UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Dicotomias em equações diferenciais ordinárias generalizadas

Lucas Henrique Destro de Toledo

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Lucas Henrique Destro de Toledo

Dicotomias em equações diferenciais ordinárias generalizadas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto

USP – São Carlos
Março de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

T649d

Toledo, Lucas Henrique Destro de
Dicotomias em equações diferenciais ordinárias generalizadas / Lucas Henrique Destro de Toledo; orientador Everaldo de Mello Bonotto. -- São Carlos, 2023.
86 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Dicotomia exponencial. 2. Equações diferenciais ordinárias generalizadas. 3. Equações diferenciais em medida. 4. Equações diferenciais impulsivas. 5. Soluções limitadas. I. Bonotto, Everaldo de Mello, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Lucas Henrique Destro de Toledo

Dichotomies in generalized ordinary differential equations

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto

USP – São Carlos
March 2023

A todas as pessoas que amo e aos que, direta ou indiretamente, desfrutarão deste trabalho de maneira positiva.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer aos meus pais, Ailton Henrique e Maria Cristina por todo o esforço que tiveram para me proporcionarem uma educação de qualidade e por todo o amor e compreensão em relação ao caminho que escolhi seguir pelo mundo da matemática e da ciência. Sou muito grato e amo muito vocês!

Agradeço ao meu irmão Matheus por todo o amor e companheirismo em todos os momentos em que estivemos juntos, o que sempre me ajudou.

Agradeço à minha família que sempre quis ver meu sucesso e por sempre me receberem com muito amor e carinho.

Agradeço à minha namorada Brenda por todo amor, confiança, carinho, incrível parceria, paciência e compreensão. O fato de ser você me trouxe muito apoio por tudo o que você é e representa. Te amo!

Agradeço aos meus amigos de escola e cursinho em Bragança pela amizade e por sempre acreditarem no meu potencial, aos amigos que fiz em Itajubá por terem sido essenciais no processo de mudança de curso e por até hoje estarem presentes na minha vida e especialmente, agradeço a todos os amigos que fiz em São Carlos por todos os momentos que tivemos, seja nos estudos ou nos momentos inesquecíveis de diversão. Minhas conquistas também são de vocês, pois nada disso teria sido possível nem teria o mesmo valor sem vocês!

Agradeço a todos os meus professores e funcionários – da escola, do cursinho, da engenharia e principalmente do ICMC – por toda minha formação e especialmente por todos os ensinamentos de vida que tive, serei eternamente grato por tudo o que aprendi e aprendo com vocês!

Agradeço ao meu orientador, Everaldo de Mello Bonotto por todos estes anos, por ter sido um excelente professor no curso de variáveis complexas na graduação, por ter me orientado desde a iniciação científica na graduação e principalmente por toda a sua compreensão. Saiba que você representa muito para meu amadurecimento matemático e acadêmico, sou muito grato por ter me aceitado como seu aluno.

Finalmente, agradeço ao suporte financeiro referente ao processo de n°: $2020/14444-1$ da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) no decorrer deste trabalho e pelo grande propósito de desenvolver ciência e tecnologia nacional de qualidade.

RESUMO

TOLEDO, L. H. D. **Dicotomias em equações diferenciais ordinárias generalizadas**. 2023. 86 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

A teoria de equações diferenciais ordinárias generalizadas – ou simplesmente EDOGs – é uma teoria de equações diferenciais em espaços de Banach que lida com funções que apresentam muitas descontinuidades e (ou) são de variação ilimitada. Neste contexto, se X denota um espaço de Banach, apresentaremos o conceito de dicotomia exponencial para EDOGs da forma

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x],$$

em que $A : \mathbb{R} \to L(X)$ é um operador, e exibiremos condições suficientes para a existência e unicidade de soluções limitadas (e $T-$ periódicas) para o problema perturbado

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)],$$

onde os operadores $A : \mathbb{R} \to L(X)$ e $f : \mathbb{R} \to X$ satisfazem certas condições específicas.

Além disso, aplicaremos os resultados obtidos a outros tipos de equações diferenciais: equações diferenciais em medida (EDMs) e equações diferenciais impulsivas (EDIs).

Palavras-chave: Dicotomia exponencial, equações diferenciais ordinárias generalizadas, equações diferenciais em medida, equações diferenciais impulsivas, soluções limitadas.

ABSTRACT

TOLEDO, L. H. D. **Dichotomies in generalized ordinary differential equations**. 2023. 86 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

The theory of generalized ordinary differential equations – or simply GODEs – is a theory of differential equations in Banach spaces which deals with functions that have many discontinuities and (or) are of unbounded variation. In this context, if X denotes a Banach space, we present the concept of exponential dichotomy for GODEs of the form

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x],$$

where $A : \mathbb{R} \to L(X)$ is an operator, and we exhibit sufficient conditions for the existence and uniqueness of bounded (and $T-$ periodic) solutions for the perturbed problem

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)],$$

where the operators $A : \mathbb{R} \to L(X)$ and $f : \mathbb{R} \to L(X)$ satisfy specific conditions.

In addition, we apply the obtained results to other types of differential equations: measure differential equations (MDEs) and impulsive differential equations (IDEs).

Keywords: Exponential dichotomy, generalized ordinary differential equations, measure differential equations, impulsive differential equations, bounded solutions.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

No período de 1957 a 1961, os matemáticos J. Kurzweil e R. Henstock definiram um novo conceito de integral de forma independente, fazendo uma pequena modificação na definição da integral de Riemann com a finalidade de ampliar o conjunto de funções integráveis. Tal integral foi denominada de integral de Riemann generalizada e que posteriormente ficou conhecida como integral de Kurzweil-Henstock.

Existem diversos motivos pelos quais este novo conceito de integral é importante, dentre eles, a integral de Kurzweil-Henstock integra funções cujo módulo não é integrável (integração não absoluta), ou seja, existem funções que são Kurzweil-Henstock integráveis que não são Lebesgue integráveis. Além disso, esta integral é capaz de lidar com funções de alta oscilação, com funções que possuem uma grande quantidade de descontinuidades e tudo isso sem perder a ideia intuitiva da integral de Riemann.

Na mesma época em que a integral de Kurzweil-Henstock foi criada, J. Kurzweil a utilizou no estudo de dependência contínua de soluções de equações diferenciais ordinárias com relação aos dados iniciais, incluindo a noção da integral de Perron generalizada que posteriormente foi chamada de integral de Kurzweil. Neste contexto, J. Kurzweil introduziu as equações diferenciais ordinárias generalizadas, ou simplesmente EDOGs.

As EDOGs são definidas através de suas soluções que, por sua vez, são definidas por equações integrais de modo análogo ao que é feito em equações diferenciais ordinárias clássicas, entretanto, cujo conceito de integral envolvido é no sentido de Kurzweil. Desta forma, como a integral de Kurzweil abrange uma quantidade maior de funções integráveis, aumentam as possibilidades para o estudo de novas equações. De fato, as EDOGs compreendem vários tipos de equações diferenciais, como as equações diferenciais ordinárias clássicas (EDOs), equações diferenciais com impulsos (EDIs), equações diferenciais em medida (EDMs), equações diferenciais funcionais (EDFs), entre outras.

Uma das vantagens de estudar as EDOs generalizadas está no fato de que, por ser uma teoria geral, na maioria das vezes, é mais simples entender suas propriedades do que lidar com as particularidades de qualquer uma das outras equações mencionadas anteriormente de forma independente uma vez que, via caracterização de soluções, os resultados de EDOGs refletem em resultados para as outras equações.

Diante da importância de estudar a teoria de EDOGs e com o intuito de preservar propriedades de outros tipos de equações, iremos estudar a teoria de dicotomia exponencial em EDOGs. Tal teoria se apresenta como uma forma de generalizar o conceito de hiperbolicidade de equações lineares autonomas para equações lineares não autonomas, onde os subespaços são substituídos por fibrados vetoriais invariantes e as propriedades de estabilidades das soluções nesses conjuntos invariantes não triviais são uniformes.

A organização deste trabalho é apresentada da seguinte forma.

No primeiro capítulo, apresentaremos os objetos de estudo, simbologia, notações e algumas aplicações que serão adotadas no decorrer de todo o trabalho.

No segundo capítulo, vamos introduzir os espaços de funções (regradas e de variação limitada) que se fazem presentes na teoria da integral de Kurzweil. Além disso, apresentaremos diversas propriedades que serão úteis e necessárias. O leitor habituado com outras teorias de integração pode observar que estas propriedades em si, justificam a teoria de integração de Kurzweil por também estarem presentes. Uma das propriedades mais importantes que ilustra este fato é o Teorema Fundamental do Cálculo (veja 2.4.1).

No terceiro capítulo deste trabalho, vamos introduzir as EDOGs, suas propriedades e uma correspondência com outros tipos de equações. Neste capítulo, o operador fundamental se destaca como uma aplicação importante que fornece propriedades para as EDOGs lineares (como por exemplo a fórmula de variação dos parâmetros apresentada no Teorema 3.2.12) e, além disso, que também é essencial para o desenvovlvimento da teoria de dicotomia exponencial em EDOGs.

No quarto capítulo, estabeleceremos o conceito de dicotomia exponencial em EDOGs lineares homogêneas, condições sequenciais discretas para uma EDOG admitir tais dicotomias (veja 4.2.5) e, principalmente, o apresentaremos como condição suficiente para a existência e unicidade global de soluções limitadas (ou $T-$periódicas) para a EDOG linear não homogênea perturbada como resultado principal através dos Teoremas 4.3.3 e 4.4.4.

Finalmente, no último capítulo, aplicaremos estes resultados a outros tipos de equações diferenciais: equações diferenciais em medida (EDMs) e equações diferenciais impulsivas (EDIs), para justificarmos como o estudo das propriedades das EDOGs se refletem em outros tipos de equações.

Neste trabalho, os resultados em geral estarão devidamente referenciados quando não forem demonstrados e aqueles que serão demonstrados seguem adaptados às ideias do livro (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021).

CAPÍTULO

2

CONTEXTUALIZAÇÃO E PRELIMINARES

Introduziremos neste capítulo os objetos de estudo que permeiam a teoria de dicotomias exponenciais em equações diferenciais ordinárias generalizadas e suas notações. Especificamente, apresentaremos os espaços de funções regradas e de variação limitada para, em seguida, definir a integral de Kurzweil e apresentar suas propriedades.

2.1 Objetos de estudo e a simbologia adotada

Nesta seção, vamos apresentar os objetos matemáticos pertinentes e sua simbologia adotada de forma detalhada, levando em consideração a simbologia usual presente nos cursos básicos de análise e análise funcional.

2.1.1 Intervalos

Por simplicidade, neste trabalho I é um **intervalo não degenerado em** $\mathbb{R}$ (podendo ser ilimitado).

Se tivermos a intenção de explicitar que I é ilimitado inferiormente, o denotaremos por $I^{-\infty}$. Analogamente, $I^{+\infty}$ denotará o **caso em que I é ilimitado superiormente**.

Se tivermos a intenção de explicitar se os extremos são abertos ou fechados, I será representado por $(a,b),[a,b),(a,b]$ ou $[a,b]$ no caso em que os intervalos são limitados, $I^{-\infty}$ será representado por $(-\infty,b)$ ou $(-\infty,b]$ e, finalmente, $I^{+\infty}$ por $(a,+\infty)$ ou $[a,+\infty)$ com $a,b \in \mathbb{R}$.

2.1.2 Espaços vetoriais e aplicações frequentes

Neste trabalho, a teoria de equações diferenciais ordinárias generalizadas é desenvolvida sobre espaços de Banach de dimensão arbitrária. Assumiremos as seguintes notações:

- V denota um espaço vetorial munido de uma norma $\|\cdot\|_V$;

• X e Y denotam **espaços de Banach** munidos de suas respectivas normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$;

• $L(X)$ denota o **espaço** de Banach **dos operadores lineares limitados definidos em** X munido da norma usual do operador $\|\cdot\|_{L(X)}$;

• $L(X,Y)$ denota o **espaço** das transformações lineares limitadas de X em Y munido da norma usual do operador $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$;

• $O \subset X$ ou $O \subset L(X)$ denota um **subconjunto aberto não vazio** com a norma usual do respectivo espaço;

• $B(I,X)$ denota o espaço de Banach das **funções limitadas** definidas em I tomando valores em X munido da norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$;

• $C(I,X)$ denota o espaço das **funções contínuas** definidas em I tomando valores em X munido da norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$ no caso em que $I = [a,b]$.

Observação 2.1.1. Iremos omitir o subíndice da norma quando não houver possibilidade de confusão, por exemplo, quando houver apenas uma norma em questão.

Além dos espaços vetoriais, vamos denotar algumas das aplicações que serão recorrentes:

• $\chi_S : C \to \{0,1\}$ denota a **função característica** de um subconjunto $S \subset C$, ou seja, $\chi_S(S) = \{1\}$ e $\chi_S(C \setminus S) = \{0\}$;

• $I_d : X \to X$ denota a **aplicação identidade** dada por $I_d(x) = x$, para todo $x \in X$;

• Considere $d \in \mathbb{R}$, então a função $H_d : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ denota a **função de Heaviside** que satisfaz $H_d((-\infty,d]) = \{0\}$ e $H_d((d,+\infty)) = \{1\}$.

2.2 Funções regradas e funções de variação limitada

Uma vez conhecidos os objetos e seus símbolos associados, estudaremos nesta seção dois espaços de funções fundamentais para o desenvolvimento da integral de Kurzweil: o espaço das funções regradas e o espaço das funções de variação limitada.

2.2.1 *Funções regradas*

Definição 2.2.1. **(Funções regradas)** Uma **função** $f : I \to X$ é dita **regrada** em I, se existem os limites $\lim\limits_{s \to t^-} f(s) = f(t^-)$, para todo $t \in I \setminus \inf I$ e $\lim\limits_{s \to t^+} f(s) = f(t^+)$, para todo $t \in I \setminus \sup I$. Neste caso, definimos $\Delta^+ f(t) \doteq f(t^+) - f(t)$, para todo $t \in I \setminus \sup I$ e $\Delta^- f(t) = f(t) - f(t^-)$, para todo $t \in I \setminus \inf I$.

O espaço das funções regradas será denotado por $G(I,X)$.

Definição 2.2.2. (Divisões) Dizemos que $d = \{s_i\}_{i=0}^{|d|} \subset [a,b]$ é uma **divisão** de $[a,b]$ se

$$a = s_0 < \ldots < s_{|d|} = b,$$

onde $|d|$ representa o número de subintervalos $[s_{i-1}, s_i]$ da divisão d de $[a,b]$.

O conjunto das divisões de $[a,b]$ será denotado por $D_{[a,b]}$.

Definição 2.2.3. (Função escada) Uma função $f : [a,b] \to X$ é chamada de **função escada** se existem $d = \{s_i\}_{i=0}^{|d|} \in D_{[a,b]}$ e $c_i \in X$ tais que $f((s_{i-1}, s_i)) = \{c_i\}$ para todo $i = 1, \ldots, |d|$.

O espaço das funções escada será denotado por $E([a,b],X)$.

Observação 2.2.4. Observe que $E([a,b],X) \subset G([a,b],X)$.

Teorema 2.2.5. (Caracterização de funções regradas)(NACHBIN, 2011, Teorema I.3.1) Seja $f : [a,b] \to X$ uma função. São equivalentes:

1. Existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E([a,b],X)$ que converge uniformemente para f.

2. $f \in G([a,b],X)$.

3. Dado $\varepsilon > 0$, existe $d = \{s_i\}_{i=0}^{|d|} \in D_{[a,b]}$ tal que

$$\sup\{\|f(t) - f(s)\| : t, s \in (t_{i-1}, t_i),\ i = 1, \ldots, |d|\} < \varepsilon.$$

Corolário 2.2.6. (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, comentário pós Teorema 1.4) Considere $(E([a,b],X), \|\cdot\|_\infty)$, $(G([a,b],X), \|\cdot\|_\infty)$ e $(B([a,b],X), \|\cdot\|_\infty)$, então

$$\overline{E([a,b],X)} = G([a,b],X) \subset B([a,b],X),$$

consequentemente, $(G([a,b],X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Observação 2.2.7. Note, por exemplo, que a aplicação identidade $I_{d_\mathbb{R}} \notin B(\mathbb{R},\mathbb{R})$, por outro lado, $I_{d_\mathbb{R}} \in G(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Portanto, em intervalos ilimitados em geral, o Corolário 2.2.6 não vale. Assim, denotamos $B(\mathbb{R},X) \cap G(\mathbb{R},X)$ por $BG(\mathbb{R},X)$.

Corolário 2.2.8. (COLLEGARI, 2014, Corolário 1.2) Se $f \in G([a,b],X)$ é uma função então, para cada $\varepsilon > 0$, os conjuntos

$$\{t \in [a,b) :\ \|f(t^+) - f(t)\| \geqslant \varepsilon\} \ \text{ e } \ \{t \in (a,b] :\ \|f(t) - f(t^-)\| \geqslant \varepsilon\}$$

são finitos e, além disso, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

2.2.2 Funções de variação limitada

Vamos introduzir as funções de variação limitada e às relacionaremos com as funções regradas.

