(I)\colon \bar{h}(p) = h\ p.$

Nach Voraussetzung ist $\bar{h}$ surjektiv, also existiert ein $p \in P(I)$ mit $h\ p = \bar{h}(p) = 1_A$. Dann ist $h' \otimes p \in ({}_A[P,A] \otimes P)(I)$ und es gilt: $\tilde{g}(h' \otimes p) = h'\langle p\rangle =$ $= h\ p = 1_A$, also ist $\tilde{g}$ rational surjektiv.

<u>(2.5) Satz</u> Seien $A \in \underline{\mathrm{Hopfmon}C}$, A endlich über I und $\alpha := \Delta$. Dann ist A A-Galoissch über I.

<u>Beweis</u> Aus der Definition eines Hopfmonoides folgt sofort, daß A ein A-Koobjekt-Monoid ist. Da die Koeinheit $\varepsilon \in \underline{C}(A,I)$ eine Retraktion der Einheit $\eta \in \underline{C}(I,A)$ ist, ist sie rational surjektiv. Aus dem letzten Lemma (2.4) folgt dann, daß A treuprojektiv über I ist. Wenn λ die Antipode von A bezeichnet, ist

$\vartheta := (\nabla \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \lambda \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Delta) \in \underline{C}(A \otimes A,\ A \otimes A)$

ein zweiseitiges Inverses zu γ, wie man folgendermaßen sieht: $\vartheta\,\gamma = (\nabla\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\lambda\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\nabla\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta)$

$= (\nabla\otimes\mathrm{id})(\nabla\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\lambda\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta)(\mathrm{id}\otimes\Delta)$

$= (\nabla\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\nabla\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\lambda\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta)$

$= (\nabla\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\eta\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta) = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}).$

$\gamma\,\vartheta = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})$ analog.

Die folgende Definition eines Fixobjektes wird nachher sehr häufig benutzt.

<u>(2.6) Definition</u> Sei $A \in \underline{\text{HopfmonC}}$, A endlich über I und $(M,\alpha) \in \underline{C}^A$. Das <u>Fixobjekt</u> M^{A^*} ist der Differenzkern des folgenden Paares:

$$M^{A^*} \longrightarrow M \underset{id \otimes \eta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M \otimes A.$$

<u>(2.7) Beispiel</u> Sei K ein kommutativer Ring, $\underline{C}$ = K-Mod, G eine endliche Gruppe, $A^* = KG$ und β wie in (2.1). Dann gilt: $M^{A^*} = \{x \in M|\ \alpha(x) = x \otimes 1_A\} =$
$\{x \in M|\ \beta(y \otimes x) = \varepsilon(y)x \bigwedge y \in A^*\} =$
$\{x \in M|\ \beta(g \otimes x) = x \bigwedge g \in G\}$.

<u>(2.8) Satz</u> Sei $S \in \underline{\text{MonC}}$, $A \in \underline{\text{HopfmonC}}$ und S A-Galoissch über I. Dann ist $S^{A^*} = I$.

<u>Beweis</u> (a) <u>Behauptung</u> $I \xrightarrow{\eta} S \underset{id \otimes \eta}{\overset{\eta \otimes id}{\rightrightarrows}} S \otimes S$ ist ein Differenzkern-Diagramm.

Nach Anwendung von $S \otimes -$ bekommen wir:

$$S \xrightarrow{id \otimes \eta} S \otimes S \underset{id \otimes id \otimes \eta}{\overset{id \otimes \eta \otimes id}{\rightrightarrows}} S \otimes S \otimes S.$$

Dieses ist ein Differenzkern-Diagramm in $[S,S]^{\underline{C}}$, denn, $\bigwedge s_1 \otimes s_2 \in (S \otimes S)(X)$ mit $s_1 \otimes 1 \otimes s_2 =$
$= (id \otimes \eta \otimes id)(s_1 \otimes s_2) = (id \otimes id \otimes \eta)(s_1 \otimes s_2) =$
$= s_1 \otimes s_2 \otimes 1$ gilt, nach Anwendung von $\nabla \otimes id$, :
$s_1 \otimes s_2 = s_1 s_2 \otimes 1 \in (1 \otimes \eta)S(X)$. Da S treuprojektiv über I ist, ist $S \otimes -: \underline{C} \longrightarrow [S,S]^{\underline{C}}$ eine Kategorienäquivalenz nach (1.6), reflektiert also Differenzkerne, woraus die Behauptung folgt.

(b) Da $\gamma \in \underline{C}(S \otimes S, S \otimes A)$ ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung des Satzes aus (a) und der Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "id \otimes \eta"'] \arrow[d, equal] & S \otimes A \\
S \arrow[r, shift left, "\eta \otimes id"] \arrow[r, shift right, "id \otimes \eta"'] & S \otimes S. \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

Ein semidirektes Produkt für Hopfalgebren, das sich im Spezialfall auf die Gruppenalgebra eines semidirekten Produktes von Gruppen reduziert, wurde von Sweedler [50] behandelt. Für eine etwas allgemeinere Definition, in beliebigen symmetrischen, monoidalen Kategorien, wurden die entsprechenden Beweise (Unitarität, Assoziativität) von E. Wach [53] durchgeführt. Deshalb begnügen wir uns hier mit einer Definition.

<u>(2.9) Definition</u> Sei $S \in$ <u>MonC</u>, $A^* \in$ <u>HopfmonC</u> und S ein A^*-Objekt-Monoid.

(a) Das <u>semidirekte</u> oder <u>smash</u> <u>Produkt</u> $S \# A^*$ ist das Objekt $S \otimes A^*$ zusammen mit den folgenden Strukturmorphismen: $\eta := \eta_S \otimes \eta_{A^*} \in \underline{C}(I, S \otimes A^*)$ und
$\nabla \in \underline{C}(S \otimes A^* \otimes S \otimes A^*, S \otimes A^*)$ mit
$\nabla := (\nabla_S \otimes \nabla_{A^*})(id\otimes\beta\otimes id\otimes id)(id\otimes id\otimes\tau\otimes id)(id\otimes\Delta_{A^*}\otimes id\otimes id)$
d.h. $(x \otimes u)(y \otimes v) = xu_1(y) \otimes u_2 v \ \bigwedge X, Y \in \underline{C}$,
$x \otimes u \in (S \otimes A^*)(X)$, $y \otimes v \in (S \otimes A^*)(Y)$.

(b) In dieser Situation definieren wir auch den kanonischen Morphismus $\varphi \in \underline{\text{MonC}}(S \# A^*, [S,S])$ durch

$$\begin{array}{ccc}
\underline{C}(S \otimes A^* \otimes S, S) & \cong & \underline{C}(S \otimes A^*, [S,S]) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\nabla_S(id \otimes \beta) & \longmapsto & \varphi
\end{array}$$

d.h. $(\varphi(s \otimes u))\langle t\rangle = su(t) = s\beta(u \otimes t) \ \bigwedge X, Y \in \underline{C}$,
$s \otimes u \in (S \otimes A^*)(X)$, $t \in S(Y)$.

Für den nächsten Satz brauchen wir zunächst noch ein

Lemma, das in der Modultheorie bekannt ist.

<u>(2.10) Lemma</u> Seien $S \in \underline{\mathrm{CMonC}}$, S endlich über I, $A, B \in {}_S\underline{C}$, A, B endlich über S, $h \in {}_S\underline{C}(A, B)$ und sei ${}_S[h, \mathrm{id}_S]: {}_S[B, S] \longrightarrow {}_S[A,S]$ ein Isomorphismus. Dann ist auch h ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u> $\bigwedge X \in {}_S\underline{C}$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
({}_S[B,S] \otimes_S X)(I) \arrow[r, "({}_S[h,\mathrm{id}_S] \otimes_S \mathrm{id}_X)(I)"] \arrow[d, "\wr\!\!|"] & ({}_S[A,S] \otimes_S X)(I) \arrow[d, "\wr\!\!|"] \\
{}_S[B, S \otimes_S X](I) \arrow[d, "\wr\!\!|"] & {}_S[A, S \otimes_S X](I) \arrow[d, "\wr\!\!|"] \\
{}_S[B, X](I) \arrow[d, "\wr\!\!|"] & {}_S[A, X](I) \arrow[d, "\wr\!\!|"] \\
{}_S\underline{C}(B, X) \arrow[r, "{}_S\underline{C}(h, \mathrm{id}_X)"] & {}_S\underline{C}(A, X)
\end{tikzcd}$$

Die oberen vertikalen Pfeile sind Isomorphismen wegen Pareigis [39], Theorem 1.2b, und die unteren wurden im Beweis von (2.4) explizit angegeben. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt dann, daß ${}_S\underline{C}(h, \mathrm{id}_X)$ ein Isomorphismus ist, und schließlich auch h, wegen des Yoneda-Lemmas.

<u>(2.11) Satz</u> Sei $A \in \underline{\mathrm{HopfmonC}}$, A endlich über I und S ein A-Koobjekt-Monoid, $S \in \underline{\mathrm{CMonC}}$. Dann sind äquivalent:

(a) S ist A-Galoissch über I.

(b) S ist treuprojektiv über I und $\varphi \in \underline{\mathrm{MonC}}(S \# A^*, [S,S])$ ist ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u> <u>"(a) ==> (b)"</u> Definiere einen Isomorphismus h:

$$\begin{tikzcd}
S \# A^* \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\xi"', "\wr\!\!|"] & S \otimes S^* \arrow[r, "\Upsilon", "\cong"'] \arrow[d, "\eta"', "\wr\!\!|"] & {[S,S]} \arrow[dl, "\vartheta"', "\cong"] \\
{}_S[S \otimes A, S] \arrow[r, "{}_S[\gamma, \mathrm{id}_S]", "\cong"'] & {}_S[S \otimes S, S] &
\end{tikzcd}$$

Da S endlich ist, ist $\tilde{\gamma}$ ein Isomorphismus, und folglich auch $\varphi = \tilde{\gamma}h$. Die Gleichheit sieht man folgendermaßen:

$(\vartheta\tilde{\gamma}(s \otimes v))\langle t \otimes t'\rangle = t(\tilde{\gamma}(s \otimes v))\langle t'\rangle = tsv\langle t'\rangle =$

$= (\eta(s \otimes v))\langle t \otimes t'\rangle$, also ist $\vartheta\tilde{\gamma} = \eta$.

$(\vartheta\varphi(s \otimes u))\langle t \otimes t'\rangle = t(\varphi(s \otimes u))\langle t'\rangle = ts\beta(u \otimes t') =$

$= ts(id_S \otimes u)\alpha(t') = ts\alpha_1(t')u\langle\alpha_2(t')\rangle$.

$({}_S[\gamma, id_S]\xi(s \otimes u))(t \otimes t') = (\xi(s \otimes u)\gamma)(t \otimes t') =$

$= \xi(s \otimes u)\langle t\alpha_1(t') \otimes \alpha_2(t')\rangle = t\alpha_1(t')su\langle\alpha_2(t')\rangle$.

Wegen S kommutativ ist also $\vartheta\varphi = {}_S[\gamma, id_S]\xi$. Dann ist

$\tilde{\gamma}h = \tilde{\gamma}\eta^{-1}{}_S[\gamma, id_S]\xi = \tilde{\gamma}\eta^{-1}\vartheta\varphi = \varphi$.

"(b) ==> (a)" Da $\tilde{\gamma}$ und $\varphi = \tilde{\gamma}h$ Isomorphismen sind, ist auch h und folglich auch ${}_S[\gamma, id_S]$ ein Isomorphismus. Jetzt folgt aus dem letzten Lemma (2.10), daß auch γ ein Isomorphismus ist.

Nachdem wir jetzt den Begriff "A-Galoissch über I" entweder durch γ oder durch φ ausdrücken können, steuern wir eine andere Charakterisierung and, bei der die Morita-Sätze wesentlich eingehen, und die im Beweis des Hauptsatzes sehr nützlich sein wird. Dazu dienen die folgenden Konstruktionen.

(2.12) Definition Seien $S \in$ MonC, $A \in$ HopfmonC, A endlich über I, S ein A*-Objekt-Monoid, und sei $S^{A^*} = I$. Dann definieren wir:

$D := S \# A^*$, $\qquad Q := D^{A^*}$,

$\psi := \nabla_S(id_S \otimes \beta) \in \underline{C}(S \otimes A^* \otimes S, S) = \underline{C}(D \otimes S, S)$,

$f := \nabla_D(j_S \otimes j_Q) \in {}_D\underline{C}_D(S \otimes Q, D)$ und

$g := \psi(j_Q \otimes id_S) \in \underline{C}(Q \otimes_D S, I)$, wobei

$j_S\colon S \longrightarrow D$ und $j_Q\colon Q \longrightarrow D$ die kanonischen Inklusionen sind. g ist wohldefiniert wegen $Q = D^{A^*}$ und $S^{A^*} = I$.

(2.13) Bemerkung ψ aus (2.12) und φ aus (2.9) sind folgendermaßen verwandt:

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}(D, [S,S]) & \cong & \underline{C}(D \otimes S, S), \text{ d.h.} \\ \varphi & \longmapsto & \psi \end{array}$$

$$(\varphi(d))\langle s\rangle = \psi(d \otimes s) \quad \bigwedge X,Y \in \underline{C},\ d \in D(X),\ s \in S(Y).$$

(2.14) Lemma (D, I, S, Q, f, g) ist ein Morita-Kontext.

Beweis Wir müssen nur die Kommutativität der folgenden zwei Diagramme nachweisen:

$$\begin{tikzcd} S \otimes Q \otimes_D S \arrow[r, "id_S \otimes g"] \arrow[d, "f \otimes_D id_S"'] & S \otimes I \arrow[d, "\cong"] \\ D \otimes_D S \arrow[r, "\cong"] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q \otimes_D S \otimes Q \arrow[r, "id_Q \otimes_D f"] \arrow[d, "g \otimes id_Q"'] & Q \otimes_D D \arrow[d, "\cong"] \\ I \otimes Q \arrow[r, "\cong"] & Q \end{tikzcd}$$

Seien nun $X,Y \in \underline{C}$, $s \otimes q \otimes s' \in (S \otimes Q \otimes_D S)(X)$, und $p \otimes s \otimes q \in (Q \otimes_D S \otimes Q)(Y)$. **Dann gilt:**

$(id_S \otimes g)(s \otimes q \otimes s') = s \otimes q(s') \overset{\cong}{\longmapsto} sq(s')$.

$(f \otimes_D id_S)(s \otimes q \otimes s') = (s \otimes 1_{A*})q \otimes s' \overset{\cong}{\longmapsto}$

$\quad ((s \otimes 1)q)(s') = (s \otimes 1)(q(s')) = sq(s')$.

$(g \otimes id_Q)(p \otimes s \otimes q) = p(s) \otimes q \overset{\cong}{\longmapsto} p(s)q$.

$(id_Q \otimes_D f)(p \otimes s \otimes q) = p \otimes (s \otimes 1_{A*})q \overset{\cong}{\longmapsto} p(s \otimes 1)q =$

$\quad (p(s \otimes 1))q = (p(s \otimes 1))(1)q \qquad$ da $Q = D^{A*}$

$\quad = p((s \otimes 1)(1))q = p(s1(1))q = p(s)q$.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch zwei Lemmata, die etwas weniger üblich sind. Sie ersetzen 8.3, 8.4 und 8.5 bei Chase und Sweedler [10]. Letztere sind modultheoretische Aussagen, die sich nicht so leicht verallgemeinern lassen.

(2.15) Lemma Sei $P \in \underline{C}$ und sei $\tilde{g} \in \underline{C}(P^* \otimes_{[P,P]} P, I)$ aus (1.3) ein Isomorphismus. Dann reflektiert

$P \otimes - : \underline{C} \longrightarrow {}_{[P,P]}\underline{C}$ Isomorphismen.

<u>Beweis</u> Seien $A, B \in \underline{C}$, $h \in \underline{C}(A,B)$ und sei $id_P \otimes h \in {}_{[P,P]}\underline{C}(P \otimes A,\ P \otimes B)$ ein Isomorphismus. Anwendung des Funktors $P^* \otimes_{[P,P]} - : {}_{[P,P]}\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ liefert das folgende kommutative Diagramm, woraus man sieht, daß h ein Isomorphismus ist.

$$\begin{tikzcd}
P^* \otimes_{[P,P]} P \otimes A \arrow[r, "id_{P^*} \otimes_{[P,P]} id_P \otimes h"] \arrow[d, "\tilde{g} \otimes id_A", "\wr\shortparallel"'] & P^* \otimes_{[P,P]} P \otimes B \arrow[d, "\tilde{g} \otimes id_B", "\wr\shortparallel"'] \\
I \otimes A \cong A \arrow[r, "h"] & B \cong I \otimes B.
\end{tikzcd}$$

<u>(2.16) Lemma</u> Sei (D,I,P,Q,f,g) ein Morita-Kontext, f rational surjektiv und $\tilde{g} \in \underline{C}(P^* \otimes_{[P,P]} P,\ I)$ aus (1.3) ein Isomorphismus. Dann sind f und g Isomorphismen.

<u>Beweis</u> Wegen Satz (1.6) ist f ein Isomorphismus und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
P \otimes Q \otimes_D P \arrow[r, "f \otimes_D id_P"] \arrow[d, "id_P \otimes g"] & D \otimes_D P \arrow[d, "\wr\shortparallel"] \\
P \otimes I \arrow[r, "\cong"] & P
\end{tikzcd}$$

$id_P \otimes g$ ist also ein Isomorphismus, und wegen des letzten Lemmas auch g.

<u>(2.17) Satz</u> Sei $A \in \underline{\text{HopfmonC}}$, A endlich über I und S ein A-Koobjekt-Monoid, $S \in \underline{\text{CMonC}}$. Dann sind äquivalent:

(a) S ist A-Galoissch über I.

(b) $S^{A^*} = I$ und f,g aus (2.12) sind rational surjektiv (und damit Isomorphismen).

<u>Beweis</u> "<u>(b) ==> (a)</u>" Aus (b) und den Morita-Sätzen (1.6) folgt, daß S treuprojektiv über I ist, und daß φ ein Isomorphismus ist. Dann ist S A-Galoissch über I wegen Satz (2.11).

"(a) ==> (b)": $S^{A^*} = I$ wegen Satz (2.8). Aus (a) und Satz (2.11) folgt, daß S treuprojektiv über I ist und, daß φ ein Isomorphismus ist. Nach Definition (2.6) ist $I = S^{A^*} \longrightarrow S \rightrightarrows S \otimes A$ ein Differenzkern. Da der Funktor $[S,-]$ rechtsadjungiert ist, ist auch $[S,I] \longrightarrow [S,S] \rightrightarrows [S, S \otimes A] \cong [S,S] \otimes A$ ein Differenzkern, wobei der letzte Isomorphismus aus Pareigis [39] Theorem 1.2 folgt, da S endlich ist. Also gilt: $[S,S]^{A^*} = [S,I]$. Da A^* ein Untermonoid von D ist, ist $D \in {}_{A^*}\underline{C}$. Wegen $S \in {}_{A^*}\underline{C}$ ist $A^* \longrightarrow [S,S]$ ein Monoidmorphismus, also $[S,S] \in {}_{A^*}\underline{C}$. Mit diesen Strukturen ist $\varphi \in {}_{A^*}\underline{C}(D, [S,S])$, oder auch $\varphi \in \underline{C}^A(D, [S,S])$. Also existiert ein Isomorphismus $\overline{\varphi}$ derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
Q = D^{A^*} & \longrightarrow & D & \rightrightarrows & D \otimes A \\
\downarrow \overline{\varphi} & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \otimes id_A \\
[S,I] = [S,S]^{A^*} & \longrightarrow & [S,S] & \rightrightarrows & [S,S] \otimes A
\end{array}$$

Dann kommutiert auch:

$$\begin{array}{ccc}
S \otimes Q & \xrightarrow{id_S \otimes \overline{\varphi}} & S \otimes [S,I] \\
\downarrow f & & \downarrow \tilde{f} \\
D & \xrightarrow{\varphi} & [S,S]
\end{array}$$

$\tilde{f}(id_S \otimes \overline{\varphi})(s \otimes q) = \tilde{f}(s \otimes \overline{\varphi}(q)) = s\overline{\varphi}(q) = s\varphi(q) = \varphi(sq) = \varphi f(s \otimes q) \ \bigwedge X \in \underline{C}, \quad s \otimes q \in (S \otimes Q)(X)$. Da S endlich ist, ist $\tilde{f}$ ein Isomorphismus, also ist auch f ein Isomorphismus. Da S sogar treuprojektiv ist, ist auch g ein Isomorphismus nach Lemma (2.16).

Bemerkung Nachdem wir Korollar 8.5 bei Chase und Sweedler [11] mit unserem Lemma (2.16) ersetzt haben, können wir den Beweis von deren Theorem 8.6 mit Hilfe von unserem Satz (2.8) vereinfachen, und nehmen ihn im Beweis von Satz (2.17) auf.

(2.18) Satz Sei $S \in \underline{\text{CMonC}}$, $A \in \underline{\text{HopfmonC}}$, A endlich über I und S A-Galoissch über I. Dann gilt:

(a) $\eta \in \underline{C}(I,S)$ besitzt eine Retraktion in $\underline{C}$.

(b) S ist treuprojektiv über D.

Beweis Da $g \in \underline{C}(Q \otimes_D S, I)$ rational surjektiv ist, existiert ein $s \otimes_D w \in (Q \otimes_D S)(I)$ mit $g(s \otimes_D w) = 1_I$. Sei nun $w' := sw = \nabla_D(j_Q \otimes_D j_S)(s \otimes_D w) \in D(I)$. Dann ist $g(w' \otimes_D -) \in \underline{C}(S,I)$ eine Retraktion von $\eta \in \underline{C}(I,S)$, denn, $\bigwedge R \in \underline{C}$, $r \in I(R)$ gilt: $g(w' \otimes_D r1_S) = rg(w' \otimes_D 1_S) =$
$= rg(\nabla_D(s \otimes_D w) \otimes_D 1_S) = rg(s \otimes_D w) = r1_I = r$.

(b) Aus dem letzten Satz und den Morita-Sätzen (1.6) folgt, daß S treuprojektiv über D ist.

(2.19) Folgerung Sei $S \in \underline{\text{CMonC}}$, $A \in \underline{\text{HopfmonC}}$, A endlich über I und S A-Galoissch über I. Dann sind die Funktoren:

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \longrightarrow & {}_D\underline{C} \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ M & \longmapsto & S \otimes M \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} {}_D\underline{C} & \longrightarrow & \underline{C} \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ N & \longmapsto & Q \otimes_D N = D^{A^*} \otimes_D N \end{array}$$

zueinander inverse Äquivalenzen von Kategorien. Insbesondere ist $M \cong D^{A^*} \otimes_D S \otimes M$ und $N \cong S \otimes D^{A^*} \otimes_D N$.

Beweis Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem letzten Satz (2.18)(b) und den Morita-Sätzen (1.6).

(2.20) Beispiel Sei $I = K$ ein Körper, $K \subset S$ eine endliche Körpererweiterung und $G \subset \text{Aut}_K(S)$, wie in Beispiel (2.3)(a). Jetzt führen wir die Konstruktionen von Kapitel 2 für diesen Spezialfall durch.

Zu (2.9): $D = S \# KG$ ist, als unterliegender Modul, $S \otimes_K KG = SG$ und hat die folgende Multiplikation:

$(sx)(s'x') = sx(s')xx'$ für $x,x' \in G$, $s,s' \in S$.

$\varphi: SG \longrightarrow \mathrm{End}_K(S): (\varphi(sx))(s') = sx(s')$.

Zu (2.12): Behauptung: $Q = D^{A^*} = (SG)^G = NS$, wobei $N := \sum_{x \in G} x \in KG$ ist.

Beweis Offensichtlich ist $NS \subset Q$. Sei nun $\sum_{x \in G} s_x x \in Q$. Dann gilt, für alle $y \in G$:

$y(\sum_{x \in G} s_x x) = \sum_{x \in G} y(s_x)yx = \sum_{x \in G} s_x x$.

Außerdem gilt: $y(s_e e) = y(s_e)y$. Da G eine S-Basis von SG ist, folgt: $\bigwedge x \in G: s_x = x(s_e)$, also ist

$Q = \{\sum_{x \in G} x(s_e)x : s_e \in S\} = \{\sum_{x \in G} xs : s \in S\} = NS$.

In diesem Spezialfall haben wir auch:

$\psi: SG \otimes S \longrightarrow S: sx \otimes s' \longmapsto sx(s')$,

$f: S \otimes NS \longrightarrow SG: s \otimes Ns' \longmapsto sNs' = \sum_{x \in G} sx(s')x$,

$g: NS \otimes_{SG} S \longrightarrow K: Ns \otimes_{SG} s' \longmapsto (Ns)(s') =$

$= (\sum_{x \in G} x(s)x)(s') = \sum_{x \in G} x(ss')$.

(2.14) bleibt im wesentlichen gleich. (2.15) und (2.16) können in diesem Spezialfall entfallen, da die Aussagen im Beweis von (2.17) durch das Argument $\dim_K(S) \geq 1$ ersetzt werden können. Dann kann der Beweis von (2.17) für den Spezialfall direkt hingeschrieben werden.

(2.21) Folgerung $Tr: S \longrightarrow K: s \longmapsto N(s)$ ist surjektiv.

Beweis $g(Ns \otimes_{SG} s') = N(ss')$, und g ist surjektiv nach Satz (2.17).

3. Eine Frobenius-Eigenschaft

Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist es, Satz (3.8) zu beweisen, der besagt: Falls H ein endliches Hopfmonoid ist, existiert ein endliches Objekt P derart, daß H^* isomorph zu $P \otimes H$ als H-Rechtsobjekt ist. Da wir nicht, wie in der Modultheorie, zeigen können, daß P "endlich erzeugt projektiv vom Rang 1" ist, haben wir weniger als die Aussage, H wäre eine P-Frobenius-Erweiterung. Trotzdem genügt dieser Satz für unsere Zwecke, und erweist sich sogar als sehr nützlich. Neben den unmittelbaren Anwendungen dieses Satzes haben wir auch eine wichtige Folgerung in Satz (3.12), der auch im nächsten Kapitel benutzt wird.

Unsere Nummern (3.1), (3.2), (3.4), (3.5), (3.7) und (3.8) entsprechen 2.9, 2.10, 2.11, 2.5, 2.15 und 2.16 bei Pareigis [40].

<u>(3.1) Definition</u> Sei $H \in \underline{\text{HopfmonC}}$. Ein Tripel (M,ρ,χ) heißt <u>H-rechts-Hopfobjekt</u>, falls $(M,\rho) \in \underline{C}_H$, $(M,\chi) \in \underline{C}^H$, siehe (1.1), und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes H \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\chi \otimes \Delta"] & M \arrow[r, "\chi"] & M \otimes H \\
M \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "id \otimes \tau \otimes id"] & & M \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[u, "\rho \otimes \nabla"']
\end{tikzcd}$$

d.h. wenn $(mh)_0 \otimes (mh)_1 = m_0 h_1 \otimes m_1 h_2 \; \bigwedge X \in \underline{C}$, $m \otimes h \in (M \otimes H)(X)$. Ein <u>Hopfobjektmorphismus</u> ist ein Morphismus, der sowohl in $\underline{C}_H$ als auch in $\underline{C}^H$ liegt. Diese Kategorie wird mit H-<u>HopfobjC</u> bezeichnet.

<u>(3.2) Satz</u> Sei $H \in \underline{\text{HopfmonC}}$. Dann sind die Funktoren

$$\begin{array}{ccccc}
H\text{-}\underline{\text{HopfobjC}} \longrightarrow \underline{C} & \quad \text{und} \quad & \underline{C} \longrightarrow H\text{-}\underline{\text{HopfobjC}} \\
M \longmapsto M^{H^*} & & X \longmapsto X \otimes H
\end{array}$$

zueinander inverse Äquivalenzen von Kategorien.

<u>Beweis</u> Wie konstruieren die folgenden funktoriellen

Isomorphismen: $M^{H^*} \otimes H \underset{\alpha^{-1}}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} M$ und $X \underset{\beta^{-1}}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} (X \otimes H)^{H^*}$

durch:

$\alpha(m' \otimes h) = m'h = \rho(m' \otimes h)$, $\alpha^{-1}(m) = m_0\lambda(m_1) \otimes m_2$,

$\beta(x) = x \otimes 1_H = x \otimes \eta_H$, $\beta^{-1}(x' \otimes h') = x'\varepsilon(h')$,

$\bigwedge U,V,W,Z \in \underline{C}$, $m' \otimes h \in (M^{H^*} \otimes H)(U)$, $m \in M(V)$, $x \in X(W)$,

$x' \otimes h' \in (X \otimes H)^{H^*}(Z)$. Diese Morphismen sind offenbar

alle funktoriell in M bzw. X.

