

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 519.688

Сергей Петрович Бобков

ФГБОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий и цифровой экономики, Россия, Иваново, e-mail: bsp@isuct.ru

Ирина Александровна Астраханцева

ФГБОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», доктор экономических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных технологий и цифровой экономики, Россия, Иваново, e-mail: i.astrakhantseva@mail.ru

Применение агентного подхода для моделирования процессов теплопроводности

Авторское резюме

Состояние вопроса. Процессы теплопереноса лежат в основе большинства технологических процессов в энергетике. Это определяет важность и актуальность разработки современных подходов для компьютерной имитации и визуализации явлений переноса тепловой энергии в различных объектах. Классические модели в виде дифференциальных уравнений различного вида описывают процессы в непрерывном пространстве и времени. Их использование при исследовании нелинейных явлений, процессов в неоднородных средах при наличии разрывных решений на границах является затруднительным. В этих случаях приходится использовать упрощающие допущения, что понижает адекватность моделей. Представляет интерес использование принципиально иных подходов для описания процессов переноса, к которым можно отнести дискретные динамические модели. Целью настоящего исследования является рассмотрение возможностей использования дискретных подходов для моделирования нелинейных процессов теплопереноса в условиях неоднородности материала и наличия в нем объемных источников переменной мощности.

Материалы и методы. Изучены возможности использования агентного подхода к имитационному моделированию сложных систем, позволяющего рассматривать сплошную среду как совокупность взаимодействующих элементов (агентов), поведение которых полностью описывается локальными зависимостями. При этом законы функционирования отдельных элементов приняты детерминированными и соответствующими фундаментальным положениям теории теплопередачи.

Результаты. Исследована возможность применения дискретного подхода для имитационного моделирования процесса переноса тепла по молекулярному механизму. Описана общая методология разработки агентной детерминированной модели и рассмотрена ее применимость к описанию квазилинейных и нелинейных процессов теплопроводности. Рассмотрены примеры моделирования процес-

сов горения, осложненных экзотермическими и эндотермическими эффектами. Указаны достоинства и недостатки предлагаемого метода.

Выводы. Проведенные исследования показали, что дискретные агентные модели являются хорошей альтернативой классическим континуальным подходам при изучении процессов передачи тепла в неоднородных средах. Полученные результаты не противоречат современным подходам к описанию тепловых процессов. Также установлено, что применяемые в агентном подходе имитационные алгоритмы моделирования являются достаточно универсальными и легко адаптируются к изменениям условий задачи. Анализ результатов дает возможность рекомендовать дискретный агентный подход для разработки имитационных моделей сложных технологических процессов и систем.

Ключевые слова: дискретный подход, агентные модели, теплопроводность, горение

Sergey Petrovich Bobkov

Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor of Information Technologies and Digital Economy Department, Russia, Ivanovo, e-mail: bsp@isuct.ru

Irina Alexandrovna Astrakhantseva

Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Doctor of Economics (Post-doctoral degree), Associate Professor, Head of Information Technologies and Digital Economy Department, Russia, Ivanovo, e-mail: i.astrakhantseva@mail.ru

Application of agent-based approach for heat conduction processes simulation

Abstract

Background. Heat transfer processes are the basis of the most technological processes of the energy sector. Thus, the development of modern approaches for computer simulation and visualization of the phenomena of thermal energy transfer in various objects are of great importance and is relevant. Classical models in the form of differential equations of various types describe processes in continuous space and time. So, it is difficult to apply classical models to study nonlinear phenomena, and processes in inhomogeneous media in the presence of discontinuous solutions at the boundaries. In these cases, simplifying assumptions are used, thus, the adequacy of the models is reduced. It is of great interest to apply fundamentally different approaches to describe transfer processes, which include discrete dynamic models. The purpose of this project is to study the possibilities to apply discrete approaches to simulate nonlinear heat transfer processes under conditions of material inhomogeneity and the presence of volume sources of variable power.

Materials and methods. The paper studies the possibilities to apply the agent-based approach to simulate models of complex systems. This approach allows us to consider a continuum as a set of interacting elements (agents). The behavior of the elements is completely described by local dependencies. At the same time, the laws of functioning of individual elements are accepted as deterministic and they correspond to the fundamental principles of the theory of heat transfer.

Results. The possibility to apply a discrete approach for simulating the process of heat transfer by the molecular mechanism has been studied. The general methodology to develop an agent-based deterministic model is described. Its applicability to describe quasi-linear and nonlinear heat conduction processes is considered. The examples of simulation of combustion processes complicated by exothermic and endothermic effects are considered. The advantages and disadvantages of the proposed method are indicated.