Definição 2.2.9. (Funções de variação limitada) Uma **função** $g : [a,b] \to V$ é **de variação limitada** se a **variação total de** g, definida por

$$\mathrm{var}_a^b(g) \doteq \sup_{d \in D_{[a,b]}} \mathrm{var}_d(g),$$

é finita, em que $\mathrm{var}_d(g) \doteq \sum_{i=1}^{|d|} \|g(s_i) - g(s_{i-1})\|$ para toda divisão $d = \{s_i\}_{i=1}^{|d|} \in D_{[a,b]}$.

O espaço das funções de variação limitada em $[a,b]$ é denotado por $BV([a,b],V)$.

Observação 2.2.10. Dizemos que $g \in BV(\mathbb{R},X)$ se $V_g \doteq \sup\{\mathrm{var}_a^b(g) :\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\} < +\infty$.

Definição 2.2.11. (Funções localmente de variação limitada) Uma **função** $g : I \to V$ é **localmente de variação limitada**, se para todo intervalo compacto $K \subset I$ temos $g_{|_K} \in BV(K,V)$.

O espaço das funções localmente de variação limitada é denotado por $BV_{loc}(I,V)$.

Observação 2.2.12. Observe que $BV(\mathbb{R},X) \subsetneq BV_{loc}(\mathbb{R},X)$, pois $I_{d_{\mathbb{R}}} \in BV_{loc}(\mathbb{R},X) \setminus BV(\mathbb{R},X)$.

Definição 2.2.13. (Norma da variação) A função $\|\cdot\|_{BV} : BV([a,b],V) \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$\|g\|_{BV} = \|g(a)\|_V + \mathrm{var}_a^b(g),$$

é denominada de **norma da variação**. Denotaremos $\|\cdot\|_{BV}$ simplesmente por $\|\cdot\|$ quando não houver possibilidade de confusão.

Observação 2.2.14. A norma da variação da definição anterior é, de fato, uma norma sobre $BV([a,b],V)$.

Vamos introduzir algumas das propriedades básicas das funções de variação limitada.

Proposição 2.2.15. (NACHBIN, 2011) Sejam $g \in BV([a,b],V)$ uma função e $c \in (a,b)$. Então:

1. $g \in B([a,b],V)$;
2. $\|g(t)\|_V \leqslant \|g(a)\|_V + \mathrm{var}_a^t(g)$, para todo $t \in [a,b]$;
3. $\mathrm{var}_a^b(g) = \mathrm{var}_a^c(g) + \mathrm{var}_c^b(g)$.

Corolário 2.2.16. (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Observação 1.28) Considere $g \in BV([a,b],X)$ uma função então $\|g\|_\infty \leqslant \|g\|_{BV}$.

Proposição 2.2.17. (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Comentário pós Definição 1.25) O espaço $(BV([a,b],X), \|\cdot\|_{BV})$ é de Banach.

Proposição 2.2.18. (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Lema 1.29) Vale a inclusão

$$BV([a,b],X) \subset G([a,b],X).$$

Lema 2.2.19. (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Lema 1.30) Seja $\alpha \in BV([a,b],X)$. Para cada $t \in [a,b]$, defina $v(t) = \mathrm{var}_a^t(\alpha)$. Então:

1. $v(t^+) - v(t) = \|\alpha(t^+) - \alpha(t)\|$, $t \in [a,b)$;
2. $v(t) - v(t^-) = \|\alpha(t) - \alpha(t^-)\|$, $t \in (a,b]$.

Teorema 2.2.20. (Teorema da Escolha de Helly) (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Teorema 1.34) Se $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset BV([a,b],X)$ e existem $M > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{var}_a^b(g_n) \leqslant M$ e a função $g : [a,b] \to X$ tal que $g_n(t) \to g(t)$, para todo $t \in [a,b]$, então $g \in BV([a,b],X)$ e $\mathrm{var}_a^b(g) \leqslant M$.

2.3 A integral de Kurzweil

A integral de Kurzweil tem um papel essencial para o desenvolvimento da teoria das equações diferenciais ordinárias generalizadas, que será apresentada no próximo capítulo.

Nesta seção, introduziremos a integral de Kurzweil.

2.3.1 Definição da integral de Kurzweil

Para definirmos a integral de Kurzweil, precisaremos definir alguns conceitos.

Definição 2.3.1. (Divisão marcada) Uma **divisão marcada** de $[a,b]$ é uma coleção finita

$$d = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]) : \ i = 1, \dots, |d|\},$$

em que $d = \{s_i\}_{i=1}^{|d|} \in D_{[a,b]}$ e $\tau_i \in [s_{i-1}, s_i]$ para cada $i = 1, \dots, |d|$. Vamos denotar por $TD_{[a,b]}$ como sendo o conjunto de todas as divisões marcadas de $[a,b]$.

Definição 2.3.2. (Divisão marcada parcial) Uma **divisão marcada parcial** de $[a,b]$ é uma coleção finita

$$d = \{(\tau_j, J_j) : \ j = 1, \dots, k\},$$

onde os intervalos J_j's não são sobrepostos satisfazendo $\bigcup_{j=1}^{k} J_j \subset [a,b]$ e $\tau_j \in J_j$ para cada $i = 1, \dots, j$. O conjunto das divisões marcadas parciais de $[a,b]$ será representado pelo conjunto $TPD_{[a,b]}$.

Observação 2.3.3. Note que $TD_{[a,b]} \subset TPD_{[a,b]}$.

Definição 2.3.4. (Calibre) Um **calibre** δ em $A \subset [a,b]$ é uma função $\delta : A \to (0, +\infty)$.

Definição 2.3.5. (Divisões parciais finas com respeito a um calibre) Considere δ um calibre em $[a,b]$. Dizemos que $d = \{(\tau_i, J_i)\}_{i=1}^{k} \in TPD_{[a,b]}$ é uma **divisão marcada parcial $\delta-$fina** se, para todo $i = 1,\dots,k$, temos

$$J_i \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)).$$

Por simplicidade, utilizaremos a notação $d \ll \delta$ para representar uma divisão $\delta-$fina.

Observação 2.3.6. Pela Observação 2.3.3, a Definição 2.3.5 pode ser aplicada para divisões marcadas, entretanto, a notação utilizada será a mesma, porém, omitiremos a palavra "parcial" da definição.

Lema 2.3.7. (Lema de Cousin) (HENSTOCK, 1988, Teorema 4.1) Para todo calibre δ em $[a,b]$, existe $d \in TD_{[a,b]}$ tal que $d \ll \delta$.

Vamos definir a integral de Kurzweil em sua versão que será utilizada posteriormente para estudarmos as equações diferenciais ordinárias generalizadas.

Definição 2.3.8. (Integral de Kurzweil) Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ **é dita Kurzweil integrável sobre** $[a,b]$**,** se existir $L \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ de maneira que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, s_i) - U(\tau_i, s_{i-1})] - L \right\| < \varepsilon,$$

para toda divisão marcada $d = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]) : i = 1,\dots,|d|\} \ll \delta$.

Neste caso, L é chamado de **integral de Kurzweil** de U sobre $[a,b]$ e a denotamos por $\int_a^b DU(\tau,t)$.

O espaço de todas as funções $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ Kurzweil integráveis sobre $[a,b]$ será denotado por $\mathscr{K}([a,b],X)$.

Observação 2.3.9. A soma presente na Definição 2.3.8, $\displaystyle\sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, s_i) - U(\tau_i, s_{i-1})]$, é chamada de soma de Riemann de U.

Definição 2.3.10. Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ é dita **localmente Kurzweil integrável sobre** $[a,b]$ se $U \in K([\alpha,\beta],X)$, para todo $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

O espaço de todas as funções $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ localmente integráveis sobre $[a,b]$ é denotado por $\mathscr{K}_{loc}([a,b],X)$.

Definição 2.3.11. Suponha que $\int_a^b DU(\tau,t)$ exista, então definimos

$$\int_b^a DU(\tau,t) = -\int_a^b DU(\tau,t).$$

Observação 2.3.12. As Definições 2.3.8 e 2.3.10 podem ser estendidas de intervalos compactos para intervalos ilimitados da reta conforme (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Comentário pós Lema 2.2).

Agora, apresentaremos casos particulares usuais e importantes da Definição 2.3.8, referidos pela literatura como **integral vetorial de Kurzweil**, porém, ao qual vamos nos referir por **integral de Perron** e **integral de Perron-Stieltjes** para diferenciá-los da integral de Kurzweil (que é mais geral), proposta na Definição 2.3.8.

Definição 2.3.13. (Integral de Perron-Stieltjes) Sejam $f : [a,b] \to L(X,Y)$ um operador e $g : [a,b] \to X$ uma função. Dizemos que

1. f é $g-$integrável (ou, **Perron integrável** com respeito a g) se existir $L \in Y$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ de maneira que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)[g(s_i) - g(s_{i-1})] - L \right\| < \varepsilon,$$

   para toda divisão marcada $d = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]) : i = 1, \ldots, |d|\} \ll \delta$.

   Neste caso, L é chamado de **integral de Perron-Stieltjes de** f **com respeito a** g e a denotamos por $\int_a^b f(t)dg(t)$.

   O espaço de todas as funções $f : [a,b] \to L(X,Y)$ Perron integráveis com respeito a g é denotado por $K_g([a,b], L(X,Y))$.

2. g é $f-$integrável (ou, **Perron integrável** com respeito a f) se existir $L \in Y$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ de maneira que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(s_i) - f(s_{i-1})]g(\tau_i) - L \right\| < \varepsilon,$$

   para toda divisão marcada $d = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]) : i = 1, \ldots, |d|\} \ll \delta$.

   Neste caso, L é chamado de **integral de Perron-Stieltjes de** g **com respeito a** f e a denotamos por $\int_a^b df(t)g(t)$.

   O espaço de todas as funções $g : [a,b] \to X$ Perron integráveis com respeito a f é denotado por $K^f([a,b], X)$.

Observação 2.3.14. Note que o item 1. da Definição 2.3.13 é um caso particular da Definição 2.3.8 tomando $U(\tau,t) = f(\tau)g(t)$ e, analogamente, o item 2. retrata o caso em que $U(\tau,t) = f(t)g(\tau)$.

Definição 2.3.15. (Integral de Perron) Seja $g : [a,b] \to X$ uma função. Dizemos que g é integrável (ou, **Perron integrável**) se existir $I \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ de maneira que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} g(\tau_i)[s_i - s_{i-1}] - I \right\| < \varepsilon,$$

para toda divisão marcada $d = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]) : i = 1, \ldots, |d|\} \ll \delta$.

Neste caso, I é chamado de **integral de Perron de** g e a denotamos por $\int_a^b g(t)dt$.

O espaço de todas as funções $g : [a,b] \to X$ Perron integráveis é denotado por $K([a,b],X)$.

Observação 2.3.16. A Definição 2.3.15 é um caso particular da Definição 2.3.8 tomando $U(\tau,t) = tg(\tau)$.

Observação 2.3.17. Os conceitos de integrabilidade local dados pela Definição 2.3.10 se estendem para as integrais de Perron e Perron-Stieltjes, visto que estas são um caso particular da integral de Kurzweil.

2.3.2 Propriedades da integral de Kurzweil

Nesta seção, apresentaremos as principais propriedades da integral de Kurzweil que serão utilizadas neste trabalho. O leitor interessado nas mais diversas propriedades da integral de Kurzweil pode consultar (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Capítulos 1 e 2).

Teorema 2.3.18. (Existência das integrais de Perron-Stieltjes) Sejam $f : [a,b] \to L(X,Y)$ um operador e $g : [a,b] \to X$ uma função.

- (SCHWABIK, 1996, Teorema 15) Se $f \in G([a,b],L(X,Y))$ e $g \in BV([a,b],X)$ então a integral $\int_a^b f(t)dg(t)$ existe.
- (SCHWABIK, 2001, Proposição 7) Se $f \in BV([a,b],L(X,Y))$ e $g \in G([a,b],X)$ então a integral $\int_a^b df(t)g(t)$ existe.

Corolário 2.3.19. Sejam $f : [a,b] \to L(X,Y)$ um operador e $g : [a,b] \to X$ uma função.

- Se $f \in G([a,b],L(X,Y))$ e $g \in BV([a,b],X)$ então vale a desigualdade
$$\left\| \int_a^b f(t)dg(t) \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\| d[\mathrm{var}_a^t(g)] \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{var}_a^b(g); \tag{2.1}$$
- Se $f \in BV([a,b],L(X,Y))$ e $g \in G([a,b],X)$ então vale a desigualdade
$$\left\| \int_a^b df(t)g(t) \right\| \leqslant \int_a^b d[\mathrm{var}_a^t(f)] \|g(t)\| \leqslant \mathrm{var}_a^b(f) \|g\|_\infty. \tag{2.2}$$

Os próximos dois resultados podem ser encontrados em (BIANCONI; FEDERSON, 1999, Teorema 2.2).

Proposição 2.3.20. (BIANCONI; FEDERSON, 1999, Teorema 2.2) Seja $g \in G([a,b],L(X))$ um operador. Se $f : [a,b] \to L(X)$ é um operador e existe a integral $\int_a^b f(s)dg(s)$ então a função $F(t) \doteq \int_a^t f(s)dg(s)$ é regrada em $[a,b]$.

Proposição 2.3.21. (BIANCONI; FEDERSON, 1999, Teorema 2.2) Seja $g \in C([a,b],L(X))$ um operador. Se $f : [a,b] \to L(X)$ é um operador e existe a integral $\int_a^b f(s)dg(s)$ então a função $F(t) \doteq \int_a^t f(s)dg(s)$ é contínua em $[a,b]$.

Observação 2.3.22. A demonstração da Proposição 2.3.21 presente em (BIANCONI; FEDERSON, 1999, Teorema 2.2) é feita primeiro provando-se a continuidade à esquerda de F utilizando apenas a continuidade à esquerda de g e, em seguida, um argumento análogo é feito para a continuidade à direita, assim podemos restringir o resultado para estes casos particulares. Em outras palavras, a **continuidade à esquerda (ou à direita) de F depende da continuidade à esquerda (ou à direita) de g**. Analogamente, o mesmo acontece com a Proposição 2.3.20 em relação à existência dos **limites laterais de F em um ponto dado depender da existência dos limites laterais de g neste ponto.**

Observação 2.3.23. As Proposições 2.3.20 e 2.3.21 também valem para as integrais do tipo $\int_a^b df(s)g(s)$ assumindo as mesmas hipóteses, mas agora sobre f.

O próximo teorema pode ser encontrado em (SCHWABIK, 2001, Teorema 13) num contexto mais geral, porém o enunciaremos apenas no contexto em que estamos interessados.

Teorema 2.3.24. **(Integração por partes)** (SCHWABIK, 2001, Teorema 13) Suponha que $f \in G([a,b],L(X))$ e $g \in BV([a,b],X)$ ou $f \in BV([a,b],L(X))$ e $g \in G([a,b],X)$, então vale a igualdade
$$\int_a^b df(t)g(t) + \int_a^b f(t)dg(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) + S,$$
onde $S \doteq -\sum_{a\leqslant s<b} \Delta^+ f(s)\Delta^+ g(s) + \sum_{a<s\leqslant b} \Delta^- f(s)\Delta^- g(s)$.

Observação 2.3.25. Observe que o Teorema 2.3.24 garante que integrais do tipo $\int_a^b f(s)dg(s)$ e $\int_a^b df(s)g(s)$ existem quando uma das funções é regrada e a outra é de variação limitada, não importando a ordem.

Proposição 2.3.26. **(Desigualdade de Grönwall)** (SCHWABIK, 1992, Corolário 1.43) Sejam $f,g:[a,b] \to [0,+\infty)$ funções com f limitada e g não decrescente e contínua à esquerda. Suponha que existam $M > 0$ e $K \geqslant 0$ tais que, para todo $s \in [a,b]$, temos
$$f(s) \leqslant M + K\int_a^s f(t)dg(t).$$
Então, para todo $s \in [a,b]$, vale a desigualdade
$$f(s) \leqslant Me^{K[g(s)-g(a)]}.$$

A demonstração do próximo resultado segue o mesmo raciocínio empregado no (SCHWABIK, 1992, Teorema 18) para espaços de Banach em geral.

Teorema 2.3.27. **(Mudança de variáveis)** Considere $c,d \in \mathbb{R}$ com $c < d$ e $h \in C([c,d],\mathbb{R})$ estritamente monótona. Seja $U:[h(c),h(d)]\times[h(c),h(d)] \to X$ uma função. Se uma das seguintes integrais $\int_{h(c)}^{h(d)} DU(\tau,t)$ ou $\int_c^d DU(h(c),h(d))$ existir, então a outra também existe e
$$\int_{h(c)}^{h(d)} DU(\tau,t) = \int_c^d DU(h(c),h(d)).$$

A prova do Lema 2.3.28 pode ser encontrada em (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Lema 2.7).

Lema 2.3.28. **(Lema de Saks-Henstock)** Sejam $U \in \mathscr{K}([a,b],X)$, $\varepsilon > 0$ e δ um calibre em $[a,b]$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i,t_i) - U(\tau_i,t_{i-1})] - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| < \varepsilon,$$

para toda divisão marcada $d = \{(\tau_i,\ [t_{i-1},t_i])\}_{i=1}^{|d|} \ll \delta$. Se

$$a \leqslant \beta_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \xi_2 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_m \leqslant \xi_m \leqslant \gamma_m \leqslant b$$

é divisão parcial marcada $\tilde{d} = \{(\xi_i,\ [\beta_j,\gamma_j])\}_{j=1}^{m}$, segue que

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \left[U(\xi_j,\beta_j) - U(\xi_j,\gamma_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau,t) \right] \right\| \leqslant \varepsilon.$$

No que segue, apresentamos o Teorema de Hake.