<u>α^{-1} ist wohldefiniert</u>, denn

$\chi(m_0\lambda(m_1))$

$= m_0\lambda(m_3) \otimes m_1\lambda(m_2)$ da $M \in$ H-<u>HopfobjC</u>

$= m_0\lambda(m_2) \otimes \eta\varepsilon(m_1)$ da λ Antipode

$= m_0\lambda(m_1) \otimes \eta$ da ε Koeinheit.

χ und $id \otimes \eta$ haben also die gleiche Wirkung auf dem ersten Faktor von $\alpha^{-1}(m)$, der deswegen im Differenzkern liegt. ($- \otimes H$ erhält Kerne.)

<u>α und α^{-1} sind invers zueinander</u>:

$\alpha\alpha^{-1}(m) = \alpha(m_0\lambda(m_1) \otimes m_2) = m_0\lambda(m_1)m_2$

$= m_0\eta\varepsilon(m_1)$ da λ Antipode

$= m$ da ρ unitär und ε Koeinheit.

$\alpha^{-1}\alpha(m' \otimes h) = \alpha^{-1}(m'h) = (m'h)_0\lambda((m'h)_1) \otimes (m'h)_2$

$= m'_0h_1\lambda(m'_1h_2) \otimes m'_2h_3$ da $M\in$H-<u>HopfobjC</u>, $H\in$<u>HopfmonC</u>

$= m'h_1\lambda(h_2) \otimes h_3$ da $m' \otimes h \in (M^{H^*} \otimes H)(U)$

$= m'\eta\varepsilon(h_1) \otimes h_2$ da λ Antipode

$= m' \otimes h$ da ε Koeinheit.

Offensichtlich ist $\alpha \in \underline{C}_H$. $\alpha^{-1} \in \underline{C}^H$, denn

$\chi\alpha^{-1}(m) = \chi(m_0\lambda(m_1) \otimes m_2) = m_0\lambda(m_1) \otimes m_2 \otimes m_3$

$= \alpha^{-1}(m_0) \otimes m_1 = (\alpha^{-1} \otimes id)\chi(m)$.

Damit sind α und α^{-1} zueinander inverse Hopfobjektmorphismen.

<u>β ist wohldefiniert</u>, denn

$\chi(x \otimes \eta) = x \otimes \Delta(\eta) = (x \otimes \eta) \otimes \eta = (id \otimes \eta)(x \otimes \eta).$

β und β^{-1} sind offenbar in $\underline{C}$. Sie sind <u>zueinander invers</u>:

$\beta^{-1}\beta(x) = \beta^{-1}(x \otimes \eta) = x\varepsilon(\eta) = x.$

$\beta\beta^{-1}(x' \otimes h') = \beta(x'\varepsilon(h')) = x'\varepsilon(h') \otimes \eta = x' \otimes \varepsilon(h')\eta$

$\overset{(*)}{=} x' \otimes \varepsilon(h'_1)h'_2 = x' \otimes h'.$

$(*)$ gilt wegen $x' \otimes h' \in (X \otimes H)^{H^*}(Z) \Longrightarrow$

$x' \otimes h' \otimes \eta = (id \otimes \eta)(x' \otimes h') = \chi(x' \otimes h') = x' \otimes h'_1 \otimes h'_2$

$\Longrightarrow x' \otimes \varepsilon(h') \otimes \eta = x' \otimes \varepsilon(h'_1) \otimes h'_2 = x' \otimes h' \otimes \eta \Longrightarrow$

$x' \otimes \varepsilon(h') = x' \otimes h'.$

Das nächste Lemma, das wir jetzt gleich, aber auch später benötigen, ist wieder von allgemeiner Natur. In der Modultheorie ist es bekannt in der Form: "Direkte Summanden von endlich erzeugt projektiven Moduln sind endlich erzeugt projektiv." Der gleiche Beweis wie unten liefert auch die entsprechende Aussage für unseren Begriff "endlich erzeugt projektiv".

<u>(3.3) Lemma</u> Seien $A \in \underline{\text{MonC}}$, $N, M \in \underline{C}_A$, $j \in \underline{C}_A(N,M)$ und sei $k \in \underline{C}_A(M,N)$ eine Retraktion von j. Falls M endlich über A ist, so ist auch N endlich über A.

<u>Beweis</u> Da M endlich über A ist, existiert ein $p \otimes_A q \in (M \otimes_A {}_A[M,A])(I)$ mit $pq\langle x\rangle = x \ \bigwedge X \in \underline{C},\ x \in M(X)$.

Sei nun $p' \otimes_A q' \in (N \otimes_A {}_A[N,A])(I)$ definiert durch:

$$I \xrightarrow{p \otimes_A q} M \otimes_A {}_A[M,A] \xrightarrow{k \otimes_A [j, id_A]} N \otimes_A {}_A[N,A].$$

Sei $Y \in \underline{C}$, $y \in N(Y)$. Dann gilt: $p'q'\langle y\rangle =$

$= kp([j,id_A]q)\langle y\rangle = kp(q\langle jy\rangle) = k(pq\langle jy\rangle) = k(jy) = y,$

also ist auch N endlich über A.

<u>(3.4) Lemma</u> Sei $H \in \underline{\text{HopfmonC}}$ und $M \in H\text{-}\underline{\text{HopfobjC}}$.

Dann gilt:

(a) $M^{H*} \xrightarrow{\text{kan}} M$ besitzt eine Retraktion in $\underline{C}$.

(b) Falls M außerdem endlich über I ist dann ist es auch M^{H*}.

<u>Beweis</u> (a) Sei δ: $M \longrightarrow M^{H*}$ definiert durch: $\delta(m) = m_0\lambda(m_1) \bigwedge U \in \underline{C},\ m \in M(U)$. δ ist wohldefiniert; der Beweis geht wie für α^{-1} in (3.2). Sei nun $V \in \underline{C}$ und $m' \in M^{H*}(V)$. Dann gilt: $m'_0 \otimes m'_1 = m' \otimes \eta$, also ist $\delta(m') = m'\lambda(\eta) = m'$.

(b) Die Behauptung folgt aus (a) und dem letzten Lemma.

<u>(3.5) Lemma</u> Sei $H \in \underline{\text{HopfmonC}}$ mit Antipode λ. Dann gilt:

(a) λ ist ein Monoidantimorphismus.

(b) λ ist ein Komonoidantimorphismus.

<u>Beweis</u> (a) Zu zeigen ist: $\lambda(\eta) = \eta$ und $\lambda(gh) = \lambda(h)\lambda(g) \bigwedge X \in \underline{C},\ g \otimes h \in (H \otimes H)(X)$.

$\lambda(\eta) = \lambda(\eta)\eta$	da η Einheit
$= \lambda(\eta_1)\eta_2$	da $\eta \in \underline{\text{KomonC}}$
$= \eta\varepsilon(\eta)$	da λ Antipode
$= \eta$.	
$\lambda(gh) = \lambda(g_1\varepsilon(g_2)h_1\varepsilon(h_2))$	da ε Koeinheit
$= \lambda(g_1h_1)g_2\lambda(g_3)\varepsilon(h_2)$	da λ Antipode
$= \lambda(g_1h_1)g_2\varepsilon(h_2)\lambda(g_3)$	
$= \lambda(g_1h_1)g_2h_2\lambda(h_3)\lambda(g_3)$	da λ Antipode
$= \lambda((gh)_1)(gh)_2\lambda(h_3)\lambda(g_3)$	da $H \in \underline{\text{HopfmonC}}$
$= \varepsilon(g_1h_1)\lambda(h_2)\lambda(g_2)$	da λ Antipode
$= \varepsilon(g_1)\varepsilon(h_1)\lambda(h_2)\lambda(g_2)$	da $\varepsilon \in \underline{\text{MonC}}$
$= \lambda(\varepsilon(h_1)h_2)\lambda(\varepsilon(g_1)g_2)$	
$= \lambda(h)\lambda(g)$	da ε Koeinheit.

(b) Zu zeigen ist: $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon$ und

$(\lambda(h))_1 \otimes (\lambda(h))_2 = \lambda(h_2) \otimes \lambda(h_1) \quad \bigwedge Y \in \underline{C},\ h \in H(Y).$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\lambda(h)) &= \varepsilon(\lambda(h_1\varepsilon(h_2))) && \text{da } \varepsilon \text{ Koeinheit}\\
&= \varepsilon(\lambda(h_1))\varepsilon(h_2) && \\
&= \varepsilon(\lambda(h_1)h_2) && \text{da } \varepsilon \in \underline{\text{MonC}}\\
&= \varepsilon\eta\varepsilon && \text{da } \lambda \text{ Antipode}\\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\lambda(h))_1 \otimes (\lambda(h))_2 \\
&= (\lambda(\varepsilon(h_1)h_2))_1 \otimes (\lambda(\varepsilon(h_1)h_2))_2 && \text{da } \varepsilon \text{ Koeinheit}\\
&= (\varepsilon(h_1)\lambda(h_2))_1 \otimes (\varepsilon(h_1)\lambda(h_2))_2 && \\
&= (\lambda(h_2))_1 \otimes \varepsilon(h_1)(\lambda(h_2))_2 && \\
&= (\lambda(h_3))_1 \otimes \lambda(h_1)h_2(\lambda(h_3))_2 && \text{da } \lambda \text{ Antipode}\\
&= (\lambda(h_4))_1 \otimes \lambda(h_1)\varepsilon(h_2)h_3(\lambda(h_4))_2 && \text{da } \varepsilon \text{ Koeinheit}\\
&= \varepsilon(h_2)(\lambda(h_4))_1 \otimes \lambda(h_1)h_3(\lambda(h_4))_2 && \\
&= \lambda(h_2)h_3(\lambda(h_5))_1 \otimes \lambda(h_1)h_4(\lambda(h_5))_2 && \text{da } \lambda \text{ Antipode}\\
&= \lambda(h_2)(h_3\lambda(h_4))_1 \otimes \lambda(h_1)(h_3\lambda(h_4))_2 && \text{da } H \in \underline{\text{HopfmonC}}\\
&= \lambda(h_2)(\varepsilon(h_3))_1 \otimes \lambda(h_1)(\varepsilon(h_3))_2 && \text{da } \lambda \text{ Antipode}\\
&= \lambda(h_2)\varepsilon(h_3) \otimes \lambda(h_1) && \\
&= \lambda(h_2\varepsilon(h_3)) \otimes \lambda(h_1) && \\
&= \lambda(h_2) \otimes \lambda(h_1) && \text{da } \varepsilon \text{ Koeinheit.}
\end{aligned}$$

Jetzt benötigen wir wieder ein allgemeines Lemma, das in der Modultheorie gut bekannt ist. Der gleiche Beweis wie unten liefert auch die entsprechende Aussage für unseren Begriff "endlich erzeugt projektiv".

<u>(3.6) Lemma</u> Sei $A \in \underline{\text{MonC}}$, $M \in \underline{C}_A$, und M endlich über A. Dann gilt:

(a) $_A[M,A]$ ist endlich über A in $_A\underline{C}$.

(b) $k: M \longrightarrow {}_A[{}_A[M,A],A]$ ist ein Isomorphismus, wobei $(k(x))\langle y\rangle = y\langle x\rangle \ \bigwedge X,Y \in \underline{C},\ x \in M(X)$ und $y \in {}_A[M,A](Y)$.

<u>Beweis</u> (a) Da M endlich über A ist, existiert ein

$p \otimes_A q \in (M \otimes_A {}_A[M,A])(I)$ mit $pq\langle x\rangle = x \bigwedge X \in \underline{C},\ x \in M(X)$.
Sei $p' \otimes q' \in ({}_A[{}_A[M,A],A] \otimes_A {}_A[M,A])(I)$ definiert durch:

$$I \xrightarrow{p \otimes q} M \otimes_A {}_A[M,A] \xrightarrow{k \otimes id} {}_A[{}_A[M,A],A] \otimes_A {}_A[M,A]$$

d.h. $p' \otimes q' = k(p) \otimes q$. Seien $X,Y \in \underline{C}$, $x \in M(X)$ und $y \in {}_A[M,A](Y)$. Dann gilt: $((p'\langle y\rangle)q')\langle x\rangle =$
$= ((k(p)\langle y\rangle)q)\langle x\rangle = ((y\langle p\rangle)q)\langle x\rangle = y\langle p\rangle q\langle x\rangle = y\langle pq\langle x\rangle\rangle =$
$= y\langle x\rangle$, also ist ${}_A[M,A]$ endlich über A in ${}_A\underline{C}$.

(b) Sei $l \in {}_A\underline{C}({}_A[{}_A[M,A],A],\ M)$ definiert durch:
$l(z) = pz\langle q\rangle \quad Z \in \underline{C},\ z \in {}_A[{}_A[M,A],A](Z)$. Dann gilt:
$lk(x) = p(k(x))\langle q\rangle = pq\langle x\rangle = x$, und $(kl(z))\langle y\rangle =$
$= k(pz\langle q\rangle)\langle y\rangle = y\langle pz\langle q\rangle\rangle = y\langle p\rangle z\langle q\rangle = z\langle y\langle p\rangle q\rangle =$
$= z\langle p'\langle y\rangle q'\rangle = z\langle y\rangle$, also ist l invers zu k.

Aus diesem Lemma folgt jetzt sofort, daß der Funktor ${}_A[-,A]: {}_A\underline{C} \longrightarrow \underline{C}_A$, eingeschränkt auf die volle Unterkat. der über A endlichen Objekte, eine Dualität, d.h. eine Antiäquivalenz von Kategorien ist. Da der kanonische Morphismus ${}_A[M,A] \otimes_A {}_A[N,A] \longrightarrow {}_A[M \otimes_A N,\ A]$, für M und N endlich über A und A kommutativ, ein Isomorphismus ist (siehe Pareigis [39]), ist diese Dualität monoidal. Deshalb gehen endliche Monoide (bzw. Komoide, Hopfmonoide) in endliche Komonoide (bzw. Monoide, Hopfmonoide) über.

<u>(3.7) Satz</u> Sei $H \in \underline{\text{HopfmonC}}$ und H endlich über I. Dann ist H^* ein H-Hopfobjekt.

<u>Beweis</u> Vermöge ∇_{H^*} ist $H^* \in {}_{H^*}\underline{C}$, also $H^* \in \underline{C}^H$ mittels
$\xi: \underline{C}(H^*,\ H^* \otimes H) \xrightarrow{\cong} \underline{C}(H^* \otimes H^*,\ H^*)$, wobei $\xi(f)(g^* \otimes h^*) =$
$= (id_{H^*} \otimes g^*)f(h^*) \bigwedge X \in \underline{C},\ g^* \otimes h^* \in (H^* \otimes H^*)(X)$.
Es gilt also:
(a) $g^*h^* = \nabla_{H^*}(g^* \otimes h^*) = \xi(\chi)(g^* \otimes h^*) = (id \otimes g^*)\chi(h^*) =$
$= h_0^* g^*\langle h_1^*\rangle \quad X,Y \in \underline{C},\ g^* \in H^*(X),\ h^* \in H^*(Y)$. Dann gilt

$\bigwedge X,Y,Z \in \underline{C}$, $g^* \in H^*(X)$, $h^* \in H^*(Y)$, $h \in H(Z)$:

(b) $g^*\langle h_1\rangle h^*\langle h_2\rangle = (g^*h^*)\langle h\rangle$ nach der Def. von ∇_{H^*}

$= h_0^*\langle h\rangle g^*\langle h_1^*\rangle$ nach (a).

Vermöge ∇_H ist $H \in \underline{C}_H$, also $H^* \in {}_H\underline{C}$ durch:

(c) $(hh^*)\langle g\rangle = h^*\langle gh\rangle = h^*\langle \nabla_H(g \otimes h)\rangle$, $\bigwedge X,Y,Z \in \underline{C}$, $h \in H(X)$, $h^* \in H^*(Y)$, $g \in H(Z)$.

Da, nach Lemma (3.5), λ ein Monoidantimorphismus ist, können wir eine Struktur $H^* \in \underline{C}_H$ definieren, wenn wir die obige Operation folgendermaßen durch λ modifizieren:

(d) $(h^*\cdot h)\langle a\rangle = h^*\langle a\lambda(h)\rangle$ $\bigwedge X,Y,Z \in \underline{C}$, $h^* \in H^*(X)$, $h \in H(Y)$, $a \in H(Z)$. Da λ auch ein Komonoidantimorphismus ist, siehe (3.5), gilt auch:

(e) $(b\lambda(a_1))_1 \otimes (b(\lambda(a_1))_2 = b_1(\lambda(a_1))_1 \otimes b_2(\lambda(a_2))_2 =$
$= b_1\lambda(a_2) \otimes b_2\lambda(a_1)$, $\bigwedge X,Y \in C$, $a \in H(X)$, $b \in H(Y)$.

Jetzt zeigen wir, daß H^* ein H-rechts-Hopfobjekt ist, d.h. daß χ aus (a) mit der in (d) angegebenen Struktur im Sinne von Definition (3.1) verträglich ist. Seien $X,Y \in \underline{C}$, $h^* \otimes a \in (H^* \otimes H)(X)$ und $b \otimes g^* \in (H \otimes H^*)(Y)$.

Dann gilt: $(\chi(h^*\cdot a))\langle b \otimes g^*\rangle =$

$= (h^*\cdot a)_0\langle b\rangle(h^*\cdot a)_1\langle g^*\rangle$	(übliche Schreibw.)
$= (h^*\cdot a)_0\langle b\rangle g^*\langle (h^*\cdot a)_1\rangle$	durch $H \cong H^{**}$, (3.6)
$= (g^*\langle b_1\rangle)(h^*\cdot a)\langle b_2\rangle$	nach (b)
$= g^*\langle b_1\rangle h^*\langle b_2\lambda(a)\rangle$	nach (d)
$= g^*\langle b_1\varepsilon(a_2)\rangle h^*\langle b_2\lambda(a_1)\rangle$	da ε Koeinheit
$= g^*\langle b_1\lambda(a_2)a_3\rangle h^*\langle b_2\lambda(a_1)\rangle$	da λ Antipode
$= (a_3g^*)\langle b_1\lambda(a_2)\rangle h^*\langle b_2\lambda(a_1)\rangle$	nach (c)
$= (a_3g^*)\langle (b_1\lambda(a_1))_1\rangle h^*\langle (b_2\lambda(a_2))_2\rangle$	nach (e)
$= ((a_2g^*)h^*)\langle b\lambda(a_1)\rangle$	Def. von ∇_{H^*}
$= (((a_2g^*)h^*)\cdot a_1)\langle b\rangle$	nach (d)
$= ((h_0^*((a_2g^*)\langle h_1^*\rangle))\cdot a_1)\langle b\rangle$	nach (a)

$= ((h^*_0 \cdot a_1)((a_2 g^*)\langle h^*_1 \rangle))\langle b \rangle$

$= ((h^*_0 \cdot a_1) g^* \langle h^*_1 a_2 \rangle)\langle b \rangle$ nach (c)

$= (h^*_0 \cdot a_1)\langle b \rangle g^* \langle h^*_1 a_2 \rangle$

$= (h^*_0 \cdot a_1)\langle b \rangle (h^*_1 a_2)\langle g^* \rangle$ durch $H \cong H^{**}$, (3.6)

$= ((h^*_0 \cdot a_1) \otimes (h^*_1 a_2))\langle b \otimes g^* \rangle$.

Also ist $\chi(h^* a) = h^*_0 a_1 \otimes h^*_1 a_2$, was zu beweisen war.

<u>(3.8) Satz</u> Sei $H \in$ <u>HopfmonC</u> und H endlich über I. Dann existieren $P, P' \in \underline{C}$, P, P' endlich über I, mit $H^* \cong P \otimes H$ in $\underline{C}_H$ und $H \cong P' \otimes H^*$ in $\underline{C}_{H^*}$.

<u>Beweis</u> Die erste Aussage folgt aus (3.2), (3.4)(b) und (3.7) mit $P := (H^*)^H$. Die zweite ist völlig analog zur ersten.

Jetzt bringen wir wieder zwei allgemeine Lemmata, die in der Modultheorie bekannt sind. Der Beweis des ersten liefert eine analoge Aussage auch für unseren Begriff "endlich erzeugt projektiv" (bzw. "Progenerator") anstelle von "endlich" (bzw. "treuprojektiv"). Der Beweis des zweiten Lemmas, das eine Art Transitivität des Begriffs "endlich erzeugt projektiv" darstellt, läßt sich nicht in analoger Weise für den Begriff "endlich" durchführen, da eine B-Linearität immer fehlt. Das Lemma wird nur für zwei Aussagen, (3.11) und (4.6) benutzt, die für diese Arbeit nicht wesentlich sind. Nach Lemma (1.5) fallen die zwei Begriffe zusammen, falls I Kokern-projektiv in $\underline{C}$ ist. Dies ist bekanntlich der Fall für $\underline{C}$ = k-Mod, gilt aber nicht für die Kategorie der quasivollständigen, tonnelierten, topologischen Vektorräume, siehe (10.9).

<u>(3.9) Lemma</u> Seien $S \in \underline{C}$ und $A, B \in$ CMonC. Falls S endlich (bzw. treuprojektiv) über I und A endlich (bzw. treuprojektiv) über B ist, ist $S \otimes A$ endlich (bzw. treuprojektiv) über B.

<u>Beweis</u> Zunächst gilt: ${}_B[S \otimes A, B] \cong [S, {}_B[A,B]] \cong$ $\cong [S,I] \otimes {}_B[A,B]$, wobei der letzte Isomorphismus, für S endlich, aus Pareigis [39] folgt.

(a) Sei S (bzw. A) endlich über I (bzw. B). Dann existieren $t \otimes p \in (S \otimes [S,I])(I)$ und $b \otimes q \in (A \otimes_B {}_B[A,B])(I)$ mit $tp\langle s\rangle = s$ und $bq\langle a\rangle = a \bigwedge X,Y \in \underline{C}$, $s \in S(X)$, $a \in A(Y)$.

Sei $t' \otimes p'$ definiert durch:

$$\begin{array}{lcc} (S \otimes [S,I] \otimes A \otimes_B {}_B[A,B])(I) & \ni & t \otimes p \otimes b \otimes q \\ \cong ((S \otimes A) \otimes_B ([S,I] \otimes {}_B[A,B]))(I) & & \downarrow \\ \cong ((S \otimes A) \otimes_B {}_B[S \otimes A, B])(I) & \ni & t' \otimes p' \end{array}$$

Dann gilt: $(t' \otimes p')\langle s \otimes a\rangle = (t \otimes b)(p \otimes q)\langle s \otimes a\rangle =$ $= tp\langle s\rangle \otimes bq\langle a\rangle = s \otimes a \bigwedge X \in \underline{C}$, $s \otimes a \in (S \otimes A)(X)$, also ist $S \otimes A$ endlich über A.

(b) Sei S (bzw. A) treuprojektiv über I (bzw. B). Dann existieren auch $\tilde{p} \otimes \tilde{t} \in ([S,I] \otimes S)(I)$ und $\tilde{q} \otimes \tilde{b} \in ({}_B[A,B] \otimes_B A)(I)$ mit $\tilde{p}\langle\tilde{t}\rangle = \eta_I$ und $\tilde{q}\langle\tilde{b}\rangle = \eta_B$.

Sei $\tilde{p}' \otimes \tilde{t}'$ definiert durch:

$$\begin{array}{lcc} ([S,I] \otimes S \otimes {}_B[A,B] \otimes_B A)(I) & \ni & \tilde{p} \otimes \tilde{t} \otimes \tilde{q} \otimes \tilde{b} \\ \cong (([S,I] \otimes {}_B[A,B]) \otimes_B (S \otimes A))(I) & & \downarrow \\ \cong ({}_B[S \otimes A, B] \otimes_B (S \otimes A))(I) & \ni & \tilde{p}' \otimes \tilde{t}' \end{array}$$

Dann gilt: $\tilde{p}'\langle\tilde{t}'\rangle = (\tilde{p} \otimes \tilde{q})\langle\tilde{t} \otimes \tilde{b}\rangle = \tilde{p}\langle\tilde{t}\rangle \otimes \tilde{q}\langle\tilde{b}\rangle =$ $= \eta_I \otimes \eta_B = \eta_B$, also ist $S \otimes A$ treuprojektiv über B.

<u>(3.10) Lemma</u> Seien $A, B \in$ <u>CMonC</u>, $B \in {}_A\underline{C}$, $C \in {}_B\underline{C}$, und C (bzw. B) endlich erzeugt projektiv über B (bzw. A). Dann ist C endlich erzeugt projektiv über A, wobei $C \in {}_A\underline{C}$ durch $A \otimes C \longrightarrow C$: $a \otimes c \longrightarrow (a\, 1_B)\, c$.

<u>Beweis</u> Wegen der Voraussetzungen existieren $c \otimes p \in (C \otimes {}_B[C,B])(I)$ und $b \otimes q \in (B \otimes {}_A[B,A])(I)$ mit $cp\langle c'\rangle = c'$ und $bq\langle b'\rangle = b'$ $\bigwedge X,Y \in \underline{C}$, $c' \in C(X)$, $b' \in B(Y)$. Sei $cb \otimes qp \in (C \otimes {}_A[C,A])(I)$ definiert durch:

$$I \xrightarrow{b \otimes q \otimes c \otimes p} B \otimes {}_A[B,A] \otimes C \otimes {}_B[C,B] \xrightarrow{\cong}$$

$$\xrightarrow{\cong} C \otimes B \otimes {}_A[B,A] \otimes {}_B[C,B] \longrightarrow C \otimes {}_A[C,A]$$

Dann gilt: $cb(qp)\langle c'\rangle = cbq\langle p\langle c'\rangle\rangle = cp\langle c'\rangle = c'$ $\bigwedge X \in \underline{C}$, $c' \in C(X)$, also ist C endlich erzeugt projektiv über A.

<u>(3.11)</u> <u>Satz</u> Sei $S \in$ <u>MonC</u>, $A \in$ <u>HopfmonC</u>, A endlich über I und S A-Galoissch über I. Dann gilt:

(a) S ist endlich über A^*.

(b) D ist endlich über A^*.

<u>Beweis</u> (a) Aus der Definiton von "S ist A-Galoissch über I" folgt, daß S endlich über I ist, und, daß $\gamma \in \underline{C}(S \otimes S, S \otimes A)$ ein Isomorphismus in $\underline{C}^A$ ist, also auch in ${}_{A^*}\underline{C}$, wobei A^* auf den rechten Faktor operiert. A ist endlich über A^* wegen Satz (3.8), also ist $S \otimes A$ endlich über A^*, wegen Lemma (3.9), und $S \otimes S$ ist endlich über A^*, da γ ein Isomorphismus in ${}_{A^*}\underline{C}$ ist. Da, nach Satz (2.18)(a), $\eta \in \underline{C}(I,S)$ eine Retraktion in $\underline{C}$ besitzt, besitzt $\eta \otimes id_S \in \underline{C}(S, S \otimes S)$ eine Retraktion in ${}_{A^*}\underline{C}$, also ist S endlich über A^*, wegen Lemma (3.3).

(b) Aus Satz (2.17) und den Morita-Sätzen (1.6) folgt, daß Q endlich über I ist. Wegen $D \cong S \otimes Q$ in ${}_D\underline{C}$ ist insbesondere $D \cong S \otimes Q$ in ${}_{A^*}\underline{C}$. Da S endlich über A^* und Q endlich über I ist, ist dann D endlich über A^*.

Der nächste Satz, eine Folgerung aus Satz (3.8), wird im Beweis von Satz (4.5), und damit für den Hauptsatz, verwendet.

(3.12) Satz Seien $B \in \underline{\text{HopfmonC}}$, B endlich über I, $M \in {}_{B*}\underline{C}$ und $h \in {}_{B*}\underline{C}(B^*, M)$. Falls h eine Retraktion in $\underline{C}$ besitzt, besitzt es auch eine Retraktion in ${}_{B*}\underline{C}$.

Beweis Zunächst haben wir folgende funktorielle Isomorphismen: ${}_{B*}\underline{C}(-, B^*) = {}_{B*}\underline{C}(-, [B,I]) \cong \underline{C}(B \otimes_{B*} -, I)$

$\cong \underline{C}(P \otimes B^* \otimes_{B*} -, I)$ wegen Satz (3.18)

$\cong \underline{C}(P \otimes -, I)$.

Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} {}_{B*}\underline{C}(M, B^*) & \xrightarrow{{}_{B*}\underline{C}(h,\ id_{B*})} & {}_{B*}\underline{C}(B^*, B^*) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \underline{C}(P \otimes M, I) & \xrightarrow{C(id_P \otimes h,\ id_I)} & \underline{C}(P \otimes B^*, I) \end{array}$$

Falls l eine Retraktion von h in $\underline{C}$ ist, ist $\underline{C}(id_P \otimes l, id_I)$ ein Schnitt von $\underline{C}(id_P \otimes h, id_I)$. Deshalb sind $\underline{C}(id_P \otimes h, id_I)$ und ${}_{B*}\underline{C}(h, id_{B*})$ surjektiv, also existiert ein $k \in {}_{B*}\underline{C}(M, B^*)$ mit $id_{B*} = {}_{B*}\underline{C}(h, id_{B*})(k)$ $= kh$.

(3.13) **Bemerkung** Satz (3.12) besagt, daß B^* **relativ** injektiv bezüglich des Vergißfunktors $V: {}_{B*}\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ ist.

4. Untermonoide und Hauptsatz

In diesem Kapitel wird der Hauptsatz der Galois-Theorie, eine Aussage über den Verband der Untermonoide einer Galoisschen Erweiterung, bewiesen. Ein wichtiger Schritt davon ist der Satz (4.9), der uns erlaubt, von S^{B^*} auf B^* zurückzuschließen. Dieses Zurückschließen, das in der Theorie endlicher Körpererweiterung einfach mit Dimensionsargumenten bewältigt wird, erfordert schon in der algebraischen Theorie endlicher, kommutativer Ringerweiterungen wesentlich mehr Aufwand. Hierzu erweist sich die Morita-Theorie als recht gut geeignet.

<u>(4.1) Definition</u> Seien $S \in \underline{\text{CMonC}}$, $A,B \in \underline{\text{CHopfmonC}}$, A endlich über I und sei $e \in \underline{\text{HopfmonC}}(A,B)$ eine Retraktion in $\underline{C}$. Sei weiterhin S ein A-Koobjekt-Monoid. Wir definieren $T := S^{B^*}$, und

$\alpha' := (id_S \otimes e)\alpha \colon S \longrightarrow S \otimes B \cong S \otimes_T (T \otimes B)$.

<u>(4.2) Lemma</u> Mit den Voraussetzungen von oben ist S $T \otimes B$-Koobjekt-Monoid über T.

<u>Beweis</u> Die algebraischen Bedingungen in Definition (2.1), jetzt bezüglich $- \otimes_T -$, werden trivialerweise erhalten.

<u>(4.3) Definition</u> Seien S, A, B, e, T und α' wie oben. Dann definieren wir:

$D' := S \#_T (T \otimes B^*) \in {}_{D'}\underline{C}_{T}$, $\quad Q' := (D')^{T \otimes B^*} \in {}_{T}\underline{C}_{D'}$,

$f' := \nabla_{D'}(j_S \otimes_T j_{Q'}) \in {}_{D'}\underline{C}_{D'}(S \otimes_T Q', D')$, $\quad$ und

$g' := \psi'(j_{Q'} \otimes_{D'} id_S) \in {}_{T}\underline{C}_{T}(Q' \otimes_{D'} S, T)$, $\quad$ wobei

$j_S \colon S \longrightarrow D'$, $\quad j_{Q'} \colon Q' \longrightarrow D'$ $\quad$ und

$j_{D'} \colon D' = S \otimes_T (T \otimes B^*) \cong S \otimes B^* \xrightarrow{id_S \otimes e^*} S \otimes A^* = D$

die kanonischen Inklusionen sind.

(4.4) Lemma (D', T, S, Q', f', g') ist ein Morita-Kontext.

Beweis Die Kommutativität der Diagramme in Definition (1.2) wird trivialerweise erhalten; siehe auch Lemma (2.14).

(4.5) Satz Seien $S, A, B, e, T, \alpha', D', Q', f'$ und g' wie oben, und sei S A-Galoissch über I. Dann gilt:

(a) f' und g' sind rational surjektiv (und somit Isomorphismen).

(b) S ist $T \otimes B$-Galoissch über T.

(c) S ist treuprojektiv über T und $\eta: T \longrightarrow S$ besitzt eine Retraktion in ${}_T\underline{C}$.

Beweis (a) (1) Satz (3.12) liefert die Existenz eines $k \in {}_{B^*}\underline{C}(A^*, B^*)$ mit $ke^* = id_{B^*}$. Sei $l := id_S \otimes k \in \underline{C}(D, D')$. Wegen $k \in {}_{B^*}\underline{C}$ ist dann $l \in {}_{D'}\underline{C}$ und $l(Q) \subset Q'$, d.h. es gibt ein $\bar{l} \in \underline{C}(Q, Q')$ mit $lj_Q = j_{Q'}\bar{l}$. Außerdem ist $lj_{D'} = id_{D'}$. Aus Satz (2.17) folgt, daß $f \in {}_D\underline{C}_D(S \otimes Q, D)$ rational surjektiv ist, also existiert ein $x \otimes w \in (S \otimes Q)(I)$ mit $f(x \otimes w) =$
$= \eta_D \in D(I)$. Dann gilt: $\eta_{D'} = lj_{D'}\eta_D = lj_{D'}f(x \otimes w) =$
$= lj_{D'}(xw) = x\bar{l}(w)$ da $j_{D'} \in {}_S\underline{C}$, $l \in {}_S\underline{C}$ und $l(Q) \subset Q'$
$= f'(x \otimes \bar{l}(w))$, also ist $x \otimes \bar{l}(w) \in (S \otimes_T Q')(I)$
und $f'(x \otimes \bar{l}(w)) = \eta_{D'}$ und deswegen ist
$f' \in {}_{D'}\underline{C}_{D'}(S \otimes_T Q', D')$ auch rational surjektiv.

(2) Um die rationale Surjektivität von g' zu zeigen, stellen wir zunächst einige Begriffe zusammen:

$\beta(b \otimes t) = (id_S \otimes b)\alpha(t) \;\bigwedge X \in \underline{C}$, $b \otimes t \in (A^* \otimes S)(X)$,
$\beta'(b \otimes t) = (id_S \otimes b)\alpha'(t) = (id \otimes be)\alpha(t) =$
$= (id \otimes e^*(b))\alpha(t) = \beta(e^* \otimes id)(b \otimes t) \;\bigwedge X \in \underline{C}$,
$b \otimes t \in (B^* \otimes S)(X)$, also ist $\beta' = \beta(e^* \otimes id_S)$,

$\psi' = \nabla_S(id_S \otimes \beta') \in \underline{C}(D' \otimes S, S)$.

Sei nun $X \in \underline{C}$ und $s \otimes b \otimes t \in (D \otimes S)(X) = (S \otimes A^* \otimes S)(X)$.

Dann gilt: $\psi'(1 \otimes id_S)(s \otimes b \otimes t)$

$= \psi'(s \otimes k(b) \otimes t)$ nach der Def. von 1

$= s\beta'(k(b) \otimes t)$ nach der Def. von ψ'

$= s\beta(e^*(k(b)) \otimes t)$ da $\beta' = \beta(e^* \otimes id)$

$= s\beta(b \otimes t)$ da $e^*k = id_{B^*}$

$= \psi(s \otimes b \otimes t)$ nach der Def. von ψ.

Also ist $\psi'(1 \otimes id_S) = \psi$.

(3) Aus Satz (2.17) folgt, daß $g \in \underline{C}(Q \otimes_D S, I)$ rational surjektiv ist, also existiert ein $q \otimes_D s \in (Q \otimes_D S)(I)$ mit $g(q \otimes_D s) = \eta_I = id_I \in I(I)$. Dann gilt:

$\eta_I = g(q \otimes_D s)$

$= \psi(j_Q \otimes_D id_S)(q \otimes_D s)$ nach der Def. von g

$= \psi'(1j_Q \otimes_{D'} id_S)(q \otimes_D s)$ da $\psi'(1 \otimes id_S) = \psi$

$= \psi'(j_{Q'} \otimes_{D'} id_S)(\mathcal{I}(q) \otimes_{D'} s)$ da $1j_Q = j_Q\mathcal{I}$

$= g'(\mathcal{I}(q) \otimes_{D'} s)$, also ist $\mathcal{I}(q) \otimes_{D'} s \in (Q' \otimes S)(I)$ und $g'(\mathcal{I}(q) \otimes_{D'} s) = \eta_I$ und deswegen ist $g' \in \underline{C}(Q' \otimes_{D'} S, I)$ auch rational surjektiv.

(b) und (c) folgen jetzt aus (2.11), (2.17) und (2.18)(a).

<u>Bemerkung</u> Dieser Satz entspricht Theorem 10.3 bei Chase und Sweedler [11], aber der Beweis wurde geändert. Wir sehen nämlich nicht, wie man Theorem 8.4 bei Chase und Sweedler benutzen kann, ohne zu wissen, daß S nicht nur über R, sondern auch über T treu ist.

Der Beweis der nächsten Folgerung verwendet Lemma (3.10). Sie wird im Folgenden nicht benutzt.

<u>(4.6) Folgerung</u> Seien $A, B \in$ <u>HopfmonC</u>, A endlich über I und $e \in$ <u>HopfmonC</u>(A, B) eine Retraktion in $\underline{C}$.

Sei weiterhin I Kokern-projektiv in $\underline{C}$. Dann ist A^* endlich als links- und rechts-B^*-Objekt.

<u>Beweis</u> Nach Satz (2.5) ist A A-Galoissch über I. Mit $T := A^{B^*}$ und Satz (4.5)(b) ist A $T \otimes B$-Galoissch über T und deshalb ist A auch endlich über $T \otimes B^*$, nach Satz (3.11). Wegen Satz (2.18)(a) besitzt $T \longrightarrow A$ eine Retraktion in ${}_T\underline{C}$, und deshalb ist T endlich über I, nach Lemma (3.3). Dann ist $T \otimes B^*$ endlich über B^*, nach Lemma (3.9). Folglich ist A endlich über B^*, nach Lemma (3.10). Mit Satz (3.8) schließen wir dann, daß A^* endlich über B^* ist.

<u>(4.7) Lemma</u> Seien $S \in \underline{\text{MonC}}$, $A \in \underline{\text{HopfmonC}}$, S A-Galoissch über I, und $R \in \underline{\text{CMonC}}$. Dann ist $R \otimes S$ $R \otimes A$-Galoissch über R.

<u>Beweis</u> Der Funktor $R \otimes -$ erhält trivialerweise alle algebraischen Bedingungen in Definition (2.1) und Definition (2.2). $R \otimes S$ ist wieder treuprojektiv (über R) wegen Lemma (3.9).

<u>(4.8) Lemma</u> Seien $A,B \in \underline{\text{CHopfmonC}}$; A und B endlich über I; $e \in \underline{\text{HopfmonC}}(A,B)$ eine Retraktion in $\underline{C}$; $S,R \in \underline{\text{CMonC}}$, und S A-Galoissch über I. Dann gilt:

$$(R \otimes S)^{R \otimes B^*} \cong R \otimes S^{B^*}.$$

<u>Beweis</u> Mit $T := S^{B^*}$ und Satz (4.5) sehen wir, daß S $T \otimes B$-Galoissch über T ist. Wegen Lemma (4.7) ist dann $R \otimes S = (R \otimes T) \otimes_T S$ $R \otimes T \otimes B$-Galoissch über $R \otimes T$.

Nun gilt:

$$(R \otimes S)^{R \otimes B^*} \cong ((R \otimes T) \otimes_T S)^{R \otimes T \otimes B^*}$$

$$\cong ((R \otimes T) \otimes_T S)^{[R \otimes T \otimes B,\ R \otimes T]}$$

$$\cong R \otimes T \qquad \text{wegen Satz (2.8)}$$

$$= R \otimes S^{B^*}.$$

<u>(4.9) Satz</u> Seien $A, B \in \underline{\mathrm{CHopfmonC}}$, A endlich über I, $e \in \underline{\mathrm{HopfmonC}}(A,B)$ eine Retraktion in $\underline{C}$, und $j \in \underline{C}(A^{B^*}, A)$ der kanonische Morphismus. Dann ist

$$A^{B^*} \overset{j}{\underset{\eta\varepsilon}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{e} B$$

ein Differenzkokerndiagramm in $\underline{\mathrm{CMonC}}$.

<u>Beweis</u> A^{B^*} ist ein Untermonoid von A, also ist $(A, \nabla') \in \underline{\mathrm{Mon}}_{A^{B^*}}\underline{C}$, mit

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d] & A. \\ A \otimes_{A^{B^*}} A \arrow[ur, "\nabla'"'] & \end{tikzcd}$$

Nach Satz (4.5) ist A $A^{B^*} \otimes$ B-Galoissch über A^{B^*}, also ist $\gamma' := (\nabla' \otimes id_B)(id_A \otimes \alpha'): A \otimes_{A^{B^*}} A \longrightarrow A \otimes B$ ein Isomorphismus.

Sei $\Lambda \in \underline{C}(I \otimes_{A^{B^*}} A, B)$ definiert durch:

$$I \otimes_{A^{B^*}} A \cong I \otimes_A A \otimes_{A^{B^*}} A \xrightarrow{id_I \otimes_A \gamma'} I \otimes_A A \otimes B \cong I \otimes B \cong B.$$

Λ ist auch ein Isomorphismus, und $\Lambda(x \otimes a) = xe(a) \bigwedge X \in \underline{C}$, $x \otimes a \in (I \otimes_{A^{B^*}} A)(X)$. Nach Konstruktion ist das folgende Diagramm ein Faserproduktdiagramm in $\underline{\mathrm{CMonC}}$:

$$\begin{tikzcd} A^{B^*} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varepsilon"] & A \arrow[d, "p(\eta \otimes id)"'] \arrow[ddr, "e"] & \\ I \arrow[r, "p(id \otimes \eta)"] \arrow[drr, "\eta"'] & I \otimes_{A^{B^*}} A \arrow[dr, "\Lambda"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

wobei $p = \mathrm{kan}: I \otimes A \longrightarrow I \otimes_{A^{B^*}} A$, $\Lambda p(\eta \otimes id) = e$, $\Lambda p(id \otimes \eta) = \eta$. Jetzt folgt die Behauptung durch einen Vergleich der universellen Eigenschaften.

<u>Bemerkung</u> Bis jetzt ist die Kommutativität von A vor allem benutzt worden, um wieder eine <u>symmetrische</u> monoidale

Kategorie ${}_{A^{B*}}\underline{C}$ zu bekommen, wie das für die Definition von Hopfmonoiden erforderlich ist. Sogar der letzte Satz läßt sich ohne Kommutativität von A ausdrücken: Falls γ' ein Isomorphismus ist, dann auch Λ, und man hat das folgende Differenzkokerndiagramm in $\underline{C}$:

$$A^{B*} \otimes A \cong I \otimes A^{B*} \otimes A \rightrightarrows I \otimes A \longrightarrow I \otimes_{A^{B*}} A \xrightarrow{\Lambda} B.$$

Diese Eigenschaft würde im Beweis des nächsten Satzes auch genügen.

<u>(4.10) Satz</u> Seien $A, B_1, B_2 \in \underline{\text{CHopfmonC}}$, A endlich über I, $e_i \in \underline{\text{HopfmonC}}(A, B_i)$ eine Retraktion in $\underline{C}$, $S \in \underline{\text{CMonC}}$, und S A-Galoissch über I. Dann gilt:

$$B_1^* \subset B_2^* \Longleftrightarrow S^{B_2^*} \subset S^{B_1^*}, \qquad \text{und insbesondere:}$$

$$B_1^* = B_2^* \Longleftrightarrow S^{B_1^*} = S^{B_2^*}.$$

<u>Beweis</u> (a) Sei $B_1^* \subset B_2^*$, d.h. es existiert ein Monomorphismus $B_1^* \longrightarrow B_2^*$. Da B_1 und B_2 endlich sind, ist das Duale ein Epimorphismus $B_2 \longrightarrow B_1$. Aus der Definition des Fixobjekts folgt dann die Existenz eines Monomorphismus, der das folgende Diagramm kommutativ ergänzt:

$$\begin{tikzcd}
S^{B_1^*} \arrow[r] & S \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & S \otimes B_1 \\
S^{B_2^*} \arrow[r] \arrow[u, dashed] & S \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, equal] & S \otimes B_2, \arrow[u]
\end{tikzcd} \qquad \text{d.h. } S^{B_2^*} \subset S^{B_1^*}.$$

(b) Sei jetzt $S^{B_2^*} \overset{i}{\hookrightarrow} S^{B_1^*}$ und betrachten wir das große Diagramm auf der nächsten Seite. k_i, eine Retraktion von j_i, existiert nach Satz (2.18)(a). Die Quadrate I, III, V und VII kommutieren nach Lemma (4.8). γ_1 und γ_2 existieren derart, daß II und VI kommutieren, weil γ ein $S \otimes A^*$-Morphismus ist. IV kommutiert nach Voraussetzung. Wir haben also einen Monomorphismus

$l = (\mathrm{id}_S \otimes k_1 j_1)l = (\mathrm{id}_S \otimes k_1 j_2) \in {}_{[S,S]}\underline{C}$. Da S treuprojektiv ist, ist $S \otimes -\colon \underline{C} \longrightarrow {}_{[S,S]}\underline{C}$ eine Kategorienäquivalenz nach Satz (1.6), und folglich ist auch

$k_1 j_2 \in \underline{C}(A^{B_2^*}, A^{B_1^*})$ ein Monomorphismus, und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A^{B_2^*} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "k_1 j_2"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_2 \arrow[d, dashed] \\
A^{B_1^*} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & A \arrow[r] & B_1,
\end{tikzcd}$$

wobei der Epimorphismus $B_2 \longrightarrow B_1$ wegen Satz (4.9) existiert. Also gilt: $B_1^* \subset B_2^*$.

$$\begin{tikzcd}
S \otimes A^{B_1^*} \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_S \otimes j_1"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & S \otimes A \arrow[l, shift left, "\mathrm{id}_S \otimes k_1"] \arrow[d, equal] \arrow[ddddddd, equal, bend left=40] \\
(S \otimes A)^{S \otimes B_1^*} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & S \otimes A \\
(S \otimes S)^{S \otimes B_1^*} \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_1", "\cong"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & S \otimes S \arrow[u, "\gamma", "\cong"'] \arrow[d, equal] \\
S \otimes S^{B_1^*} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & S \otimes S \arrow[d, equal] \\
S \otimes S^{B_2^*} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}_S \otimes i"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & S \otimes S \arrow[d, equal] \\
(S \otimes S)^{S \otimes B_2^*} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VI}"] & S \otimes S \arrow[d, "\gamma", "\cong"'] \\
(S \otimes A)^{S \otimes B_2^*} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VII}"] & S \otimes A \arrow[d, equal] \\
S \otimes A^{B_2^*} \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_S \otimes j_2"] \arrow[uuuuuuu, bend left=40, "l"] & S \otimes A . \arrow[l, shift left, "\mathrm{id}_S \otimes k_2"]
\end{tikzcd}$$

(4.11) Hauptsatz Seien $A, B_1, B_2 \in \underline{\text{CHopfmonC}}$, A endlich über I, $e_1 \in \underline{\text{HopfmonC}}(A, B_1)$ eine Retraktion in $\underline{C}$, $S \in \underline{\text{CMonC}}$, und S A-Galoissch über I. Dann gilt:

(a) $S^{A^*} = I$.

(b) Mit $T := S^{B^*}$ ist S $T \otimes B$-Galoissch über T, also ist insbesondere S treuprojektiv über T, und $T \longrightarrow S$ ist ein Schnitt in ${}_T\underline{C}$.

(c) $B_1^* \subset B_2^* \iff S^{B_2^*} \subset S^{B_1^*}$, und insbesondere:
$B_1^* = B_2^* \iff S^{B_1^*} = S^{B_2^*}$.

Beweis (a) folgt aus Satz (2.8), (b) aus Satz (4.5) und (c) aus Satz (4.10).

In dem Hauptsatz haben wir jetzt eine injektive, ordnungsumkehrende Abbildung von dem Verband derjenigen Unterhopfmonoide von A^*, die in $\underline{C}$ Schnitte sind, in den Verband der Untermonoide von S. Die Untermonoide von S, die im Bild dieser Abbildung vorkommen, d.h. sich als Fixmonoide bei Unterhopfmonoiden von A^* darstellen lassen, müssen Schnitte in $\underline{C}$ sein, sind aber im allgemeinen schwierig zu charakterisieren. Dies ist schon der Fall in der Galois-Theorie von kommutativen Ringen, siehe Chase, Harrison und Rosenberg [10], Chase und Sweedler [11], Magid [32] und Takeuchi [51].

Ein Schritt in die Richtung der Charakterisierung dieser Untermonoide von S ist der folgende Satz. Er entspricht Aussage (11.4), Seite 79 oder einem Teil von Theorem 7.6(b) in Chase und Sweedler [11]. Unser Beweis ist jedoch viel einfacher als Kapitel 11 bei Chase und Sweedler, und erfordert weniger Voraussetzungen: Wir benötigen nur unseren Satz (3.8), und nicht die volle

Frobenius-Eigenschaft in Lemma 9.5 bei Chase und Sweedler. Wir verwenden außerdem keine Null-Objekte oder Anullatoren.

(4.12) Satz Seien $A,B \in \underline{\text{CHopfmonC}}$, A endlich über I, $e \in \underline{\text{HopfmonC}}(A,B)$ eine Retraktion in $\underline{C}$, $S \in \underline{\text{CMonC}}$, S A-Galoissch über I, und $i: T \longrightarrow S$ ein Untermonoid, das in $\underline{C}$ ein Schnitt ist.

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $T = S^{B^*}$.

(ii) $\gamma(S \otimes T) = S \otimes A^{B^*}$, d.h. es gibt einen Isomorphismus $\overline{\gamma}$, der das folgende Diagramm kommutativ ergänzt:

$$\begin{tikzcd}
S \otimes S \arrow[r, "\gamma"] & S \otimes A \\
S \otimes T \arrow[u, "id_S \otimes i"] \arrow[r, dashed, "\overline{\gamma}"] & S \otimes A^{B^*} \arrow[u, "id_S \otimes j"'] \arrow[d, equal] \\
& S \otimes \mathrm{Diffker}(A \underset{id \otimes \eta}{\overset{(id \otimes e)\Delta}{\rightrightarrows}} A \otimes B).
\end{tikzcd}$$

(iii) Es gibt einen Isomorphismus $\overline{\varphi}$, der das folgende Diagramm kommutativ ergänzt:

$$\begin{tikzcd}
S \otimes A^* \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "id_S \otimes kan"] & {[S,S] \cong S \otimes S^*} \arrow[d, "{[i,id_S]}"] \\
S \otimes A^*//B^* \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, equal] & {[T,S] \cong S \otimes T^*} \\
S \otimes \mathrm{Diffkoker}(A^* \otimes B^* \underset{id \otimes \varepsilon}{\overset{\nabla(id \otimes e^*)}{\rightrightarrows}} A^*). &
\end{tikzcd}$$

(b) Falls $\underline{C}$ = k-Mod, mit einem kommutativen Ring k, sind die obigen Aussagen äquivalent zu:

(iv) $\bigwedge w \in S \otimes A^*[w(T) = 0 \iff w \in S \otimes A^*(B^*)^+]$, wobei $(B^*)^+$ das Augmentationsideal von B^* bezeichnet.

Beweis "(i) <==> (ii)": Genauso wie im Beweis von Satz (4.10) betrachten wir das folgende (etwas abgekürzte)

Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S \otimes S^{B*} \arrow[r, shift left, "id_S \otimes j"] \arrow[d, "\gamma_B"', "\cong"] & S \otimes S \arrow[l, shift left, "id_S \otimes k_B"] \arrow[d, "\gamma"', "\cong"] \arrow[dd, equal, bend left=60] \\
S \otimes A^{B*} \arrow[r] & S \otimes A \\
S \otimes T \arrow[r, shift left, "id_S \otimes i"] \arrow[u, "\overline{\gamma}", "\cong"'] & S \otimes S. \arrow[l, shift left, "id_S \otimes k"] \arrow[u, "\gamma", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

$\gamma_B^{-1}\overline{\gamma} = (id_S \otimes k_B j)\gamma_B^{-1}\overline{\gamma} = (id_S \otimes k_B i) \in [S,S]^{\underline{C}}$ ist ein Isomorphismus und S ist treuprojektiv, also ist auch $k_B i \in \underline{C}(T, S^{B*})$ ein Isomorphismus, d.h. die zwei Unterobjekte sind gleich.

"<u>(ii) <==> (iii)</u>": (iii) ist eine Dualisierung von (ii), mit den Methoden von Satz (2.11).

"<u>(iii) <==> (iv)</u>": Mit Hilfe des Homomorphiesatzes ist (iii) äquivalent zur Gleichheit der Kerne der zwei Abbildungen, und es gilt:

$Ke(S \otimes A^* \longrightarrow [T,S]) = Ke(S \otimes A^* \longrightarrow S \otimes A^*//B^*)$

$= S \otimes Ke(A^* \longrightarrow A^*//B^*)$ da S treuprojektiv ist,

$= S \otimes A^*(Ke\varepsilon_{B^*}) = S \otimes A^*(B^*)^+$, siehe Oberst und Schneider [34] und Lemma (5.1).

5. Normale Unter- und Faktorhopfmonoide

In diesem Kapitel untersuchen wir den Begriff der Normalität für Unter- bzw. Faktorhopfmonoide und dessen Bedeutung in der Galois-Theorie. Im Spezialfall einer separablen Körpererweiterung erhalten wir wieder den Begriff eines Normalteilers, wie man aus Beispiel (6.9) und Lemma (7.4) sieht. Satz (5.3) liefert eine neue und interessante Charakterisierung des Normalitätsbegriffs, auch für den Fall $\underline{C}$ = k-Mod. Satz (5.5) wurde für den Fall $\underline{C}$ = k-Mod auch noch nicht betrachtet. Unser Lemma (5.1), zusammen mit Satz (4.9), enthält die Aussagen 2.1 und 2.2 bei Oberst und Schneider [34]. Wir haben diese "rein algebraisch" bewiesen, mit weniger Aufwand als bei Chase und Sweedler [11] und insbesondere ohne Verwendung der Theorie der algebraischen Gruppen.

(5.1) Lemma Seien $A, B \in \underline{\text{CHopfmonC}}$, A endlich über I, $e \in \underline{\text{HopfmonC}}(A,B)$ eine Retraktion in $\underline{C}$ und $j: A' := A^{B^*} \to A$ der kanonische Morphismus. Seien $H, H' \in \underline{\text{HopfmonC}}$, H kokommutativ, H endlich über I, $i \in \underline{\text{HopfmonC}}(H',H)$ ein Schnitt in $\underline{C}$ und

$$H \otimes H' \underset{id \otimes \varepsilon}{\overset{\nabla(id \otimes i)}{\rightrightarrows}} H \xrightarrow{\pi} H//H' \quad \text{ein Differenzkokern in}$$

$\underline{C}$. Dann gelten:

(a) $$A' \otimes A \underset{\varepsilon \otimes id}{\overset{\nabla(j \otimes id)}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{e} B \quad \text{ist ein Differenzkokern}$$

in $\underline{C}$ und in $\underline{\text{CMonC}}$.

(b) $$H' \xrightarrow{i} H \underset{id \otimes \eta}{\overset{(id \otimes \pi)\Delta}{\rightrightarrows}} H \otimes H//H' \quad \text{ist ein Differenzkern}$$

in $\underline{C}$ und in der Kategorie der kokommutativen Komonoide in $\underline{C}$.

Beweis (a) Betrachten wir das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A' \otimes A \arrow[r, shift left, "\nabla(j \otimes id)"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon \otimes id"'] & A \arrow[r, "e"] & B \\
I \otimes A' \otimes A \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, shift left, "id \otimes \nabla(j \otimes id)"] \arrow[r, shift right, "id \otimes \varepsilon \otimes id"'] & I \otimes A \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, "p"] & I \otimes_{A'} A \arrow[u, "\Lambda", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

mit $p = \text{kan}: I \otimes A \longrightarrow I \otimes_{A'} A$ und $\Lambda: I \otimes_{A'} A \longrightarrow B$ definiert wie im Beweis von Satz (4.9). Da das untere Diagramm nach Definition ein Differenzkokern ist, und Λ ein Isomorphismus ist, ist auch das obere Diagramm ein Differenzkokern. (b) ist dual zu (a).

(5.2) Definition (a) Seien H', $H \in$ HopfmonC, H kokommutativ und $i \in$ HopfmonC(H',H) ein Monomorphismus in C. H' heißt normales Unterhopfmonoid von H, falls $H//H'$ genau eine Hopfmonoidstruktur besitzt derart, daß $\pi \in$ HopfmonC$(H, H//H')$ ist. Dabei sind $H//H'$ und π wie in Lemma (5.1) definiert.

(b) Seien A, B $\in$ CHopfmonC, $e \in$ HopfmonC(A,B) ein Epimorphismus und $A' := A^{B^*}$. B heißt normales Faktorhopfmonoid von A, falls A' genau eine Hopfmonoidstruktur besitzt derart, daß $j = \text{kan} \in$ HopfmonC(A',A) ist.