Conclusions. The results of the study have shown that discrete agent models are a good alternative to classical continuum approaches to study heat transfer processes in inhomogeneous media. The results obtained do not contradict modern approaches to the description of thermal processes. It has also been found that the simulation algorithms used in the agent-based approach are quite universal and easily adapt to changes under the conditions of problem setting. The analysis of the results makes it possible to recommend a discrete agent-based approach to develop simulation models of complex technological processes and systems.

Key words: discrete approach, agent-based models, heat conduction, combustion

DOI: 10.17588/2072-2672.2022.2.058-066

Введение. В последние годы значительно возрос интерес к использованию дискретных подходов для имитационного

моделирования целого ряда сложных систем, включая технические, экономические, социальные и т.д. [1, 2]. Среди методов,

использующих рассмотрение поведения объектов в дискретных пространственно-временных координатах, выделяется агентное моделирование. Данный термин появился сравнительно недавно и означает группу подходов, позволяющих исследовать поведение децентрализованных элементарных подсистем, влияющих на поведение системы в целом. К агентным относят модели, построенные на базе теории игр, теории клеточных автоматов, методов эволюционного программирования, методов Монте-Карло и др. [3, 4]. Основная идея, объединяющая указанные методы имитационного моделирования, заключается в том, что изучается локальное поведение элементарных компонентов системы (агентов), а ее глобальное поведение возникает как результат совместной деятельности множества агентов [5].

Известен целый ряд работ, показывающих, что агентные модели могут быть достаточно серьезной альтернативой классическим методам моделирования, основанным на применении континуальных подходов, использующих системы уравнений различного вида. В частности, для имитационного моделирования технологических процессов успешно используются клеточные автоматы – одна из разновидностей агентных моделей [6]. Полученный опыт использования агентных моделей для решения технических задач показывает, что использование данного подхода позволяет получить адекватные результаты при исследовании нелинейных процессов в неоднородных средах [7]. Еще одним преимуществом агентного подхода является его объектная ориентированность, что позволяет использовать современные приемы системной инженерии и значительно облегчает разработку программного инструментария для имитационного моделирования.

Построение агентной модели. Известно, что процессы переноса вещества и энергии (тепловой, механической) являются базовыми технологическими процессами в энергетической, химической, строительной индустрии. Все эти явления происходят в пространстве, поэтому агентная модель должна включать в себя следующие базовые компоненты:

– множество агентов, локализованных внутри исследуемого объекта;

– принципы размещения и взаимодействия агентов (топология);

– совокупность правил, определяющих поведение агентов;

– законы взаимодействия объекта с окружающей средой.

Рассмотрим подробнее процедуру построения агентной модели процесса микроскопического переноса тепловой энергии (теплопроводности). В качестве агентов будут использоваться детерминированные конечные автоматы [8].

В двухмерной постановке исследуемый объект можно представить в виде плоской поверхности, которая заполнена дискретными элементами (агентами). Для простоты будем считать, что поверхность прямоугольная и агенты расположены в узлах равномерной ортогональной решетки. Стоит отметить, что объект может иметь произвольную форму. В этом случае несколько усложняется процедура программирования, но принципы моделирования не меняются.

Если мы имеем модель из M агентов, то местоположение каждого на решетке можно обозначить его именем m . Если размерность решетки составит $I \times J$, то именами могут служить координаты агента: $m = \{(i, j) : i = 0, 1, \dots, I, j = 0, 1, \dots, J\}$.

Каждый агент имеет соседей, с которыми он контактирует, и их количество зависит от его локализации. Так, экземпляры, расположенные внутри решетки, будут взаимодействовать с четырьмя соседями. У элементов, расположенных на границе решетки, соседей меньше.

Конечный автомат, поставленный в соответствие каждому агенту, определяется своим состоянием z . Переменная $z_{i,j}(t_k)$ характеризует состояние элемента (i, j) в момент дискретного времени k .

Поведение агентов и переходы между состояниями определяются правилами, которые можно задать в виде функциональных зависимостей, связывающих состояния агентов и воздействия на них со стороны соседей [9, 10]. При этом целесообразно использовать основные законы тепловых процессов. В частности, в качестве параметра состояния агента удобно взять его температуру – интенсивную величину, однозначно характеризующую тепловые явления. Внешние воздействия в таком случае будут описываться экстенсивными потоковыми величинами, а имен-

но тепловыми потоками между соседними агентами [11].

Взаимодействие системы с окружающей средой можно описать особым поведением агентов, находящихся на границе решетки, а именно наличием или отсутствием тепловых потоков от агента во внешнюю среду.

Изменение состояний агентов (их функционирование) осуществляется в модели синхронно.

Таким образом, в рассмотрение вводится система из M взаимосвязанных агентов, локальное поведение которых подчиняется индивидуальному алгоритму, построенному на базе фундаментальных законов моделируемого процесса [12].

Рассмотрим процесс получения правил поведения для агентной модели переноса тепла теплопроводностью.