Teorema 2.3.29. **(Teorema de Hake)** (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Teorema 2.12 e Observação 2.13) Sejam $U \in \mathscr{K}([a,b],X)$ e $c \in [a,b]$. Então valem os limites:

$$\lim_{s \to c} \left[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c) \right] = \int_a^c DU(\tau,t);$$

$$\lim_{s \to c} \left[\int_s^b DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c) \right] = \int_c^b DU(\tau,t).$$

A prova do próximo corolário segue as mesmas ideias presentes em (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Corolário 2.14).

Corolário 2.3.30. Sejam $f : [a,b] \to L(X)$ um operador e $g \in G([a,b],X)$ ou $f : [a,b] \to X$ uma função e $g \in G([a,b],\mathbb{R})$ tais que a integral $\int_a^b f(t)dg(t)$ existe. Então as funções

$$s(t) \doteq \int_a^t f(s)dg(s) \ \text{ e } \ i(t) \doteq \int_t^b f(s)dg(s)$$

são tais que $s,\ i\ \in G([a,b],X)$ e satisfazem

$$s(t^+) = s(t) + f(t)\Delta^+ g(t) \ \text{ e } \ i(t^+) = i(t) - f(t)\Delta^+ g(t), \quad t \in [a,b);$$

$$s(t^-) = s(t) - f(t)\Delta^- g(t) \ \text{ e } \ i(t^-) = i(t) + f(t)\Delta^- g(t), \quad t \in (a,b].$$

Na Proposição 2.3.31, apresentamos uma adaptação da (TVRDý, 1989, Proposição 2.13) cuja demonstração segue de forma inteiramente análoga.

Proposição 2.3.31. (TVRDý, 1989, Proposição 2.13) Sejam $f \in G([a,b],L(X))$, $g \in BV([a,b],X)$ e $D = \{d_i\}_{i=0}^{\infty} \subset [a,b]$ tais que existe $c \in L(X)$ satisfazendo $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b] \setminus D$. Então

$$\int_a^b df(s)g(s) = (f(b)-c)g(b) - (f(a)-c)g(a).$$

O último resultado que apresentamos nessa seção é uma forma mais geral do que o apresentado em (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Proposição 1.67), porém, sua prova segue de mesma forma para o caso em que $f \in BV_{loc}(I,X)$.

Proposição 2.3.32. Seja $[a,b] \subset I$. Sejam $f \in BV_{loc}(I,L(X))$ ou $f \in BV_{loc}(I,X)$ e $u \in BV_{loc}(I,\mathbb{R})$. Suponha que $\alpha : I \to L(X)$ seja um operador localmente Perron-Stieltjes integrável com respeito à u e que a integral $\beta(t) \doteq \int_a^t \alpha(s)du(s)$, $t \in I$, é tal que $\beta \in BV_{loc}(I,L(X))$. Então as integrais $\int_a^b d\beta(r)f(r)$ e $\int_a^b \alpha(r)f(r)du(r)$ existem e são iguais.

2.4 O Teorema Fundamental do Cálculo e a integral de Perron

Nesta seção, apresentamos a versão do Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Perron. O leitor pode encontrar uma demonstração para o caso unidimensional em (BARTLE, 2001).

Teorema 2.4.1. (Teorema Fundamental do Cálculo) (LEE; VýBORNý, 2000, Teorema 3.1.3) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função.

1. Se f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável quase sempre em $[a,b]$, então f' é Perron integrável em $[a,b]$ e
$$\int_a^b f'(s)ds = f(b) - f(a).$$
2. Se f é Perron integrável em $[a,b]$ e $F(t) = \int_a^t f(s)ds$, $a \leq t \leq b$, então $F \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$, F é derivável quase sempre em $[a,b]$ e $F'(t) = f(t)$ para quase todo $t \in [a,b]$.

CAPÍTULO

3

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS GENERALIZADAS

A teoria de equações diferenciais ordinárias lineares desempenham um papel fundamental na teoria das equações diferenciais ordinárias - EDOs - em geral, por ser mais simples de ser estudada, fornecer diversas ferramentas para o estudo da teoria geral das EDOs e pelo fato de que suas equações se relacionam por diversas vezes com outras classes de EDOs, como por exemplo, no estudo das EDOs lineares perturbadas por classes de funções específicas.

De forma análoga, a teoria das equações diferenciais ordinárias generalizadas lineares também possui este papel.

Primeiramente, introduziremos a teoria das equações diferenciais ordinárias generalizadas - referidas simplesmente por EDOGs - e a teoria das EDOGs lineares. Para finalizar, vamos relacionar as EDOGs com outros tipos de equações diferenciais: as equações diferenciais em medida - referidas simplesmente por EDMs - e as equações diferenciais impulsivas - referidas simplesmente por EDIs.

3.1 As EDOGs

Nesta seção, apresentaremos as EDOGs e suas propriedades fundamentais.

Considere $F : O \times I \to X$ uma função.

Definição 3.1.1. (Solução de uma EDOG) Dizemos que uma função $x : I \to X$ é **solução da EDOG**

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) \tag{3.1}$$

em I, se $(x(t),t) \in O \times I$ para todo $t \in I$ e, para quaisquer $t_1, t_2 \in I$, vale a igualdade

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} DF(x(\tau),t). \tag{3.2}$$

Observação 3.1.2. A integral do lado direito da expressão (3.2) é apresentada no sentido da integral de Kurzweil, ou seja, de acordo com a Definição 2.3.8 tomando $U(\tau,t) = F(x(\tau),t)$.

Observação 3.1.3. Ressaltamos que a notação da equação (3.1) é puramente simbólica para se referir a uma EDOG: um tipo de equação integral cuja integral é apresentada no sentido de Kurzweil (no sentido da Definição 2.3.8). Desta forma, o símbolo do integrando $\frac{dx}{d\tau}$ não significa que a solução seja diferenciável com respeito a τ, como é o caso do próximo exemplo.

Exemplo 3.1.4. Seja $r \in C([0,1],\mathbb{R})$ uma função que não admite derivada em nenhum ponto.

Defina a função $F : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,t) = r(t).$$

Dados $t_1, t_2 \in [0,1]$, integrando $F(x(\tau),t)$ de t_1 a t_2, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} DF(x(\tau),t) = \int_{t_1}^{t_2} Dr(t) = r(t_2) - r(t_1).$$

Portanto, r é solução da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) = Dr(t),$$

por mais que r não seja diferenciável em nenhum ponto de seu domínio.

3.2 As EDOGs lineares

Introduziremos nesta seção a teoria das EDOGs lineares e apresentaremos a fórmula da variação dos parâmetros, o qual também é chamada de fórmula da variação das constantes, para EDOGs lineares perturbadas.

3.2.1 Definição e o teorema da existência e unicidade

Iniciamos com a apresentação das EDOGs lineares.

Definição 3.2.1. (EDOG linear) Considere a função $F : X \times [a,b] \to X$. A equação

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{3.3}$$

é chamada de **EDOG linear** se $F(x,t) = A(t)x + B(t)$, onde $A : [a,b] \to L(X)$ e $B : [a,b] \to X$.

Além disso, dizemos que (3.3) é **homogênea** se B é identicamente nula e, neste caso,

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) = D[A(t)x],$$

caso contrário, dizemos que (3.3) é **não homogênea** e escrevemos

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + B(t)]. \tag{3.4}$$

Observação 3.2.2. Lembremos que se $x : [a,b] \to X$ é solução da EDOG linear não homogênea (3.4), então temos

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} D[A(t)x(\tau)] + B(t_2) - B(t_1),$$

para todos $t_1, t_2 \in [a,b]$, em que a integral anterior é representada no sentido de Kurzweil.

Note que a soma de Riemann de $\int_a^b D[A(t)x(\tau)]$ tem a forma $\sum [A(s_i) - A(s_{i-1})]x(\tau_i)$, logo, a integral $\int_{s_1}^{s_2} D[A(t)x(\tau)]$ no sentido de Kurzweil será chamada de integral de Perron-Stieltjes e, então, **utilizaremos a notação convencional de** $\int_a^b d[A(s)]x(s)$ **para** $\int_a^b D[A(t)x(\tau)]$. Além disso, vamos inserir um índice sobre a letra "d" no integrando para explicitarmos a variável de integração e evitarmos confusões, ou seja, $\int_a^b d[A(s)]x(s) = \int_a^b d_s[A(s)]x(s)$.

A proposição seguinte nos mostra que a regularidade da solução da EDOG (3.4) depende da regularidade das funções que a compõem.

Proposição 3.2.3. Considere a EDOG linear não homogênea (3.4). Suponha que $x : [a,b] \to X$ é uma solução da EDOG linear não homogênea (3.4), $A \in BV([a,b], L(X))$ e $B \in BV([a,b], X)$. Então $x \in BV([a,b], X)$.

Demonstração. Como x é solução da EDOG linear não homogênea (3.4), segue da Definição 3.1.1 que

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s) + B(t) - B(t_0),$$

quaisquer que sejam $t, t_0 \in [a,b]$.

Note que $\mathscr{I}(t) \doteq \int_{t_0}^{t} d[A(\tau)]x(\tau) \in G([a,b], X)$ uma vez que os limites laterais

$$\lim_{t \to t_0^-} \int_{t_0}^{t} d[A(\tau)]x(\tau) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_0^+} \int_{t_0}^{t} d[A(\tau)]x(\tau)$$

existem para todo $t_0 \in (a,b]$ e $t_0 \in [a,b)$, respectivamente, de acordo com o Teorema 2.3.29.

Como $B \in BV([a,b], X) \subset G([a,b], X)$ e $x(t) = x(t_0) + \mathscr{I}(t) + B(t) - B(t_0)$, obtemos $x \in G([a,b], X)$. Além disso, pelo Coroloário 2.2.6, $x \in B([a,b], X)$.

Agora, vamos mostrar que $x \in BV([a,b], X)$.

Se $d = \{s_i\}_{i=1}^{|d|} \in D_{[a,b]}$, então para cada $i = 1, \ldots, |d|$, segue das desigualdades triangular e (2.2) vista no Corolário 2.3.19, que

$$\|x(s_i) - x(s_{i-1})\| = \left\| \int_{s_{i-1}}^{s_i} d[A(s)]x(s) + B(s_i) - B(s_{i-1}) \right\| \leqslant \|x\|_\infty \mathrm{var}_{s_{i-1}}^{s_i} A + \mathrm{var}_{s_i}^{s_{i-1}} B,$$

logo, somando em i, pelo item 3 da Proposição 2.2.15, obtemos

$$\mathrm{var}_a^b x \leqslant \|x\|_\infty \mathrm{var}_a^b A + \mathrm{var}_a^b B,$$

portanto, $x \in BV([a,b], X)$. □

Para apresentar o teorema de existência e unicidade de soluções para a EDOG (3.4), precisaremos de uma definição que será motivada pelo seguinte lema:

Lema 3.2.4. Seja $A \in BV([a,b],L(X))$. Então $I_d + \Delta^+ A(t)$ é invertível em $L(X)$, exceto por finitos valores de t em $[a,b)$ e o mesmo vale para $I_d - \Delta^- A(t)$ em $(a,b]$.

Demonstração. Vamos mostrar o resultado para $I_d + \Delta^+ A(t)$, pois o outro caso segue de maneira análoga.

Seja $A \in BV([a,b],L(X))$. Pela Proposição 2.2.18, $A \in G([a,b],X)$, logo, $A(t^+)$ existe para todo $t \in [a,b)$.

Agora, pelo Corolário 2.2.8 aplicado a A e tomando $\varepsilon = 1$, temos que existe um conjunto $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset [a,b)$ tal que $\|A(t^+) - A(t)\| < 1$ para todo $t \in [a,b) \setminus \{t_1,\ldots,t_m\}$.

Assim, o operador $I_d + \Delta^+(t)$ é invertível em $L(X)$, para todo $t \in [a,b) \setminus \{t_1,\cdots,t_m\}$, uma vez que $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^+(t)^k$ é seu operador inverso em $L(X)$, pois, está bem definido pela desigualdade $\|A(t^+) - A(t)\| < 1$ e sua composição com $I_d + \Delta^+(t)$ resulta na identidade. □

Definição 3.2.5. Dizemos que $A : [a,b] \to L(X)$ satisfaz a condição:

- (Δ^+) se existe $[I_d + \Delta^+ A(t)]^{-1} \in L(X)$ para todo $t \in [a,b)$;
- (Δ^-) se existe $[I_d - \Delta^- A(t)]^{-1} \in L(X)$ para todo $t \in (a,b]$;
- (Δ) se satisfizer (Δ^+) e (Δ^-).

Teorema 3.2.6. (Teorema da Existência e Unicidade de EDOGs lineares) (SCHWABIK, 1999, Teorema 2.10) Sejam $A \in BV([a,b],L(X))$, $B \in BV([a,b],X)$ e $(t_0,x_0) \in [a,b] \times X$. Considere o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + B(t)], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

- Se A satisfaz a condição (Δ^+), então o PVI (3.5) tem solução única em $[a,t_0]$;
- Se A satisfaz a condição (Δ^-), então o PVI (3.5) tem solução única em $[t_0,b]$;
- Se A satisfaz a condição (Δ), então o PVI (3.5) tem solução única em $[a,b]$.

Observação 3.2.7. Seja $A \in BV_{loc}(\mathbb{R},L(X))$. Se A satisfaz a condição (Δ) então temos a existência e unicidade **global** para as EDOGs lineares.

3.2.2 O operador fundamental

Procederemos de maneira análoga à teoria clássica das EDOs para obter o chamado operador fundamental da EDOG linear

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]. \tag{3.6}$$

Considere a equação

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = D[A(t)]\Phi, \tag{3.7}$$

com $\Phi \in L(X)$. Pela Definição 3.1.1, uma solução $\Phi : [a,b] \to L(X)$ de (3.7) no intervalo $[a,b]$ satisfaz a equação integral

$$\Phi(s_2) - \Phi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} d[A(s)]\Phi(s), \text{ para todo } s_1, s_2 \in [a,b].$$

Logo, se Φ satisfaz as condição (Δ), então Φ será unicamente determinada pelo Teorema 3.2.6.

Teorema 3.2.8. Suponha que $A \in BV([a,b],L(X))$ satisfaça a condição (Δ). Então existe um único operador $U : [a,b] \times [a,b] \to L(X)$ que satisfaz

$$U(t,s) = I_d + \int_s^t d[A(r)]U(r,s), \tag{3.8}$$

para quaisquer $t,s \in [a,b]$. Além disso, para todo $s \in [a,b]$ fixado, $U(\cdot,s) \in BV([a,b],L(X))$.

Demonstração. A existência e unicidade de U segue diretamente do Teorema 3.2.6. Por sua vez, a prova de que $U(\cdot,s) \in BV([a,b],L(X)$ segue diretamente do Lema 3.2.3. □

Definição 3.2.9. (Operador fundamental) O operador $U : [a,b] \times [a,b] \to L(X)$ dado pelo Teorema 3.2.8 é chamado de **operador fundamental** da EDOG linear (3.6).

Corolário 3.2.10. Suponha que $A \in BV([a,b],X)$ satisfaz a condição (Δ) então, para todo $(s,x_0) \in [a,b] \times X$, a única solução $x : [a,b] \to X$ do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \\ x(s) = x_0 \in X \end{cases} \tag{3.9}$$

é expressa por

$$x(t) = U(t,s)x_0, \tag{3.10}$$

onde U é o operador fundamental da EDOG linear (3.6).

Demonstração. Como $x \in BV([a,b],X)$ (veja Proposição 3.2.3), então, quaisquer que sejam $t,s \in [a,b]$, segue pelo item 2. do Teorema 2.3.18, que a integral $\int_s^t d[A(r)]x(r)$ existe e vale

$$\int_s^t d[A(r)]x(s) = \int_s^t d[A(r)]U(r,s)x_0 = [U(t,s) - I_d]x_0 = x(t) - x_0.$$

Logo, x é solução do PVI (3.9) que é unicamente determinada pelo Teorema 3.2.6. □

Finalizaremos esta seção com algumas propriedades do operador fundamental.

Proposição 3.2.11. Suponha que $A \in BV([a,b],L(X))$ satisfaz a condição (Δ). Então o operador fundamental $U : [a,b] \times [a,b] \to L(X)$ associado à EDOG linear (3.6) satisfaz as seguintes propriedades:

1. $U(t,t) = I_d$, para todo $t \in [a,b]$;
2. Existe $M > 0$ tal que $\sup\limits_{t,s\in[a,b]} \{\|U(t,s)\|,\ \mathrm{var}_a^b U(t,\cdot),\ \mathrm{var}_a^b U(\cdot,s)\} < M$;
3. $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$ para quaisquer $t,r,s \in [a,b]$;
4. Existem $U(t,s)^{-1} \in L(X)$ e $U(t,s)^{-1} = U(s,t)$;
5. Valem as seguintes igualdades para cada $t,s \in [a,b]$:
   - $\|U(t^+,s)\| = [I_d + \Delta^+ A(t)]U(t,s)$;
   - $\|U(t^-,s)\| = [I_d - \Delta^- A(t)]U(t,s)$;
   - $\|U(t,s^+)\| = U(t,s)[I_d + \Delta^+ A(t)]^{-1}$;
   - $\|U(t,s^-)\| = U(t,s)[I_d - \Delta^- A(t)]^{-1}$.