(5.3) Satz Seien H', $H \in$ HopfmonC, H kokommutativ, H endlich über I und $i \in$ HopfmonC(H',H) ein Schnitt in C. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) H' ist normal in H.

(b) $\text{Diffkok}(H \otimes H' \underset{id \otimes \varepsilon}{\overset{\nabla(id \otimes i)}{\rightrightarrows}} H) = \text{Diffkok}(H' \otimes H \underset{\varepsilon \otimes id}{\overset{\nabla(i \otimes id)}{\rightrightarrows}} H)$.

(c) Es gibt genau ein $\rho' \in C(H \otimes H', H')$ mit $i\rho' = \rho$, wobei $\rho \in \underline{C}(H \otimes H', H)$ durch $\rho(a \otimes b) = a_1 i(b) \lambda(a_2) \bigwedge X \in \underline{C}$ $a \otimes b \in (H \otimes H')(X)$ definiert ist.

Beweis (a) ==> (c): Betrachten wir das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & H \otimes H' \arrow[dl, dashed, "\rho'"'] \arrow[d, "\rho"] & \\ H' \arrow[r, "i"] & H \arrow[r, shift left, "(id \otimes \pi)\Delta"] \arrow[r, shift right, "id \otimes \eta"'] & H \otimes H//H'. \end{tikzcd}$$

Nach Lemma (5.1) ist der untere Teil des Diagramms ein Differenzkern. Sei $\pi \in \underline{\mathrm{MonC}}(H, H//H')$. Zu zeigen ist also die Kern-Eigenschaft. Sei $X \in \underline{C}$ und $a \otimes b \in (H \otimes H')(X)$. Dann gilt:

$(id \otimes \pi)\Delta\rho(a \otimes b)$

$= (id \otimes \pi)\Delta(a_1 i(b)\lambda(a_2))$	nach der Def. von ρ
$= a_1 i(b_1)\lambda(a_4) \otimes \pi(a_2 i(b_2)\lambda(a_3))$	da $H \in \underline{\mathrm{HopfmonC}}$
$= a_1 i(b_1)\lambda(a_4) \otimes \pi(a_2 i(b_2))\pi(\lambda(a_3))$	da $\pi \in \underline{\mathrm{MonC}}$
$= a_1 i(b_1)\lambda(a_4) \otimes \pi(a_2 \varepsilon(b_2)\lambda(a_3))$	nach der Def. von π
$= a_1 i(b)\lambda(a_4) \otimes \pi(a_2\lambda(a_3))$	da ε Koeinheit
$= a_1 i(b)\lambda(a_3) \otimes \pi(\varepsilon(a_2))$	da λ Antipode
$= a_1 i(b)\lambda(a_2) \otimes \eta$	da ε Koeinheit
$= (id \otimes \eta)\rho(a \otimes b).$	

(c) ==> (b): Betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} H \otimes H' \arrow[r, shift left, "\nabla(id \otimes i)"] \arrow[r, shift right, "id \otimes \varepsilon"'] \arrow[d, "r"] & H \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, equal] & H//H' \\ H' \otimes H \arrow[r, shift left, "\nabla(i \otimes id)"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon \otimes id"'] & H \arrow[r, "\pi_2"] & H' \backslash\backslash H \end{tikzcd}$$

wobei π_1 und π_2 als Differenzkokerne definiert sind, und $r := (\rho' \otimes id)(id \otimes \tau)(\Delta \otimes id): H \otimes H' \longrightarrow H' \otimes H.$

Das linke Viereck kommutiert:

$(\varepsilon \otimes id)r(a \otimes b)$

$= (\varepsilon \otimes id)(\rho' \otimes id)(id \otimes \tau)(\Delta \otimes id)(a \otimes b)$

$= (\varepsilon \otimes id)(\rho' \otimes id)(a_1 \otimes b \otimes a_2)$

$= (\varepsilon \otimes id)(a_1 i(b)\lambda(a_2) \otimes a_3)$

$= \varepsilon(a_1 i(b)\lambda(a_2))a_3 = \varepsilon(b)a = (id \otimes \varepsilon)(a \otimes b).$

$\nabla(i \otimes id)r(a \otimes b)$

$= \nabla(i\rho' \otimes id)(id \otimes \tau)(\Delta \otimes id)(a \otimes b)$

$= \nabla(\rho \otimes id)(a_1 \otimes b \otimes a_2)$

$= \nabla(a_1 i(b)\lambda(a_2) \otimes a_3) = a_1 i(b)\lambda(a_2)a_3 = a_1 i(b)\varepsilon(a_2)$

$= ai(b) = \nabla(id \otimes i)(a \otimes b)$.

Also existiert genau ein Morphismus $\bar{r}$: $H//H' \longrightarrow H'\backslash\backslash H$ mit $\bar{r}\pi_1 = \pi_2$. Analog existiert genau ein $\tilde{r}$: $H'\backslash\backslash H \longrightarrow H//H'$ mit $\tilde{r}\pi_2 = \pi_1$. Daraus folgt die Gleichheit der zwei Faktorobjekte.

(b) ==> (a): Da die Morphismen ∇, i und ε alle mit Δ, ε und η verträglich sind, ist $H//H'$ automatisch ein koaugmentiertes Komonoid. Wir müssen also die Existenz von geeigneten Morphismen $\bar{\nabla}$: $H//H' \otimes H//H' \longrightarrow H//H'$ und $\bar{\lambda}$: $H//H' \longrightarrow H//H'$ zeigen. Die Eindeutigkeit, sowie die Kommutativität der erforderlichen Diagramme, folgt daraus, daß π ein Epimorphismus ist. Betrachten wir zunächst das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes H' \arrow[r, shift left, "id \otimes \nabla(id \otimes i)"] \arrow[r, shift right, "id \otimes id \otimes \varepsilon"'] & H \otimes H \arrow[r, "id \otimes \pi"] \arrow[d, "\nabla"] & H \otimes H//H' \arrow[d, dashed, "\tilde{\nabla}"] \\
 & H \arrow[r, "\pi"] & H//H'
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$\pi\nabla(id \otimes \nabla(id \otimes i))$

$= \pi\nabla(\nabla(id \otimes id) \otimes i)$

$= \pi\nabla(id \otimes i)(\nabla \otimes id)$

$= \pi(id \otimes \varepsilon)(\nabla \otimes id)$ da $\pi = \pi_1$

$= \pi\nabla(id \otimes id \otimes \varepsilon)$.

Also existiert genau ein $\tilde{\nabla}$: $H \otimes H//H' \longrightarrow H//H'$ mit $\pi\nabla = \tilde{\nabla}(id \otimes \pi)$.

Betrachten wir jetzt das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H' \otimes H \otimes H \arrow[r, shift left, "\nabla(i\otimes id)\otimes id"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon\otimes id\otimes id"'] \arrow[d, "(id\otimes id\otimes\pi)"] & H \otimes H \arrow[d, "id\otimes\pi"] & \\
H' \otimes H \otimes H//H' \arrow[r, shift left, "\nabla(i\otimes id)\otimes id"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon\otimes id\otimes id"'] & H \otimes H//H' \arrow[r, "\pi\otimes id"] \arrow[d, "\tilde{\nabla}"] & H//H'\otimes H//H' \arrow[d, dashed, "\overline{\nabla}"] \\
& H//H' \arrow[r, "id"] & H//H'
\end{tikzcd}$$

Nun gilt:

$\tilde{\nabla}(id \otimes \pi)(\nabla(i \otimes id) \otimes id)$

$= \pi\nabla(\nabla(i \otimes id) \otimes id)$ wegen oben

$= \pi\nabla(i \otimes \nabla(id \otimes id))$

$= \pi\nabla(i \otimes id)(id \otimes \nabla)$

$= \pi(\varepsilon \otimes id)(id \otimes \nabla)$ da $\pi = \pi_2$

$= \pi\nabla(\varepsilon \otimes id \otimes id)$

$= \tilde{\nabla}(id \otimes \pi)(\varepsilon \otimes id \otimes id)$.

Dann gilt auch:

$\tilde{\nabla}(\nabla(i \otimes id) \otimes id)(id \otimes id \otimes \pi) = \tilde{\nabla}(\varepsilon \otimes id \otimes id)(id \otimes id \otimes \pi)$

da das obere Quadrat kommutiert. Also gilt:

$\tilde{\nabla}(\nabla(i \otimes id) \otimes id) = \tilde{\nabla}(\varepsilon \otimes id \otimes id)$, da $(id \otimes id \otimes \pi)$ ein Epimorphismus ist. Also existiert genau ein

$\overline{\nabla}\colon H//H' \otimes H//H' \longrightarrow H//H'$ mit $\overline{\nabla}(\pi \otimes id) = \tilde{\nabla}$. Dann gilt:

$\overline{\nabla}(\pi \otimes \pi) = \overline{\nabla}(\pi \otimes id)(id \otimes \pi) = \tilde{\nabla}(id \otimes \pi) = \pi\nabla$.

Schließlich betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H' \arrow[r, shift left, "\nabla(id\otimes i)"] \arrow[r, shift right] & H \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\lambda"] & H//H' \arrow[d, dashed, "\overline{\lambda}"] \\
& H \arrow[r, "\pi"] & H//H'
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$\pi\lambda\nabla(id \otimes i)$

$= \pi\nabla(\lambda \otimes \lambda)\tau(id \otimes i)$ wegen Lemma (3.5)

$= \pi\nabla(\lambda \otimes \lambda)(i \otimes id)\tau$

$= \pi\nabla(i \otimes id)(\lambda \otimes \lambda)\tau$ da $i \in$ Hopfmon$\underline{C}$(H',H)

$= \pi(\varepsilon \otimes id)(\lambda \otimes \lambda)\tau$ Kokern-Eigenschaft

$= \pi\lambda(\varepsilon \otimes id)\tau = \pi\lambda(id \otimes \varepsilon)$.

Also existiert genau ein $\overline{\lambda}$: $H//H' \longrightarrow H//H'$ mit $\overline{\lambda}\pi = \pi\lambda$.

(5.4) Bemerkung (a) Sei k ein kommutativer Ring, $\underline{C}$ = k-Mod, und $H'^{+} = Ke(\varepsilon: H' \longrightarrow k)$. Mit Hilfe des Homomorphiesatzes sieht man, daß (5.3)(b) zur Bedingung $HH'^{+} = H'^{+}H$ äquivalent ist. Diese ist der Normalitätsbegriff von K. Newman [33]. In diesem Fall ist (5.3)(c) äquivalent zu: $a \in H$, $b \in H'$ $\Longrightarrow$ $a_1 b\lambda(a_2) \in H'$.

(b) Die Aussage von Satz (5.3) läßt sich selbstverständlich auch dualisieren.

Der folgende Satz entspricht der Aussage in der klassischen Galois-Theorie, daß der Fixkörper eines Normalteilers der Galois-Gruppe wieder Galoissch über dem Grundkörper ist. Die Umkehrung dieses Satzes ist wahr in der Galois-Theorie separabler Körpererweiterungen, aber nicht in der Theorie separabler Ringerweiterungen, wie man aus Beispiel (5.7) sieht.

(5.5) Satz Seien A, B $\in$ $\underline{C}$Hopfmon$\underline{C}$, A endlich über I, e $\in$ Hopfmon$\underline{C}$(A,B) eine Retraktion in $\underline{C}$, S $\in$ $\underline{C}$Mon$\underline{C}$, und S sei A-Galoissch über I. Sei weiterhin B ein normales Faktorhopfmonoid von A, und A' := A^{B^*}. Dann ist S^{B^*} A'-Galoissch über I.

Beweis (a) Zuerst zeigen wir, daß S^{B^*} ein A'-Koobjekt-Monoid ist. Betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& S^{B^*} \arrow[d, "j"] \arrow[ddl, dashed, "\tilde{\alpha}"'] & \\
& S \arrow[d, "\alpha"] & \\
S \otimes A' \arrow[r, "id \otimes \pi^*"] & S \otimes A \arrow[r, shift left, "id \otimes (id \otimes e)\Delta"] \arrow[r, shift right, "id \otimes id \otimes \eta"'] & S \otimes A \otimes B
\end{tikzcd}$$

$(id \otimes (id \otimes e)\Delta)\alpha j$

$= (id \otimes id \otimes e)(id \otimes \Delta)\alpha j$

$= (id \otimes id \otimes e)(\alpha \otimes id)\alpha j$

$= (\alpha \otimes id)(id \otimes e)\alpha j$

$= (\alpha \otimes id)(id \otimes \eta)j$ wegen der Def. von S^{B^*}

$= (id \otimes id \otimes \eta)\alpha j.$

Also existiert genau ein $\tilde{\alpha}\colon S^{B^*} \longrightarrow S \otimes A'$ mit

$(id \otimes \pi^*)\tilde{\alpha} = \alpha j.$

Jetzt betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& S^{B^*} \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] \arrow[dl, dashed, "\bar{\alpha}"'] & & S \otimes B \otimes A \\
S^{B^*} \otimes A' \arrow[r, "j \otimes id"] & S \otimes A' \arrow[rr, shift left, "(id \otimes e)\alpha \otimes id"] \arrow[rr, shift right, "id \otimes \eta \otimes id"'] & & S \otimes B \otimes A' \arrow[u, "id \otimes id \otimes \pi^*"']
\end{tikzcd}$$

$(id \otimes id \otimes \pi^*)((id \otimes e)\alpha \otimes id)\tilde{\alpha}$

$= ((id \otimes e)\alpha \otimes id)(id \otimes \pi^*)\tilde{\alpha}$

$= ((id \otimes e)\alpha \otimes id)\alpha j$

$= (id \otimes e \otimes id)(id \otimes \Delta)\alpha j$ da $(S,\alpha) \in \underline{C}^A$

$= (id \otimes e \otimes id)(id \otimes \Delta)(id \otimes \pi^*)\tilde{\alpha}$

$= (id \otimes (e \otimes id)\Delta\pi^*)\tilde{\alpha}$

$= (id \otimes (\eta \otimes id)\pi^*)\tilde{\alpha}$ da B normal

$= (id \otimes id \otimes \pi^*)(id \otimes \eta \otimes id)\tilde{\alpha}.$

Da $(id \otimes id \otimes \pi^*)$ ein Monomorphismus ist, gilt auch: $((id \otimes e)\alpha \otimes id)\tilde{\alpha} = (id \otimes \eta \otimes id)\tilde{\alpha}$. Also existiert genau ein $\bar{\alpha}\colon S^{B^*} \longrightarrow S^{B^*} \otimes A'$ mit $(j \otimes id)\bar{\alpha} = \tilde{\alpha}$. Dann gilt:

$(j \otimes \pi^*)\bar{\alpha} = (id \otimes \pi^*)(j \otimes id)\bar{\alpha} = (id \otimes \pi^*)\tilde{\alpha} = \alpha j.$

Da j und $(j \otimes \pi^*)$ Monomorphismen sind, vererben sich die erforderlichen Kommutativitäts-Bedingungen in Definition (2.1) von α auf $\overline{\alpha}$.

(b) Jetzt zeigen wir, daß S^{B^*} A'-Galoissch über I ist. Nach Satz (4.5) besitzt $j: S^{B^*} \longrightarrow S$ eine Retraktion in $\underline{C}$, also ist S^{B^*} endlich über I, nach Lemma (3.3). Nach Satz (2.18) besitzt auch $\eta: I \longrightarrow S$ eine Retraktion in $\underline{C}$, also besitzt $I \longrightarrow S^{B^*}$ eine Retraktion in $\underline{C}$ und folglich ist S^{B^*} treuprojektiv über I, nach Lemma (2.4). Nach Definition (2.2) müssen wir nur noch zeigen, daß

$$\overline{\gamma} := (\nabla_{S^{B^*}} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}): S^{B^*} \otimes S^{B^*} \longrightarrow S^{B^*} \otimes A'$$

ein Isomorphismus ist. Betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S \otimes S^{B^*} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes j"] \arrow[d, "\tilde{\gamma}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & S \otimes S \arrow[r, shift left, "\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes e)\alpha"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \eta"'] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & S \otimes S \otimes B \arrow[d, "\gamma \otimes \mathrm{id}"] \\
S \otimes A' \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \pi^*"] & S \otimes A \arrow[r, shift left, "\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes e)\Delta"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \eta"'] & S \otimes A \otimes B
\end{tikzcd}$$

mit $\tilde{\gamma} = (\nabla_S \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes j \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha}): S \otimes S^{B^*} \longrightarrow S \otimes A'$

also $\tilde{\gamma}(x \otimes y) = xj\overline{\alpha}_1(y) \otimes \overline{\alpha}_2(y)$.

<u>II kommutiert:</u>

$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \eta)\gamma(x \otimes y)$

$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \eta)(x\alpha_1(y) \otimes \alpha_2(y))$

$= x\alpha_1(y) \otimes \alpha_2(y) \otimes 1.$

$(\gamma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \eta)(x \otimes y)$

$= (\gamma \otimes \mathrm{id})(x \otimes y \otimes 1)$

$= x\alpha_1(y) \otimes \alpha_2(y) \otimes 1.$

$(\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes e)\Delta)\gamma(x \otimes y)$

$= (\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes e)\Delta)(x\alpha_1(y) \otimes \alpha_2(y))$

$= x\alpha_1(y) \otimes \alpha_2(y) \otimes e\alpha_3(y).$

$(\gamma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes e)\alpha)(x \otimes y)$

$= (\gamma \otimes \mathrm{id})(x \otimes \alpha_1(y) \otimes e\alpha_2(y))$

$= x\alpha_1(y) \otimes \alpha_2(y) \otimes e\alpha_3(y).$

<u>I kommutiert:</u>

$\gamma(\mathrm{id} \otimes j) = (\nabla_S \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \alpha)(\mathrm{id} \otimes j)$

$= (\nabla_S \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes (j \otimes \pi^*)\overline{\alpha})$

$= (\mathrm{id} \otimes \pi^*)\widetilde{\gamma}.$

Also ist $\widetilde{\gamma}$ ein Isomorphismus, denn beide Zeilen im Diagramm sind Differenzkerne. Jetzt betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S^{B^*} \otimes S^{B^*} \arrow[r, "j\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\overline{\gamma}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & S \otimes S^{B^*} \arrow[r, shift left, "(\mathrm{id}\otimes e)\alpha\otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}\otimes\eta\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & S \otimes B \otimes S^{B^*} \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\tau)(\widetilde{\gamma}\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau)"] \\
S^{B^*} \otimes A' \arrow[r, "j\otimes \mathrm{id}"] & S \otimes A' \arrow[r, shift left, "(\mathrm{id}\otimes e)\alpha\otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}\otimes\eta\otimes \mathrm{id}"'] & S \otimes B \otimes A'
\end{tikzcd}$$

<u>II kommutiert:</u>

$(\mathrm{id} \otimes \eta \otimes \mathrm{id})\widetilde{\gamma}(x \otimes y)$

$= (\mathrm{id} \otimes \eta \otimes \mathrm{id})(xj\overline{\alpha}_1(y) \otimes \overline{\alpha}_2(y))$

$= \alpha j\overline{\alpha}_1(y) \otimes 1 \otimes \overline{\alpha}_2(y).$

$(\mathrm{id} \otimes \tau)(\widetilde{\gamma} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)(\mathrm{id} \otimes \eta \otimes \mathrm{id})(x \otimes y)$

$= (\mathrm{id} \otimes \tau)(\widetilde{\gamma} \otimes \mathrm{id})(x \otimes y \otimes 1)$

$= \alpha j\overline{\alpha}_1(y) \otimes 1 \otimes \overline{\alpha}_2(y).$

$((\mathrm{id} \otimes e)\alpha \otimes \mathrm{id})\widetilde{\gamma}(x \otimes y)$

$= ((\mathrm{id} \otimes e)\alpha \otimes \mathrm{id})(\nabla_S \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes j \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \overline{\alpha})(x \otimes y)$

$= ((\mathrm{id}\otimes e)(\nabla_S\otimes\nabla_A)(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes \mathrm{id})(\alpha\otimes\alpha)\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes j\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\overline{\alpha})(x\otimes y)$

$= ((\mathrm{id}\otimes e)(\nabla_S\otimes\nabla_A)(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes \mathrm{id})\otimes \mathrm{id})(\alpha\otimes(j\otimes\pi^*)\overline{\alpha}\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\overline{\alpha})(x\otimes y)$

$= ((\mathrm{id}\otimes e)(\nabla_S\otimes\nabla_A)(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes \mathrm{id})\otimes \mathrm{id})(\alpha\otimes(j\otimes\pi^*)\overline{\alpha}\otimes \mathrm{id})(x\otimes\overline{\alpha}_1(y)\otimes\overline{\alpha}_2(y))$

$= ((\mathrm{id}\otimes e)(\nabla_S\otimes\nabla_A)(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes \mathrm{id})\otimes \mathrm{id})(\alpha_1(x)\otimes\alpha_2(x)\otimes j\overline{\alpha}_1(y)\otimes\pi^*\overline{\alpha}_2(y)\otimes\overline{\alpha}_3(y))$

$= \alpha_1(x)j\overline{\alpha}_1(y) \otimes e(\alpha_2(x)\pi^*\overline{\alpha}_2(y)) \otimes \overline{\alpha}_3(y)$

$= \alpha_1(x)j\overline{\alpha}_1(y) \otimes e\alpha_2(x)\varepsilon\overline{\alpha}_2(y) \otimes \overline{\alpha}_3(y)$ nach Lemma (5.1)

$= \alpha_1(x)j\bar{\alpha}_1(y) \otimes e\alpha_2(x) \otimes \bar{\alpha}_2(y).$

$(\mathrm{id} \otimes \tau)(\tilde{\gamma} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)((\mathrm{id} \otimes e)\alpha \otimes \mathrm{id})(x \otimes y)$

$= (\mathrm{id} \otimes \tau)(\tilde{\gamma} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)(\alpha_1(x) \otimes e\alpha_2(x) \otimes y)$

$= (\mathrm{id} \otimes \tau)(\tilde{\gamma} \otimes \mathrm{id})(\alpha_1(x) \otimes y \otimes e\alpha_2(x))$

$= (\mathrm{id} \otimes \tau)(\alpha_1(x)j\bar{\alpha}_1(y) \otimes \bar{\alpha}_2(y) \otimes e\alpha_2(x))$

$= \alpha_1(x)j\bar{\alpha}_1(y) \otimes e\alpha_2(x) \otimes \bar{\alpha}_2(y).$

<u>I kommutiert</u>:

$\tilde{\gamma}(j \otimes \mathrm{id}) = (\nabla_S \otimes \mathrm{id})(j \otimes j \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \bar{\alpha})$

$= (j \otimes \mathrm{id})(\nabla_{S^{B*}} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \bar{\alpha})$

$= (j \otimes \mathrm{id})\bar{\gamma}.$

Also ist $\bar{\gamma}$ ein Isomorphismus, denn beide Zeilen im Diagramm sind Differenzkerne.

<u>(5.6) Bemerkung</u> Mit den Bezeichnungen von oben sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Ein $\bar{\alpha}: S^{B*} \longrightarrow S^{B*} \otimes A'$ existiert derart, daß das Diagramm I (unten) kommutiert.

(b) Ein $\bar{\beta}: H//H' \otimes S^{B*} \longrightarrow S^{B*}$ existiert derart, daß das Diagramm II (unten) kommutiert.

$$\begin{tikzcd} S^{B*} \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & S^{B*} \otimes A' \arrow[d, "j \otimes \pi^*"] \\ S \arrow[r, "\alpha"] & S \otimes A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H//H' \otimes S^{B*} \arrow[rr, "\bar{\beta}"] & & S^{B*} \arrow[dd, "j"] \\ H \otimes S^B \arrow[u, "\pi \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes j"] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{II}"] & & \\ H \otimes S \arrow[rr, "\beta"] & & S \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> <u>"(a) ==> (b)"</u>:

$j\bar{\beta}(\pi \otimes \mathrm{id})(h \otimes y)$

$= j\bar{\beta}(\pi(h) \otimes y)$

$= j(\mathrm{id} \otimes \pi(h))\bar{\alpha}(y)$

$= (\mathrm{id} \otimes h)(j \otimes \pi^*)\bar{\alpha}(y)$

$= (\mathrm{id} \otimes h)\alpha(jy)$

$= \beta(h \otimes jy) = \beta(\mathrm{id} \otimes j)(h \otimes y).$

"(b) ==> (a)":

$(id \otimes h)(j \otimes \pi^*)\overline{\alpha}(y)$

$= j(id \otimes \pi(h))\overline{\alpha}(y)$

$= j\overline{\beta}(\pi(h) \otimes y)$

$= j\overline{\beta}(\pi \otimes id)(h \otimes y)$

$= \beta(id \otimes j)(h \otimes y)$

$= \beta(h \otimes jy) = (id \otimes h)\alpha(jy)$,

$\Longrightarrow (j \otimes \pi^*)\overline{\alpha} = \alpha j$.

(5.7) Beispiel Sei L = Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$. $Aut(L,\mathbb{Q}) = S_3$. Sei $k = L^{A_3}$ und $S = L \times L$. Dann ist $Aut_k(L) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $Aut_k(S) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \wr S_2$ (Kranzprodukt), siehe Villamayor und Zelinsky [52]. Sei nun

$G_1 = \{((\overline{0},\overline{0}),(1)),\ ((\overline{1},\overline{1}),(1)),\ ((\overline{2},\overline{2}),(1)),\ ((\overline{0},\overline{0}),(12)),\ ((\overline{1},\overline{1}),(12)),\ ((\overline{2},\overline{2}),(12))\} = (\Delta Aut_k L) \times S_n \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Offensichtlich ist $|G_1| = 6$ und $S^{G_1} = k$, also ist S Galoissch über k mit Gruppe G_1. Sei nun

$G_2 = \{((\overline{0},\overline{0}),(1)),\ ((\overline{2},\overline{1}),(1)),\ ((\overline{1},\overline{2}),(1)),\ ((\overline{0},\overline{0}),(12)),\ ((\overline{2},\overline{1}),(12)),\ ((\overline{1},\overline{2}),(12))\}$. Sei $(a,b) \in S^{G_2}$. Dann ist

$(a,b) = ((\overline{0},\overline{0}),(12))(a,b) = (b,a) \Longrightarrow a = b$, und

$(a,a) = ((\overline{2},\overline{1}),(1))(a,a) = (\overline{2}a,\ \overline{1}a) \Longrightarrow a = \overline{1}a = \overline{2}a$.

Also ist $S^{G_2} = k$ und $|G_2| = 6$. Folglich ist S Galoissch über k mit Gruppe G_2. Sei nun

$U = \{((\overline{0},\overline{0})(1)),\ ((\overline{0},\overline{0}),(12))\}$. Dann ist U Untergruppe von G_1 und von G_2. $S^U = \Delta L$ ist Galoissch über k mit Gruppe $G_1/U \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. ($U$ ist normal in G_1). Nun gilt aber

$((\overline{2},\overline{1}),(1))^{-1} = ((\overline{1},\overline{2}),(1))$ und

$((\overline{2},\overline{1}),(1))((\overline{0},\overline{0}),(12))((\overline{1},\overline{2}),(1)) =$

$= ((\overline{2},\overline{1}),(1))((\overline{2},\overline{1}),(12)) = ((\overline{1},\overline{2}),(12)) \notin U$.

Also ist U kein Normalteiler von G_2. Nun definieren wir

$A = (kG_2)^* \xrightarrow{e} (k\bar{U})^* = B$. Dann ist S A-Galoissch über $I = k$ und S^{B^*} ist Galoissch über I, aber $A \xrightarrow{e} B$ ist ist nicht normal.

<u>(5.8) Folgerung</u> Sei $A \in$ <u>CHopfmonC</u>, A endlich über I, $S \in$ <u>CMonC</u> und sei S A-Galoissch über I. Dann definiert die Vorschrift $(e: A \longrightarrow B) \longmapsto (j: S^{B^*} \longrightarrow S)$ eine injektive, ordnungsumkehrende Abbildung von dem Verband der normalen, in <u>C</u> zerfallenden Unterhopfmonoide von A^* in den Verband der in <u>C</u> zerfallenden Untermonoide von S, die über I Galoissch sind.

<u>Beweis</u> Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz (4.11) und Satz (5.5).