Поскольку взаимодействие между агентами происходит путем обмена потоками тепла, можно применить закон Фурье, согласно которому вектор потока тепла пропорционален градиенту температуры [11].

Выражение для потока тепла к агенту (i,j) от соседнего агента в дискретный момент времени t_k можно записать в следующем виде:

$$q_{i,j}(t_k) = \lambda_{i,j} \frac{\pm[T_{i,j}(t_k) - T_0(t_k)]}{h^2}, \quad (1)$$

где q – удельная мощность теплового потока; $\lambda_{i,j}$ – коэффициент теплопроводности материала агента; $T_{i,j}(t_k)$ и $T_0(t_k)$ – температуры (состояния) рассматриваемого и соседнего агентов в момент времени t_k ; h – шаг по координатам.

Конкретный знак в числителе правой части выражения (1) определяется направлением вектора теплового потока.

Введя в рассмотрение тепловые потоки от соседних агентов, можно получить функциональную зависимость для определения температуры (состояния) агента на каждом шаге дискретного времени:

$$T_{i,j}(t_{k+1}) = T_{i,j}(t_k) + \frac{\Delta t}{C_{i,j} \rho_{i,j}} \sum_1^4 q_{i,j}(t_k), \quad (2)$$

где Δt – шаг по времени; $C_{i,j}$ и $\rho_{i,j}$ – теплоемкость и плотность материала агента (i,j) соответственно.

Выражения (1)–(2) содержат конкретные физические характеристики материала индивидуального агента (плотность, теплоемкость, теплопроводность), что позволяет

формулировать алгоритм поведения агентов при исследовании процесса в неоднородных средах.

Строго говоря, зависимость (2) полностью справедлива для элементов системы, расположенных внутри решетки и имеющих четырех ближайших соседей. Для агентов, находящихся на границе решетки, поток теплоты в окружающую среду определяется либо с использованием уравнения теплоотдачи (теплообмен с внешней средой), либо путем уменьшения числа слагаемых в сумме, входящей в выражение (2) (если граница изолирована).

В системе также будут присутствовать отдельные элементы, поведение которых подчиняется особым законам. К ним относятся агенты, имитирующие источники (стоки) тепла. Для сосредоточенных источников применимы законы изменения их состояния во времени либо законы изменения потока тепла от них:

$$T_{m,n}(t_k) = \Psi(t_k) \text{ или } q_{m,n}(t_k) = \Phi(t_k), \quad (3)$$

где m, n – координаты агента-источника; $T_{m,n}(t_k)$ – температура источника; $q_{m,n}(t_k)$ – тепловой поток; $\Psi(t_k)$ и $\Phi(t_k)$ – заданные функции дискретного времени (в общем случае и свойств материала).

Если в объекте имеется распределенный источник (например, объемная реакция горения), то в уравнение (2) следует ввести дополнительное слагаемое:

$$T_{i,j}(t_{k+1}) = T_{i,j}(t_k) + \frac{\Delta t}{C_{i,j} \rho_{i,j}} [\sum q_{i,j}(t_k) + \gamma(t_k)], \quad (4)$$

где $\gamma(t_k)$ – удельная мощность источника в момент времени t_k .

При исследовании поведения системы задается начальное состояние всех агентов. Указываются имена (координаты) источников или стоков тепла. Задаются условия на границах решетки. Далее динамика поведения системы реализуется в ходе последовательности итераций. Алгоритм каждой итерации следующий:

а) выбирается очередной агент, расположенный на решетке;

б) определяется его текущее состояние и состояния агентов-соседей;

в) по зависимостям (2)–(4) определяется новое состояние выбранного агента.

Описанная последовательность действий выполняется M раз, чтобы в ней приняли участие все агенты, далее итерации повторяются.

Результаты исследования. Рассмотрим примеры использования агентных моделей для имитации процесса теплопроводности. В качестве модельного объекта выбрана плоская пластина, на которой в узлах ортогональной решетки с шагом 1 мм размещены 41×41 агентов. Физические параметры материала агентов были выбраны следующими: плотность ρ 1500 кг/м³; удельная теплоемкость C 1000 Дж/(кг·К); теплопроводность λ 1,0 Вт/(м·К). Начальная температура пластины – 0 условных градусов. Шаг моделирования по времени – 0,35 с. Полученные результаты представлены на рис. 1, 2, где в правом верхнем углу указано время, на вертикальной оси – температура в условных единицах.

Приведем результаты имитационного моделирования прогрева однородной пластины источником постоянной мощности (уравнение (3)), расположенным на одной

из ее границ (рис. 1). При имитации процесса было принято допущение об отсутствии теплоотдачи в окружающую среду. Мощность источника составила 0,04 Вт.

На рис. 2 показано изменение температуры аналогичной пластины при ее нагреве источником тепла, находящимся внутри объекта. Мощность источника составила 0,025 Вт.