Demonstração. 1. Direto da definição de operador fundamental.

2. Sejam $s,t \in [a,b]$ tais que $a \leqslant s < t \leqslant b$. Para todo $r \in [s,b]$, defina

$$\tilde{A}(r) = \begin{cases} A(s), & r = s, \\ A(r^-), & r \in (s,b]. \end{cases} \tag{3.11}$$

Note que $U(\cdot,s) \in BV([s,t],L(X))$ pelo Teorema 3.2.8, logo, como $A \in BV([s,t],L(X))$ por ser de variação limitada em $[a,b]$, temos

$$\int_s^t d[A(r)]U(r,s) = \int_s^t d[\tilde{A}(r)]U(r,s) + \int_s^t d[A(r) - \tilde{A}(r)]U(r,s). \tag{3.12}$$

Por outro lado, pela Definição de $\tilde{A}$ e do fato que $A \in BV([s,t],L(X)) \subset G([s,t],L(X))$, obtemos que $A - \tilde{A} \in G([s,t],L(X))$. Logo, pelo Corolário 2.2.8, existe $D = \{d_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset [s,t]$ tal que $A(r) - \tilde{A}(r) = 0$ para todo $r \in [s,t] \setminus D$.

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \int_s^t d[A(r) - \tilde{A}(r)]U(r,s) &\overset{Prop.2.3.31}{=} (A(t) - \tilde{A}(t) - 0)U(t,s) - (A(s) - \tilde{A}(s) - 0)U(s,s) \\ &\overset{def.\tilde{A}}{=} (A(t) - A(t^-))U(t,s) \\ &= \Delta^- A(t)U(t,s). \end{aligned}$$

Assim, utilizando este resultado na equação (3.12), temos

$$\int_s^t d[A(r)]U(r,s) = \int_s^t d[\tilde{A}(r)]U(r,s) + \Delta^- A(t)U(t,s),$$

logo,

$$U(t,s) = I_d + \int_s^t d[A(r)]U(r,s) = I_d + \int_s^t d[\tilde{A}(r)]U(r,s) + \Delta^- A(t)U(t,s),$$

e, então,

$$[I_d - \Delta^- A(t)]U(t,s) = I_d + \int_s^t d[\tilde{A}(r)]U(r,s),$$

o que implica em

$$U(t,s) = [I_d - \Delta^- A(t)]^{-1}\left(I_d + \int_s^t d[\tilde{A}(r)]U(r,s)\right).$$

Portanto, para todo $t \in (s,b]$,

$$\|U(t,s)\| \overset{(2.2)}{\leqslant} \|[I_d - \Delta^- A(t)]^{-1}\| \left(1 + \int_s^t d_r[\mathrm{var}_s^r(\tilde{A})]\|U(r,s)\|\right).$$

Como A satisfaz a condição (Δ), para todo $t \in (s,b]$, existe $C > 0$ tal que

$$\|U(t,s)\| \leqslant C\left(1 + \int_s^t d_r[\mathrm{var}_s^r(\tilde{A})]\|U(r,s)\|\right).$$

Note que, por $\tilde{A}$ ser contínua à esquerda em $(s,b]$, a função $\mathrm{var}_s^r(\tilde{A})$ também será (veja Lema 2.2.19), e então aplicando a Proposição 2.3.26 obtemos, para quaisquer $s,t \in [a,b]$ com $s \leqslant t$,

$$\|U(t,s)\| \leqslant Ce^{C\mathrm{var}_s^t(\tilde{A})} \leqslant Ce^{C\mathrm{var}_a^b(A)}.$$

Considere agora $s,t \in [a,b]$ tais que $a \leqslant t < s \leqslant b$. Para todo $r \in [a,s]$, defina

$$\tilde{A}(r) = \begin{cases} A(s), & r = s, \\ A(r^+), & r \in [a,s]. \end{cases} \tag{3.13}$$

De maneira análoga ao caso anterior, conclui-se que, para quaisquer $s,t \in [a,b]$ com $t \leqslant s$,

$$\|U(t,s)\| \leqslant Ce^{C.\mathrm{var}_a^b(A)}.$$

Isto implica que, para quaisquer $s,t \in [a,b]$,

$$\|U(t,s)\| \leqslant Ce^{C.\mathrm{var}_a^b(A)}. \tag{3.14}$$

Assim,

$$\|U(t_2,s) - U(t_1,s)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} d[A(r)]U(r,s)\right\| \overset{(2.2)}{\leqslant} Ce^{C.\mathrm{var}_a^b(A)}\ \mathrm{var}_{t_1}^{t_2}(A)$$

e, portanto, para todo $s \in [a,b]$,

$$\text{var}_a^b U(\cdot,s) \leqslant Ce^{C.\text{var}_a^b(A)}\ \text{var}_a^b(A). \tag{3.15}$$

Agora, se $a \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant b$ então

$$\begin{aligned} U(t,s_2) - U(t,s_1) &= \int_{s_2}^t d[A(r)]U(r,s_2) - \int_{s_1}^t d[A(r)]U(r,s_1) \\ &= \int_{s_2}^t d[A(r)]U(r,s_2) - \int_{s_1}^{s_2} d[A(r)]U(r,s_1) - \int_{s_2}^t d[A(r)]U(r,s_1) \\ &= -\int_{s_1}^{s_2} d[A(r)]U(r,s_1) + \int_{s_2}^t d[A(r)](U(r,s_2) - U(r,s_1)), \end{aligned}$$

isto é, $S : [a,b] \to L(X)$ definida por $S(t) \doteq U(t,s_2) - U(t,s_1)$ satisfaz o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = D[A(t)X], \\ X(s_2) = -\int_{s_1}^{s_2} d[A(r)]U(r,s_1). \end{cases} \tag{3.16}$$

Portanto, pelo Corolário 3.2.10,

$$U(t,s_2) - U(t,s_1) = -U(t,s_2)\int_{s_1}^{s_2} d[A(r)]U(r,s_1) \ \text{ para todo } \ t \in [a,b],$$

o que implica

$$\|U(t,s_2) - U(t,s_1)\| \leqslant \|U(t,s_2)\| Ce^{C.\text{var}_a^b(A)}\ \text{var}_{s_1}^{s_2}(A) \leqslant C^2 e^{2C.\text{var}_a^b(A)} \text{var}_{s_1}^{s_2}(A)$$

e, assim, para todo $t \in [a,b]$,

$$\text{var}_a^b U(t,\cdot) \leqslant C^2 e^{2C.\text{var}_a^b(A)} \text{var}_a^b(A). \tag{3.17}$$

Por fim, tomando

$$M \doteq \max\{Ce^{C.\text{var}_a^b(A)},\ Ce^{C.\text{var}_a^b(A)}\text{var}_a^b(A),\ C^2 e^{2C.\text{var}_a^b(A)}\text{var}_a^b(A)\} + 1,$$

obtemos o resultado.

3. Pela definição do operador fundamental U, para quaisquer $t,s,r \in [a,b]$,

$$U(t,r) = I_d + \int_r^t d[A(\sigma)]U(\sigma,r),$$

e, portanto,

$$U(t,r)U(r,s) = U(r,s) + \int_r^t d[A(\sigma)]U(\sigma,r)U(r,s).$$

Além disso, desta última igualdade, temos

$$U(t,s) = I_d + \int_s^t d[A(\sigma)]U(\sigma,s) = U(r,s) + \int_r^t d[A(\sigma)]U(\sigma,s).$$

Assim $t \mapsto U(t,s)$ e $t \mapsto U(t,r)U(r,s)$ são soluções do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = D[A(t)X], \\ X(r) = U(r,s), \end{cases}$$

logo, pelo Corolário 3.2.10, temos

$$U(t,s) = U(t,r)U(r,s).$$

4. Do item anterior, para $t,s \in [a,b]$, temos $U(t,s)U(s,t) = U(t,t) = I_d$.

5. Segue diretamente do Teorema 2.3.29 aplicado à definição do operador fundamental.

□

3.2.3 Fórmula de variação dos parâmetros

Nesta seção, apresentaremos a fórmula da variação dos parâmetros para EDOs generalizadas lineares perturbadas da forma

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + F(x,t)], \tag{3.18}$$

em que $A : [a,b] \to L(X)$ e a função de perturbação $F : X \times [a,b] \to X$ satisfazem certas condições.

Teorema 3.2.12. (Variação dos parâmetros) (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Teorema 6.14) Considere $A \in BV([a,b],X)$ satisfazendo a condição (Δ) e $F : X \times [a,b] \to X$ tal que, para todos $(x,t_1),(x,t_2) \in X \times [a,b]$, vale a desigualdade

$$\|F(x,t_1) - F(x,t_2)\| \leqslant h(t_2) - h(t_1),$$

para alguma função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ não decrescente. Se $x \in G([a,b],X)$, então são equivalentes:

1. x é solução do PVI
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + F(x,t)], \\ x(t_0) = x_0; \end{cases} \tag{3.19}$$

2. x é solução da equação integral
$$x(t) = U(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} DF(x(\tau),s) - \int_{t_0}^{t} d_\sigma[U(t,\sigma)]\left(\int_{t_0}^{\sigma} DF(x(\tau),s)\right), \tag{3.20}$$
para todo $t \in [a,b]$, onde $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ é o operador fundamental associado a EDOG linear (3.6).

Corolário 3.2.13. Considere $A \in BV([a,b],X)$ satisfazendo a condição (Δ) e $B \in BV([a,b],X)$. Então, a única solução $x \in BV([a,b],X)$ do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + B(t)], \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

é dada por

$$x(t) = U(t,t_0)x_0 + B(t) - B(t_0) - \int_{t_0}^{t} d_\sigma[U(t,\sigma)](B(\sigma) - B(t_0)),$$

para todo $t \in [a,b]$.

3.3 Relação entre EDOGs e outros tipos de equações diferenciais

Nesta seção, mostraremos que classes específicas de equações diferenciais em medida (EDMs) (ou equações diferenciais impulsiva (EDIs)) são equivalentes a EDOGs particulares. Isto quer dizer que as soluções de uma EDM (ou EDI) particular serão soluções de sua EDOG associada e vice-versa, em virtude da Definição 3.1.1.

3.3.1 Correspondência entre EDMs e EDOGs

No estudo de equações diferenciais, é comum nos depararmos na literatura com equações do tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad (t,x) \in I \times O, \tag{3.22}$$

e que podem ser perturbadas por uma função $g : I \times O \to X$ tornando-se

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + g(t,x), \quad (t,x) \in I \times O. \tag{3.23}$$

No artigo (DAS; SHARMA, 1972), os autores Das e Sharma obtiveram, sob certas condições sobre f e g, uma forma integral para a equação (3.23) em intervalos compactos e, então (3.23) pode ser reescrita na forma

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s),s)du(s), \tag{3.24}$$

para todo $t, t_0 \in [a,b]$.

Em (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Seção 4.2) é apresentada uma classe de EDMs definidas sobre um espaço de Banach X e sua correspondência com EDOGs de forma detalhada, entretanto, vamos estudar a classe de EDMs que satisfaz a equação integral

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s)x(s)du(s), \tag{3.25}$$

onde $t_0, t \in I$ ($I \subset \mathbb{R}$ um subintervalo não degenerado), $\mathscr{F}, \mathscr{G} : I \to L(X)$ são operadores e $u : I \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazem as condições:

(M1) $\mathscr{F}$ é localmente Perron integrável sobre I;

(M2) $u \in BV_{loc}(I \setminus \{\inf I\}, \mathbb{R})$ é contínua à esquerda;

(M3) $\mathscr{G}$ é localmnente Perron-Stieltjes integrável com respeito à u sobre I;

(M4) existe uma função $m_1 : I \to \mathbb{R}$ localmente Perron integrável tal que

$$\left\| \int_a^b \mathscr{F}(s)ds \right\| \leqslant \int_a^b m_1(s)ds,$$

para todo $[a,b] \subset I$;

(M5) existe uma função $m_2 : I \to \mathbb{R}$ localmente Perron-Stieltjes integrável tal que

$$\left\| \int_a^b \mathscr{G}(s)du(s) \right\| \leqslant \int_a^b m_2(s)du(s),$$

para todo $[a,b] \subset I$;

(M6) Se $t \in I$ é ponto de descontinuidade de u então $\left(I_d + \lim_{r \to t^+} \int_t^r \mathscr{G}(s)du(s) \right)^{-1} \in L(X)$.

O teorema seguinte apresenta a correspondência entre a EDM (3.25) e sua correspondente EDOG seguindo as mesmas ideias empregadas em (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Teorema 4.14) e (SCHWABIK, 1992, Teorema 5.17).

Teorema 3.3.1. (Correspondência EDM e EDOG) Considere $t_0 \in [a,b] \subset I$. Então, a função $x : [a,b] \to X$ é solução da EDM (3.25) com condição inicial $x(t_0) = x_0 \in X$ se, e somente se, x é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D\left[\left(\int_{t_0}^t \mathscr{F}(s)ds + \int_{t_0}^t \mathscr{G}(s)du(s) \right) x \right]. \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.26}$$

No Teorema 3.3.2, apresentamos condições suficientes para que a EDM (3.25) tenha única solução definida em I.

Teorema 3.3.2. (Existência e unicidade) Considere $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ satisfazendo (M1) - (M6). Então a EDM (3.25) admite uma única solução definida em I.

Demonstração. Para provar a existência e unicidade da EDM (3.25) em I, basta provar que vale a existência e unicidade da EDOG correspondente

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D\left[\left(\int_{t_0}^t \mathscr{F}(s)ds + \int_{t_0}^t \mathscr{G}(s)du(s) \right) x \right], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.27}$$

no intervalo I e, assim, obter o resultado pelo Teorema 3.3.1.

Pelo Teorema 3.2.6, basta provar que os operadores $A_1,\ A_2 : I \to L(X)$ definidos por $A_1(t) \doteq \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s)ds$ e $A_2(t) \doteq \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s)du(s)$ são tais que $A_1 + A_2$ satisfazem a condição (Δ) e $A_1 + A_2 \in BV([a,b], L(X))$.

Seja $d = \{s_i\}_{i=0}^{|d|} \in D_{[a,b]}$. Usando as condições (M1), (M3), (M4) e (M5) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{|d|} \|A_1(s_i) + A_2(s_i) - A_1(s_{i-1}) - A_2(s_{i-1})\| &\leqslant \sum_{i=1}^{|d|} \left\| \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathscr{F}(s)ds \right\| + \sum_{i=1}^{|d|} \left\| \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathscr{G}(s)du(s) \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{|d|} \int_{s_{i-1}}^{s_i} m_1(s)ds + \sum_{i=1}^{|d|} \int_{s_{i-1}}^{s_i} m_2(s)du(s) \\
&= \int_a^b m_1(s)ds + \int_a^b m_2(s)du(s) < +\infty.
\end{aligned}$$

Assim, $A_1 + A_2 \in BV([a,b], L(X))$.

Por outro lado, note que A_1 é contínua em I pela Proposição 2.3.21, uma vez que $\mathscr{F}$ é integrável sobre I, por (M1), e $t.I_d \in C([a,b], L(X))$ para todo $[a,b] \subset I$. Além disso, A_2 é contínua à esquerda em $I \setminus \{\inf I\}$ pelo mesmo resultado e pela Observação 2.3.22, pois $\mathscr{G}$ é integrável sobre I, por (M3), e u é contínuo à esquerda em $I \setminus \inf I$, por (M2). Assim,

$$(I_d - [A_1(t) + A_2(t) - (A_1(t^-) + A_2(t^-))])^{-1} = I_d \in L(X),$$

para todo $t \in I \setminus \{\inf I\}$ e

$$\begin{aligned}
(I_d + [A_1(t^+) + A_2(t^+) - (A_1(t) - A_2(t))])^{-1} &= (I_d + A_2(t^+) - A_2(t))^{-1} \\
&\overset{(M6)}{=} \left(I_d + \lim_{r \to t^+} \int_t^r \mathscr{G}(s)du(s) \right)^{-1} \in L(X),
\end{aligned}$$

para todo $t \in I \setminus \{\sup I\}$, e assim, $A_1 + A_2$ satisfaz a condição (Δ).

Pelo Teorema 3.2.6 e pela Observação 3.2.7, a EDOG 3.27 admite uma única solução definida no intervalo I. O resultado segue pelo Teorema 3.3.1. □

Agora, iremos apresentar o conceito do operador fundamental associado à EDM (3.25).