6. Die Kategorie der H-Objekte

Wie in Beispiel (2.3) erwähnt, läßt sich die Theorie, die in den Kapiteln 1 und 2 entwickelt wurde, auf die Galois-Theorie von kommutativen Ringen reduzieren, in dem man als monoidale Kategorie ($\underline{C}$, $\otimes$, I) die Kategorie der k-Moduln (k-Mod, $\otimes_k$, k) wählt. Diese ist jedoch nicht die einzige "algebraische" Kategorie, in der interessante Beispiele für die obige Theorie existieren. Eine Möglichkeit, um die Kategorie k-Mod mit zusätzlichen Strukturen zu versehen und dadurch neue und interessante symmetrische, abgeschlossene monoidale Kategorien zu bekommen, wird in diesem Kapitel behandelt. Als "zusätzliche Struktur" kann eine zusätzliche Modulstruktur oder eine Graduierung gewählt werden, siehe F. Long [55]. Die Galois-Theorie für diese Kategorien ist dann eng verwandt mit der klassischen, und die Korrespondenz betrifft jeweils einen speziellen Unterverband des ursprünglichen. Somit bekommt man neue Gesichtspunkte in der klassischen Galois-Theorie.

<u>(6.1) Satz</u> Sei ($\underline{C}$, $\otimes$, I, [-,-]) eine symmetrische, abgeschlossene, monoidale Kategorie und H $\in$ <u>BimonC</u>, H kokommutativ. Dann ist ($_{H}\underline{C}$, $_{\Delta}\otimes$, $_{\varepsilon}I$, $_{H}[H \otimes -, -]$) symmetrisch, abgeschlossen und monoidal, wobei die H-Struktur der neuen Objekte folgendermaßen definiert wird:

$H \otimes A \otimes B \longrightarrow A \otimes B$: $h \otimes a \otimes b \longmapsto h(a \otimes b) = h_1 a \otimes h_2 b$,

$H \otimes I \longrightarrow I$: $h \otimes x \longmapsto \varepsilon(h)x$,

$H \otimes {}_{H}[H \otimes A, B] \longrightarrow {}_{H}[H \otimes A, B]$: $h' \otimes f \longmapsto h'f$ mit

$(h'f)\langle h \otimes a\rangle = f\langle hh' \otimes a\rangle$.

Die Abgeschlossenheit wird definiert durch:

$_{H}\underline{C}(A \otimes B, C) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} {}_{H}\underline{C}(A, {}_{H}[H \otimes B, C])$ mit

$(\Phi(f)(a))\langle h \otimes b\rangle = f(ha \otimes b)$ und

$(\Psi(g))(a \otimes b) = (g(a))\langle \eta_H \otimes b\rangle$.

Beweis ${}_H\underline{C}$ ist offensichtlich symmetrisch und monoidal. Zu zeigen ist nur, daß Φ und Ψ zueinander invers sind.

$(\Psi\Phi(f))(a \otimes b) = (\Phi(f))(a)\langle \eta_H \otimes b\rangle$

$= f(\eta_H a \otimes b) = f(a \otimes b)$.

$((\Phi\Psi(g))(a))\langle h \otimes b\rangle = (\Psi(g))(ha \otimes b)$

$= (g(ha))\langle \eta_H \otimes b\rangle$

$= (h(g(a)))\langle \eta_H \otimes b\rangle$ da $g \in {}_H\underline{C}(\dots)$

$= (g(a))\langle \eta_H h \otimes b\rangle$ wegen H-Struktur von $g(a)$

$= (g(a))\langle h \otimes b\rangle$.

(6.2) Bemerkung Der Vergißfunktor $V\colon {}_H\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ ist monoidal. Er erhält endliche und treuprojektive Objekte.

Beweis Die erste Aussage ist klar, und die zweite folgt aus Pareigis [38], Theorem 17 und Korollar 19.

(6.3) Lemma Die Voraussetzungen seien wie in Satz (6.1) und $H \in$ HopfmonC. Dann sind ${}_H[H \otimes A, B] \underset{\Sigma}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} [A,B]$ funktorielle Isomorphismen, wobei

$\Gamma(f)\langle a\rangle = f\langle \eta_H \otimes a\rangle$ und $\Sigma(g)\langle h \otimes a\rangle = h_1(g\langle \lambda(h_2)a\rangle)$.

Beweis $(\Gamma\Sigma(g))\langle a\rangle = (\Sigma(g))\langle \eta_H \otimes a\rangle$

$= \eta_H(g\langle \lambda(\eta_H)a\rangle) = g\langle a\rangle$.

$(\Sigma\Gamma(f))\langle h \otimes a\rangle = h_1(\Gamma(f))\langle \lambda(h_2)a\rangle$

$= h_1(f\langle \eta_H \otimes \lambda(h_2)a\rangle)$

$= f\langle h_1(\eta_H \otimes \lambda(h_2)a)\rangle$ da $f \in {}_H[\dots]$

$= f\langle h_1\eta_H \otimes h_2\lambda(h_3)a\rangle$ wegen H-Struktur von $H \otimes H$

$= f\langle h_1 \otimes \varepsilon(h_2)a\rangle$ da λ Antipode

$= f\langle h_1\varepsilon(h_2) \otimes a\rangle$ da $\varepsilon(h_2) \in I$

$= f\langle h \otimes a\rangle$ da ε Koeinheit.

(6.4) Folgerung In diesem Falle ist P genau dann endlich (bzw. treuprojektiv) in ${}_H\underline{C}$, wenn es endlich (bzw. treuprojektiv) in $\underline{C}$ ist. Sei $S \in \underline{\mathrm{CMon}}({}_H\underline{C})$, $A \in \underline{\mathrm{CHopfmon}}({}_H\underline{C})$ und S ein A-Koobjekt-Monoid in ${}_H\underline{C}$. Dann ist S genau dann A-Galoissch über I in ${}_H\underline{C}$, wenn es A-Galoissch über I in $\underline{C}$ ist.

Beweis Die Behauptungen folgen unmittelbar aus Bemerkung (6.2) und Lemma (6.3).

(6.5) Beschreibung der "inneren Komposition". In $\underline{C}$ existiert, zum "inneren Hom-Funktor" [-,-] auch eine "innere Auswertung" α, nämlich:

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}([A,B],[A,B]) & \cong & \underline{C}([A,B]\otimes A,\ B) \\ \overset{\cup}{\mathrm{id}} & \longmapsto & (\alpha\colon f\otimes a \overset{\cup}{\longmapsto} f<a>). \end{array}$$

Hieraus ergibt sich eine "innere Komposition" κ, nämlich:

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}([B,C]\otimes[A,B]\otimes A,\ C) & \cong & \underline{C}([B,C]\otimes[A,B],\ [A,C]) \\ (f'\otimes f\otimes a \overset{\cup}{\longmapsto} f'<f<a>>) & \longmapsto & \overset{\cup}{\kappa}. \end{array}$$

In ${}_H\underline{C}$ bezeichnen wir nun die innere Auswertung (bzw. Komposition) mit α' (bzw. κ').

$$\begin{array}{ccc} {}_H\underline{C}({}_H[H\otimes A,\ B],\ {}_H[H\otimes A,\ B]) & \cong & {}_H\underline{C}({}_H[H\otimes A,\ B]\otimes A,\ B) \\ \overset{\cup}{\mathrm{id}} & \longmapsto & (\alpha'\colon g\otimes a \overset{\cup}{\longmapsto} g\langle a\rangle) \end{array}$$

also $\alpha' = \Psi(\mathrm{id})$. Dann gilt:

$$g\langle a\rangle = \alpha'(g\otimes a) = (\Psi(\mathrm{id}))(g\otimes a) = (\mathrm{id}(g))<\eta_H\otimes a>$$
$$= g<\eta_H\otimes a>.$$

$$\begin{array}{ccc} {}_H\underline{C}({}_H[H\otimes B,C]\otimes{}_H[H\otimes A,B]\otimes A,C) & \cong & {}_H\underline{C}({}_H[H\otimes B,C]\otimes{}_H[H\otimes A,B],{}_H[H\otimes A,C]) \\ (\beta\colon g'\otimes g\otimes a \overset{\cup}{\longmapsto} g'\langle g\langle a\rangle\rangle) & \longmapsto & \overset{\cup}{\kappa'} \end{array}$$

also $\kappa' = \Phi(\beta)$. Dann gilt:

$$(\kappa'(g'\otimes g))<h\otimes a> = (\Phi(\beta))(g'\otimes g)<h\otimes a>$$
$$= \beta(h(g'\otimes g)\otimes a) = \beta(h_1g'\otimes h_2g\otimes a)$$
$$= h_1g'\langle h_2g\langle a\rangle\rangle = h_1g'\langle h_2g<\eta_H\otimes a>\rangle$$
$$= h_1g'<\eta_H\otimes h_2g<\eta_H\otimes a>> = g'<h_1\otimes g<h_2\otimes a>>.$$

Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
{}_H[H \otimes B, C] \otimes {}_H[H \otimes A, B] \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[d, shift left, "\Gamma \otimes \Gamma"] & {}_H[H \otimes A, C] \arrow[d, shift left, "\Gamma"] \\
{[B, C] \otimes [A, B]} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[u, shift left, "\Sigma \otimes \Sigma"] & {[A, C]} \arrow[u, shift left, "\Sigma"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&((\Sigma\kappa(\Gamma \otimes \Gamma))(g' \otimes g)\langle h \otimes a\rangle \\
&= h_1((\kappa(\Gamma \otimes \Gamma)(g' \otimes g))\langle\lambda(h_2)a\rangle) \\
&= h_1(\Gamma g'\langle\Gamma g\langle\lambda(h_2)a\rangle\rangle) \\
&= h_1(g'\langle\eta_H \otimes \Gamma g\langle\lambda(h_2)a\rangle\rangle) \\
&= h_1(g'\langle\eta_H \otimes g\langle\eta_H \otimes \lambda(h_2)a\rangle\rangle) \\
&= g'\langle h_1\eta_H \otimes h_2 g\langle\eta_H \otimes \lambda(h_3)a\rangle\rangle && \text{da } g' \in {}_H[\ldots] \text{ und } (6.1) \\
&= g'\langle h_1 \otimes g\langle h_2\eta_H \otimes h_3\lambda(h_4)a\rangle\rangle && \text{da } g \in {}_H[\ldots] \text{ und } (6.1) \\
&= g'\langle h_1 \otimes g\langle h_2 \otimes \varepsilon(h_3)a\rangle\rangle && \text{da } \lambda \text{ Antipode} \\
&= g'\langle h_1 \otimes g\langle h_2 \otimes a\rangle\rangle && \text{da } \varepsilon \text{ Koeinheit} \\
&= (\kappa'(g' \otimes g))\langle h \otimes a\rangle && \text{siehe oben.}
\end{aligned}$$

<u>(6.6) Bemerkung</u> Seien $A, H \in$ <u>HopfmonC</u> und A kokommutativ. Dann ist $H \in \underline{\text{Hopfmon}_A C}$ vermöge $\rho: A \otimes H \longrightarrow H$ falls die 7 folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & I \otimes H \arrow[d, "\eta \otimes \mathrm{id}"] \\
H & A \otimes H \arrow[l, "\rho"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \rho"] \arrow[d, "\nabla \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & A \otimes H \arrow[d, "\rho"] \\
A \otimes H \arrow[r, "\rho"] & H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes H \otimes H \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \nabla"'] & A \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{III}"] & A \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[r, "\rho \otimes \rho"] & H \otimes H \arrow[d, "\nabla"] \\
A \otimes H \arrow[rrr, "\rho"] & & & H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes I \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \eta"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & I \arrow[d, "\eta"] \\
A \otimes H \arrow[r, "\rho"] & H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes H \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & H \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A \otimes I \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"] & I
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes H \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \lambda"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VII}"] & H \arrow[d, "\lambda"] \\
A \otimes H \arrow[r, "\rho"] & H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A\otimes H \arrow[rrr, "\rho"] \arrow[d, "id\otimes\Delta"'] \arrow[drrr, phantom, "\mathrm{VI}"] & & & H \arrow[d, "\Delta"] \\
A\otimes H\otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes id\otimes id"] & A\otimes A\otimes H\otimes H \arrow[r, "id\otimes\tau\otimes id"] & A\otimes H\otimes A\otimes H \arrow[r, "\rho\otimes\rho"] & H\otimes H
\end{tikzcd}$$

d.h.:

I: $\rho(1 \otimes h) = h$

II: $\rho(aa' \otimes h) = \rho(a \otimes \rho(a' \otimes h))$

III: $\rho(a \otimes hh') = \rho(a_1 \otimes h)\rho(a_2 \otimes h')$

IV: $\rho(a \otimes 1) = \varepsilon_A(a)$

V: $\varepsilon_H\rho(a \otimes h) = \varepsilon_A(a)\varepsilon_H(h)$

VI: $\Delta\rho(a \otimes h) = \rho(a_1 \otimes h_1) \otimes \rho(a_2 \otimes h_2)$

VII: $\lambda\rho(a \otimes h) = \rho(a \otimes \lambda(h))$

$\bigwedge X,Y,Z \in \underline{C}$, $h \in H(X)$, $h' \in H(Y)$, $a \in A(Z)$, $a' \in A(W)$.

Falls A kommutativ ist, gelten duale Bedingungen dafür, daß $H \in \underline{\text{Hopfmon}}^A\underline{C}$ vermöge $\psi: H \longrightarrow A \otimes H$ ist.

Das nächste Lemma, das wir für den Beweis von Satz (6.8) benötigen, ist für den Fall $\underline{C}$ = k-Mod bekannt, siehe z. B. Pareigis [40], Satz 2.5.

<u>(6.7) Lemma</u> Sei $H \in \underline{\text{HopfmonC}}$ und H kokommutativ. Dann ist $\lambda^2 = id$.

<u>Beweis</u> Sei $X \in \underline{C}$ und $h \in H(X)$. Dann gilt:

$\lambda^2(h) = \lambda^2(\varepsilon(h_1)h_2)$	da ε Koeinheit
$= \varepsilon(h_1)\lambda^2(h_2)$	
$= h_1\lambda(h_2)\lambda^2(h_3)$	da λ Antipode
$= h_1\lambda(\lambda(h_3)h_2)$	wegen Lemma (3.5)
$= h_1\lambda(\lambda(h_2)h_3)$	da H kokommutativ
$= h_1\lambda(\eta\varepsilon(h_2))$	da λ Antipode
$= h_1\varepsilon(h_2)$	da $\lambda\eta = \eta$
$= h$	da ε Koeinheit.

(6.8) Satz Sei $H \in \underline{\text{HopfmonC}}$.

(a) Falls H kokommutativ ist, ist $H \in \underline{\text{Hopfmon}_H\text{C}}$ vermöge

$\rho\colon H \otimes H \longrightarrow H\colon a \otimes h \longmapsto a_1 h\lambda(a_2)$.

(b) Falls H kommutativ ist, ist $H \in \underline{\text{Hopfmon}^H\text{C}}$ vermöge

$\psi\colon H \longrightarrow H \otimes H\colon h \longmapsto h_1\lambda(h_3) \otimes h_2$.

Beweis (a) Die 7 Bedingungen aus Bemerkung (6.6) sind nachzuweisen, also:

I: $\rho(1 \otimes h) = 1h\lambda(1) = h$.

II: $\rho(a \otimes \rho(a' \otimes h)) = \rho(a \otimes a'_1\lambda(a'_2))$

$= a_1 a'_1 h\lambda(a'_2)\lambda(a_2)$

$= a_1 a'_1 h\lambda(a_2 a'_2)$ wegen Lemma (3.5)

$= (aa')_1 h\lambda((aa'_2)) = \rho(aa' \otimes h)$.

III: $\rho(a \otimes hh') = a_1 hh'\lambda(a_2)$

$= a_1 h\varepsilon(a_2)h'\lambda(a_3)$ da ε Koeinheit

$= a_1 h\lambda(a_2)a_3 h'\lambda(a_4)$ da λ Antipode

$= \rho(a_1 \otimes h)\rho(a_2 \otimes h')$.

IV: $\rho(a \otimes 1) = a_1 1\lambda(a_2) = \varepsilon(a)$ da λ Antipode.

V: $\varepsilon\rho(a \otimes h) = \varepsilon(a_1 h\lambda(a_2))$

$= \varepsilon(a_1\lambda(a_2))\varepsilon(h) = \varepsilon(a)\varepsilon(h)$.

VI: $\Delta\rho(a \otimes h) = (\rho(a \otimes h))_1 \otimes (\rho(a \otimes h))_2$

$= (a_1 h\lambda(a_2))_1 \otimes (a_1 h\lambda(a_2))_2$

$= a_1 h_1(\lambda(a_3))_1 \otimes a_2 h_2(\lambda(a_3))_2$

$= a_1 h_1\lambda((a_3)_2) \otimes a_2 h_2\lambda((a_3)_1)$ wegen Lemma (3.5)

$= a_1 h_1\lambda(a_4) \otimes a_2 h_2\lambda(a_3)$

$= a_1 h_1\lambda(a_2) \otimes a_3 h_2\lambda(a_4)$ da H kokommutativ

$= \rho(a_1 \otimes h_1) \otimes \rho(a_2 \otimes h_2)$.

VII: $\lambda\rho(a \otimes h) = \lambda(a_1 h\lambda(a_2))$

$= \lambda^2(a_1)\lambda(h)\lambda(a_2)$ Lemma (3.5) und H kokomm.

$= a_1\lambda(h)\lambda(a_2)$ wegen Lemma (6.7)

$= \rho(a \otimes \lambda(h))$. (b) ist dual zu (a).

(6.9) Lemma Seien $H \in \underline{\mathrm{HopfmonC}}$, H kokommutativ, H endlich über I, $H \in \underline{\mathrm{Hopfmon}_H C}$ vermöge $\rho: H \otimes H \longrightarrow H$: $a \otimes h \longmapsto a_1 h\lambda(a_2)$, $H' \in {}_H\underline{C}$ und $i \in {}_H\underline{C}(H', H)$ ein Schnitt in $\underline{C}$. Dann ist H' genau dann ein Unterhopfmonoid von H in ${}_H\underline{C}$ wenn es ein normales Unterhopfmonoid von H in $\underline{C}$ ist.

Beweis Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz (5.3) und Satz (6.8).

(6.10) Folgerung Sei $A \in \underline{\mathrm{CHopfmonC}}$, A endlich über I, $H := A^*$, $S \in \underline{\mathrm{CMonC}}$ und sei S A-Galoissch über I. Dann ist S A-Galoissch über I in ${}_H\underline{C}$, wobei $S \in {}_H\underline{C}$ (bzw. $H \in {}_H\underline{C}$) vermöge β (bzw. ρ). Die Galois-Korrespondenz ist diejenige aus Folgerung (5.8).

Beweis Zur ersten Aussage müssen wir nur noch zeigen, daß die Operation β (oder α) mit der H-Struktur verträglich ist, d.h., daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
h \otimes (h' \otimes s) \arrow[d, mapsto] & \in & H \otimes (H \otimes S) \arrow[r, "id \otimes \beta"] \arrow[d] & H \otimes S \arrow[d, "\beta"] \\
\rho(h_1 \otimes h') \otimes \beta(h_2 \otimes s) & \in & H \otimes S \arrow[r, "\beta"] & S
\end{tikzcd}$$

Es gilt nun:

$$\beta(\rho(h_1 \otimes h') \otimes \beta(h_2 \otimes s)) = \beta(h_1 h'\lambda(h_2) \otimes \beta(h_3 \otimes s))$$
$$= \beta(h_1 h'\lambda(h_2)h_3 \otimes s) = \beta(h_1 h'\varepsilon(h_2) \otimes s)$$
$$= \beta(hh' \otimes s) = \beta(h \otimes \beta(h' \otimes s)).$$

Der Rest folgt jetzt aus Folgerung (6.4) und Lemma (6.9).

Aus Folgerung (6.10) erkennt man, daß die Konstruktionen dieses Kapitels auf sehr natürliche Weise in die Galois-Theorie hineinpassen, und Satz (5.3) zeigt, wie viel der Morphismus ρ aus Satz (6.8) mit dem Begriff der Normalität zu tun hat. In einem Spezialfall, nämlich für $H = kG'$ und $k \subset S$ eine separable Galoissche

Körpererweiterung, ist die Abbildung ρ die einzige, die die angegebenen Bedingungen erfüllt. Dazu dient dann Beispiel (6.11).

<u>(6.11) Beispiel</u> Sei $k \subset S$ eine endliche Körpererweiterung, G und G' Gruppen und $\underline{D} = kG'$-Mod mit der Struktur von Satz (6.1), mit $\underline{C}$ = k-Mod. Falls S kG^*-Galoissch über k in der Kategorie $\underline{D}$ ist, kann G' als Untergruppe von G aufgefaßt werden, und G' operiert auf G vermöge $g' \otimes g \longmapsto g'gg'^{-1} = g'_1 g \lambda(g'_2)$, also wie in Satz (6.8).

<u>Beweis</u> Nach Folgerung (6.4) ist S auch kG^*-Galoissch über k in der Kategorie $\underline{C}$ = k-Mod, also ist $G = \mathrm{Aut}_k(S)$, siehe Beispiel (2.3). Da $S \in$ <u>CMonD</u> ist, sind die Multiplikation und Einheit von S kG'-Modulmorphismen, und folglich operiert G' auf S durch Automorphismen. Wir können also ohne Einschränkung der Allgemeinheit (d.h. bis auf den Ineffektivitätskern der Operation von G' auf S) annehmen, daß G' eine Untergruppe von G ist. Seien nun $g' \in G'$, $g \in G$ und $x \in S$. Dann gilt:

$(g'(g))(g'(x))$

$= g'(g(x))$ da $\beta \in kG'\text{-Mod}(kG \otimes S, S)$

$= (g'g)(x)$ da $G' \subset G = \mathrm{Aut}_k(S)$

$= (g'gg'^{-1})(g'(x))$.

Durch die Wahl einer k-Basis von S folgt dann, daß $g'(g) = g'gg'^{-1}$ ist.

7. Spezialfall: Galois-Theorie von Ringen und Körpern

Dieses Kapitel dient hauptsächlich dazu, den Zusammenhang zwischen der oben entwickelten Galois-Theorie in monoidalen Kategorien und der klassischen Galois-Theorie zu erläutern. Das bedeutet zuerst, daß wir die Spezialisierung $\underline{C}$ = k-Mod betrachten, wie in Beispiel (2.3) und Beispiel (2.7), und dann, daß wir fragen, inwieweit die Galois-Theorie mit Gruppen oder Lie-Algebren zu der mit Hopfalgebren äquivalent ist. Satz (7.1) und Lemma (7.4) zeigen den Zusammenhang zwischen Untergruppen (bzw. Unter-Lie-Algebren) und Unterhopfalgebren. In Beispiel (7.7) und (7.8) wird die Bedeutung der Konstruktionen in Kapitel 6 für eine separable Körpererweiterung noch deutlicher. Schließlich wird etwas über die Struktur von Körpererweiterungen, die bezüglich einer punktierten Hopfalgebra Galoissch sind, gesagt.

<u>(7.1) Satz</u> Sei k ein kommutativer Ring, G eine Menge und $H \subset kG$ eine Unterkoalgebra, die als k-Modul direkter Summand ist. Weiterhin nehmen wir an, daß eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) k ist ein Körper.

(b) G ist endlich und k ist zusammenhängend (d.h. $e = e^2 \in k \Longrightarrow e \in \{0,1\}$).

Dann existiert eine Teilmenge $G' \subset G$ mit $H = kG'$. Falls G eine Gruppe ist, und H eine Unterhopfalgebra von kG, ist G' eine Untergruppe von G.

<u>Beweis</u> (a) Sei B eine punktierte Koalgebra und $A \subset B$ eine Unterkoalgebra. Dann ist A punktiert, siehe Sweedler [50] Seite 157. Sei nun $g \in G(A)$ (d.h. gruppenähnlich), und A^g die irreduzible Komponente von g in A.

Dann ist $A^g \subset B^g$, siehe Sweedler [50] Seite 163. Folglich ist $(kG)^g = kg$, denn aus Sweedler [50] (8.1.2) folgt: $\bigoplus_{g\in G} (kG)^g = kG = \bigoplus_{g\in G} kg$. Daraus folgt aber auch: $H = \bigoplus_{g\in G(H)} H^g$. Da $G(H) \subset G$ ist, folgt aus dem Obigen: $H^g \subset (kG)^g = kg$. Also ist $H = kG'$, mit $G' := G(H)$. Falls G eine Gruppe ist, ist G' unter der Multiplikation und der Antipode abgeschlossen, also eine Untergruppe von G.

(b) Nach Voraussetzung ist $kG \cong \bigoplus_{g\in G} kg$ als Koalgebra, also $kG^* \cong \prod_{g\in G} k_g$ als Algebra, und es gibt einen k-Modulmorphismus $\sigma: H^* \longrightarrow kG^*$ mit $p\sigma = id$, wobei p das Duale der Inklusion ist, also ein k-Algebrenmorphismus. Sei nun $\mathfrak{A} = Ke(p)$ und $\mathfrak{A}_g = pr_g(\mathfrak{A})$. Dann haben wir das folgende, kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
kG^* \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, shift right, "p"'] & \prod_{g\in G} k_g \arrow[r, shift left, "pr_g"] \arrow[d, shift right, "\prod p_g"'] & k_g \arrow[l, shift left, "inj_g"] \arrow[d, shift right, "p_g"'] \\
H^* \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, shift right, dashed, "\sigma"'] & \prod_{g\in G} k_g/\mathfrak{A}_g \arrow[r, shift left, "\overline{pr}_g"] \arrow[u, shift right, dashed, "\tilde{\sigma}"'] & k_g/\mathfrak{A}_g \arrow[l, shift left, "\overline{inj}_g"] \arrow[u, shift right, dashed, "\sigma_g"']
\end{tikzcd}$$

siehe z.B. Bourbaki [2] (I.8.10). σ_g ist ein k-Modul-Schnitt von p_g, also ist $k_g = \mathfrak{A}_g \oplus \sigma(k_g/\mathfrak{A}_g)$. Da k zusammenhängend ist, ist entweder $\mathfrak{A}_g = 0$ oder $\mathfrak{A}_g = k_g$. Folglich existiert eine Teilmenge $G' \subset G$ mit $H^* = \prod_{g\in G'} k_g$, also $H = kG'$. Der Rest folgt wie in Teil (a).

<u>(7.2) Beispiel</u> Sei k ein nicht zusammenhängender, kommutativer Ring, $k \ni e = e^2 \notin \{0,1\}$, $G = \{1,g\}$ eine Gruppe und $H = k\,1 \oplus keg$. Dann ist H eine Unterhopfalgebra

von kG, als k-Modul direkter Summand, aber nicht von der Form kG', $G' \subset G$.

<u>Beweis</u> H ist offensichtlich eine Unterhopfalgebra von kG, und ein k-Modul-direkter Summand vermöge $kG \longrightarrow H$: $x \cdot 1 + yg \longmapsto x \cdot 1 + yeg$. Die letzte Behauptung ist auch klar, da $\{1\}$ die einzige echte Untergruppe von G ist, und $k\{1\} \subsetneqq H \subsetneqq kG$.

<u>(7.3) Folgerung</u> Sei k ein zusammenhängender, kommutativer Ring und $k \subset S$ eine separable Ringerweiterung. Dann entspricht die Galois-Theorie von Chase, Harrison und Rosenberg [10] mit einer Gruppe G genau der Galois-Theorie mit der Hopfalgebra kG.

<u>Beweis</u> Die "Gleichheit" der Unterobjektverbände von G und kG folgt aus Satz (7.1), die der Fixobjekte aus Beispiel (2.7) und die des Begriffs "Galoissch" aus Beispiel (2.3).

<u>(7.4) Lemma</u> Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, L eine p-Lie-Algebra, $U^p(L)$ die universelle p-Hülle von L, und $H \subset U^p(L)$ eine Unterhopfalgebra. Dann existiert eine Unter-Lie-Algebra $L' \subset L$ mit $H = U^p(L')$.

<u>Beweis</u> Nach Voraussetzung ist $U^p(L)$ kokommutativ und irreduzibel, also auch H. Nach Sweedler [50] Proposition 13.2.3 gilt: $\bigwedge x \in (U^p(L))^*$ ist $x^p \in k$. Sei nun $i \in \text{Hopfalg}(H, U^p(L))$ die Inklusion und $r \in k\text{-Mod}(U^p(L), H)$ eine Retraktion von i. Für jedes $y \in H^*$ gilt dann: $y^p = (yri)^p = (yr)^p i \in k$. Die Bedingung "Höhe" oder "Exponent" = 1 in Sweedler [50] Proposition 13.2.3 ist also auch für H erfüllt, also ist $H = U^p(L')$. Wenn P(H) die Menge der primitiven Elemente von H bezeichnet, gilt: $L' = P(H) \subset P(U^p(L)) = L$, also ist L' eine Unter-Lie-Algebra.

(7.5) Folgerung Sei k ein Körper und $k \subset S$ eine rein inseparable Körpererweiterung. Dann entspricht die Galois-Theorie von Jacobson [26] mit einer p-Lie-Algebra L genau der Galois-Theorie mit der Hopfalgebra $U^p(L)$.