Представленные на рис. 1 и 2 результаты описывают процесс постепенного нагрева объекта. При этом ход процесса полностью соответствует существующим представлениям о природе молекулярного переноса тепла.

В имитационных экспериментах, результаты которых представлены выше, функционирование агентов системы подчинялось уравнениям (2) и (3). Это были достаточно тривиальные задачи в линейной постановке.

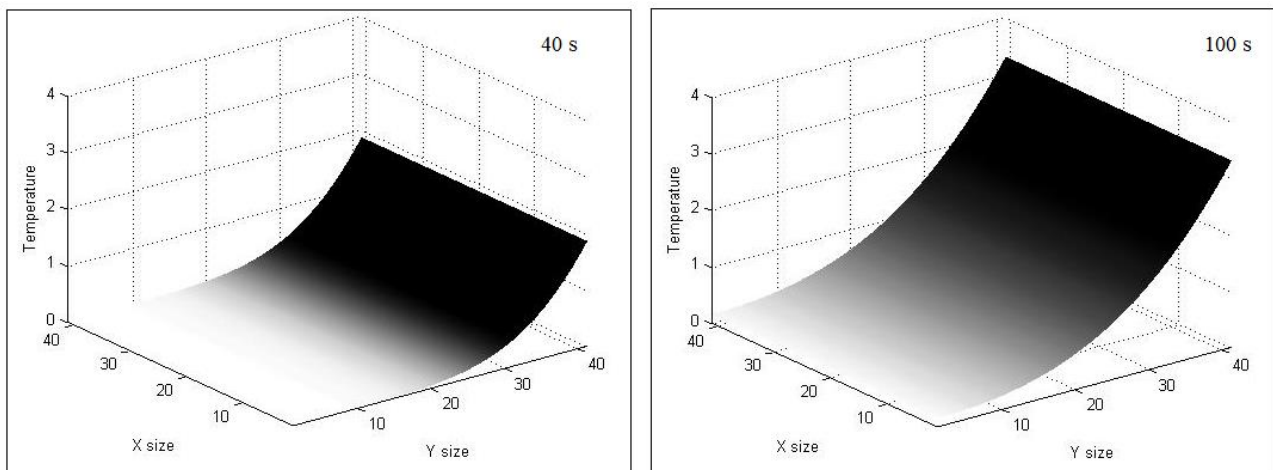


Рис. 1. Результаты моделирования нагрева пластины линейным источником тепла постоянной мощности

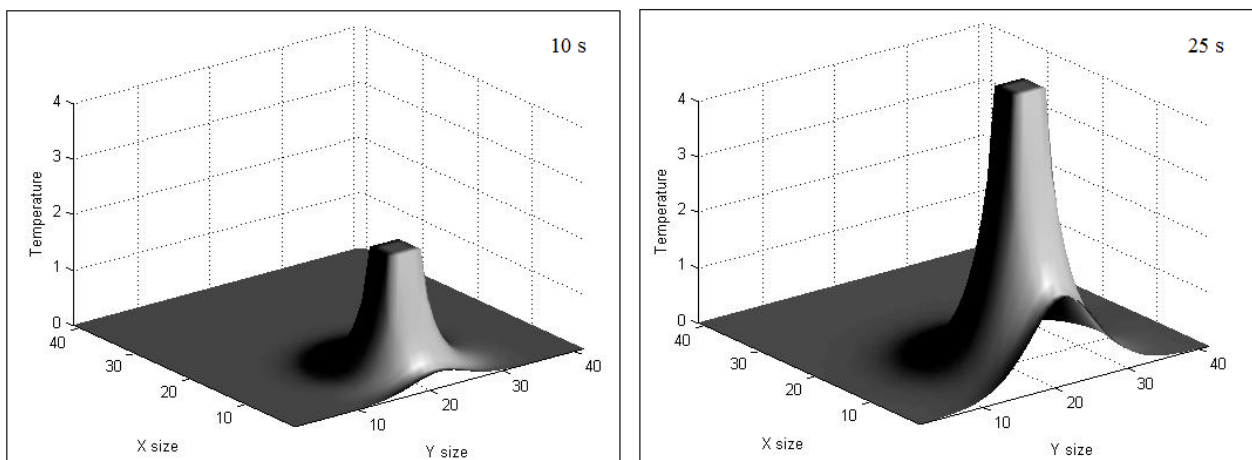


Рис. 2. Результаты моделирования нагрева пластины локальным тепловым источником постоянной мощности

Перейдем к более сложной квазилинейной задаче, имитирующей теплоперенос в процессе горения. Будем считать, что в пластине расположен объемный источник тепла и функционирование агентов подчиняется уравнению (4). Также примем, что справедлива следующая связь удельной мощности источников тепла с температурой T :

$$\gamma(T) = kT, \quad (5)$$

где k – константа.