Teorema 3.3.3. Existe um único operador $V : I \times I \to L(X)$ tal que

$$V(t,s) = I_d + \int_s^t \mathscr{F}(s)V(r,s)dr + \int_s^t \mathscr{G}(r)V(r,s)du(r), \tag{3.28}$$

quaisquer que sejam $t, s \in I$. Além disso, para cada $s \in I$ fixado, $V(\cdot, s) \in BV_{loc}(I, L(X))$. Para $t_0 \in I$, a função $x(t) = V(t,t_0)x_0$ é a única solução de (3.25) satisfazendo $x(t_0) = x_0 \in X$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.8 existe um único operador $U : I \times I \to L(X)$ tal que, para todos $t, s \in I$, temos

$$U(t,s) = I_d + \int_s^t d[A_1(r) + A_2(r)]U(r,s),$$

com $A_1, A_2 : I \to L(X)$ operadores definidos por $A_1(t) \doteq \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s)ds$ e $A_2(t) \doteq \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s)x(s)du(s)$. Pela demonstração do Teorema 3.3.2 temos que $A_1 + A_2$ satisfaz a condição (Δ) e pela Propriedade 3.2.11, 2., segue que $U(\cdot, s) \in BV_{loc}(I, L(X))$ para cada $s \in I$. Assim, valem

$$\int_s^t d[A_1(r)]U(r,s) = \int_s^t d[A_1(r) - A_1(s)]U(r,s) \overset{Prop.2.3.32}{=} \int_s^t \mathscr{F}(r)U(r,s)dr$$

e

$$\int_s^t d[A_2(r)]U(r,s) = \int_s^t d[A_2(r) - A_2(s)]U(r,s) \overset{Prop.2.3.32}{=} \int_s^t \mathscr{G}(r)U(r,s)du(r),$$

isto é,

$$U(t,s) = I_d + \int_s^t \mathscr{F}(r)U(r,s)dr + \int_s^t \mathscr{G}(r)U(r,s)du(r),$$

para $t, s \in I$. Assim, o operador $V : I \times I \to L(X)$ definido por $V(t,s) \doteq U(t,s)$, para $t, s \in I$, é o único que satisfaz (3.3.3).

Agora, seja $x(t) \doteq V(t,t_0)x_0$, com $x_0 \in X$ e $t \in I$. Como estamos assumindo as condições (M1) - (M6) e vale a igualdade

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \mathscr{F}(s)x(s)ds + \int_{t_0}^t \mathscr{G}(s)x(s)du(s) &= \int_{t_0}^t \mathscr{F}(s)V(s,t_0)x_0 ds + \int_{t_0}^t \mathscr{G}(s)V(s,t_0)x_0 du(s) \\ &= (V(t,t_0) - I_d)x_0 \\ &= x(t) - x_0, \end{aligned}$$

segue pelo Teorema 3.3.2 que $x(t) = V(t,t_0)x_0$ é a única solução de (3.25) tal que $x(t_0) = x_0$. □

Definição 3.3.4. O operador $V : I \times I \to L(X)$ satisfazendo a equação integral (3.28) é chamado de **operador fundamental da EDM** (3.25)**.**

Como consequência direta da demonstração do Teorema 3.3.3, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.3.5. Seja $V : I \times I \to L(X)$ o operador fundamental de (3.25) e $U : I \times I \to L(X)$ o operador fundamental da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = D\left[\left(\int_{t_0}^t \mathscr{F}(s)ds + \int_{t_0}^t \mathscr{G}(s)du(s)\right)x\right]. \tag{3.29}$$

Então $U(t,s) = V(t,s)$, quaisquer que sejam $t, s \in I$.

3.3.2 Correspondência entre EDIs e EDOGs

As EDIs representam uma classe de equações diferenciais com ações impulsivas em determinados instantes, causando descontinuidade nas soluções. Nesta seção, iremos estudar a classe de EDIs da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(t)x, \ t \neq \tau_i \ , \ i \in \mathbb{Z}, \\ \Delta^+ x(\tau_i) = x(\tau_i^+) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i), \ i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{3.30}$$

em que o operador $a : I \to L(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as condições:

(I1) a é localmente Perron integrável sobre I;

(I2) existe um operador $m : I \to L(\mathbb{R}^n)$ tal que $\left\|\int_a^b a(s)ds\right\| \leqslant \int_a^b m(s)ds$ para todo $[a,b] \subset I$.

Além disso, os impulsos devem satisfazer

$$\ldots < \tau_{-n} < \ldots < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots,$$

$\lim\limits_{n\to\infty^\pm} \tau_n = \pm\infty$, $B_i, (I_d + B_i)^{-1} \in L(\mathbb{R}^n)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Defina também os conjuntos auxiliares $\mathscr{I} \doteq \{i \in \mathbb{Z} :\ \tau_i \in I\}$, $\mathscr{O} = \{\tau_i :\ i \in \mathscr{I}\}$ e $\mathscr{I}_r^s \doteq \{i \in \mathscr{I} : r \leq \tau_i \leq s\}$, $r,s \in I$, e assuma que $|\mathscr{I}_r^s| < +\infty$ para todos $r,s \in I$.

Agora, vamos definir a solução de PVI para EDIs.

Definição 3.3.6. Seja $(t_0,x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Uma função $x : I \to \mathbb{R}^n$ é chamada solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(t)x,\ t \neq \tau_i\ ,\ i \in \mathscr{I}, \\ \Delta^+ x(\tau_i) = x(\tau_i^+) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i),\ i \in \mathscr{I}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.31}$$

se $x \in C((\tau_i,\tau_{i+1}] \cap I, \mathbb{R}^n)$ para cada $i \in \mathscr{I}$, $x'(t) = a(t)x(t)$ para quase todo $t \in I \setminus \mathscr{O}$, $x(t_0) = x_0$ e $x(\tau_i^+) = x(\tau_i) + B_i(x(\tau_i))$ para $i \in \mathscr{I}$.

Lembremos que a função de Heaviside concentrada no ponto $d \in I$ é dada por

$$H_d(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leq d, \\ 1 & \text{se} \quad t > d. \end{cases}$$

Proposição 3.3.7. A função $x : I \to \mathbb{R}^n$ satisfaz o PVI (3.31) se, e somente se, x satisfaz a equação integral

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + \int_{t_0}^t a(s)x(s)ds + \sum\limits_{i \in \mathscr{I}_{t_0}^t} B_i x(\tau_i) H_{\tau_i}(t),\ t \in [t_0,+\infty) \cap I, \\ x_0 + \int_{t_0}^t a(s)x(s)ds - \sum\limits_{i \in \mathscr{I}_t^{t_0}} B_i x_i(\tau_i)(1 - H_{\tau_i}(t)),\ t \in (-\infty,t_0) \cap I. \end{cases} \tag{3.32}$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Se x satisfaz a equação integral (3.32), então $s \mapsto a(s)x(s)$ é localmente Perron integrável, e pelo Teorema 2.4.1, $x'(t) = a(t)x(t)$ para quase todo $t \in I \setminus \mathscr{O}$ e $\int_{t_0}^t a(s)x(s)ds \in C([t_0,t],\mathbb{R}^n)$ para cada $t \in I$. Assim,

$$x \in C((\tau_i,\tau_{i+1}] \cap I, \mathbb{R}^n)$$

para cada $i \in \mathscr{I}$. Além disso, $x(t_0) = x_0$ e $x(\tau_i^+) = x(\tau_i) + B_i(x(\tau_i))$ para $i \in \mathscr{I}$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que a função $x : I \to \mathbb{R}^n$ seja solução do PVI (3.31). Existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau_r \leq t_0 < \tau_{r+1}$. No que segue, para cada intervalo $(\tau_i,\tau_{i+1}]$, vamos considerar a extensão contínua $\bar{x} : [\tau_i,\tau_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$ de x, isto é, $\bar{x}(t) = x(t)$ para todo $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$ e $\bar{x}(\tau_i) = x(\tau_i^+)$.

Temos que $x(t_0) = x_0$. Se $t_0 < t \leq \tau_{r+1}$, segue pelo Teorema 2.4.1 que

$$x(t) - x(t_0^+) = \overline{x}(t) - \overline{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \overline{x}'(s)ds = \int_{t_0}^{t} a(s)\overline{x}(s)ds = \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds,$$

ou seja,

$$x(t) = x(t_0^+) + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds.$$

Note que $x(\tau_{r+1}^+) = x(\tau_{r+1}) + B_{r+1}x(\tau_{r+1})$ e $x(\tau_{r+1}) = x(t_0^+) + \int_{t_0}^{\tau_{r+1}} a(s)x(s)ds$. Assim, se $\tau_{r+1} < t \leq \tau_{r+2}$, vem

$$x(t) - x(\tau_{r+1}^+) = x(t) - \overline{x}(\tau_{r+1}^+) = \int_{\tau_{r+1}}^{t} \overline{x}'(s)ds = \int_{\tau_{r+1}}^{t} a(s)\overline{x}(s)ds = \int_{\tau_{r+1}}^{t} a(s)x(s)ds,$$

ou seja,

$$x(t) = x(\tau_{r+1}) + B_{r+1}x(\tau_{r+1}) + \int_{\tau_{r+1}}^{t} a(s)x(s)ds = x(t_0^+) + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds + B_{r+1}x(\tau_{r+1}).$$

Seguindo com este raciocínio, obtemos:

$$x(t) = x(t_0^+) + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds + \sum_{j=r+1}^{r+m} B_j x(\tau_j), \quad t \in [\tau_{r+m}, \tau_{r+m+1}).$$

Se $\tau_r < t_0 < \tau_{r+1}$ então $x(t_0^+) = x(t_0)$. Utilizando a função de Heaviside, obtemos:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds + \sum_{i \in \mathscr{I}_{t_0}^{t}} B_i x(\tau_i) H_{\tau_i}(t), \quad t \in [t_0, +\infty) \cap I.$$

Agora, se $t_0 = \tau_r$ então $x(t_0^+) = x(\tau_r^+) = x(\tau_r) + B_r x(\tau_r) = x(t_0) + B_r x(\tau_r)$. Como

$$\sum_{i \in \mathscr{I}_{\tau_r}^{t}} B_i x(\tau_i) H_{\tau_i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} & t = \tau_r, \\ B_r x(\tau_r) & \text{se} & \tau_r < t \leq \tau_{r+1}, \\ B_r x(\tau_r) + B_{r+1}x(\tau_{r+1}) & \text{se} & \tau_{r+1} < t \leq \tau_{r+2}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}$$

obtemos

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds + \sum_{i \in \mathscr{I}_{t_0}^{t}} B_i x(\tau_i) H_{\tau_i}(t), \quad t \in [t_0, +\infty) \cap I.$$

Analogamente, obtemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds - \sum_{i \in \mathscr{I}_{t}^{t_0}} B_i x_i(\tau_i)(1 - H_{\tau_i}(t)), \; t \in (-\infty, t_0) \cap I.$$

$\square$

O teorema seguinte apresenta a correspondência entre a EDI (3.30) e sua correspondente EDOG seguindo a mesma ideia empregada em (SCHWABIK, 1992, Teorema 5.20).

Teorema 3.3.8. (Correspondência entre EDI e EDOG) Seja $t_0 \in I$. Então a função $x : I \to \mathbb{R}^n$ é solução da EDI (3.30) se, e somente se, x é solução da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{3.33}$$

onde A é dada por

$$A(t) = \begin{cases} \int_{t_0}^{t} a(s)ds + \sum_{i \in \mathscr{I}_{t_0}^{t}} B_i H_{\tau_i}(t), & t \in [t_0, +\infty) \cap I, \\ \int_{t_0}^{t} a(s)ds - \sum_{i \in \mathscr{I}_{t}^{t_0}} B_i(1 - H_{\tau_i}(t)), & t \in (-\infty, t_0) \cap I. \end{cases} \tag{3.34}$$

Observação 3.3.9. Observe que o operador $A : I \to L(X)$ dado por (3.34) é contínuo à esquerda, pois a integral presente na definição de A é contínua pela Proposição 2.3.21, uma vez que vale (I1) e $t.I_d \in C([a,b], L(X))$, pois $B_i \in L(X)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e pelo fato de que a função de Heaviside é contínua à esquerda.

Note que, pela condição (I2) e refinando as parcelas da soma para o cálculo das variações nos pontos de impulso temos, para cada compacto $[a,b] \subset I$,

$$\text{var}_a^b(A) = \int_a^b m(s)ds + \sum_{i \in \mathscr{I}_a^b} \|B_i\| < +\infty, \tag{3.35}$$

pois $B_i \in L(X)$ para todo $i \in \mathscr{I}_a^b$ e $|\mathscr{I}_a^b| < +\infty$, portanto, $A \in BV_{loc}(I, L(X))$ e também satisfaz a condição (Δ), pois pela continuidade à esquerda de A, temos $I_d - \Delta^- A(t) = I_d$ para todo $t \in I$ e, além disso,

$$(I_d + \Delta^+ A(t))^{-1} = \begin{cases} I_d & \text{se} \quad t \neq \tau_i,\ i \in \mathscr{I}, \\ (I_d + B_i)^{-1} & \text{se} \quad t = \tau_i,\ i \in \mathscr{I}, \end{cases}$$

é um operador em $L(X)$.

Agora, iremos apresentar o conceito de operador fundamental associado à EDI (3.30) seguindo a ideia empregada em (SCHWABIK, 1992, Exemplo 6.20).

Definição 3.3.10. Considere a função $\Phi : I \times I \to X$ o operador fundamental clássico da EDO $\dot{x} = a(t)x$ que é definido pela relação

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\Phi(t,s)) = a(t)\Phi(t,s), \\ \Phi(t,t) = I_d. \end{cases} \tag{3.36}$$

Definimos o operador $V : I \times I \to L(X)$ por

$$V(t,s) \doteq \Phi(t,\tau_i) \left(\prod_{k=i}^{j+1} [I + B_k]\Phi(\tau_k, \tau_{k-1}) \right) [I + B_j]\Phi(\tau_j, s),$$

se $t \geqslant s$, $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ e $s \in (\tau_{j-1}, t_j]$ $(j \leqslant i$ e $i, j \in \mathscr{I})$, e

$$V(t,s) \doteq [V(s,t)]^{-1} = \Phi(t,\tau_j)[I + B_j]^{-1} \cdots [I + B_i]^{-1}\Phi(\tau_i, s),$$

se $t < s,\ s \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ e $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$ $(j \leqslant i$ e $i, j \in \mathscr{I})$. O operador V é chamado de **operador fundamental associado a EDI** (3.30).

Proposição 3.3.11. (SCHWABIK, 1992, Exemplo 6.20) Seja V o operador fundamental da EDI (3.30). Se $x : I \to X$ é solução do PVI (3.31) com condição inicial $x(t_0) = x_0$, então $x(t) = V(t,s)x_0$ para $t \geqslant s,\ t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ e $s \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$ com $j \leqslant i$ e $i, j \in \mathscr{I}$. Além disso, se o operador fundamental $U : I \times I \to L(X)$ da EDOG (3.3.8) então $U(t,s) = V(t,s)$ quaisquer que sejam $t,s \in I$.

CAPÍTULO

4

A TEORIA DE DICOTOMIA EXPONENCIAL NO CONTEXTO DE EDOGS LINEARES

A teoria de dicotomia exponencial no contexto de EDOs generaliza a noção de hiperbolicidade de EDOs autonômas para EDOs não autônomas.

Neste capítulo, desenvolveremos a teoria de dicotomia exponencial no contexto das EDOGs lineares e estabeleceremos sua relação com a existência de soluções limitadas da EDOG perturbada associada.

4.1 Dicotomia exponencial em EDOGs lineares

Nesta seção, introduziremos o conceito de dicotomia exponencial em EDOGs e forneceremos condições suficientes para uma EDOG admití-la.

Vamos considerar a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x] \tag{4.1}$$

e o PVI associado

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

em que $(t_0, x_0) \in I \times X$ e $A \in BV_{loc}(I, X)$ satisfaz a condição (Δ). Pela Observação 3.2.7 e pela Proposição 3.2.3, o PVI (4.2) admite única solução (global) de variação limitada em I e, pelo Teorema 3.2.8, o operador $U : I \times I \to L(X)$ está bem definido por ser único em cada compacto de I .

Definição 4.1.1. (Condições H1 e H2) Dizemos que a o operador $A : I \to L(X)$ satisfaz:

- (H1) se $A \in BV_{loc}(I, L(X))$;

- (H2) se A satisfaz a condição (Δ) para todo $[a,b] \subset I$.

Definição 4.1.2. Definimos os operadores $\mathscr{U}$ e $\mathscr{U}^{-1} : I \to L(X)$, respectivamente, por

$$\mathscr{U}(t) \doteq U(t,t_0) \ \text{ e } \ \mathscr{U}^{-1}(t) \doteq U(t_0,t).$$

Observação 4.1.3. Em termos da Definição 4.1.2, se $x : I \to X$ é solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \\ x(s) = x_0, \end{cases} \tag{4.3}$$

então, pela Proposição 3.2.11, 3., e pelo Corolário 3.2.10, temos

$$x(t) = \mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)x_0,$$

para todo $t \in I$.

Definição 4.1.4. (Dicotomia Exponencial) Dizemos que a EDOG (4.1) admite **dicotomia exponencial** em I, se existem constantes positivas K_1, K_2, α_1 e α_2 e uma projeção $P : X \to X$, isto é, satisfazendo $P^2 = P$, tais que:

1. $\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$ para todos $t,s \in I$ com $t \geqslant s$;
2. $\|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$ para todos $t,s \in I$ com $s \geqslant t$.

A prova do lema que será apresentado a seguir, segue as ideias empregadas em (COPPEL, 1978, ideias da página 13) generalizando para o caso de espaços de Banach em geral.

Lema 4.1.5. (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Lema 13.2) Suponha que a EDOG (4.1) admite dicotomia exponencial em $[a,+\infty)$, com $a \geqslant 0$. Então a EDOG (4.1) também admite dicotomia exponencial em $[0,+\infty)$.

Demonstração. Considere $K_1, K_2, \alpha_1, \alpha_2$ e P satisfazendo

1. $\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$ para todos $t,s \in [a,+\infty)$ com $t \geqslant s$;
2. $\|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$ para todos $t,s \in [a,+\infty)$ com $s \geqslant t$.