Beweis Die Behauptung ist analog zu (7.3), wobei man aber beachten muß, daß die "Lie-Algebra" in Jacobson [26] eigentlich die Menge $S \otimes_k L$ ist.

(7.6) Lemma Sei H eine endliche Gruppenalgebra über einem zusammenhängenden, kommutativen Ring k (bzw. die p-universelle Hülle einer endlich dimensionalen p-Lie-Algebra über einem Körper k). Sei $H' \subset H$ eine Unterhopfalgebra, die als k-Modul direkter Summand ist. Dann ist H' genau dann normal in H, wenn es von einem Normalteiler (bzw. einem p-Lie-Ideal) herrührt.

Beweis Wir benutzen Satz (5.3), Satz (7.1), Lemma (7.4) und die Beobachtung, daß, für $g \in G$, $h \in G'$, $a \in L$ und $b \in L'$ gilt: $g_1 h\lambda(g_2) = ghg^{-1}$ und $a_1 b\lambda(a_2) = ab - ba = [a,b]$.

(7.7) Beispiel Sei $k \subset S$ eine endliche, separable, Galoissche Körpererweiterung und $G = \mathrm{Aut}_k(S)$. Wir definieren die symmetrischen abgeschlossenen monoidalen Kategorien $\underline{C}$ = k-Mod und $\underline{D}$ = kG-Mod, wobei $\underline{D}$ die in Satz (6.1) angegebene Struktur trägt. Die Galois-Korrespondenz, in der Kategorie $\underline{D}$ betrachtet, ist dann die übliche Bijektion zwischen allen Normalteilern von G und allen Zwischenkörpern $k \subset S' \subset S$, die über k Galoissch sind.

Beweis Siehe Folgerung (5.8), Folgerung (6.10), Folgerung (7.3) und Lemma (7.6).

(7.8) Beispiel In diesem Beispiel untersuchen wir eine Galoissche Körpererweiterung in der Kategorie $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$-Mod. Nach Folgerung (6.4) läuft das darauf hinaus, daß wir eine Galoissche Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset K$ in der Kategorie $\mathbb{Q}$-Mod nehmen und dann eine $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$-Struktur angeben.

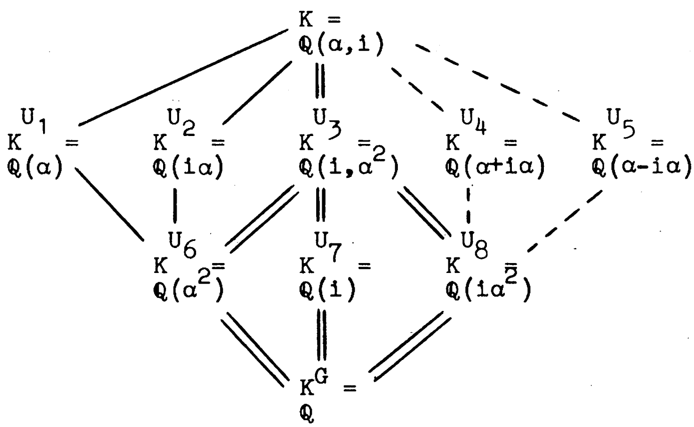
Die Körpererweiterung: Als K nehmen wir den Zerfällungskörper von $X^4 - 2$, siehe Lang [54], Seite 200. α bezeichnet eine reelle Wurzel des Polynoms, $i = \sqrt{-1}$, und σ und τ Automorphismen, definiert durch $\tau(\alpha) = \alpha$, $\tau(i) = -i$, $\sigma(i) = i$ und $\sigma(\alpha) = i\alpha$. Dann wird die Galois-Gruppe von σ und τ erzeugt, und ist isomorph zur Diedergruppe D_4. Die Untergruppen von G sind $U_0 := \{1\}$, $U_1 := \{1,\tau\}$, $U_2 := \{1,\sigma^2\tau\}$, $U_3 := \{1,\sigma^2\}$, $U_4 := \{1,\sigma\tau\}$, $U_5 := \{1,\sigma^3\tau\}$, $U_6 := \{1,\sigma^2,\tau,\sigma^2\tau\}$, $U_7 := \{1,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$, $U_8 := \{1,\sigma^2,\sigma\tau,\sigma^3\tau\}$ und G.

Die $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$-Struktur wird von der Aussage in Beispiel (6.11) bestimmt. Das heißt, daß $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ entweder trivial operiert, oder wie eine der Untergruppen U_1 bis U_5. U_i operiert auf K durch Automorphismen und auf $\mathbb{Q}G$ durch Konjugation.

Die Galois-Korrespondenz in der Kategorie $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$-Mod wird ähnlich beschrieben wie in Beispiel (7.7). Eine Unterhopfalgebra $\mathbb{Q}G'$ von $\mathbb{Q}G$ ist genau dann ein Unterhopfmonoid von $\mathbb{Q}G$ in der Kategorie $\mathbb{Q}U_i$-Mod, wenn $\mathbb{Q}G'$ unter der Operation von $\mathbb{Q}U_i$ global invariant ist, d.h. wenn G' unter Konjugation durch Elemente von U_i in sich übergeführt wird. Ein Zwischenkörper K' von $\mathbb{Q} \subset K$ ist genau dann ein Zwischenmonoid von $\mathbb{Q} \subset K$ in der Kategorie $\mathbb{Q}U_i$-Mod, wenn K' unter der Operation von U_i global invariant ist, d.h. wenn K' durch die Elemente von U_i in sich übergeführt wird. Welche Untergruppen (bzw. Zwischenkörper) beim Übergang von der Galois-Korrespondenz in $\mathbb{Q}$-Mod zu der in $\mathbb{Q}U_i$-Mod ausgewählt werden, läßt sich anhand der folgenden zwei Tabellen sehen. In der ersten Tabelle ist ε = + falls U_i unter Konjugation durch alle Elemente von U_j global invariant ist, ε = 0 sonst.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	G
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	+	+	+	0	0	+	0	0	0
2	+	+	+	+	0	0	+	0	0	0
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	0	0	+	+	+	0	0	+	0
5	+	0	0	+	+	+	0	0	+	0
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
G	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

	j
i	ε



Wenn wir als $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$-Struktur z.B. die U_1 nehmen, dann werden genau diejenigen Unterobjekte ausgewählt, die unter der komplexen Konjugation global invariant sind.

<u>(7.9) Lemma</u> Sei k ein Körper und H eine Hopfalgebra von der Form $H = H^1 \otimes kG(H)$, wobei H^1 die irreduzible Komponente von 1 und G(H) die Menge der gruppenähnlichen

Elemente von H bezeichnet. Sei $H' \subset H$ eine Unterhopfalgebra. Dann ist $H' = (H')^1 \otimes kG(H')$, wobei $(H')^1 \subset H^1$ (bzw. $G(H') \subset G(H)$) eine Unterhopfalgebra (bzw. eine Untergruppe) ist.

Beweis Nach der Bemerkung von Sweedler [50], Seite 177 gilt: $H' = (H')^1 \# kG(H')$ und $G(H') \subset G(H)$ ist eine Untergruppe. Nach Sweedler [50] Theorem 8.0.5 und Korollar 8.0.8 ist $(H')^1 \subset H$ punktiert irreduzibel und folglich ist $(H')^1 \subset H^1$. Also vererbt sich die komponentenweise Struktur, d.h. $H' = (H')^1 \# kG(H') = (H')^1 \otimes kG(H')$.

(7.10) Satz Sei H eine endliche, kokommutative, punktierte k-Hopfalgebra, $k \subset K$ eine Körpererweiterung, und sei K H^*-Galoissch über k. Dann ist $K = L \otimes_k M$, wobei L rein inseparabel und M separabel Galoissch über k ist. Jeder Zwischenkörper $k \subset K' \subset K$ in der Galois-Korrespondenz ist von der Form $K' = L' \otimes_k M'$, mit $k \subset L' \subset L$ und $k \subset M' \subset M$.

Beweis Nach Sweedler [50] Theorem 10.2.3 ist $H = H^1 \# kG(H)$ und $K = L \otimes_k M$, wobei $L := K^{kG}$ rein inseparabel und $M := K^{H^1}$ separabel Galoissch ist. Da L (bzw. M) $(H^1)^*$-Galoissch (bzw. kG^*-Galoissch) über k ist, prüft man leicht nach, daß $K = L \otimes_k M$ $(H^1 \otimes kG)^*$-Galoissch über k ist. Wir können also ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $H = H^1 \# kG = H^1 \otimes kG$ ist. Die Behauptung über K' folgt jetzt aus Lemma (7.9).

Der letzte Satz besagt, daß eine Körpererweiterung, die mit einer punktierten Hopfalgebra Galoissch ist, in ein Tensorprodukt von einem separablen mit einem rein inseparablen Anteil zerfällt. Über den nicht punktierten

Fall, und damit über die Frage, ob alle A-Galoisschen Körpererweiterungen so zerfallen müssen, scheint recht wenig bekannt zu sein. Im allgemeinen ist der "gemischte Fall" einer A-Galoisschen Ring- oder Körpererweiterung, die also nicht notwendigerweise separabel oder rein inseparabel ist, relativ wenig behandelt worden.

8. Topologische Tensorprodukte

In diesem Kapitel werden zunächst einige Topologien auf dem Tensorprodukt zweier hausdorffschen, lokalkonvexen, topologischen Vektorräume definiert, und allgemeine Eigenschaften angegeben. Dann fragen wir uns, ob eine Kategorie topologischer Vektorräume existiert, in der auch unendlich dimensionale Räume "endlich" im Sinne von Definition (1.4) sein können. Anhand einiger Beispiele der nicht-Existenz sehen wir dann, welche Bedingungen erfüllt werden müssen.

(8.1) Bezeichnung $\mathbb{K}$ bezeichnet entweder den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, oder der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

HfLk := Kategorie der hausdorffschen, lokalkonvexen, topologischen Vektorräume über $\mathbb{K}$, mit linearen, stetigen Abbildungen als Morphismen.

Seien nun E, F, G $\in$ HfLk.

$\mathcal{P}(E)$:= Potenzmenge von E.

$\mathcal{B}(E) := \{X \subset E: X \text{ ist beschränkt}\}$.

$\mathcal{E}(E) := \{X \subset E: X \text{ ist beschränkt und endlich dimensional}\}$.

$\mathcal{K}(E) := \{X \subset E: \bigvee K \subset E, K \text{ kompakt}, X \subset K\}$.

$\mathrm{Bilin}(E \times F, G) := \{f \in \mathrm{Abb}(E \times F, G): f \text{ ist bilinear}\}$.

$\mathfrak{U}_0(E) := \{X \subset E: X \text{ ist Nullumgebung}\}$.

$\mathcal{L}(E,F) := \{f \in \mathrm{Abb}(E,F): f \text{ ist linear und stetig}\}$.

$\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ wie in Bourbaki [4] (III, 3, 1).

$\mathcal{L}_\beta(E,F)$ (bzw. $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$, $\mathcal{L}_\kappa(E,F)$) falls $\mathfrak{S} = \mathcal{B}(E)$ (bzw. $\mathfrak{S} = \mathcal{E}(E)$, $\mathfrak{S} = \mathcal{K}(E)$).

Die folgende Definition wurde aus Schwartz [45], Seite 9 entnommen. Falls $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ beschränkt sind, stimmt sie mit der üblichen Definition, Bourbaki [4] (III,4,2) überein, wie man aus dem nächsten Lemma (8.3) schließt.

(8.2) Definition Seien $E,F,G \in$ HfLk, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(E)$, $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(F)$. $f \in \mathrm{Bilin}(E \times F, G)$ heißt $(\mathfrak{S},\mathfrak{T})$-hypostetig, falls $\bigwedge S \in \mathfrak{S}, \bigwedge T \in \mathfrak{T}$: $f|_{S \times F}$ und $f|_{E \times T}$ stetig sind.

(8.3) Lemma Seien $E,F,G \in$ HfLk, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}(E)$, $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{B}(F)$, $\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} S = E$, $\bigcup_{T\in\mathfrak{T}} T = F$, $f \in \mathrm{Bilin}(E \times F, G)$, und f getrennt stetig. Dann sind äquivalent:

(a) f ist $(\mathfrak{S},\mathfrak{T})$-hypostetig.

(b) (i) $\bigwedge W\in\mathfrak{U}_0(G) \bigwedge S\in\mathfrak{S} \bigvee V\in\mathfrak{U}_0(F)\ [f(S\times V)\subset W]$ und

(ii) $\bigwedge W\in\mathfrak{U}_0(G) \bigwedge T\in\mathfrak{T} \bigvee V\in\mathfrak{U}_0(E)\ [f(V\times T)\subset W]$.

(c) (i) $\bigwedge S\in\mathfrak{S}$ ist $f(S\times -)\subset\mathfrak{L}(F,G)$ gleichgradig stetig und

(ii) $f'\in\mathrm{Abb}(E,\mathfrak{L}_{\mathfrak{T}}(F,G))$: $f'(x)(y) = f(x,y)$ ist stetig.

Beweis Die Behauptung "(a) ==> (b)" (bzw. "(b) ==> (a)", "(b) <==> (c)") folgt direkt aus Bourbaki [4] (III,4,ex.2), (bzw. (III,4,2,prop.4), (III,4,2,prop.3)).

(8.4) Bezeichnung Seien $E,F,G \in$ HfLk, $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{P}(E)$, $\mathfrak{T}\subset\mathfrak{P}(F)$.

$\mathfrak{H}^{(\mathfrak{S},\mathfrak{T})}(E\times F,G) := \{f\in\mathrm{Bilin}(E\times F,G)\colon f \text{ ist } (\mathfrak{S},\mathfrak{T})\text{-hypostetig}\}$.

$\mathfrak{L}^{(\mathfrak{S})}(E,\mathfrak{L}_{\mathfrak{T}}(F,G)) := \{f\in\mathfrak{L}(E,\mathfrak{L}_{\mathfrak{T}}(F,G))\colon \bigwedge S\in\mathfrak{S} \text{ ist } f(S\times -) \subset$
$\subset \mathfrak{L}(F,G) \text{ gleichgradig stetig}\}$.

(8.5) Satz Seien $E,F \in$ HfLk, $\mathfrak{S}\subset \mathfrak{P}(E)$, $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(F)$ und $\mathfrak{S},\mathfrak{T}$ gesättigt, siehe Bourbaki [4] (III,3,ex.2).

(a) Auf $E \otimes F$ existiert genau eine Topologie $E \otimes_{(\mathfrak{S},\mathfrak{T})} F$ derart, daß gilt:

$\mathfrak{L}(E \otimes_{(\mathfrak{S},\mathfrak{T})} F, G) \cong \mathfrak{H}^{(\mathfrak{S},\mathfrak{T})}(E \times F, G)\ \bigwedge G \in$ HfLk.

Sie ist die feinste HfLk-Topologie, für die die kanonische Abbildung $E \times F \longrightarrow E \otimes F$ $(\mathfrak{S},\mathfrak{T})$-hypostetig ist. Seien $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}(E)$, $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{B}(F)$. Dann gilt:

(b) $\mathfrak{L}(E \otimes_{(\mathfrak{S},\mathfrak{T})} F, G) \cong \mathfrak{L}^{(\mathfrak{S})}(E, \mathfrak{L}_{\mathfrak{T}}(F,G))$.

Beweis (a) ist eine bekannte Aussage, siehe Schwartz [45], Seite 9 und Grothendieck [22], Seite 74. (b) folgt aus (a) und Lemma (8.3).

Bemerkung Teil (a) des Satzes ist auch gültig für $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(F)$ mit $\mathfrak{T} \not\subset \mathfrak{B}(F)$, obwohl die Topologie auf $\mathfrak{L}_{\mathfrak{T}}(F,G)$ nicht mehr mit der Vektorraumstruktur verträglich ist.

(8.6) Beispiele

$E \otimes_\pi F$, das projektive Tensorprodukt, wird definiert durch $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}(E)$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(F)$. Es gilt:
$\mathfrak{L}(E \otimes_\pi F, G) = \{f \in \mathrm{Bilin}(E \times F, G): f \text{ stetig}\}$.

$E \otimes_\iota F$, das induktive Tensorprodukt, wird definiert durch $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}(E)$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}(F)$. Es gilt:
$\mathfrak{L}(E \otimes_\iota F, G) = \{f \in \mathrm{Bilin}(E \times F, G): f \text{ getrennt stetig}\}$.

$E \otimes_\beta F$, wird definiert durch $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(E)$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}(F)$.

$E \otimes_\kappa F$, wird definiert durch $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}(E)$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{K}(F)$.

(8.7) Satz HfLk ist eine symmetrische, abgeschlossene, monoidale Kategorie. Insbesondere gelten,

$\bigwedge E,F,G \in$ HfLk:

(a) $E \otimes_\iota \mathbb{K} \cong E$.

(b) $(E \otimes_\iota F) \otimes_\iota G \cong E \otimes_\iota (F \otimes_\iota G)$.

(c) $E \otimes_\iota F \cong F \otimes_\iota E$.

(d) $\mathfrak{L}(E \otimes_\iota F, G) \cong (E, \mathfrak{L}_\sigma(F,G))$.

Beweis (a) Behauptung: $E \otimes_\iota \mathbb{K} \cong E \otimes_\pi \mathbb{K} \cong E$. Sei $u \in \mathrm{Bilin}(E \times \mathbb{K}, G)$ getrennt stetig und $W \in \mathfrak{U}_0(G)$. Dann existiert ein $U \in \mathfrak{U}_0(E)$ mit $u(U,1) \subset W$. Sei $y \in \mathbb{K}$ mit $|y| < 1$. Dann gilt: $u(U,y) = u(yU,1) \subset u(U,1)$, da u bilinear und U kreisförmig ist. Also ist $u(U,K_1(\mathbb{K})) \subset W$, wobei $K_1(\mathbb{K})$ die offene Einheitskugel von $\mathbb{K}$ ist. Folglich

ist u sogar stetig und deshalb ist $E \otimes_\iota \mathbb{K} \cong E \otimes_\pi \mathbb{K}$.
Der kanonische Vektorraumisomorphismus $l\colon E \otimes_\pi \mathbb{K} \longrightarrow E$ mit $l(x \otimes y) = xy$ ist auch ein Homöomorphismus, weil die Topologie auf $E \otimes_\pi \mathbb{K}$ durch die Tensorprodukte der stetigen Halbnormen p auf E mit der Norm auf $\mathbb{K}$ definiert werden kann, und $(p \otimes |-|)(x \otimes y) = p(x)|y| = p(xy) = pl(x \otimes y)$.

(b) Sei $H \in$ <u>HfLk</u>. Die Stetigkeit von einem $u \in \mathrm{Lin}((E \otimes_\iota F) \otimes_\iota G, H)$ ist äquivalent zur getrennt-Stetigkeit von dem entsprechenden $u_1 \in \mathrm{Bilin}((E \otimes_\iota F) \times G, H)$, d.h. zur Stetigkeit von $u_1(x,-)\colon G \longrightarrow H$ und $u_1(-,g)\colon E \otimes_\iota F \longrightarrow H$ für alle $x \in E \otimes F$ und $g \in G$. Dies ist wiederum äquivalent zur getrennt-Stetigkeit von $u_2 \in \mathrm{Trilin}(E \times F \times G, H)$, d.h. zur Stetigkeit von $u_2(e,f,-)\colon G \longrightarrow H$, $u_2(e,-,g)\colon F \longrightarrow H$ und $u_2(-,f,g)\colon E \longrightarrow H$, für alle $e \in E$, $f \in F$ und $g \in G$, wie man folgendermaßen sieht: Die Stetigkeit von $u_1(-,g)\colon E \otimes_\iota F \longrightarrow H$ ist äquivalent zur getrennt-Stetigkeit von $u_2(-,-,g)\colon E \times F \longrightarrow H$ und $u_1(x,-) = u_1(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i, -) = \Sigma u_1(e_i \otimes f_i, -) = \Sigma u_2(e_i, f_i, -)$, und endliche Summen von stetigen Abbildungen sind wieder stetig. Durch analoge Argumentation ist das äquivalent zur Stetigkeit von $u \in \mathrm{Lin}(E \otimes_\iota (F \otimes_\iota G), H)$.

(c) folgt sofort aus der Symmetrie der entsprechenden Definition.

(d) folgt aus (8.5)(b) und der Tatsache, daß $\mathfrak{L}_\sigma(F,G)$ aus <u>HfLk</u> ist.

(e) Alle "Kohärenz"-Bedingungen in der Definition einer monoidalen Kategorie gelten wie in der Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume, da wir hier mit den gleichen kanonischen

Isomorphismen zu tun haben.

(8.8) Beispiel Sei $E \in \underline{\mathrm{HfLk}}$ endlich im Sinne von Definition (1.4). Dann ist E endlich dimensional.

Beweis "Endlichkeit" heißt hier, daß der kanonische Morphismus $E \otimes_\iota E'_\sigma \longrightarrow \mathcal{L}_\sigma(E,E)\colon x \otimes y \longrightarrow (z \longmapsto xy(z))$ ein Isomorphismus ist. Da das Bild dieser Abbildung nur aus Operatoren endlichen Ranges besteht, muß auch id_E endlichen Rang haben, also ist E endlich dimensional.

Wenn der Begriff "endlich" mehr als nur endlich dimensionale Räume umfassen soll, muß die monoidale Struktur mehr sein, als nur eine Topologie auf dem Tensorprodukt. Eine sehr naheliegende Möglichkeit ist das vollständige Tensorprodukt von Banachräumen, das wir im nächsten Beispiel anschauen wollen.

(8.9) Beispiel Sei $\underline{\mathrm{Ban}}$ (bzw. $\underline{\mathrm{Ban}_1}$) die Kategorie der Banachräume mit stetigen, linearen Abbildungen (bzw. stetigen Kontraktionen) als Morphismen und $E \hat{\otimes}_\pi F$ die Vervollständigung des projektiven Tensorproduktes. Dann gilt:

(a) $\underline{\mathrm{Ban}}$ und $\underline{\mathrm{Ban}_1}$ sind symmetrische, abgeschlossene, monoidale Kategorien. Insbesondere gilt:

$\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F, G) \cong \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_\beta(F,G))$ und

$\mathcal{L}_1(E \hat{\otimes}_\pi F, G) \cong \mathcal{L}_1(E, \mathcal{L}_\beta(F,G)) \quad \bigwedge E,F,G \in \underline{\mathrm{Ban}}.$

(b) Falls E endlich in $\underline{\mathrm{Ban}}$ oder $\underline{\mathrm{Ban}_1}$ im Sinne von Definition (1.4) ist, ist E endlich dimensional.

Beweis (a) ist bekannt, siehe z.B. Semadeni [48], und kann auch direkt mit Hilfe der entsprechenden Normen gezeigt werden.

(b) Falls E endlich ist, ist $\hat{\xi}$ in dem folgenden, kommutativen Diagramm surjektiv.

$$\begin{tikzcd} E \otimes_\pi E'_\beta \arrow[drr, "\hat{\xi}"] & & \\ E \otimes_\pi E'_\beta \arrow[u] \arrow[rr, "\xi"] & & \mathcal{L}_\beta(E,E) \end{tikzcd}$$

$Bi(\xi)$, die Menge der Operatoren endlichen Ranges, ist enthalten in der Menge der kompakten Operatoren, die aber abgeschlossen ist, siehe Schäfer [44], Seite 98 und 110. Also ist $id_E \in Bi(\hat{\xi})$ auch kompakt, und deswegen ist E endlich dimensional.

Das nicht-Funktionieren des letzten Beispiels hat zwei Gründe: 1) $E \otimes E'_\beta$ ist nicht dicht in $\mathcal{L}_\beta(E,E)$, und 2) Die Topologie auf $E \otimes_\pi E'_\beta$ ist im allgemeinen echt feiner als die Unterraumtopologie $E \otimes_\varepsilon E'_\beta$ (siehe Köthe [29]). Daß eine Untersuchung des "schwachen Tensorproduktes" $E \otimes_\varepsilon F$ im Hinblick auf nicht-triviale endliche Objekte in der Kategorie $\underline{\mathrm{Ban}}_1$ sinnlos ist, sieht man mit dem nächsten Satz.

<u>(8.10) Satz</u> $\underline{\mathrm{Ban}}_1$ besitzt keine monoidale Struktur, für die unendlich dimensionale endliche Objekte existieren.

<u>Beweis</u> Semadeni und Wiweger [49] haben einen Satz von Eilenberg-Watts für Banachräume bewiesen, der besagt, daß jeder Funktor, der Limites (bzw. Kolimites) erhält, schon isomorph zu einem $\mathcal{L}_\beta(E,-)$ (bzw. $- \hat{\otimes}_\pi E$) ist. Somit sind wir in der Situation vom letzten Beispiel.

Nachdem wir jetzt gesehen haben, daß "endliche" Banachräume endlich dimensional sein müssen, wollen wir uns der Frage zuwenden, inwieweit das projektive Tensorprodukt für uns überhaupt nutzlich ist. Dazu dient der nächste Satz.

(8.11) Satz Sei $\underline{C}$ eine volle Unterkategorie von $\underline{\mathrm{HfLk}}$, $E \in \underline{C}$, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}(E)$ und $\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S = E$. Sei weiterhin $- \otimes_\pi E: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ linksadjungiert zu $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,-)$. Dann ist E normierbar und $E'_{\mathfrak{S}} \cong E'_{\beta}$.

Beweis Aus der Adjungiertheit der zwei Funktoren folgt, daß die folgende kanonische Abbildung stetig ist:

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}(E'_{\mathfrak{S}}, E'_{\mathfrak{S}}) & \cong & \underline{C}(E'_{\mathfrak{S}} \otimes_\pi E, \mathbb{K}), \quad \text{mit } k(y \otimes x) = y(x). \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathrm{id} & \longrightarrow & k \end{array}$$

Aus der universellen Eigenschaft des projektiven Tensorproduktes folgt dann, daß die Auswertung $E'_{\mathfrak{S}} \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig ist. Die Behauptung folgt jetzt aus Bourbaki [4] (IV,3,ex.2).

An dieser Stelle möchten wir uns fragen, ob der "innere Hom-Funktor" $[E,-]$ immer die Form $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,-)$ haben muß. Aus dem nächsten Satz sieht man, daß dies nicht ganz der Fall ist: Die Topologie kann etwas allgemeiner sein.

(8.12) Satz Sei $\underline{C}$ eine abgeschlossene Kategorie von topologischen Vektorräumen. Dann läßt sich $[E,-]$ als $\mathcal{L}(E,-)$ mit einer geeigneten Topologie darstellen.

Beweis Da $\mathbb{K}$ die feinste Topologie trägt, haben wir die folgenden Isomorphismen von (Mengen-wertigen) Funktoren:
$[E,F] \cong \mathcal{L}(\mathbb{K}, [E,F]) \cong \mathcal{L}(\mathbb{K} \otimes E, F) \cong \mathcal{L}(E,F)$.

Bemerkung Daß die "geeignete Topologie" auf $\mathcal{L}(E,F)$ nicht immer eine $\mathfrak{S}$-Topologie ist, sieht man an dem Beispiel der tonnelierten Räume in Kapitel 10. Dort handelt es sich um eine Verfeinerung (assoziierte tonnelierte Topologie) der feinsten $\mathfrak{S}$-Topologie (Topologie der beschränkten Konvergenz).

Bei unseren Bemühungen, eine monoidale Kategorie topologischer Vektorräume zu finden, in der auch unendlich dimensionale "endliche" Räume existieren, haben wir folgendes erkannt: 1) Die monoidale Struktur soll mehr als nur ein topologisches Tensorprodukt sein. 2) Wir dürfen uns nicht auf das projektive Tensorprodukt von Banachräumen beschränken. Um eine abgeschlossene monoidale Kategorie zu bekommen, werden wir uns auf eine Klasse von Räumen beschränken, für die $\mathcal{L}^{(\mathfrak{S})}(E,-) = \mathcal{L}(E,-)$ gilt. Die Räume werden also zwei Eigenschaften haben, eine Vollständigkeits-Eigenschaft und die soeben genannte. Diese dürfen aber nicht beliebig sein, z.B. muß sich die Vollständigkeits-Eigenschaft von G auf $\mathcal{L}_{\mathfrak{T}}(F,G)$ vererben. Wie wir auch sehen werden, müssen die zwei Eigenschaften in einem gewissen Sinne miteinander verträglich sein. Dieser Verträglichkeits-Begriff wird im nächsten Kapitel behandelt, und anschließend die Kategorie der quasivollständigen, tonnelierten Räume, die die obengenannten Bedingungen ausgezeichnet erfüllt.