Такая постановка задачи характерна для моделирования теплопереноса в условиях выделения тепла [13].

Предположим, что горение инициируется тепловым импульсом, расположенным в одном из углов решетки. Значение параметра k равно 0,025. Остальные параметры моделирования были взяты аналогичными описанным выше. Результаты моделирования представлены на рис. 3.

Анализ представленных результатов показывает, что сначала прогрев пластины происходит достаточно медленно. Однако затем температура резко возрастает, что характерно для начальных этапов процесса горения и соответствует общепринятым взглядам.

Ранее отмечалось, что агентные модели достаточно легко позволяют исследовать процессы в неоднородных средах. Для иллюстрации сказанного усложним предыдущую задачу, введя в пластину участки с различными теплофизическими свойствами. В частности, примем, что теплопроводность данных участков на два порядка ниже, чем у основного материала

пластины. Остальные параметры моделирования оставим прежними.

Рассмотрим два случая, при которых аномальные участки имеют различную локализацию. В первом случае аномальный (теплоизолирующий) участок имеет форму узкой полосы, а импульс, инициирующий горение, находится в середине одной из сторон пластины (рис. 4). Во втором случае участок имеет прямоугольную форму, а «поджигающий» импульс расположен в центре пластины (рис. 5).

Рис. 4 и 5 иллюстрируют резкое различие температуры общего теплового поля объекта, что характеризует его неравномерность.

Анализ приведенных выше результатов показывает, что пропорциональную зависимость удельной мощности внутренних источников теплоты от температуры (5), принятую в квазилинейной модели, можно считать достаточно грубым приближением при формализации законов теплопереноса при горении. К тому же в предыдущих примерах коэффициент теплопроводности считался константой, хотя в реальности он существенно зависит от температуры. Эти моменты позволили перейти к существенно нелинейной постановке задачи.

При такой постановке для учета изменения коэффициента теплопроводности при увеличении температуры будем его рассчитывать следующим образом:

$$\lambda(T) = \lambda_0 \alpha T, \quad (6)$$

где λ_0 – начальная теплопроводность материала; α – константа.

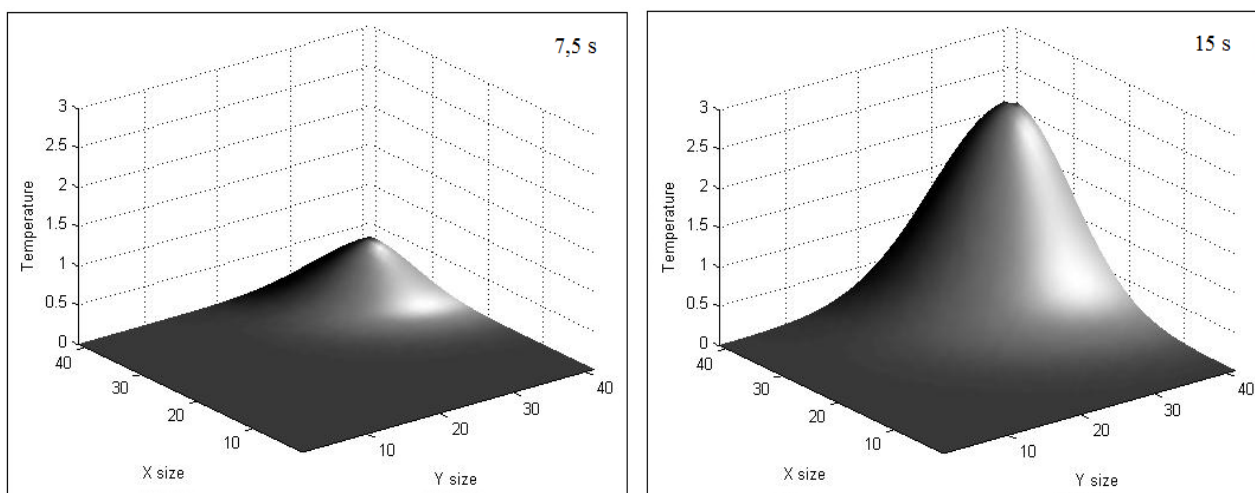


Рис. 3. Результаты моделирования квазилинейного процесса теплопроводности (имитация горения)