Pela Proposição 3.2.11, 2., existe $M \geqslant 1$ tal que

$$\|\mathscr{U}(t)\| \leqslant M \ \text{ e } \ \|\mathscr{U}^{-1}(t)\| \leqslant M.$$

Considere $t,s \in [0,+\infty)$ e defina $M_1 \doteq K_1 e^{\alpha_1 a} M^4$.

- Caso $0 \leqslant a \leqslant s \leqslant t$, então

$$\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| \overset{1.}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \leqslant e^{\alpha_1 a} M^4 K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \leqslant M_1 e^{-\alpha_1(t-s)};$$

- Caso $0 \leqslant s \leqslant a \leqslant t$, então pela Proposição 3.2.11, 1.,

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| &\leqslant \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(a)\|\,\|\mathscr{U}(a)\mathscr{U}^{-1}(s)\| \\
&\leqslant \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(a)\|\,\|\mathscr{U}(a)\|\,\|\mathscr{U}^{-1}(s)\| \\
&\overset{1.}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-a)} M^2 \\
&\leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-a)} M^2 e^{\alpha_1 s} = K_1 e^{\alpha_1 a} M^2 e^{-\alpha_1(t-s)} \\
&\leqslant M_1 e^{-\alpha_1(t-s)}. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

- Caso $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant a$, então

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| &\leqslant \|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(a)\|\,\|\mathscr{U}(a)P\mathscr{U}^{-1}(a)\|\,\|\mathscr{U}(a)\mathscr{U}^{-1}(s)\| \\
&\overset{1.}{\leqslant} M^2 K_1 M^2 \\
&\leqslant K_1 M^4 e^{\alpha_1(a-t+s)} \\
&= M_1 e^{-\alpha_1(t-s)}. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Assim, quaisquer que sejam $t,s \in [0,+\infty)$ com $t \geqslant s$, temos

$$\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant M_1 e^{-\alpha_1(t-s)}.$$

Analogamente, definindo $M_2 \doteq K_2 e^{\alpha_2 a} M^4$ obtemos, para todos $t,s \in [0,+\infty)$ com $t \leqslant s$, a seguinte estimativa

$$\|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant M_2 e^{-\alpha_2(s-t)}.$$

□

Proposição 4.1.6. (Caracterização da dicotomia exponencial) A EDOG (4.1) admite dicotomia exponencial em I se, e somente se, existem constantes positivas $L_1, L_2, M, \beta_1, \beta_2$ e uma projeção $P : X \to X$, tais que, para cada $\xi \in X$, valem:

(i) Para todos $t,s \in I$, com $t \geqslant s$, temos

$$\|\mathscr{U}(t)P\xi\| \leqslant L_1 e^{-\beta_1(t-s)} \|\mathscr{U}(s)P\xi\|;$$

(ii) Para todos $t,s \in I$, com $t \leqslant s$, temos

$$\|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\xi\| \leqslant L_2 e^{-\beta_2(s-t)} \|\mathscr{U}(s)(I_d - P)\xi\|;$$

(iii) Para todo $t \in I$, vale

$$\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| \leqslant M.$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Considere $K_1, K_2, \alpha_1, \alpha_2$ e P satisfazendo

1. $\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$ para todos $t,s \in [0,+\infty)$ com $t \geqslant s$;

2. $\|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$ para todos $t,s \in [0,+\infty)$ com $s \geqslant t$.

Defina $L_1 = M \doteq K_1$, $L_2 \doteq K_2$, $\beta_1 \doteq \alpha_1$ e $\beta_2 \doteq \alpha_2$. Seja $\xi \in X$, então, pelas desigualdades anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathscr{U}(t)P\xi\| &= \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\mathscr{U}(s)P\xi\| \overset{1.}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\|\mathscr{U}(s)P\xi\| \\ &\leqslant L_1 e^{-\beta_1(t-s)}\|\mathscr{U}(s)P\xi\|, \end{aligned}$$

para $t,s \in I$ com $t \geqslant s$,

$$\begin{aligned} \|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\xi\| &= \|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)\mathscr{U}(s)(I_d - P)\xi\| \\ &\overset{2.}{\leqslant} K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\|\mathscr{U}(s)(I_d - P)\xi\| \\ &\leqslant L_2 e^{-\beta_2(s-t)}\|\mathscr{U}(s)(I_d - P)\xi\|, \end{aligned} \tag{4.6}$$

para todo $t,s \in I$ com $t \leqslant s$ e, finalmente, para todo $t \in I$ temos

$$\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-t)} = K_1 = M.$$

($\Leftarrow$) Considere L_1, L_2, M, β_1 e β_2 satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema em questão. Defina $K_1 \doteq ML_1$ e $K_2 \doteq (1+M)L_2$. Se $t,s \in I$ com $t \geqslant s$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| &= \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\xi\| \\ &\overset{(i)}{\leqslant} \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} L_1 e^{-\beta_1(t-s)}\|\mathscr{U}(s)P\mathscr{U}^{-1}(s)\xi\| \\ &\leqslant L_1 e^{-\beta_1(t-s)} \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} \|\mathscr{U}(s)P\mathscr{U}^{-1}(s)\|\,\|\xi\| \\ &\overset{(iii)}{\leqslant} ML_1 e^{-\beta_1(t-s)} = K_1 e^{-\beta_1(t-s)}, \end{aligned}$$

além disso, se $t,s \in I$ com $t \leqslant s$ temos

$$\begin{aligned} \|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)\| &= \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} \|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)\xi\| \\ &\overset{(ii)}{\leqslant} \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} L_2 e^{-\beta_2(s-t)}\|\mathscr{U}(s)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)\xi\| \\ &\leqslant L_2 e^{-\beta_2(s-t)} \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} \left(\|\mathscr{U}(s)\mathscr{U}^{-1}(s)\xi\| + \|\mathscr{U}(s)P\mathscr{U}^{-1}(s)\xi\|\right) \\ &\overset{(iii)}{\leqslant} (1+M)L_2 e^{-\beta_2(s-t)} = K_2 e^{-\beta_2(s-t)}. \end{aligned}$$

$\square$

4.2 Condições para dicotomia

Estabeleceremos um conceito importante para o estudo de dicotomia - as EDOGs de crescimento limitado - afim de obter condições suficientes para a EDOG (4.1) admitir dicotomia exponencial. Lembremos que $I^{+\infty}$ denota um intervalo necessariamente ilimitado superiormente.

Definição 4.2.1. (Crescimento limitado) Dizemos que a EDOG (4.1) tem **crescimento limitado** em $I^{+\infty}$, se existem constantes $h>0$ e $C\geqslant 1$ tais que para toda solução $x: I^{+\infty}\to X$ da EDOG (4.1) temos

$$\|x(t)\|\leqslant C\|x(s)\|,$$

para todos $s,t\in I$, com $s\leqslant t\leqslant s+h$.

Proposição 4.2.2. (Caracterização de EDOG com crescimento limitado) A EDOG (4.1) admite crescimento limitado em $I^{+\infty}$ se, e somente se, existem constantes $C\geqslant 1$ e $\mu\geqslant 0$ tais que, para todos $s,t\in I^{+\infty}$ com $t\geqslant s$,

$$\|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)\|\leqslant Ce^{\mu(t-s)}.$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Considere $h>0$ e $C\geqslant 1$ (pela Definição 4.2.1), $x: I^{+\infty}\to X$ solução da EDOG (4.1), $\xi\in X$ e $s,r,t\in I^{+\infty}$ tais que $x(s)=\xi$ e $r\leqslant t\leqslant r+h$. Então, pela Observação 4.1.3, temos

$$\|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)\xi\|\leqslant\|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(r)\|\|\mathscr{U}(r)\mathscr{U}^{-1}(s)\xi\|\leqslant C\|x(r)\|.$$

Tomando o supremo sobre $B_1(0)=\{\xi\in X:\ \|\xi\|\leqslant 1\}\subset X$, temos

$$\|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)\|\leqslant C\|\mathscr{U}(r)\mathscr{U}^{-1}(s)\|, \tag{4.7}$$

para todo $s,r,t\in I^{+\infty}$ e $r\leqslant t\leqslant r+h$.

Considere $t,s\in I^{+\infty}$ com $t\geqslant s$ e tome $n\in\mathbb{N}$ tal que $t\in[s+nh,s+(n+1)h)$. Além disso, defina $\mu\doteq\frac{\ln(C)}{h}>0$. Portanto, pela desigualdade (4.7) temos

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)\| &\leqslant C\|\mathscr{U}(t-h)\mathscr{U}^{-1}(s)\|\leqslant\cdots\leqslant C^{n+1}\|\mathscr{U}(t-nh)\mathscr{U}^{-1}(s)\|\\
&= C^{n+1}\|\mathscr{U}(s)\mathscr{U}^{-1}(s)\|=C^{n+1}=C.C^n=Ce^{\mu hn}\leqslant Ce^{\mu(t-s)}.
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Considere $x: I^{+\infty}\to X$ uma solução da EDOG (4.1). Tome $r\in I^{+\infty}$, então pela Observação 4.1.3, $x(t)=\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(r)x(r)$ para todo $x\in I^{+\infty}$. Seja $h>0$ e tome $t,s\in I^{+\infty}$ com $s\leqslant t\leqslant s+h$, então

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &= \|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(r)x(r)\|\leqslant\|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)\|\|\mathscr{U}(s)\mathscr{U}^{-1}(r)x(r)\|\\
&\leqslant Ce^{\mu(t-s)}\|x(s)\|\leqslant Ce^{\mu h}\|x(s)\|.
\end{aligned}$$

Logo, como $C'\doteq Ce^{\mu h}\geqslant 1$, temos que a EDOG (4.1) tem crescimento limitado em $I^{+\infty}$. $\square$

O lema que será apresentado a seguir, segue a ideia empregada em (COPPEL, 1978, Paginas 11 a 14) generalizando para o caso de espaços de Banach em geral.

Lema 4.2.3. (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Lema 13.7) Considere $I = [a, +\infty)$ com $a \geqslant 0$. Suponha que existam constantes postivas $\alpha_1, \alpha_2, K_1, K_2$ e uma projeção $P : X \to X$ que satisfaz as seguintes condições:

1. Para todos $t \geqslant s \geqslant a$ e $\xi \in X$ temos
$$\|\mathscr{U}(t)P\xi\| \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \|\mathscr{U}(s)P\xi\|;$$
2. Para todos $a \leqslant t \leqslant s$ e $\xi \in X$ temos
$$\|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\xi\| \leqslant K_2 e^{-\alpha_2(s-t)} \|\mathscr{U}(s)(I_d - P)\xi\|.$$

Então valem as seguintes condições:

(a) Dado $\theta \in (0,1)$, existe $T > 0$ tal que para cada solução $x : [a, +\infty) \to X$ da EDOG (4.1) temos, para todo $s \geqslant T$,
$$\|x(s)\| \leqslant \theta \sup_{|u-s| \leqslant T} \|x(u)\|.$$

(b) Se a EDOG (4.1) admite crescimento limitado em $[a, +\infty)$, então existe $M \geqslant 0$ tal que $\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| \leqslant M$, para todo $t \in [a, +\infty)$.

Demonstração. Vamos assumir que $K_1 = K_2 = K$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. De fato, se definirmos as constantes $K \doteq \max\{K_1, K_2\}$ e $\alpha \doteq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, podemos reescrever as condições 1. e 2. de forma adequada.

(a) Dado $\theta \in (0,1)$, veja que a função $f(x) \doteq x - \frac{1}{x} - 2\theta^{-1}$ é estritamente positiva se, e somente se, $f(x) = \frac{x^2 - 2\theta^{-1} - 1}{x} > 0$. Fazendo a análise de sinal obtemos, em particular, que $f(x) > 0$ para todo $x > \theta^{-1} + \sqrt{\theta^{-2} + 1}$, logo, podemos considerar $S \geqslant 0$ suficientemente grande tal que $x_S = \frac{e^{\alpha S}}{K} \geqslant \theta^{-1} + \sqrt{\theta^{-2} + 1}$. Assim, $f(x_S) \geqslant 0$ e então $K^{-1}e^{\alpha S} - Ke^{-\alpha S} \geqslant 2\theta^{-1}$.

Considere $x : [a, +\infty) \to X$ solução da EDOG (4.1) e $s \geqslant a + S$. Agora, defina
$$x_1(t) \doteq \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)x(t) \;\text{ e }\; x_2(t) \doteq \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)x(t),$$
para todo $t \in [a, +\infty)$, logo, $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ e
$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)x(s) = \mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)(x_1(s) + x_2(s)) \\ &= \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)x(s) + \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)x(s). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\|x(s)\| \leqslant \theta \sup_{|u-s| \leqslant S} \|x(u)\|$.

- Caso $\|x_1(s)\| \leqslant \|x_2(s)\|$, defina $y(s) \doteq \mathscr{U}^{-1}(s)x(s) \in X$, logo

$$\begin{aligned}
\|x(s+S)\| &= \|\mathscr{U}(s+S)Py(s) + \mathscr{U}(s+S)(I_d - P)y(s)\| \\
&\geqslant \|\mathscr{U}(s+S)Py(s)\| - \|\mathscr{U}(s+S)(I_d - P)y(s)\| \\
&\overset{2.}{\geqslant} K^{-1}e^{\alpha S}\|\mathscr{U}(s)(I_d - P)y(s)\| - \|\mathscr{U}(s+S)(I_d - P)y(s)\| \\
&\overset{1.}{\geqslant} K^{-1}e^{\alpha S}\|\mathscr{U}(s)(I_d - P)y(s)\| - Ke^{-\alpha S}\|\mathscr{U}(s)Py(s)\| \\
&= K^{-1}e^{\alpha S}\|x_2(s)\| - Ke^{-\alpha S}\|x_1(s)\| \\
&\geqslant (K^{-1}e^{\alpha S} - Ke^{-\alpha S})\|x_2(s)\| \\
&\geqslant 2\theta^{-1}\|x_2(s)\| \geqslant \theta^{-1}\|x(s)\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|x(s)\| \leqslant \theta\|x(s+S)\| \leqslant \theta \sup\limits_{|u-s|\leqslant S} \|x(u)\|$ para todo $s \geqslant a+S$, pois

$$\|x(s+S)\| \in \{\|x(u)\| : \; |u-s| \leqslant S\}.$$

- Caso $\|x_2(s)\| \leqslant \|x_1(s)\|$, defina $y(s) \doteq \mathscr{U}^{-1}(s)x(s) \in X$, seguindo a mesma ideia anterior

$$\begin{aligned}
\|x(s-S)\| &= \|\mathscr{U}(s-S)Py(s) + \mathscr{U}(s-S)(I_d - P)y(s)\| \\
&\geqslant \|\mathscr{U}(s-S)(I_d - P)y(s)\| - \|\mathscr{U}(s-S)Py(s)\| \\
&\geqslant Ke^{-\alpha S}\|x_1(s)\| - K^{-1}e^{\alpha S}\|x_2(s)\| \\
&\geqslant (K^{-1}e^{\alpha S} - Ke^{-\alpha S})\|x_1(s)\| \\
&\geqslant 2\theta^{-1}\|x_1(s)\| \geqslant \theta^{-1}\|x(s)\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|x(s)\| \leqslant \theta\|x(s-S)\| \leqslant \theta \sup\limits_{|u-s|\leqslant S} \|x(u)\|$ para todo $s \geqslant a+S$, pois

$$\|x(s-S)\| \in \{\|x(u)\| : \; |u-s| \leqslant S\}.$$

Definindo $T \doteq a+S$, obtemos o resultado.

(b) Pela caracterização de crescimento limitado para a EDOG (4.1) dada pela Proposição 4.2.2, existem constantes $C \geqslant 1$ e $\mu \geqslant 0$ tais que para todos $s,t \in I^{+\infty}$ com $t \geqslant s$,

$$\|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant Ce^{\mu(t-s)}.$$

Considere $t \in [a,+\infty)$ e $h > 0$.

Pelas condições 1. e 2. assumidas (com $K_1 = K_2 = K$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$) obtemos

$$\|\mathscr{U}(t+h)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| \leqslant Ke^{-\alpha h}\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| \tag{4.8}$$

e

$$\|\mathscr{U}(t+h)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)\| \geqslant K^{-1}e^{\alpha h}\|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)\|. \tag{4.9}$$

Defina $\rho(t) \doteq \|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)\|$, $\sigma(t) \doteq \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\|$, $\delta \doteq K^{-1}e^{\alpha S} - Ke^{-\alpha S}$ e $\omega(t) \doteq \rho^{-1}(t)\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t) + \sigma^{-1}(t)\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)$.