9. Ein Verträglichkeits-Begriff für Funktoren

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, daß unsere Kategorie lokalkonvexer Räume zwei Eigenschaften, eine Vollständigkeits-Eigenschaft und eine andere, noch zu nennende, haben soll. Diese zwei Eigenschaften müssen eine Verträglichkeits-Bedingung erfüllen, die in diesem Kapitel behandelt wird. Eine solche Verträglichkeits-Frage ist in der Literatur schon aufgetreten, zum Beispiel in der folgenden Situation: Frölicher und Jarchow [20] stellten zwei Fragen, nämlich: 1) Ist die Vervollständigung eines Kelley-Raumes wieder ein Kelley-Raum, und 2) Ist die Kelleyfizierung eines vollständigen Raumes wieder vollständig? Ein Gegenbeispiel dazu wurde von Haydon [24] gefunden, und S. Dierolf [15] zeigte, in einer allgemeinen Situation in der Kategorie der (lokalkonvexen) topologischen Vektorräume, daß die zwei Fragen zueinander äquivalent sind. Von diesem Satz angeregt, haben wir Satz (9.3) formuliert und bewiesen. Er ist von allgemeiner (kategorientheoretischer) Natur, und läßt sich in den folgenden Kapiteln gut anwenden.

Der folgende Satz charakterisiert eine gewisse Art Unterkategorie, die in den Anwendungen sehr häufig vorkommt. Dabei heißt eine Unterkategorie $\underline{D} \subset \underline{C}$ epireflektiv, wenn $\underline{D}$ reflektiv mit einem epimorphen Reflektor ist. $\underline{D}$ heißt stark abgeschlossen bezüglich Bildung von Limites wenn Produkte, und Differenzkerne von Diagrammen $A \rightrightarrows B$, mit $A \in \underline{D}$, $B \in \underline{C}$, wieder in $\underline{D}$ liegen.

<u>(9.1) Satz</u> Sei $\underline{C}$ vollständig, lokal klein und kollein und $\underline{D}$ eine volle, Isomorphie-abgeschlossene

Unterkategorie von $\underline{C}$. Dann sind äquivalent:

(a) $\underline{D}$ ist epireflektiv in $\underline{C}$.

(b) $\underline{D}$ ist stark abgeschlossen bezüglich Bildung von Limites in $\underline{C}$.

Beweis Siehe Herrlich [25], (10.2.1).

Das nächste Lemma stellt den Zusammenhang zwischen dem obigen Begriff und dem von S. Dierolf [15] her. Wir nennen eine Unterkategorie bimorreflektiv (bzw. bimorkoreflektiv) wenn der Reflektor (bzw. Koreflektor) ein Bimorphismus (Epimorphismus und Monomorphismus) ist. So vermeiden wir die Zweideutigkeit des Wortes "bireflektiv" bei Herrlich [25].

(9.2) Lemma Sei $\underline{D}$ eine volle Unterkategorie von $\underline{C}$, der Kategorie der (lokalkonvexen) topologischen Vektorräume. Dann sind äquivalent:

(a) $\underline{D}$ ist bimorreflektiv (bzw. bimorkoreflektiv) in $\underline{C}$.

(b) $\underline{D}$ wird definiert durch eine Eigenschaft, die sich auf Produkte und lineare Teilräume vererbt, und die die gröbste Topologie besitzt (bzw. sich auf lineare (lokalkonvexe) direkte Summen und Quotienten vererbt, und die die feinste Topologie besitzt).

Beweis "(a) ==> (b)": Die Bimorphismen in $\underline{C}$ sind die bijektiven Morphismen. Das Vererben auf Produkte und lineare Teilräume folgt aus dem letzten Satz (stark abgeschlossen). Da der Reflektor global definiert ist, muß ein Raum mit der gröbsten Topologie schon in $\underline{D}$ sein, weil der Reflektor nur noch eine Vergröberung der Topologie darstellt. "(b) ==> (a)" folgt aus dem obigen Satz (9.1) und der Tatsache, daß die entsprechende Vergröberung der Topologie einen Bimorphismus darstellt.

(9.3) Satz Sei $\underline{C}$ eine Kategorie und

$\underline{L} \underset{L,\ \mathrm{l.a.}}{\overset{V_L,\ \mathrm{r.a.}}{\rightleftarrows}} \underline{C}$ (bzw. $\underline{R} \underset{R,\ \mathrm{r.a.}}{\overset{V_R,\ \mathrm{l.a.}}{\rightleftarrows}} \underline{C}$) eine volle, Isomorphie-abgeschlossene, epireflektive (bzw. monokoreflektive) Unterkategorie. Dann sind äquivalent:

(1) $R(\underline{L}) \subset \underline{L}$.

(1') $X \xrightarrow{\eta} LX$ ist Isom. ==> $RX \xrightarrow{\eta} LRX$ ist Isom.

(1") $RL \xrightarrow{\eta} LRL$ ist Isomorphismus.

(2) $L(\underline{R}) \subset \underline{R}$.

(2') $RX \xrightarrow{\varepsilon} X$ ist Isom. ==> $RLX \xrightarrow{\varepsilon} LX$ ist Isom.

(2") $RLR \xrightarrow{\varepsilon} LR$ ist Isomorphismus.

Bemerkung Nach Voraussetzung sind die Vergißfunktoren V_L und V_R volltreu, und damit sind $\varepsilon \in \underline{L}(LV_LX,X)$ und $\eta \in \underline{R}(Y,RV_RY)$ Isomorphismen für alle $X \in \underline{L}$ und $Y \in \underline{R}$. Dann gilt auch: $V_LLV_LL \cong V_LL$ und $V_RRV_RR \cong V_RR$. Deshalb können wir jetzt V_L und V_R weglassen, und $L^2 \cong L$, $R^2 \cong R$ schreiben. Es gilt auch: $L|_{\underline{L}} = id_{\underline{L}}$, $R|_{\underline{R}} = id_{\underline{R}}$ und $\underline{L} = L(\underline{C})$ (bzw. $\underline{R} = R(\underline{C})$). Nach Voraussetzung ist auch $\eta \in \underline{C}(X,LX)$ (bzw. $\varepsilon \in \underline{C}(RX,X)$) ein Epimorphismus (bzw. Monomorphismus) für alle $X \in \underline{C}$.

Beweis von Satz (9.3). Zunächst sieht man leicht, daß (1), (1') und (1") (bzw. (2), (2') und (2")) zueinander äquivalent sind. Dann betrachten wir das folgende, kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
RX \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "\eta_2"] \arrow[drr, "\alpha"] & X \arrow[r, "\eta_1"] & LX \\
LRX \arrow[rr, dashed, "\gamma"] \arrow[urr, "\beta"] & & RLX \arrow[u, "\varepsilon_2"] \arrow[d, "\eta_3"] \\
RLRX \arrow[u, "\varepsilon_3"] & & LRLX
\end{tikzcd}$$

Hier sind ε_1, ε_2 und ε_3 (bzw. η_1, η_2 und η_3) Monomorphismen (bzw. Epimorphismen).

Wegen der universellen Eigenschaft von R (bzw. L) existiert genau ein α (bzw. β) mit $\varepsilon_2\alpha = \eta_1\varepsilon_1$ (bzw. mit $\beta\eta_2 = \eta_1\varepsilon_1$). Man kann schreiben: $\alpha = R(\eta_1)$ (bzw. $\beta = L(\varepsilon_1)$). Jetzt zeigen wir nur: (1") ==> (2'). (2") ==> (1') ist völlig analog (dual). Sei also (1") wahr, d.h. η_3 ein Isomorphismus, und sei ε_1 auch ein Isomorphismus. Da η_3 ein Isomorphismus ist, existiert genau ein γ mit $\gamma\eta_2 = \alpha$, also ist $\varepsilon_2\gamma\eta_2 = \varepsilon_2\alpha = \eta_1\varepsilon_1 = \beta\eta_2$ und, da η_2 ein Epimorphismus ist, ist $\varepsilon_2\gamma = \beta$. Da ε_1 ein Isomorphismus ist, ist es auch $\beta = L(\varepsilon_1)$. Also ist $\varepsilon_2\gamma\beta^{-1} = id_{LX}$ und deswegen ist ε_2 eine monomorphe Retraktion, also auch ein Isomorphismus, was zu zeigen war.

<u>(9.4) Definition</u> Falls die Bedingungen von Satz (9.3)(1) erfüllt sind, nennen wir L und R miteinander <u>verträglich</u>.

<u>(9.5) Folgerung</u> Seien R und L miteinander verträglich wie in (9.3) und (9.4). Dann gilt:

(a) $(RL)(RL) = RL, \qquad (LR)(LR) = LR.$

(b) $RL(\underline{C}) = LR(\underline{C})$.

(c) $\underline{RL} := RL(\underline{C})$ ist eine volle, epireflektive Unterkategorie von $\underline{R}$ und eine volle, monokoreflektive Unterkategorie von $\underline{L}$.

<u>Beweis</u> (a) $R(LRL) = RRL = RL$. LR analog.

(b) Sei $X \in \underline{C}$ mit $X \cong RLX$. Dann gilt: $LRX \cong LRRLX \cong LRLX \cong RLX \cong X$. Umkehrung analog.

(c) Für alle $X \in \underline{RL}$, $Y \in \underline{R}$ gilt: $\underline{R}(Y,X) = \underline{C}(Y,X) = \underline{C}(Y,V_LX) \cong \underline{L}(LY,X) = \underline{RL}(LY,X)$.

Wie man leicht sieht, ist das Kommutieren der zwei Funktoren R und L stärker als deren Verträglichkeit.

Daß es echt stärker ist, sieht man aus dem folgenden Beispiel. Insbesondere kann man aus Folgerung (9.5)(b) nicht schließen, daß RL = LR wäre. Nach dem Beweis des Satzes (9.3) weiß man aber, daß die zwei kanonischen funktoriellen Morphismen von LR nach RL gleich sind.

<u>(9.6) Beispiel</u> (a) In der Kategorie der abelschen Gruppen definieren wir $L(X) = X/2X$ und $R(X) = T(X) =$ Torsionsuntergruppe von X. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes (9.3) erfüllt, R und L sind verträglich, aber $RL(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0 = LR(\mathbb{Z})$.

(b) Sei $(X,\mathfrak{T}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}: \{n\in\mathbb{N}: x_n \neq 0\} \text{ ist endlich}\}$ mit relativer Produkttopologie und To (bzw. Qv) die assoziierte tonnelierte Topologie (bzw. die Quasivervollständigung) wie in (10.1) (bzw. (10.4)). $(X,\mathfrak{T})$ ist abzählbar dimensional und metrisierbar, $To\mathfrak{T}$ ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf X, und ist vollständig. $Qv(X,\mathfrak{T}) = (\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \text{Produkttopologie})$ ist tonneliert. Also: $ToQv(X,\mathfrak{T}) = Qv(X,\mathfrak{T}) = \omega \neq \varphi = To(X,\mathfrak{T}) = QvTo(X,\mathfrak{T})$.

<u>(9.7) Folgerung</u> Im folgenden sind (i)(a) und (i)(b) zueinander äquivalent:

(1) In <u>HfLk</u>:

 (a) Die Vervollständigung eines kompaktbestimmten Raumes ist kompaktbestimmt.

 (b) Der assoziiert kompaktbestimmte Raum zu einem vollständigen Raum ist vollständig.

(2) In der Kategorie der lokalkonvexen Räumen:

 (a) Der assoziierte tonnelierte (bzw. bornologische) Raum zu einem nuklearen (bzw. Schwartzschen) Raum ist nuklear (bzw. Schwartzsch).

(b) Der assoziierte nukleare (bzw. Schwartzsche) Raum zu einem tonnelierten (bzw. bornologischen) Raum ist tonneliert (bzw. bornologisch).

(3) In der Kategorie der Hausdorffschen topologischen Räume:

(a) Die Stone-Čech-Kompaktifizierung eines Quotienten eines metrisierbaren Raumes ist wieder Quotient eines metrisierbaren Raumes.

(b) Sei K ein kompakter topologischer Raum. Auf K definieren wir eine neue Topologie durch: $A \subset K$ ist genau dann abgeschlossen, wenn A die folgende Bedingung erfüllt: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A, (x_n) konvergiert in K $\Longrightarrow \lim x_n \in A$. Dann ist K mit dieser neuen Topologie kompakt.

<u>Bemerkung</u> (1) war die erste Anwendung des erwähnten Satzes. Siehe hierzu die Einleitung zu diesem Kapitel, sowie Kapitel 11, insbesondere (11.6) bis (11.10). Die Aussagen sind falsch nach einem Beispiel von Haydon [24]. Die Aussagen (2) sind Anwendungen unseres Satzes in der Kategorie der lokalkonvexen Räumen, die noch nicht im Satz von S. Dierolf [15] erfaßt waren. Beispiel (9.8) zeigt, daß To und Nu nicht verträglich sind. Bei den Aussagen in (3) handelt es sich um einen Vergleich zwischen den Funktoren "Stone-Čech-Kompaktifizierung" und "assoziierte folgenbestimmte Topologie", siehe Herrlich [25]. Um zu sehen, daß die zwei Aussagen falsch sind, genügt es, einen kompakten, aber nicht folgenbestimmten Raum zu finden, denn dann ist die assoziierte folgenbestimmte Topologie echt feiner, und daher nicht kompakt. Das wird

in Beispiel (9.9) gezeigt, das mir W. Roelcke freundlicherweise mitgeteilt hat.

(9.8) Beispiel Sei $(X,\mathfrak{T})$ ein unendlich dimensionaler Banach-Raum und To (bzw. Nu) die assoziierte tonnelierte (bzw. nukleare) Topologie. $(X,\mathfrak{T})$ ist tonneliert. $(X,\sigma(X,X'))$ ist als schwache Topologie nuklear. Also ist $\sigma(X,X') \subset \mathrm{Nu}\mathfrak{T} \subsetneqq \mathfrak{T} = \tau(X,X)$. $\mathrm{Nu}\mathfrak{T}$, der assoziierte nukleare Raum, ist kein Mackey-Raum, also weder tonneliert, bornologisch noch quasitonneliert. $\mathrm{To}(X,\sigma(X,X')) = (X,\mathfrak{T})$ ist nicht nuklear, also ist ToNu $\neq$ NuToNu.

(9.9) Beispiel Sei ω die kleinste nicht abzählbare Ordinalzahl und sei $X := \{x: x \leq \omega\}$ mit der Ordnungstopologie versehen, siehe z.B. Kelley [27]. Dann ist X Hausdorffsch und kompakt, aber nicht folgenbestimmt.

Beweis Sei $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(\omega) = 1$ und $f(x) = 0$ für alle $x < \omega$. f ist offenbar nicht stetig. Wir zeigen jetzt, daß f folgenstetig ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X, und $a = \lim x_n$.

Fall 1. $a < \omega$. Dann ist $x_n < \omega$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, also $f(x_n) = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich konvergiert $f(x_n)$ gegen $0 = f(a)$.

Fall 2. $a = \omega$. Dann ist $x_n = \omega$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (denn, zu je abzählbar vielen abzählbaren Ordinalzahlen existiert eine abzählbare obere Schranke). Also ist $f(x_n) = 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich konvergiert $f(x_n)$ gegen $1 = f(a)$.

Das nächste Lemma zeigt, daß unser Verträglichkeits-Begriff in den üblichen "algebraischen" Kategorien nicht interessant sein kann.

(9.10) Lemma Sei $\underline{C}$ eine Kategorie, in der entweder jeder Monomorphismus ein Kern, oder jeder Epimorphismus ein Kokern ist. Dann sind die Bedingungen in Satz (9.3) immer erfüllt.

Beweis Falls jeder Monomorphismus ein Kern ist, ist $RLX \longrightarrow LX$ ein Kern, also $RLX \in \underline{L}$ nach Satz (9.1), d.h. $RLX = LRLX$. Der andere Fall geht analog.

10. Die Kategorie der quasivollständigen, tonnelierten Räume

Die wichtigsten kategorientheoretischen Eigenschaften der Kategorie der quasivollständigen, Hausdorffschen, tonnelierten, topologischen Vektorräume werden in diesem Kapitel behandelt. Die abgeschlossene monoidale Struktur, die durch die Funktoren $Qv(- \otimes_t -)$ und $To\mathcal{L}_\beta(-,-)$ gegeben wird, wird untersucht. In dieser Kategorie haben wir viele Beispiele für Räume, für die $E \otimes E'_\beta$ dicht (sogar folgendicht) in $\mathcal{L}_\beta(E,E)$ ist. Somit haben wir eine abgeschlossene monoidale Kategorie gefunden, in der das erste Hindernis von Beispiel (8.9) überwunden ist. Trotzdem bleibt die Topologie auf $E \otimes E'$ feiner als die Unterraumtopologie, so daß alle wichtigen Beispiele negativ ausfallen, siehe Folgerung (10.16) und Lemma (10.19).

<u>(10.1) Bezeichnung</u> Mit <u>HfTo</u> $\subset$ <u>HfLk</u> bezeichnen wir die volle Unterkategorie der Hausdorffschen, <u>tonnelierten</u> Räume, siehe Bourbaki [4] (III,1,1). To: <u>HfLk</u> $\longrightarrow$ <u>HfTo</u> sei die "<u>Tonnelierung</u>" (assoziierter tonnelierter Raum), wie bei Robert [43]. <u>HfTo</u> ist eine volle, monokoreflektive Unterkategorie von <u>HfLk</u>.

<u>(10.2) Satz</u> Seien $E,F,G \in$ <u>HfLk</u>. Dann gelten:

(a) $F \in$ <u>HfTo</u> $\Longrightarrow \mathcal{L}(E \otimes_\beta F, G) \cong \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_\beta(F,G))$.

(b) $E,F \in$ <u>HfTo</u> $\Longrightarrow E \otimes_t F = E \otimes_\beta F \in$ <u>HfTo</u>.

<u>Beweis</u> (a) Sei $B \in \mathfrak{B}(E)$ und $f \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_\beta(F,G))$. Dann ist $f(B)$ beschränkt in $\mathcal{L}_\beta(F,G)$, siehe Bourbaki [4] (III,2,3,Cor.1), also auch in $\mathcal{L}_\sigma(F,G)$ und folglich gleichgradig stetig in $\mathcal{L}(F,G)$, siehe Bourbaki [4] (III,3,6,Thm.2). Also ist sogar $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{B}(E)}(E, \mathcal{L}_\beta(F,G))$ und (a) folgt dann

aus Satz (8.5).

(b) Sei $k = \text{kan}: E \times F \longrightarrow E \otimes F$. Nach Definition trägt $E \otimes_t F$ die feinste HfLk-Topologie derart, daß k $(\mathcal{E}(E), \mathcal{E}(F))$-hypostetig, d.h. getrennt stetig, wird. Mit anderen Worten, trägt $E \otimes_t F$ die HfLk-Finaltopologie bezüglich aller Abbildung $k(x,-)$, $k(-,y)$, $x \in E$, $y \in F$. $E \otimes_t F$ ist also ein Kolimes (in <u>HfLk</u>) von tonnelierten Räumen und deshalb selbst tonneliert, nach Satz (9.1) oder Bourbaki [4] (III,1,2,Prop.2). Der Beweis von Teil (a) zeigt, daß, für $E,F \in$ <u>HfTo</u>, $\mathcal{H}^{(\mathcal{E}(E),\mathcal{E}(F))}(E \times F, G) = \mathcal{H}^{(\mathcal{B}(E),\mathcal{B}(F))}(E \times F, G)$ gilt, siehe auch Bourbaki [4] (III,4,2). $E \otimes_t F = E \otimes_\beta F$ folgt dann aus der universellen Eigenschaft in Satz (8.5).

<u>Bemerkung</u> Wir hätten hier auch den Begriff "quasitonneliert" benutzen können, wegen Bourbaki [4] (III,3,ex.17). Da wir aber später nur quasivollständige Räume betrachten wollen, wäre das keine echte Verallgemeinerung, siehe z.B. Schäfer [44], Seite 142.

<u>(10.3) Folgerung</u> <u>HfTo</u> ist eine symmetrische, abgeschlossene, monoidale Kategorie. Insbesondere gilt: $\mathcal{L}(E \otimes_t F, G) \cong \mathcal{L}(E, \mathrm{To}\mathcal{L}_\beta(F,G))$.

<u>Beweis</u> Die Behauptung folgt sofort aus Satz (8.7), Satz (10.2) und der universellen Eigenschaft von To.

<u>(10.4) Bezeichnung</u> Sei <u>QvHfLk</u> $\subset$ <u>HfLk</u> (bzw. <u>QvHfTo</u> $\subset$ <u>HfTo</u>) die volle Unterkategorie der <u>quasivollständigen</u> Räume, siehe Bourbaki [4] (III,2,5,Def.3). Qv: <u>HfLk</u> $\longrightarrow$ <u>QvHfLk</u> sei die <u>Quasivervollständigung</u>, siehe Robert [43] oder Schwartz [46]. <u>QvHfLk</u> ist eine volle, epireflektive Unterkategorie von <u>HfLk</u>.

(10.5) Lemma (a) $Qv(\underline{HfTo}) \subset \underline{HfTo}$.

(b) $To(\underline{QvHfLk}) \subset \underline{QvHfLk}$.

(c) $\underline{QvHfTo}$ ist eine volle, epireflektive Unterkategorie von $\underline{HfTo}$ und eine volle, monokoreflektive Unterkategorie von $\underline{QvHfLk}$.

Beweis (a) folgt aus Robert [43], (1.1.5)(a), (b) aus (a) und Satz (9.3), und (c) aus (a), (b) und Satz (9.5).

(10.6) Satz $\underline{QvHfTo}$ ist eine symmetrische, abgeschlossene monoidale Kategorie. Insbesondere gelten:

(a) $Qv(E \otimes_t \mathbb{K}) \cong E$.

(b) $Qv(Qv(E \otimes_t F) \otimes_t G) \cong Qv(E \otimes_t Qv(F \otimes_t G))$.

(c) $Qv(E \otimes_t F) \cong Qv(F \otimes_t E)$.

(d) $\mathfrak{L}(Qv(E \otimes_t F), G) \cong \mathfrak{L}(E, To\mathfrak{L}_\beta(F,G)) \; \bigwedge G \in \underline{QvHfTo}$.

Beweis (a), (b) und (c) folgen sofort aus Folgerung (10.3) und Lemma (10.5) und für (b), der folgenden Überlegung: Für alle $H \in \underline{QvHfTo}$ gilt: $\mathfrak{L}(Qv(Qv(E \otimes_t F) \otimes_t G),H)$
$\cong \mathfrak{L}(Qv(E \otimes_t F) \otimes_t G, H) \cong \mathfrak{L}(Qv(E \otimes_t F), \mathfrak{L}_\beta(G,H)) \cong$
$\cong \mathfrak{L}(E \otimes_t F, \mathfrak{L}_\beta(G,H)) \cong \mathfrak{L}((E \otimes_t F) \otimes_t G, H) \cong$
$\cong \mathfrak{L}(E \otimes_t (F \otimes_t G), H) \cong \ldots \cong \mathfrak{L}(Qv(E \otimes_t Qv(F \otimes_t G)), H)$.

(d) folgt aus (10.3), (10.5) und der Tatsache, daß $\mathfrak{L}_\beta(F,G)$ wieder quasivollständig ist, siehe Bourbaki [4] (III,3,7,Cor.2).

(10.7) Satz $\underline{QvHfTo}$ ist vollständig und kovollständig. Limites sind die To-Bilder der in $\underline{HfLk}$ gebildeten Limites, und Kolimites die Qv-Bilder der in $\underline{HfLk}$ gebildeten Kolimites.

Beweis Die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß $\underline{HfLk}$ vollständig und kovollständig ist, Lemma (10.5)(c), Satz (9.1) und Pareigis [41], 2.12, Prop. 4 oder auch Herrlich [25].

(10.8) Lemma Seien $A,B \in$ QvHfTo und $h \in \mathcal{L}(A,B)$.
Dann gelten die folgenden Äquivalenzen in QvHfTo:

(a) (i) h ist ein Monorphismus <==>

(ii) h ist injektiv.

(b) (i) h ist ein Epimorphismus <==>

(ii) $Bi(h)$ ist dicht in B.

(c) (i) h ist ein Kern <==>

(ii) A ist die Tonnelierung eines abgeschlossenen Unterraums von B <==>

(iii) h ist injektiv, $Bi(h) = \overline{Bi(h)}$ und A trägt die gröbste tonnelierte Topologie, für die h stetig ist.

(d) (i) h ist ein Kokern <==>

(ii) B ist die Quasivervollständigung eines Quotienten nach einem abgeschlossenen Unterraum <==>

(iii) $Bi(h)$ ist strikt dicht in B und h ist offen.

Beweis (a) (ii) ==> (i) ist klar.

(i) ==> (ii): Sei h nicht injektiv. Dann ist

$ToKe(h) \overset{i}{\underset{0}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{h} B$ ein Widerspruch zu h Monomorphismus.

(b) (ii) ==> (i) ist klar, wegen der Bedingung Hausdorffsch

(i) ==> (ii): Sei $Bi(h)$ nicht dicht in B. Dann ist

$A \xrightarrow{h} B \overset{p}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B/\overline{Bi(h)} \longrightarrow Qv(B/\overline{Bi(h)})$ ein Widerspruch zu h Epimorphismus.

(c) (i) ==> (ii) ==> (iii) ist klar wegen Satz (10.7).

(iii) ==> (i): Behauptung: h ist ein Kern von jp im folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & Bih \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B/Bi(h) \arrow[r, "j"] & Qv(B/Bi(h)) \\
A' \arrow[u, dashed, "g'"] \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[urr, "h'"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Sei $A' \in$ QvHfTo und $h' \in \mathcal{L}(A',B)$, mit $jph' = j0h' = 0$.
j Mono ==> $ph' = 0$ ==> $Bi(h') \subset Ke(p) = Bi(h)$, also existiert genau ein g mit $h' = ig$. g ist stetig wegen der Unterraumtopologie auf $Bi(h)$. Da A' tonneliert ist, existiert genau ein g' mit $h' = g'h$.

(d) (i) ==> (ii) ==> (iii) ist klar wegen Satz (10.7).
(iii) ==> (i): Behauptung: h ist ein Kokern von i im folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
ToKe(h) \arrow[r] & Ke(h) \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "0"'] & A \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "h_1"] & & B \arrow[dr, dashed, "g'"] & \\
& & A/Ke(h) \arrow[rr, "h_2"] & & Bi(h) \arrow[u, "h_3"] \arrow[r, dashed, "g"] & B'
\end{tikzcd}$$

Sei $B' \in$ QvHfTo, $h' \in \mathcal{L}(A,B')$ mit $h'i = h'0 = 0$. ==>
$Ke(h) \subset Ke(h')$ ==> es gibt genau ein g mit $gh_2h_1 = h'$, da h_2 ein Isomorphismus ist, und h_1 offen. Da h_3 injektiv, stetig, relativ offen und strikt dicht ist, existiert genau ein g' mit $h' = gh_2h_1 = g'h_3h_2h_1 = g'h$.

(10.9) Satz In QvHfTo gilt:

(a) (i) $\mathbb{K}$ ist ein Generator.
    (ii) $\mathbb{K}$ ist ein Kogenerator.

(b) (i) $\mathbb{K}$ ist injektiv.
    (ii) $\mathbb{K}$ ist nicht Kokern-projektiv, also auch nicht projektiv.

(c) 0 ist das einzige Kokern-projektive Objekt.

Beweis (a) Seien $A,B \in$ QvHfTo und $f,g \in \mathcal{L}(A,B)$ mit $f \neq g$. Also existiert ein $x \in A$ mit $f(x) \neq g(x)$.
(i) Sei $h \in \mathcal{L}(\mathbb{K},A)$ definiert durch $1 \longmapsto x$. h ist dadurch eindeutig bestimmt, und existiert, da $\mathbb{K}$ die feinste Topologie trägt. Jetzt ist $fh \neq gh$, also ist $\mathbb{K}$ ein Generator.
(ii) Sei $y := f(x) - g(x) \in B$. Da $y \neq 0$ und B lokalkonvex ist, existiert ein $h \in \mathcal{L}(B,\mathbb{K})$ mit $h(y) \neq 0$, nach dem Satz

von Hahn-Banach. Also ist $hf \neq hg$ und folglich ist $\mathbb{K}$ ein Kogenerator.

(b) (i) Sei $h: A \longrightarrow B$ ein Monomorphismus und $g \in \mathcal{L}(A,\mathbb{K})$. Nach dem letzten Lemma (10.8)(a) ist h injektiv, also existiert ein $g' \in \mathcal{L}(B,\mathbb{K})$ mit $g'h = g$. g' ist stetig, weil $\mathbb{K}$ die gröbste Hausdorffsche lineare Topologie trägt.