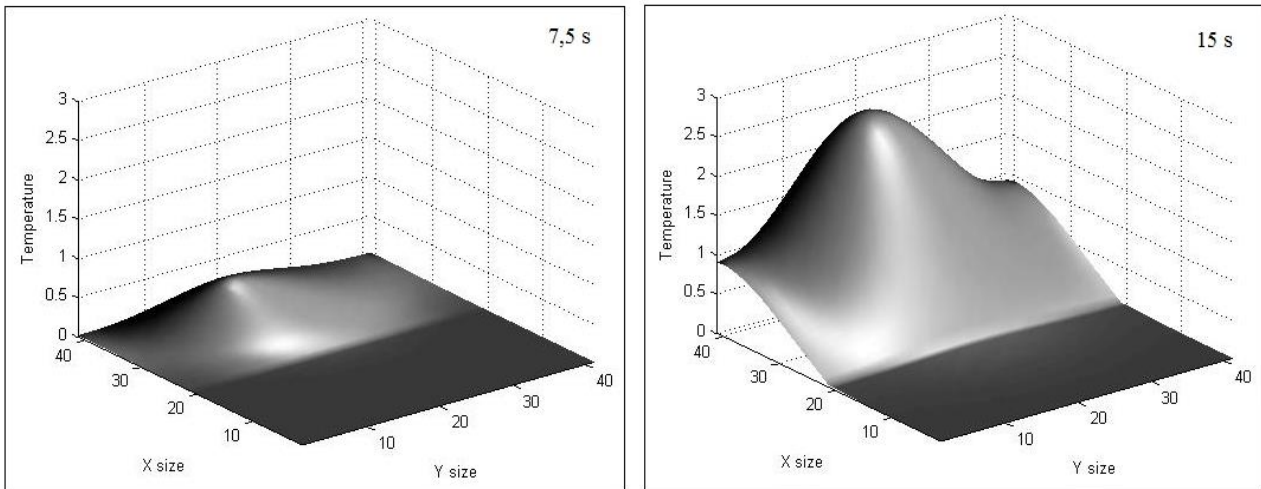


Рис. 4. Результаты моделирования квазилинейного процесса теплопроводности в объекте с линейной зоной аномальной теплопроводности

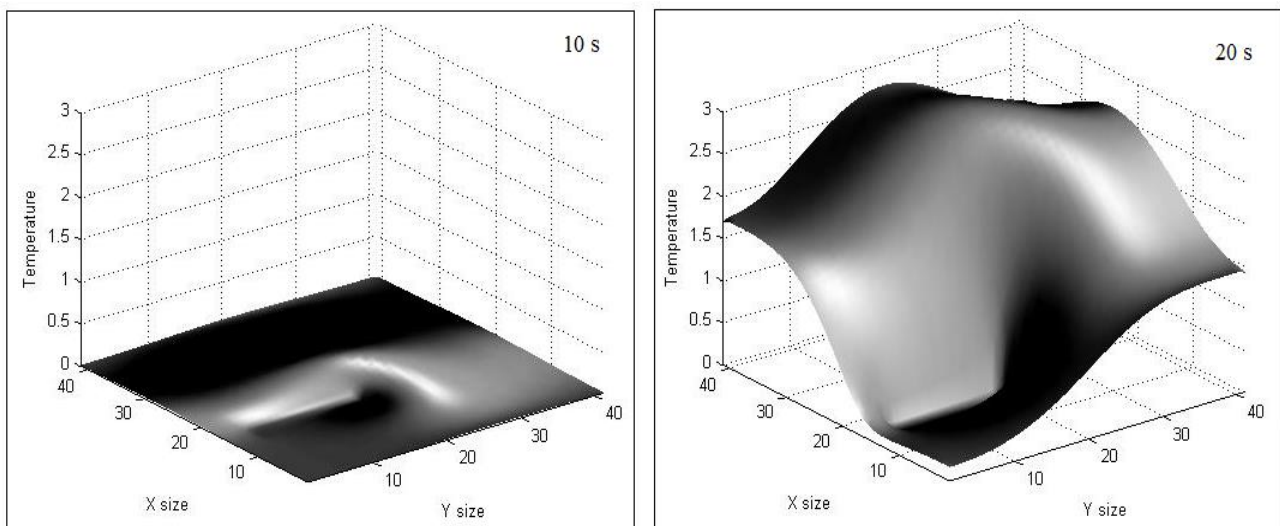


Рис. 5. Результаты моделирования квазилинейного процесса теплопроводности в объекте с прямоугольной зоной аномальной теплопроводности

Далее известно, что в реальных условиях ламинарному диффузионному горению часто сопутствуют эндотермические эффекты, связанные с тормозящим влиянием образующихся продуктов горения [14], поэтому вместо выражения (5) примем следующий нелинейный закон изменения мощности объемного источника [15]:

$$\gamma(T) = kT - \beta T^3, \quad (7)$$

где β – константа.

Наконец, импульс, инициирующий горение, поместим в середине одной из сторон пластины, а также предусмотрим отда-

чу тепла в окружающую среду, температуру которой будем считать постоянной.

Результаты моделирования при $k = 0,025$; $\alpha = 0,05$; $\beta = 0,01$ представлены на рис. 6.

Данные, представленные на рис. 6, значительно отличаются от приведенных выше. Их анализ показывает, что тепло распространяется ярко выраженным широким фронтом. Кроме того, имитация показала, что с течением времени рост температуры замедляется и она стремится к предельному значению. В реальных условиях такая ситуация может иметь место, например, при выгорании топлива.