Note que, valem as desigualdades

$$\|\mathscr{U}(t+h)\mathscr{U}^{-1}(t)\omega(t)\| \leqslant \|\mathscr{U}(t+h)\mathscr{U}^{-1}(t)\| \, \|\omega(t)\| \leqslant Ce^{\mu h}\|\omega(t)\| \tag{4.10}$$

e

$$\begin{aligned} |\rho(t) - \sigma(t)| &= \big| \, \|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)\| - \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| \, \big| \\ &\leqslant \|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t) + \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| \\ &= \|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(t)\| = \|I_d\| = 1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Assim, por (4.10) ,

$$\begin{aligned} Ce^{\mu h}\|\omega(t)\| &\geqslant \|\mathscr{U}(t+h)\mathscr{U}^{-1}(t)\omega(t)\| \\ &= \|\mathscr{U}(t+h)\mathscr{U}^{-1}(t)[\rho^{-1}(t)\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t) + \sigma^{-1}(t)\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)]\| \\ &= \|\rho^{-1}(t)\mathscr{U}(t+h)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t) + \sigma^{-1}\mathscr{U}(t+h)P\mathscr{U}^{-1}(t)\|. \end{aligned}$$

Logo, por (4.8) e (4.9) temos

$$Ce^{\mu h}\|\omega(t)\| \geqslant K^{-1}e^{\alpha h} - Ke^{-\alpha h} = \delta.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \delta C^{-1}e^{-\mu h} &\leqslant \|\omega(t)\| = \|\rho^{-1}(t)\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t) + \sigma^{-1}(t)\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| \\ &= \|\sigma^{-1}(t)I_d + (\rho^{-1}(t) - \sigma^{-1}(t))\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)\| \\ &\leqslant \sigma^{-1}(t)\|I_d\| + |\rho^{-1}(t) - \sigma^{-1}(t)|.\|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)\| \\ &\leqslant \sigma^{-1}(t) + |\rho^{-1}(t) - \sigma^{-1}(t)|\rho(t) \\ &= \sigma^{-1}(t)(1 + \sigma(t)|\rho^{-1}(t) - \sigma^{-1}(t)|\rho(t)) \\ &= \sigma^{-1}(t)(1 + |\sigma(t) - \rho(t)|) \\ &\overset{(4.11)}{\leqslant} 2\sigma^{-1}(t). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| = \sigma(t) \leqslant 2\delta^{-1}Ce^{\mu h}.$$

□

Lema 4.2.4. Suponha que existam $T > 0$, $C > 1$ e $\theta \in (0,1)$ tais que para qualquer solução $x : [0,+\infty) \to X$ da EDOG (4.1), as seguintes condições estejam satisfeitas:

1. Para todo $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s+T$,
$$\|x(t)\| \leqslant C\|x(s)\|;$$

2. Para todo $t \geqslant T$ temos,
$$\|x(t)\| \leqslant \theta \sup_{|u-t|\leqslant T} \|x(u)\|.$$

Se x é uma solução não trivial limitada da EDOG (4.1) então, dados $n \in \mathbb{N}$ e $t \geqslant (n+1)T$, temos
$$\sup_{|u-t|\leqslant nT} \|x(u)\| \leqslant \theta \sup_{|u-t|\leqslant (n+1)T} \|x(u)\|.$$

Demonstração. Considere x uma solução não trivial limitada da EDOG (4.1). Pelas condições (H1) e (H2) a solução está definida em $[0,+\infty)$.

Defina, para todo $s \geqslant 0$, $\mu(s) \doteq \sup_{u\geqslant s} \|x(u)\|$. Assim, $\|x(r)\| \leqslant \mu(s)$, para todo $r \geqslant s$.

Além disso, pela condição 2. temos
$$\|x(t)\| \leqslant \theta \sup_{|u-t|<T} \|x(u)\| \leqslant \theta \sup_{u\geqslant s} \|x(u)\| = \theta\mu(s) < \mu(s),$$

para todo $t \geqslant s+T$, assim, pela definição de supremo em $t \geqslant s+T$ temos $\sup_{t\geqslant s+T} \|x(t)\| < \mu(s)$, logo,
$$\sup_{u\geqslant s} \|x(u)\| = \mu(s) = \sup_{s\leqslant u\leqslant s+T} \|x(u)\|. \tag{4.12}$$
Por outro lado, a condição 1. implica, para todo $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$,
$$\|x(t)\| \leqslant \mu(s) = \sup_{s\leqslant u\leqslant s+T} \|x(u)\| \overset{1.}{\leqslant} \sup_{s\leqslant u\leqslant s+T} C\|x(s)\| = C\|x(s)\|.$$

Agora, para $n \in \mathbb{N}$, seja $t \geqslant (n+1)T$ e tome $s > 0$ tal que $|s-t| \leqslant nT$, logo, temos $s \geqslant t - nT \geqslant T$ e então
$$\begin{aligned} \|x(s)\| &\overset{2.}{\leqslant} \theta \sup_{s-T\leqslant u\leqslant s+T} \|x(u)\| \\ &\overset{B_T(s)\subset B_{nT}(s)}{\leqslant} \theta \sup_{t-(n+1)T\leqslant u\leqslant t+(n+1)T} \|x(u)\| < \sup_{|u-t|\leqslant (n+1)T} \|x(u)\|. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre os valores de $s \in \{s : |s-t| \leqslant nT\}$, temos
$$\sup_{|s-t|\leqslant nT} \|x(s)\| \leqslant \sup_{|s-t|\leqslant (n+1)T} \|x(s)\|.$$

□

No próximo teorema, iremos apresentar condições suficientes para a EDOG (4.1) admitir dicotomia exponencial em $[0,+\infty)$ seguindo as ideias presentes em (COPPEL, 1978, Proposição 1, Pagina 14).

Teorema 4.2.5. (FEDERSON; BONOTTO; MESQUITA, 2021, Teorema 13.9) Suponha que

$$V_0 \doteq \{x_0 \in X: \ \|x_0\| = 1, \ x(\cdot, x_0) \text{ é solução ilimitada da EDOG (4.1) com } x(0,x_0) = x_0\}$$

é compacto em X, que existam $T > 0$, $C > 1$ e $\theta \in (0,1)$ tais que, para qualquer solução $x : [0,+\infty) \to X$ da EDOG (4.1), são satisfeitas:

1. Para todos $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s+T$,
$$\|x(t)\| \leqslant C\|x(s)\|;$$
2. Para todos $t \geqslant T$, temos
$$\|x(t)\| \leqslant \theta \sup_{|u-t|\leqslant T} \|x(u)\|.$$

Além disso, para cada $x_0 \in V_0$, existe uma sequencia crescente $\{t_n^{x_0}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty)$ com $t_{n+1}^{x_0} \leqslant t_n^{x_0} + T$, para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo:

(i) $\|x(t,x_0)\| < \frac{C}{\theta^n}$, para todo $t \in [0, t_n^{x_0})$;

(ii) $\left\|x(t_n^{x_0}, x_0)\right\| \geqslant \frac{C}{\theta^n}$.

Então a EDOG (4.1) admite dicotomia exponencial em $[0,+\infty)$.

Demonstração. Vamos separar a demonstração em algumas etapas para facilitar o entendimento.

(I) Note que se $x : [0,+\infty) \to X$ é solução limitada da EDOG (4.1) então existem $K > 1$ e $\alpha > 0$ tais que, para $0 \leqslant s \leqslant t < +\infty$, temos $\|x(t)\| \leqslant Ke^{-\alpha(t-s)}\|x(s)\|$.

De fato, seja $x : [0,+\infty) \to X$ uma solução limitada da EDOG (4.1). Tome $K \doteq \frac{C}{\theta}$, $\alpha \doteq \frac{-\ln(\theta)}{T} > 0$ e, para $t \geqslant s$, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [s+nT, s+(n+1)T)$.

Caso $n = 0$, temos $s \leqslant t < s+T$, logo, $\frac{t-s}{T} \in [0,1)$ e, portanto,

$$\|x(t)\| \overset{1.}{\leqslant} C\|x(s)\| = K\theta\|x(s)\| \overset{\theta=e^{-\alpha T}}{=} Ke^{-\alpha T}\|x(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}\|x(s)\|.$$

Caso $n \geqslant 1$, então $t - nT \geqslant s$ e $\frac{t-s}{T} < n+1$, portanto

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leqslant \theta \sup_{|u-t|\leqslant T} \|x(u)\| \overset{L.4.2.4}{\leqslant} \theta^2 \sup_{|u-t|\leqslant 2T} \|x(u)\| \overset{L.4.2.4}{\leqslant} \cdots \overset{L.4.2.4}{\leqslant} \theta^n \sup_{|u-t|\leqslant nT} \|x(u)\| \\
&\overset{B_{nT}(t)\subset[s,+\infty)}{\leqslant} \theta^n \sup_{u\geqslant s} \|x(u)\| \overset{(4.12)}{=} \theta^n \sup_{s\leqslant u\leqslant s+T} \|x(u)\| \overset{1.}{\leqslant} \theta^n \sup_{s\leqslant u\leqslant s+T} C\|x(s)\| \\
&= K\theta^{n+1}\|x(s)\| \overset{\theta=e^{-\alpha T}}{=} Ke^{-\alpha T(n+1)}\|x(s)\| = Ke^{-\alpha(t-s)}\|x(s)\|.
\end{aligned}$$

(II) Por outro lado, se $x : [0,+\infty) \to X$ é solução ilimitada da EDOG (4.1) satisfazendo $\|x(0)\| = 1$ então, para $t_1^{x(0)} \leqslant t \leqslant s < +\infty$, $\|x(t)\| \leqslant Ke^{-\alpha(t-s)}\|x(s)\|$.

De fato, seja $x : [0,+\infty) \to X$ uma solução ilimitada da EDOG (4.1) com condição inicial $\|x(0)\| = 1$. Para $t \in [0,T]$, temos

$$\|x(t)\| \leqslant C\|x(0)\| = C < \frac{C}{\theta} = K. \tag{4.13}$$

Suponha que $t_1^{x(0)} \leqslant T$ então, pela desigualdade (4.13) temos $\|x(t_1^{x(0)})\| < K$, por outro lado, por (ii). temos $\|x(t_1^{x(0)})\| \geqslant K$, o que é um absurdo, logo, $t_1^{x(0)} > T$ e então vale que $T < t_1^{x(0)} < \cdots < t_n^{x(0)} < \cdots$.

Note que $t_n^{x(0)} \to +\infty$. De fato, se existisse $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $t_n^{x(0)} \to \lambda$ então deveríamos ter $\lim\limits_{s\to\lambda^-} x(s) = +\infty$, o que é uma contradição com o fato de x ser regrada por ser de variação limitada em $[0,+\infty)$ como vimos no início da Seção 4.1.

Seja $t_1^{x(0)} \leqslant t \leqslant s$ e assuma, sem perda de generalidade que $t_m^{x(0)} \leqslant t < t_{m+1}^{x(0)}$ e que $t_n^{x(0)} \leqslant s < t_{n+1}^{x(0)}$ para $m,n \in \mathbb{N}$ adequados. Desta forma,

$$t_{n+1}^{x(0)} - t_{n+1}^{x(0)} < t_{n+1}^{x(0)} - s \leqslant t_{n+1}^{x(0)} - t_n^{x(0)} \leqslant T \Rightarrow s < t_{n+1}^{x(0)} \leqslant s+T,$$

$$t_{n+1}^{x(0)} \leqslant t_n^{x(0)} + T \leqslant t_{n-1}^{x(0)} + 2T \leqslant \ldots \leqslant t_m^{x(0)} + (n-m+1)T,$$

e

$$s-t \quad < \quad t_{n+1}^{x(0)} - t_m^{x(0)} \leqslant (n-m+1)T,$$

o que implica em $\frac{s-t}{T} < n-m+1$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| \quad &\overset{(i).}{<} \quad \theta^{-m-1}C = \theta^{n-m}C\theta^{-n-1} \overset{(ii).}{\leqslant} \theta^{n-m}\|x(t_{n+1}^{x(0)})\| \\
&\leqslant \quad C\theta^{-1}\theta^{n-m+1}\|x(s)\| \leq C\theta^{-1}\theta^{\frac{s-t}{T}}\|x(s)\| \\
&\overset{\theta=e^{-\alpha T}}{=} \quad Ke^{-\alpha(t-s)}\|x(s)\|.
\end{aligned}$$

Em posse destas duas informações, vamos prosseguir com a demonstração.

Considere o subespaço $X_1 \doteq \{x_0 \in X : \ x(t,x_0) \text{ é limitada em } [0,+\infty)\}$ de X e X_2 tal que $X = X_1 \oplus X_2$. Note que por (i). e (ii). temos, para cada $x_0 \in X_2$ com $\|x_0\| = 1$, que existe $t_1^{x_0}$ satisfazendo $\|x(t,x_0)\| < K$, para todo $t \in [0,t_1^{x_0})$ e $\|x(t_1^{x_0},x_0)\| \geqslant K$.

(III) Observe que $\{t_1^{x_0} : \ x_0 \in X_2 \text{ e } \|x_0\| = 1\}$ é limitado.

De fato, suponha o contrário, ou seja, que existe $\{x_0^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_2$ com $\|x_0^n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $t_1^{x_0^n} \xrightarrow{n} +\infty$. Como V_0 é compacto em X, então V_0 é sequencialmente compacto, o que implica que podemos passar $\{x_0^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à uma subsequência e assumir que existe $x_0 \in X_2$ com $\|x_0\| = 1$ (por V_0 ser fechado) tal que $x_0^n \to x_0$.

Consequentemente, para todo $t \geqslant 0$, da continuidade de $U(t,0) \in L(X)$, temos

$$x(t,x_0^n) = U(t,0)x_0^n \xrightarrow{n} U(t,0)x_0 = x(t,x_0).$$

Isto implica que $\|x(t,x_0)\| \leqslant K$, para todo $t \in [0,+\infty)$, uma vez que $\|x(t,x_0^n)\| \leqslant K$ para $t \in [0,t_1^{x_0^n})$ e $t_1^{x_0^n} \xrightarrow{n} +\infty$. Logo, $x_0 \in X_1$ e, como $x_0 \in X_2$, temos $x_0 \in X_1 \cap X_2$ o que implica $x_0 = 0$, que é um absurdo com $\|x_0\| = 1$.

Defina $a \doteq \sup\{t_1^{x_0} : \ x_0 \in X_2 \text{ e } \|x_0\| = 1\} < +\infty$, considere $P : X \to X_1$ a projeção em X_1 e $\xi \in X$. Assim, temos

$$\|\mathscr{U}(t)P\xi\| \;=\; \|U(t,t_0)P\xi\| \overset{(I)}{\leqslant} Ke^{-\alpha(t-s)}\|U(s,t_0)P\xi\| = Ke^{-\alpha(t-s)}\|\mathscr{U}(s)P\xi\|, \tag{4.14}$$

para $t \geqslant s \geqslant a$;

Por outro lado, se $x_2 \in X_2 \setminus \{0\}$ obtemos, para $a \leqslant t \leqslant s < +\infty$,

$$\begin{aligned} \|x(t,x_2)\| &= \|U(t,t_0)x_2\| = \|x_2\| \left\| U(t,t_0)\left(\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\right\| \\ &= \|x_2\| \left\| x\left(t, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\right\| \overset{(II)}{\leqslant} Ke^{-\alpha(s-t)}\|x_2\| \left\| x\left(s, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\right\| \\ &= Ke^{-\alpha(s-t)}\|x(s,x_2)\|. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\mathscr{U}(t)(I_d-P)\xi\| &= \|U(t,t_0)(I_d-P)\xi\| = \|x(t,(I_d-P)\xi\| \\ &\overset{(4.15)}{\leqslant} Ke^{-\alpha(s-t)}\|U(s,t_0)(I_d-P)\xi\| \\ &= Ke^{-\alpha(t-s)}\|\mathscr{U}(s)(I_d-P)\xi\|. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Pelo item (b) do Lema 4.2.3, temos que existe $M > 0$ tal que $\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t)\| \leqslant M$ para todo $t \in [a,+\infty)$ o que implica pela Proposição 4.1.6 que a EDOG (4.1) admite dicotomia exponencial em $[a,+\infty)$ e, consequentemente, pelo Lema 4.1.5 que a EDOG (4.1) admite dicotomia exponencial em $[0,+\infty)$. □

Exemplo 4.2.6. Considere a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{4.17}$$

em que $A : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é dado por

$$A(t) = -\int_0^t a(s)ds,$$

sendo a localmente Perron integrável em $[0,+\infty)$ e satisfazendo a condição

$$0 < a_0 \leqslant a(t) < \|a\|_\infty = \sup_{s\in[0,+\infty)} |a(s)| < +\infty.$$

Observe que se $[a,b] \subset [0,+\infty)$ e $d = \{t_i\}_{i=0}^{|d|} \in D_{[a,b]}$ então

$$\sum_{i=1}^{|d|} |A(t_i) - A(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{|d|} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(s)ds \right| \overset{(2.1)}{\leqslant} \|a\|_\infty (b-a) < +\infty,$$

portanto, $A \in BV_{loc}([0,+\infty),\mathbb{R})$. Além disso, como $t.I_d \in C([0,+\infty),\mathbb{R})$, obtemos a continuidade de A pela Proposição 2.3.21. Assim, A satisfaz a condição (Δ).