(c) Nach Bourbaki [4] (IV,4,ex.10) existiert ein $A \in$ QvHfTo mit einem abgeschlossenen Unterraum U derart, daß der Quotient A/U nicht quasivollständig ist. Also ist $h: A \xrightarrow{p} A/U \xrightarrow{i} Qv(A/U) =: B$ ein Kokern in QvHfTo, nach Lemma (10.8)(d), und h ist nicht surjektiv. Sei $x \in B \setminus Bi(h)$ und definieren wir $g' \in \mathcal{L}(\mathbb{K},B)$ durch $g'(1)=x$. Sei nun $0 \neq P \in$ QvHfTo. Da P lokalkonvex ist, existiert ein $g'' \in \mathcal{L}(P,\mathbb{K})$ mit $g'' \neq 0$, also existiert ein $y \in P$ mit $g''(y) = 1$. Mit $g := g'g''$ gilt dann: $g(y) = x$, also läßt sich g nicht über h faktorisieren, und somit ist P nicht Kokern-projektiv. Damit ist (c) und auch (b)(ii) gezeigt.

Bemerkung Dieser Satz, (b)(ii), hat Auswirkungen in der Morita-Theorie für monoidale Kategorien, denn, nach Lemma (1.5), müssen die Begriffe "endlich" und "endlich erzeugt projektiv" in diesem Falle nicht übereinstimmen.

Die Aussage (c) zeigt auch wie wenig nutzlich der Begriff "projektiv" in dieser Kategorie ist. Ähnliche Fragen wurden auch von Dostal [17] und Geiler [21] behandelt.

(10.10) Folgerung Sei $E \in$ QvHfTo. Dann gilt:

(a) $\tilde{g}: Qv(ToE^{\prime}_{\beta} \otimes_{\iota} E) \longrightarrow \mathbb{K}: 1 \otimes x \longmapsto 1(x)$ und

$\tilde{f}: Qv(E \otimes_{\iota} ToE^{\prime}_{\beta}) \longrightarrow To\mathcal{L}_{\beta}(E,E): x\otimes 1 \mapsto (y \mapsto x1(y))$

sind stetig und linear.

(b) $Qv(E \otimes_t -)$: <u>QvHfTo</u> $\longrightarrow$ <u>QvHfTo</u> erhält Kolimites, und $To\,\mathcal{L}_\beta(E,-)$: <u>QvHfTo</u> $\longrightarrow$ <u>QvHfTo</u> erhält Limites.

(c) $To\mathcal{L}_\sigma(E,-)$ und $To\mathcal{L}_\beta(E,-)$: <u>HfTo</u> $\longrightarrow$ <u>HfTo</u> sind funktoriell isomorph.

(d) $E,F \in$ <u>Ban</u> $\Longrightarrow To\mathcal{L}_\sigma(E,F) \cong \mathcal{L}_\beta(E,F)$ und $ToE'_\sigma \cong E'_\beta$.

<u>Beweis</u> (a) folgt aus der Konstruktion in Definition (1.3), und (b) ist eine allgemeine Eigenschaft von adjungierten Funktoren, siehe z.B. Pareigis [41], 2.7 Thm.3. (c) Mit Satz (8.7) und Folgerung (10.3) sieht man, daß $To\mathcal{L}_\sigma(E,-)$ und $To\mathcal{L}_\beta(E,-)$, als Endofunktoren auf <u>HfTo</u>, beide rechtsadjungiert zu $(E \otimes_t -)$ sind. Die Behauptung folgt dann aus der Eindeutigkeit von adjungierten Funktoren, siehe Pareigis [41], 2.1 Prop. 1.
(d) ist ein Spezialfall von (c), da in diesem Falle die starke Topologie tonneliert ist.

<u>(10.11) Lemma</u> Sei $E \in$ <u>QvHfLk</u> und E normierbar. Dann ist E genau dann endlich in <u>QvHfLk</u>, wenn E endlich dimensional ist.

<u>Beweis</u> Da normierbare Räume metrisierbar sind, sind die Quasivervollständigung und die Vervollständigung in diesem Falle gleich. Außerdem sind Banachräume tonneliert. Also ist $Qv(E \otimes_\beta ToE') = E \hat{\otimes}_\pi E'$ und $To\mathcal{L}_\beta(E,E) = \mathcal{L}_\beta(E,E)$. Wir befinden uns also in der gleichen Situation wie in Beispiel (8.9).

Bei der Frage, welche Räume "endlich" in <u>QvHfTo</u> sind, wollen wir zunächst den "trivialen" oder "uninteressanten" Fall erledigen.

<u>(10.12) Lemma</u> Sei $E \in$ <u>QvHfTo</u> und E endlich dimensional. Dann ist E endlich im Sinne von Definition (1.4).

Beweis Wegen der endlichen Dimension ist der kanonische Morphismus $f: Qv(E \otimes_\iota E') = E \otimes_\iota E' \longrightarrow \mathcal{L}_\beta(E,E)$ bijektiv, und die Bedingung "endlich dimensional und Hausdorffsch" sorgt dafür, daß überall nur eine Topologie möglich ist.

(10.13) Lemma Sei E ein Fréchet-Raum, und sei die kanonische Bilinearform (Auswertung) $k: E'_\beta \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ (bzw. $E'_\kappa \times E \longrightarrow \mathbb{K}$) stetig. Dann ist E normierbar (bzw. endlich dimensional).

Beweis Aus der Stetigkeit von k folgt die Existenz einer Nullumgebung $U \subset E$ und einer beschränkten (bzw. kompakten) Menge $B \subset E$ (bzw. $K \subset E$) mit $k(B^o,U) \subset [-1,1]$ (bzw. $k(K^o,U) \subset [-1,1]$), wobei A^o das Polare von A bezeichnet. Dann ist $U \subset B^{oo}$ (bzw. $U \subset K^{oo}$), d.h. es existiert eine beschränkte (bzw. kompakte) Nullumgebung, woraus die Behauptung folgt.

(10.14) Folgerung Sei E ein nicht normierbarer (bzw. ein unendlich dimensionaler) Fréchet-Raum. Dann ist die Topologie $E \otimes_\iota E'_\beta$ (bzw. $E \otimes_\iota E'_\kappa$) echt feiner als $E \otimes_\pi E'_\beta$ (bzw. $E \otimes_\pi E'_\kappa$).

Beweis Nach Lemma (10.13) ist die kanonische Bilinearform getrennt stetig, aber nicht stetig.

(10.15) Satz Sei $E \in$ QvHfTo derart, daß E'_β und $\mathcal{L}_\beta(E,E)$ auch tonneliert sind. Falls E endlich im Sinne von Definition (1.4) ist, ist E endlich dimensional.

Beweis Nach den Voraussetzungen ist $Qv(E \otimes_\iota E'_\beta) \cong$ $\cong \mathcal{L}_\beta(E,E)$, also ist der kanonische Morphismus $E \otimes_\iota E'_\beta \longrightarrow \mathcal{L}_\beta(E,E)$ relativ offen. Da aber die Unterraum-Topologie gerade $E \otimes_\varepsilon E'_\beta$ ist, siehe Köthe [29], gilt: $E \otimes_\iota E'_\beta = E \otimes_\pi E'_\beta = E \otimes_\varepsilon E'_\beta$. Aus Folgerung (10.14) schließen wir, daß E normierbar ist und, daß E quasivollständig, sogar ein Banachraum ist. Dann folgt die Behauptung aus Lemma (10.11).

<u>(10.16) Folgerung</u> Die folgenden Räume sind nicht endlich in <u>QvHfTo</u> im Sinne von Definition (1.4):

(a) $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \cong C^{\infty}(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \mathcal{E}(\mathbb{N})$

(b) $\varphi = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \cong C_c^{\infty}(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \mathcal{D}(\mathbb{N})$

(c) $\mathcal{E}(M) = C^{\infty}(M,\mathbb{K})$, M kompakte C^{∞}-Mannigfaltigkeit, $|M| \geq |\mathbb{N}|$

(d) $s \cong \mathcal{S}(R^n) \cong \mathcal{E}([0,1]) \cong \mathcal{E}(S^1)$

(e) $\mathcal{E}'(M)$, s', $\mathcal{S}'$.

Dabei trägt ω die Produkttopologie, φ die Lk-$\oplus$-Topologie, $\mathcal{E}(M)$ die Topologie der kompakten Konvergenz von Funktionen und allen Ableitungen, und E' die starke Topologie.

<u>Beweis</u> Sei $E \in \{\omega, \mathcal{E}(M), s\}$. Dann ist E Fréchet, nuklear, reflexiv und E'_β ist tonneliert. Nach Bourbaki [4], (III,3,ex.9) gilt: $\mathcal{L}_\beta(\omega,\omega) = \mathcal{L}_\beta(\omega,\mathbb{K}^{\mathbb{N}}) \cong (\mathcal{L}_\beta(\omega,\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ $\cong \varphi^{\mathbb{N}} = \omega\varphi$ und $\varphi^{\mathbb{N}}$ ist, als Produkt tonnelierter Räume, wieder tonneliert, siehe Bourbaki [4] (IV,2,ex.9b). $\mathcal{L}_\beta(s,s)$ und $\mathcal{L}_\beta(\mathcal{E}(M), \mathcal{E}(M))$ sind vollständig und bornologisch, also auch tonneliert, nach Grothendieck [23], Seite 128 und 129. Also ist $To\mathcal{L}_\beta(E,E) = \mathcal{L}_\beta(E,E)$. Die Behauptung für E folgt jetzt aus dem letzten Satz (10.15). Die Behauptung für E' folgt aus Lemma (3.6), da alle Räume reflexiv sind, und $\varphi = \omega'$.

Falls M eine nicht kompakte C^{∞}-Mannigfaltigkeit ist, können wir das obige Argument nicht mehr anwenden, denn $\mathcal{L}_\beta(\mathcal{E}(R^n), \mathcal{E}(R^n))$ ist nicht tonneliert, nach Grothendieck [23], Seite 98. Um die Frage der Endlichkeit von $\mathcal{E}(M)$ zu klären, benötigen wir jetzt noch einige Lemmata.

(10.17) Lemma Sei M eine C^{∞}-Mannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Dann besitzt $\mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(A)$ einen stetigen, linearen Schnitt.

Beweis Nach Bröcker und Jänich [7], 12.11, existiert eine Tubenumgebung U von A in M. Dann existiert ein $\varphi \in \mathcal{E}(M)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset U$ und $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in A$ (z.B. weil U, $M \setminus A$ eine offene, lokalendliche Überdeckung von M ist, siehe Dieudonné [16] (16.4.1)). Jedes $f \in \mathcal{E}(A)$ kann, wegen der Bündel-Eigenschaft der Tubenumgebung, trivial (d.h. konstant in der transversalen Richtung) auf ganz U fortgesetzt werden. Aus der Definition der Topologie auf $\mathcal{E}(-)$ sieht man, daß dieser Fortsetzungsprozeß eine stetige, lineare Abbildung $\mathcal{E}(A) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ liefert. Die Multiplikation mit φ ist dann eine stetige, lineare Abbildung $\mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$, nach Dieudonné [16] (17.1.4). Die Zusammensetzung $\mathcal{E}(A) \longrightarrow \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$ liefert den gewünschten Schnitt.

(10.18) Lemma Sei M eine C^{∞}-Mannigfaltigkeit. Dann läßt sich $\mathbb{N}$ genau dann abgeschlossen in M einbetten, wenn M nicht kompakt ist.

Beweis Da $\mathbb{N}$, mit der diskreten Topologie, auch die triviale C^{∞}-Struktur tragen muß, ist eine topologische Einbettung schon eine C^{∞}-Einbettung. Das ist äquivalent zur Existenz einer Folge von Punkten aus M, die keinen Häufungspunkt in M besitzt. Dies ist aber genau dann möglich, wenn M nicht kompakt ist, siehe Bourbaki [3] (IX,2,9,Prop.15).

<u>(10.19) Lemma</u> Sei M eine nicht kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann ist $\mathcal{E}(M)$ nicht endlich in <u>QvHfTo</u> im Sinne von Definition (1.4)

<u>Beweis</u> Nach Lemma (10.18) läßt sich $\mathbb{N}$ abgeschlossen in M einbetten, und, nach Lemma (10.17) ist dann $\mathcal{E}(\mathbb{N}) \cong \omega$ ein direkter Faktor von $\mathcal{E}(M)$. Wenn $\mathcal{E}(M)$ endlich wäre, dann wäre auch $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ endlich nach Lemma (3.3), im Widerspruch zu Folgerung (10.16)(a).

<u>(10.20) Folgerung</u> Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:

(a) $\mathcal{E}(M)$ ist endlich in <u>QvHfTo</u>.

(b) M ist eine endliche Menge.

(c) $\mathcal{E}(M)$ ist endlich dimensional.

<u>Beweis</u> Die Behauptung folgt unmittelbar aus Folgerung (10.16)(c) und Lemma (10.19).

11. Andere Kategorien topologischer Vektorräume

In diesem Kapitel behandeln wir einige Kategorien, die zur Kategorie der quasivollständigen, tonnelierten Räume weitgehend analog sind, insbesondere die Kategorie der Mackey-Folgen-vollständigen, bornologischen Räume, und die der folgenvollständigen, kompakt-bestimmten Räume.

(11.1) Bezeichnung Mit HfBo $\subset$ HfLk bezeichnen wir die volle Unterkategorie der bornologischen Räume, siehe Bourbaki [4] (III,2,ex.12), und mit Bo: HfLk $\longrightarrow$ HfBo die "Bornologisierung" (assoziierter bornologischer Raum), siehe Bourbaki [4] (III,2,ex.13). HfBo ist eine volle, monokoreflektive Unterkategorie von HfLk.

(11.2) Satz Seien $E,F,G \in$ HfLk. Dann gelten:

(a) $F \in$ HfBo $\Longrightarrow \mathcal{L}(E \otimes_\beta F,\ G) \cong \mathcal{L}(E,\ \mathcal{L}_\beta(F,G))$.

(b) $E,F \in$ HfBo $\Longrightarrow E \otimes_t F = E \otimes_\beta F \in$ HfBo.

Beweis Der Beweis ist analog zu (10.2), wenn man berücksichtigt, daß beschränkte Teilmengen von $\mathcal{L}_\beta(F,G)$ gleichgradig stetig sind, siehe Bourbaki [5], Prop. 6, und, daß Kolimites bornologischer Räume bornologisch sind, wegen Satz (9.1) oder Bourbaki [4] (III,2,ex.17a).

(11.3) Folgerung HfBo ist eine symmetrische, abgeschlossene, monoidale Kategorie. Insbesondere gilt:
$\mathcal{L}(E \otimes_t F,\ G) \cong \mathcal{L}(E,\ \mathrm{Bo}\mathcal{L}_\beta(F,G))$.

Beweis Es folgt aus (11.2), analog zu (10.3).

(11.4) Bezeichnung Sei MvHfLk $\subset$ HfLk (bzw. MvHfBo $\subset$ HfBo) die volle Unterkategorie der Mackey-Folgen-vollständigen Räume, wie bei P. Dierolf [13], Seite

23. Mv: HfLk $\longrightarrow$ MvHfLk sei die Mackey-Folgen-Vervollständigung. MvHfLk ist eine volle, epireflektive Unterkategorie von HfLk.

(11.5) Lemma (a) Mv(HfBo) $\subset$ HfBo.

(b) Bo(MvHfLk) $\subset$ MvHfLk.

(c) MvHfBo ist eine volle, epireflektive Unterkategorie von HfBo und eine volle, monokoreflektive Unterkategorie von MvHfLk.

(d) E $\in$ MvHfBo $\Longrightarrow$ E ultrabornologisch $\Longrightarrow$ E $\in$ HfTo.

(e) QvHfLk $\subset$ MvHfLk.

Beweis (a) folgt aus P. Dierolf [14], Prop. 1, (b) aus (a) und Satz (9.3), und (c) aus (a), (b) und Satz (9.5). (d) folgt aus P. Dierolf [13], Seite 27 oder Köthe [28], Seite 384(2) und Bourbaki [4] (III,3,ex.11a). (e) folgt aus P. Dierolf [13], Seite 24.

Wir sehen also, daß Mv und Bo miteinander verträglich sind, aber auch, daß Mackey-Folgen-vollständige, bornologische Räume automatisch tonneliert sind. Da wir eine möglichst starke Vollständigkeits-Eigenschaft haben wollten, scheint die Kategorie der quasivollständigen, tonnelierten Räume für unsere Zwecke etwas eher angemessen zu sein als die der Mackey-Folgen-vollständigen, bornologischen Räume.

(11.6) Bezeichnung Mit HfKb $\subset$ HfLk bezeichnen wir die volle Unterkategorie der kompaktbestimmten Räume im Sinne von "compactly determined" bei Porta [42], "ck-Räume" bei Frölicher und Jarchow [20] und "lokon*hVl" bei Seip [47]. Kb: HfLk $\longrightarrow$ HfKb sei die "Kompaktbestimmung, d.h. der Funktor $\mathcal{L}$ bei Porta, ck bei Frölicher und Jarchow und LK∘KE bei Seip. HfKb ist eine volle, monokoreflektive Unterkategorie von HfLk.

(11.7) Satz Seien E,F,G $\in$ HfLk. Dann gelten:

(a) F $\in$ HfKb $\Longrightarrow \mathcal{L}(E \otimes_{\kappa} F,\ G) \cong \mathcal{L}(E,\ \mathcal{L}_{\kappa}(F,G))$.

(b) E,F $\in$ HfKb $\Longrightarrow E \otimes_{\iota} F = E \otimes_{\kappa} F \in$ HfKb.

Beweis Der Beweis ist analog zu (10.2), wenn man berücksichtigt, daß präkompakte Teilmengen von $\mathcal{L}_{\kappa}(E,F)$ gleichgradig stetig sind, nach dem Satz von Ascoli, siehe Bourbaki [3] (X,2,5,Thm.2). Kolimites kompaktbestimmter Räume sind wieder kompaktbestimmt nach Satz (9.1) oder Porta [42].

(11.8) Folgerung HfKb ist eine symmetrische, abgeschlossene, monoidale Kategorie. Insbesondere gilt:
$\mathcal{L}(E \otimes_{\iota} F,\ G) \cong \mathcal{L}(E,\ \mathrm{Kb}\mathcal{L}_{\kappa}(F,G))$.

Beweis Es folgt aus (11.7), analog zu (10.3).

(11.9) Bezeichnung Sei FvHfLk $\subset$ HfLk (bzw. FvHfKb $\subset$ HfKb) die volle Unterkategorie der folgenvollständigen Räume im Sinne von "semi-complet" bei Bourbaki [4] (III,3,ex.10) oder Köthe [28] (18.4).
Fv: HfLk $\longrightarrow$ FvHfLk sei die Folgenvervollständigung.
FvHfLk ist eine volle, epireflektive Unterkategorie von HfLk.

(11.10) Lemma (a) Fv(HfKb) $\subset$ HfKb.

(b) Kb(FvHfLk) $\subset$ FvHfLk.

(c) FvHfKb ist eine volle, epireflektive Unterkategorie von HfKb, und eine volle, monokoreflektive Unterkategorie von FvHfLk.

Beweis (a) folgt aus Seip [47], (b) aus (a) und Satz (9.3), und (c) aus (a), (b) und Folgerung (9.5).

(11.11) Satz FvHfKb ist eine symmetrische, abgeschlossene, monoidale Kategorie. Insbesondere gelten:

(a) $\mathrm{Fv}(E \otimes_t \mathbb{K}) \cong E$.

(b) $\mathrm{Fv}(\mathrm{Fv}(E \otimes_t F) \otimes_t G) \cong \mathrm{Fv}(E \otimes_t \mathrm{Fv}(F \otimes_t G))$.

(c) $\mathrm{Fv}(E \otimes_t F) \cong \mathrm{Fv}(F \otimes_t E)$.

(d) $\mathcal{L}(\mathrm{Fv}(E \otimes_t F), G) \cong \mathcal{L}(E, \mathrm{Kb}\mathcal{L}_\kappa(F,G)) \bigwedge G \in$ FvHfKb.

Beweis Die Behauptung folgt aus (11.8) und (11.10), analog zu (10.6), wenn man berücksichtigt, daß $\mathcal{L}_\kappa(F,G)$ folgenvollständig ist.

(11.12) Satz (a) FvHfKb ist vollständig und kovollständig. Limites sind die Kb-Bilder der in HfLk gebildeten Limites, und Kolimites die Fv-Bilder der in HfLk gebildeten Kolimites.

(b) $\mathbb{K}$ ist ein Generator und ein Kogenerator in FvHfKb.

(c) $\mathbb{K}$ ist injektiv in FvHfKb.

Beweis (a) folgt aus Lemma (11.10)(c) und Satz (9.1) wie Satz (10.7). (b) und (c) sind analog zu Satz (10.9).

(11.13) Bemerkung Wenn wir "kompakt" (bzw. "kompaktbestimmt", "folgenvollständig") durch "präkompakt" (bzw. "p-bestimmt", "p-vollständig") ersetzen, können wir das letzte Beispiel völlig analog durchziehen, siehe Brauner [6], der aber etwas andere Methoden benutzt.

(11.14) Bemerkung Wenn wir mit dem Begriff "absolut konvex, kompakt" anstelle von "kompakt" arbeiten, bekommen wir den Begriff "espace de Kelley" von Buchwalter [8].

(11.15) Beispiel Die folgenden Räume sind nicht endlich in FvHfKb: $\omega \cong \mathcal{E}(\mathbb{N})$, $\varphi \cong \mathcal{E}(\mathbb{N})$, $\mathcal{E}(M)$ mit M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $|M| = |\mathbb{N}|$, $s \cong \mathcal{S}(R^n)$, $\mathcal{E}'(M)$, s', $\mathcal{S}'$.

Beweis Der Beweis ist völlig analog zu Folgerung (10.16) und Lemma (10.19), wenn man berücksichtigt, daß alle genannten Räume Montel sind, also $\mathcal{L}_\beta(E,-) = \mathcal{L}_\kappa(E,-)$, daß bornologische Räume kompaktbestimmt sind, und, daß $E \otimes_\kappa F$ höchstens feiner als $E \otimes_\beta F$ ist.

Literaturverzeichnis

[1] Artin, E.: Galois Theory, Ann Arbor, 1946.

[2] Bourbaki, N.: Algèbre, Hermann, Paris, 1950.

[3] Bourbaki, N.: General Topology, Hermann, Paris, 1966.

[4] Bourbaki, N.: Espaces Vectoriels Topologiques, Hermann, Paris, 1966 und 1967.

[5] Bourbaki, N.: Sur certains espaces vectoriels topologiques. Ann. Inst. Fourier 2 (1950), 5-16.

[6] Brauner, K.G.: A class of topologically free locally convex spaces and related Hopf algebras. Dissertation, Univ. of Cal., Berkeley (1974).

[7] Bröcker, T.; Jänich, K.: Einführung in die Differentialtopologie. Springer Verlag, Berlin, 1973.

[8] Buchwalter, H.: Topologies et Compactologies. Publ. Dépt. Math. Lyon (1969).

[9] Chase, S.U.: On inseparable Galois theory. Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 413-417.

[10] Chase, S.U.; Harrison, D.K.; Rosenberg, A.: Galois theory and Galois cohomology of commutative rings. Memoirs Amer. Math. Soc. 52 (1965), 15-33.

[11] Chase, S.U.; Sweedler, M.E.: Hopf algebras and Galois theory. Lecture Notes 97, Springer Verlag, Berlin, 1969.

[12] Dedekind, R.: Gesammelte mathematische Werke. 3 Bände, Braunschweig (Vieweg), 1932.

[13] Dierolf, P.: Summierbare Familien und assoziierte Orlicz-Pettis-Topologien. Dissertation, Univ. München, 1975.

[14] Dierolf, P.: Une caractérisation des espaces vectriels topologiques Mackey-complets. C.R. Acad. Sci. Paris.

[15] Dierolf, S.: Über assoziierte lineare und lokalkonvexe Topologien. man. math. 16 (1975), 27-46.

[16] Dieudonné, J.: Eléments d'analyse. Tome III. Gauthiers-Villars, Paris, 1970.

[17] Dostal, M.A.: Some recent results on topological vector spaces. Lecture Notes 384, Springer Verlag, Berlin, (1974),20-91.

[18] Dubuc, E.J.; Porta,H.: Convenient categories of topological algebras, and their duality theory. J. Pure Appl. Algebra 1 (1971), 281-316.

[19] Dubuc, E.J.; Porta, H.: La comonade de la Kelleyfication convexe. Cahiers de Top. et Geom. Diff. 15 (1975), 343-352.

[20] Frölicher, A.; Jarchow, H.: Zur Dualitätstheorie kompakt erzeugter und lokalkonvexer Vektorräume. Comment. Math. Helv. 47 (1972), 289-310.

[21] Geiler, V.A.: On projective objects in the category of locally convex spaces. Funkt. Anal. Appl. 6 (1972), 149-150.

[22] Grothendieck, A.: Produits tensiorels topologiques. Memoirs Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[23] Grothendieck, A.: Espaces nucléaires. Memoirs Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[24] Haydon, R.: Sur un problème de H. Buchwalter. C.R. Acad. Sci. Paris, 275 (1972), 1077-1080.

[25] Herrlich, H.: Topologische Reflexionen und Coreflexionen. Lecture Notes 78, Springer Verlag, Berlin 1968.

[26] Jacobson, N.: Lectures in Abstract Algebra, Vol. III, Van Nostrand, Princeton, 1964.

[27] Kelley, J.L.: General Topology. Van Nostrand, New York, 1955.

[28] Köthe, G.M.: Topologische lineare Räume I. Springer Verlag, Berlin, 1960.

[29] Köthe, G.M.: Lectures on nuclear spaces. Univ. of Maryland, 1968.

[30] Krull, W.: Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen. Math. Ann. 100 (1928), 687-698.

[31] MacLane, S.: Categories for the Working Mathematician. Springer Verlag, Berlin, 1971.

[32] Magid, A.: The separable Galois theory of commutative rings. Dekker, New York, 1974.

[33] Newman, K.: A correspondence between bi-ideals and sub-Hopf-algebras in cocommutative Hopf algebras. J. of Algebra 36 (1975), 1-15.

[34] Oberst, U.; Schneider, H.-J.: Über Untergruppen endlicher algebraischer Gruppen. man. math. 8 (1973), 217-241.

[35] Pareigis, B.: Non-additive ring and module theory I: General theory of monoids. Publ. Math. Debrecen 24 (1977), 189-204.

[36] Pareigis, B.: Non-additive ring and module theory II: C-categories, C-functors and C-morphisms. Publ. Math. Debrecen

[37] Pareigis, B.: Non-additive ring and module theory III: Morita theorems over monoidal categories. Publ. Math. Debrecen

[38] Pareigis, B.: Non-additive ring and module theory IV: The Brauer Group of a Symmetric Monoidal Category. Lecture Notes 549, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[39] Pareigis, B.: Non-additive ring and module theory V: Projective and flat objects. Algebra-Berichte, Uni-Druck, München,

[40] Pareigis, B.: Endliche Hopf-Algebren. Algebra-Berichte Uni-Druck, München, 1973.

[41] Pareigis, B.: Categories and Functors. Academic Press New York, 1970.

[42] Porta, H.: Compactly determined locally convex topologies. Math. Ann. 196 (1972), 91-100.

[43] Robert, A.: Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques. Comment. Math. Helv. 42 (1967), 314-342.

[44] Schäfer, H.H.: Topological Vector Spaces. Springer Verlag, Berlin, 1971.

[45] Schwartz, L.: Theorie des distributions à valeurs vectorielles. Ann. Math. de l'Institut Fourier 8 (1959), 1-209.

[46] Schwartz, L.: Espaces de fonctions differentiables à valeurs vectorielles. Journal d'Analyse Math. Jerusalem 4 (1954-55), 88-148.

[47] Seip, U.: Kompakt erzeugte Vektorräume und Analysis. Lecture Notes 273, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[48] Semadeni, Z.: Banach spaces of continuous functions I. PWN, Warsaw, 1971.

[49] Semadeni, Z.; Wiweger, A.: A theorem of Eilenberg-Watts type for tensor products of Banach spaces. Studia Math. 38 (1970), 235-242.

[50] Sweedler, M.E.: Hopf Algebras. Benjamin, New York, 1969.

[51] Takeuchi, Y.: On Galois objects which are strongly radicial over its base ring. Osaka J. Math. 12 (1975), 23-31.

[52] Villamayor, O.E.; Zelinsky, D.: Galois theory for rings with finitely many idempotents. Nagoya Math. J. 27 (1966), 721-731.

[53] Wach, E.: Verschränkte Produkte über monoidalen Kategorien. Diplomarbeit, Univ. München, 1975.

[54] Lang, S.: Algebra. Addison-Wesley, Reading, 1965.

[55] Long, F.W.: The Brauer group of dimodule algebras. J. of Algebra 30 (1974), 559-601.