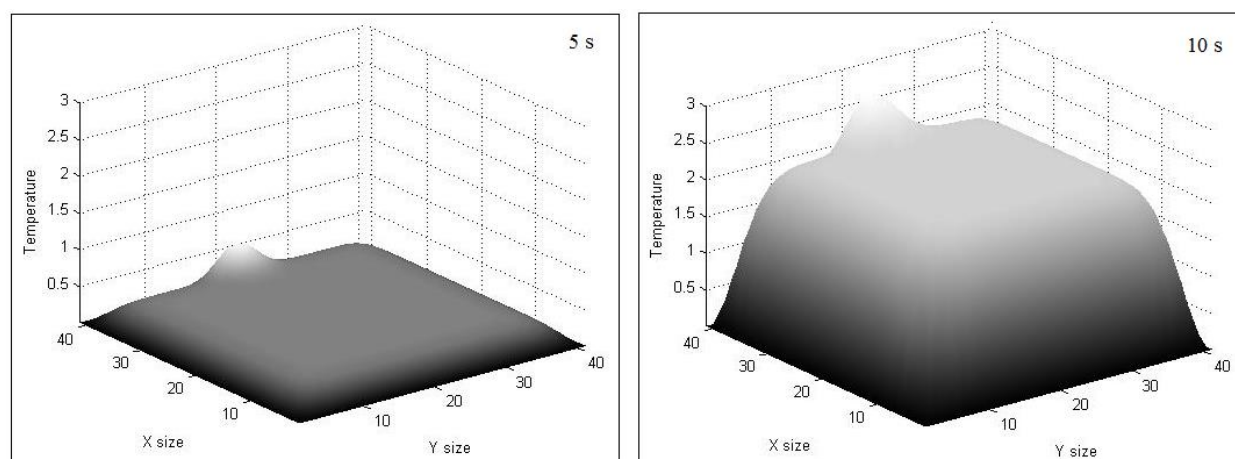


Рис. 6. Результаты моделирования нелинейного эндотермического процесса теплопроводности

Выводы. Полученные результаты согласуются с существующими представлениями о протекании процессов молекулярного переноса тепла. К тому же использованный дискретный подход представляется физически более ясным по сравнению с применением дифференциальных уравнений с частными производными и более простым в практической реализации. Следует отметить, что при изменении условий задачи имитационный алгоритм оставался практически без изменений. Менялись только зависимости, лежащие в основе алгоритмов поведения агентов и характеристики материала, при необходимости вводились координаты расположения аномальных участков.

Исследования показали, что агентные модели позволяют достаточно легко имитировать протекание процессов, описание которых классическими методами затруднительно. В частности, использование локализованных агентов позволяет моделировать объекты, имеющие сложную форму границ, а индивидуальное поведение агентов снимает проблемы моделирования, возникающие при описании изменения свойств материалов в пространстве или во времени. Еще одним преимуществом агентных моделей является легкая возможность перехода между детерминированными и стохастическими описаниями процесса. Для этого достаточно лишь использовать вероятностные функциональные зависимости для описания правил поведения агентов.

Представленный подход имеет ряд недостатков, главным из которых может считаться значительная потребность в вычислительных ресурсах. Повышение адек-

ватности модели требует увеличения числа используемых в ней агентов, что, в свою очередь, приводит к возрастанию объема вычислений. Однако данный недостаток не является острой проблемой. Сама идеология и архитектура дискретных моделей идеально подходят для успешного использования технологий параллельных вычислений, поэтому рост возможностей компьютеров в значительной степени компенсирует указанный недостаток.

В заключение можно отметить, что дискретный агентный подход позволяет создавать эффективные имитационные модели для изучения пространственно распределенных процессов и систем.

Агентный подход позволяет рассматривать большую и сложную систему как множество взаимодействующих элементов, т. е. первоначальная общая задача разбивается на несколько дискретных небольших задач. При этом действия локальных элементов формируют поведение системы в целом. С этих позиций набор агентов, обладающих конкретными свойствами, можно рассматривать как некий вычислительный инструмент, позволяющий имитировать реальные явления.

Список литературы

1. **Wolfram S.** A new kind of science. – Champaign, IL: Wolfram media inc, 2002.
2. **Бобков С.П., Астраханцева И.А., Волков В.С.** Имитационное моделирование системы массового обслуживания с целью анализа ее работы // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. – 2021. – № 3(67). – С. 58–62.
3. **Inverno M., Luck M.** Multi-agent systems research into the 21st century // The Knowledge

Engineering Review. – 2002. – Vol. 16. – P. 271–275.

4. **Yoav S., Leyton-Brown K.** Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic and Logical Foundations. – Cambridge University Press, 2009. – 519 p.

5. **Macal C., North M.** Tutorial on Agent-Based Modelling and Simulation // Journal of Simulation. – 2010. – Vol. 4. – P. 151–162.

6. **Toffoli T., Margolus N.** Cellular Automata Machines / Massachusetts Institute of Technology Press. – Massachusetts, USA, 1987.

7. **Bobkov S., Galiaskarov E., Astrakhtantseva I.** The use of cellular automata systems for simulation of transfer processes in a non-uniform area // CEUR Workshop Proceedings, Moscow, 20 января 2021 года. – Moscow, 2021.

8. **Бобков С.П., Астраханцева И.А., Галиаскаров Э.Г.** Применение системного подхода при разработке математических моделей // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. – 2021. – № 1(65). – С. 66–71.

9. **Gilbert N.** Agent-Based Models. – Sage Publications: London, 2007. – 153 p.

10 **Galan J.** Errors and Artefacts in Agent-Based Modelling // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. – 2008. – Vol. 12, no. 1.

11 **Chen T.M.** Numerical solution of hyperbolic heat conduction problems in the cylindrical coordinate system by the hybrid Green's function method // International journal of heat and mass transfer. – 2010. – Vol. 7(53). – P. 1319–1325.

12. **Dastani M., Gomez-Sanz J.J.** Programming multi-agent systems // The Knowledge Engineering Review. – 2005. – Vol. 20. – P. 151–164.

13. **Bobkov S.P., Astrakhtantseva I.A.** The use of multi-agent systems for modeling technological processes // Journal of Physics: Conference Series: 2, Moscow, 01 июля 2021 года. – Moscow, 2021. – P. 012002.

14. **Полежаев Ю.В.** Законы горения. – М.: Энергомаш, 2006. – 352 с.

15. **Bobkov S.P.** Use of Discrete Approaches for Simulation the Basic Processes of Chemical Technology // Russian Journal of General Chemistry. – 2021. – Vol. 91, No. 6. – P. 1190–1197.

References

1. Wolfram, S. A new kind of science. Champaign, IL: Wolfram media inc, 2002.

2. Bobkov, S.P., Astrakhtantseva, I.A., Volkov, V.S. Imitatsionnoe modelirovanie sistemy massovogo obsluzhivaniya s tsel'yu analiza ee

raboty [Simulation modeling of system of mass service to analyze its operation]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii. Regional'noe prilozhenie*, 2021, no. 3(67), pp. 58–62.

3. Inverno, M., Luck, M. Multi-agent systems research into the 21st century. The Knowledge Engineering Review, 2002, vol. 16, pp. 271–275.

4. Yoav, S., Leyton-Brown, K. Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic and Logical Foundations. Cambridge University Press, 2009. 519 p.

5. Macal, C., North, M. Tutorial on Agent-Based Modelling and Simulation. Journal of Simulation, 2010, vol. 4, pp. 151–162.

6. Toffoli, T., Margolus, N. Cellular Automata Machines. Massachusetts Institute of Technology Press. Massachusetts, USA, 1987.

7. Bobkov, S., Galiaskarov, E., Astrakhtantseva, I. The use of cellular automata systems for simulation of transfer processes in a non-uniform area. CEUR Workshop Proceedings, Moscow, 20 yanvarya 2021 goda. Moscow, 2021.

8. Bobkov, S.P., Astrakhtantseva, I.A., Galiaskarov, E.G. Primenenie sistemnogo podkhoda pri razrabotke matematicheskikh modeley [Application of a systematic approach while developing mathematical models]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii. Regional'noe prilozhenie*, 2021, no. 1(65), pp. 66–71.

9. Gilbert, N. Agent-Based Models. Sage Publications: London, 2007. 153 p.

10. Galan, J. Errors and Artefacts in Agent-Based Modelling. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 2008, vol. 12, no. 1.

11. Chen, T.M. Numerical solution of hyperbolic heat conduction problems in the cylindrical coordinate system by the hybrid Green's function method. International journal of heat and mass transfer, 2010, vol. 7(53), pp. 1319–1325.

12. Dastani, M., Gomez-Sanz, J.J. Programming multi-agent systems. The Knowledge Engineering Review, 2005, vol. 20, pp. 151–164.

13. Bobkov, S.P., Astrakhtantseva, I.A. The use of multi-agent systems for modeling technological processes. Journal of Physics: Conference Series: 2, Moscow, 01 iyulya 2021 goda. Moscow, 2021, p. 012002.

14. Polezhaev, Yu.V. *Zakony goreniya* [Laws of combustion]. Moscow: Energomash, 2006. 352 p.

15. Bobkov, S.P. Use of Discrete Approaches for Simulation the Basic Processes of Chemical Technology. Russian Journal of General Chemistry, 2021, vol. 91, no. 6, pp. 1190–1197.