Pelo Teorema 2.3.27 obtemos, por definição, que $U : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definido por

$$U(t,s) = e^{-\int_s^t a(r)dr}$$

é o operador fundamental da EDOG (4.17). Além disso, se $h > 0$ é tal que $0 \leqslant t-s \leqslant h$, então

$$|U(t,s)| = |e^{-\int_s^t a(r)dr}| \leqslant e^{|-\int_s^t a(r)dr|} \overset{(2.1)}{\leqslant} e^{\|a\|_\infty h}.$$

Considere $x : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma solução da EDOG (4.17) com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Então $x(t) = U(t,t_0)x_0$ e

$$|x(t)| = |U(t,s)U(s,t_0)x_0| \leqslant e^{\|a\|_\infty h}|x(s)|,$$

para todos $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s+h$ o que implica que a EDOG (4.17) admite crescimento limitado em $[0,+\infty)$. Note, também, que as condições 1. e 2. do Lema 4.2.3 são satisfeitas com $P = I_d$, $K_1 = 1$, $\alpha_1 = a_0$ e os parâmetros K_2 e α_2 podendo ser tomados de forma arbitrária, pois se $\xi \in \mathbb{R}$ e $a \leqslant s \leqslant t$ temos

$$|\mathscr{U}(t)I_d\xi| = |e^{-\int_{t_0}^t a(r)dr}\xi| = |e^{-\int_{t_0}^s a(r)dr - \int_s^t a(r)dr}\xi| \leqslant e^{-a_0(t-s)}|\mathscr{U}(s)\xi| \tag{4.18}$$

e

$$|\mathscr{U}(t)(I_d - I_d)\xi| = 0 \leqslant 0 = |\mathscr{U}(s)(I_d - I_d)\xi|.$$

Portanto, vale o item (a) do Lema 4.2.3 e então existem $\theta \in (0,1)$ e $T > 0$ tais que qualquer solução $x : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ da EDOG (4.17) satisfaz, para $s \geqslant T$,

$$|x(s)| \leqslant \theta \sup_{|u-s| \leqslant T} |x(u)|.$$

Observe também que todas as soluções da EDOG 4.17 são limitadas pois se fixarmos $x(s)$, temos

$$|x(t)| = |\mathscr{U}(t)x_0| \overset{(4.18)}{\leqslant} e^{-a_0(t-s)}|\mathscr{U}(s)x_0| \leqslant e^{a_0 s}|x(s)| \leqslant +\infty.$$

Consequentemente, o conjunto

$$V_0 \doteq \{x_0 \in [0,+\infty) : \|x_0\| = 1,\ x(\cdot,x_0) \text{ é solução ilimitada da EDOG (4.17) com } x(0,x_0) = x_0\}$$

é vazio (compacto em $\mathbb{R}$) e então podemos aplicar o Teorema 4.2.5. Logo, a EDOG (4.17) admite dicotomia exponencial em $[0,+\infty)$.

4.3 Dicotomia e soluções limitadas

Nesta seção, vamos estabelecer uma relação entre a EDOG (4.1) admitir dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$ e a existência de soluções limitadas para a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)] \tag{4.19}$$

obtida pela perturbação da EDOG (4.1) por f.

Definição 4.3.1. (Condições H1' e H2') Dizemos que a função $A : \mathbb{R} \to L(X)$ satisfaz:

- (H1') se $A \in BV_{loc}(\mathbb{R}, L(X))$;
- (H2') se A satisfaz a condição (Δ) para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Definição 4.3.2. (Condição (D)) Dizemos que a EDOG (4.1) satisfaz a condição (D) em $\mathbb{R}$, se a função $A : \mathbb{R} \to L(X)$ satisfaz as condições (H1'), (H2') e admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, ou seja, existem constantes positivas $K_1, K_2, \alpha_1, \alpha_2$ e uma projeção $P \in L(X)$ tais que, para todos $t, s \in I$, valem as condições:

(Di.) $\|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$, $t \geqslant s$;

(Dii.) $\|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$, $s \geqslant t$,

onde $\mathscr{U} : \mathbb{R} \to L(X)$ é definido por $\mathscr{U}(t) \doteq U(t,t_0)$ e $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to L(X)$ é o operador fundamental associado à EDOG (4.1).

Proposição 4.3.3. A única solução limitada da EDOG (4.1) satisfazendo a condição (D) em $\mathbb{R}$ é a solução nula.

Demonstração. Seja $x : \mathbb{R} \to X$ uma solução limitada da EDOG (4.1) com $x(t_0) = x_0 \in X$. Então existe $K > 0$ tal que $\|x(t)\| \leqslant K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Note que, para todo $t \in I$, temos pela Observação 4.1.3

$$x(t) = \mathscr{U}(t)x_0 = \mathscr{U}(t)Px_0 + \mathscr{U}(t)(I_d - P)x_0.$$

Denote $x_1(t) \doteq \mathscr{U}(t)Px_0$ e $x_2(t) \doteq \mathscr{U}(t)(I_d - P)x_0$, então:

- $\|x_1(t)\| = \|\mathscr{U}(t)Px_0\| = \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t_0)x_0\| \overset{(Di.)}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-t_0)}\|x_0\|$, $t \geqslant t_0$;
- $\|x_2(t)\| = \|\mathscr{U}(t)(I_d - P)x_0\| = \|\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t_0)x_0\| \overset{(Dii.)}{\leqslant} K_2 e^{\alpha_2(t-t_0)}\|x_0\|$, $t \leqslant t_0$.

Consequentemente, temos as desigualdades

$$\|x_1(t)\| = \|x(t) - x_2(t)\| \leqslant \|x(t)\| + \|x_2(t)\| \leqslant K + K_2\|x_0\|,\ t \leqslant t_0;$$

$$\|x_2(t)\| = \|x(t) - x_1(t)\| \leqslant \|x(t)\| + \|x_1(t)\| \leqslant K + K_1\|x_0\|,\ t \geqslant t_0.$$

Isso implica que existe $L > 0$ tal que $\|x_1(t)\| + \|x_2(t)\| \leqslant L$, para todo $t \in I$. Note que

$$\begin{aligned} \|Px_0\| &= \|x_1(t_0)\| = \|\mathscr{U}(t_0)Px_0\| = \|\mathscr{U}(t_0)P\mathscr{U}^{-1}(t)\mathscr{U}(t)Px_0\| \\ &\leqslant \|\mathscr{U}(t_0)P\mathscr{U}^{-1}(t)\|\,\|x_1(t)\| \overset{(Di.)}{\leqslant} K_1e^{\alpha_1(t-t_0)}L,\ t \leqslant t_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(I_d - P)x_0\| &= \|x_2(t_0)\| = \|\mathscr{U}(t_0)(I_d - P)x_0\| = \|\mathscr{U}(t_0)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)\mathscr{U}(t)(I_d - P)x_0\| \\ &\leqslant \|\mathscr{U}(t_0)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)\|\,\|x_2(t)\| \overset{(Dii.)}{\leqslant} K_2e^{-\alpha_2(t-t_0)}L,\ t \geqslant t_0. \end{aligned}$$

Assim, $x_0 = Px_0 + (I_d - P)x_0 = 0 + 0 = 0$. Portanto, $x(t) = \mathscr{U}(t)0 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Corolário 4.3.4. Suponha que a EDOG (4.1) satisfaça a condição (D) em $\mathbb{R}$ e $f \in G(\mathbb{R}, X)$, então a EDOG (4.19) admite no máximo uma solução limitada.

Demonstração. Suponha que $x, y : \mathbb{R} \to X$ sejam soluções limitadas da EDOG (4.19). Pela fórmula da Variação dos Parâmetros dada pelo Teorema 3.2.12 com $F(x,t) = f(t)$, temos

$$x(t) = \mathscr{U}(t)x(t_0) + f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)),\ t \in \mathbb{R};$$

$$y(t) = \mathscr{U}(t)y(t_0) + f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Definindo $z : \mathbb{R} \to X$ por $z(t) \doteq x(t) - y(t)$ temos que $z \in B_{loc}(\mathbb{R}, X)$ e, além disso, como temos $z(t) = \mathscr{U}(t)x(t_0) + \mathscr{U}(t)y(t_0) = \mathscr{U}(t)z(t_0)$, então z é solução limitada da EDOG (4.1) pela Observação 4.1.3. Portanto, pela Proposição 4.3.3 temos $x(t) - y(t) = z(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $x = y$. $\square$

No que segue, vamos encontrar condições suficientes para a EDOG (4.1) admitir soluções limitadas.

Proposição 4.3.5. Suponha que a EDOG (4.1) satisfaça a condição (D) em $\mathbb{R}$, $f \in BG(\mathbb{R}, X)$ e que as funções integrais $S,\ I : \mathbb{R} \to X$ dadas por

$$S(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)) \ \text{ e}$$

$$I(t) \doteq \int_{t}^{\infty} d_s[\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0))$$

estejam bem definidas e sejam limitadas. Então a EDOG (4.19) admite única solução limitada.

Demonstração. Considere $x : \mathbb{R} \to X$ a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)], \\ x(t_0) = -\int_{-\infty}^{t_0} d_s[P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)) + \int_{t_0}^{+\infty} d_s[(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)). \end{cases} \tag{4.20}$$

Pela fórmula da Variação dos Parâmetros, dada pelo Teorema 3.2.12, podemos escrever

$$x(t) = \mathscr{U}(t)x(t_0) + f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, como $\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s) = \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s) + \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)$, temos

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{U}(t)x(t_0) + f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)) \\
&\quad - \int_{t_0}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)) \\
&= \mathscr{U}(t)x(t_0) + f(t) - f(t_0) \\
&\quad - \mathscr{U}(t)\left[\int_{t_0}^{t} d_s[P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0))\right. \\
&\quad \left. + \int_{t_0}^{t} d_s[(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0))\right] \\
&\overset{def.\, x(t_0)}{=} f(t) - f(t_0) - \mathscr{U}(t)\left[\int_{-\infty}^{t} d_s[P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0))\right. \\
&\quad \left. - \int_{t}^{+\infty} d_s[(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0))\right] \\
&= f(t) - f(t_0) - S(t) + I(t).
\end{aligned}$$

Como f, S e I são limitadas por hipótese, temos que x é limitada. Pelo Corolário 4.3.4, é a única solução limitada. □

Proposição 4.3.6. Suponha que a EDOG (4.1) satisfaz a condição (D) em $\mathbb{R}$, $f \in G(\mathbb{R}, X)$, que as funções integrais $\mathscr{S}, \mathscr{I} : \mathbb{R} \to X$ dadas por

$$\mathscr{S}(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) \ \ \text{e}$$

$$\mathscr{I}(t) \doteq \int_{t}^{\infty} \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)df(s),$$

estejam bem definidas, sejam limitadas e que a função

$$k(t) = \begin{cases} \mathscr{U}(t)\left(\sum\limits_{t_0 \leqslant s < t} \Delta^{+}\mathscr{U}^{-1}(s)\Delta^{+}f(s) - \sum\limits_{t_0 < s \leqslant t} \Delta^{-}\mathscr{U}^{-1}(s)\Delta^{-}f(s)\right), & t > t_0 \\ 0 & , t = t_0 \\ \mathscr{U}(t)\left(\sum\limits_{t \leqslant s < t_0} \Delta^{+}\mathscr{U}^{-1}(s)\Delta^{+}f(s) - \sum\limits_{t < s \leqslant t_0} \Delta^{-}\mathscr{U}^{-1}(s)\Delta^{-}f(s)\right), & t < t_0 \end{cases} \tag{4.21}$$

também seja limitada. Então a EDOG (4.19) admite única solução limitada.

Demonstração. Considere $x : \mathbb{R} \to X$ a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)], \\ x(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} P\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) - \int_{t_0}^{+\infty} (I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)df(s). \end{cases} \tag{4.22}$$

Pela fórmula da Variação dos Parâmetros, dada pelo Teorema 3.2.12, temos

$$x(t) = \mathscr{U}(t)x(t_0) + f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Note que $\mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s) = \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s) + \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)$. Além disso, se $t \geqslant t_0$ temos $U(t,\cdot) = \mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(\cdot) \in BV([t_0,t],L(X))$ pela Proposição 3.2.11, 2. e, por hipótese, $f(\cdot) - f(t_0) \in G([t_0,t],X)$. Analogamente, se $t < t_0$, pelos mesmos argumentos $U(t,\cdot) = \mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(\cdot) \in BV([t,t_0],L(X))$ e $f(\cdot) - f(t_0) \in G([t,t_0],X)$. Assim, pela fórmula de integração por partes dada pelo Teorema 2.3.24 temos

$$\begin{aligned}
x(t) \quad &= \quad \mathscr{U}(t)x(t_0) + f(t) - f(t_0) \\
&\quad - \left(f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} \mathscr{U}(t)\mathscr{U}^{-1}(s)d[f(s) - f(t_0)] - k(t) \right) \\
&= \quad \mathscr{U}(t)x(t_0) + k(t) + \int_{t_0}^{t} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) + \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) \\
&= \quad \mathscr{U}(t)x(t_0) + k(t) + \mathscr{U}(t)\left[\int_{t_0}^{t} P\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_0}^{t} (I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) \right] \\
&\overset{def.\, x(t_0)}{=} \quad k(t) + \mathscr{U}(t)\left[\int_{-\infty}^{t} P\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) - \int_{t}^{+\infty} (I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) \right] \\
&= \quad k(t) + \mathscr{S}(t) - \mathscr{I}(t).
\end{aligned}$$

Como $k, \mathscr{S}$ e $\mathscr{I}$ são limitadas por hipótese, temos que x é a única solução limitada da EDOG (4.19) de acordo com o Corolário 4.3.4. □

Agora, vamos fornecer condições suficientes para a existência das integrais $I(t)$, $S(t)$, $\mathscr{I}(t)$ e $\mathscr{S}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, presentes nas Proposições 4.3.5 e 4.3.6, mas antes, precisaremos do seguinte Lema.

Lema 4.3.7. Suponha que a EDOG (4.1) satisfaça a condição (D) em $\mathbb{R}$, $A \in BV_{loc}(\mathbb{R}, L(X))$ e exista $K > 0$ satisfazendo $\|[I_d - \Delta^{-}A(s)]^{-1}\| < K$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Sejam $u, t \in \mathbb{R}$ tais que $u < t$. Então

$$\text{var}_u^t(\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(\cdot)) \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-u)}\|P\|K^3 e^{3KV_A}V_A,$$

em que K_1 e α_1 são as constantes presentes na condição (Di.) da Definição 4.3.2.

Demonstração. Sejam $u, t \in \mathbb{R}$ tais que $u < t$ e note que, se $\|\xi\| = 1$ então

$$\|\mathscr{U}(t)P\xi\| \overset{(Di.)}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-u)}\|\mathscr{U}(u)P\|\|\xi\| = K_1 e^{-\alpha_1(t-u)}\|\mathscr{U}(u)P\|,$$

assim, pela definição da norma usual em $L(X)$, temos

$$\|\mathscr{U}(t)P\| \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-u)} \|\mathscr{U}(u)P\|. \tag{4.23}$$

Logo, se $d = \{s_i\}_{i=0}^{|d|} \in D_{[u,t]}$ então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{|d|} \|\mathscr{U}(t)P[\mathscr{U}^{-1}(s_i) - \mathscr{U}^{-1}(s_{i-1})]\| &\overset{3.2.11,2.}{\leqslant} \|\mathscr{U}(t)P\| \operatorname{var}_u^t(U(t,\cdot)) \\
&\overset{(4.23)}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-u)} \|\mathscr{U}(u)P\| \operatorname{var}_u^t(U(t,\cdot)) \\
&\overset{(3.17)}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-u)} \|\mathscr{U}(u)\| \, \|P\| K^2 e^{2K\operatorname{var}_u^t(A)} \operatorname{var}_u^t(A) \\
&\overset{(3.14)}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-u)} K^3 e^{3K\operatorname{var}_u^t(A)} \|P\| \operatorname{var}_u^t(A) \\
&\overset{Ob.2.2.10}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-u)} K^3 e^{3K.V_A} \|P\| V_A.
\end{aligned}$$

□

Observe na demonstração do Lema 4.3.7 que foi fortemente usado o fato de que $u < t$ para aplicar a condição (Di.) e obter a desigualdade (4.23).

Teorema 4.3.8. Suponha que a EDOG (4.1) satisfaça a condição (D) em $\mathbb{R}$. Então valem as seguintes afirmações:

1. Se $f \in G(\mathbb{R}, X)$ e
$$\left\| \int_a^b T(s) df(s) \right\| \leqslant \delta \int_a^b \|T(s)\| ds,$$
para todos $T \in BV_{loc}(\mathbb{R}, L(X))$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e para algum $\delta > 0$, então as funções integrais $\mathscr{S}, \mathscr{I} : \mathbb{R} \to X$ dadas por
$$\mathscr{S}(t) \doteq \int_{-\infty}^t \mathscr{U}(t) P \mathscr{U}^{-1}(s) df(s) \ \text{ e}$$
$$\mathscr{I}(t) \doteq \int_t^{\infty} \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s) df(s)$$
estão bem definidas e são limitadas;

2. Se $f \in G(\mathbb{R}, X) \cap BV(\mathbb{R}, X)$ então as funções integrais $\mathscr{S}, \mathscr{I} : \mathbb{R} \to X$ dadas por
$$\mathscr{S}(t) \doteq \int_{-\infty}^t \mathscr{U}(t) P \mathscr{U}^{-1}(s) df(s) \ \text{ e}$$
$$\mathscr{I}(t) \doteq \int_t^{\infty} \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s) df(s)$$
estão bem definidas e são limitadas;

3. Se $f \in BG(\mathbb{R},X)$, $A \in BV(\mathbb{R},L(X))$ e existe $K > 0$ tal que $\|[I_d - \Delta^- A(t)]^{-1}\| \leqslant K$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então as funções integrais $S,\ I : \mathbb{R} \to X$ dadas por

$$S(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)) \ \text{ e}$$

$$I(t) \doteq \int_{t}^{\infty} d_s[\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0))$$

estão bem definidas e são limitadas.

Demonstração. 1. É suficiente mostrar que $\mathscr{S}(t)$ existe e é limitada, pois, o mesmo vale para $\mathscr{I}(t)$ seguindo os mesmos passos.

Fixe $t \in \mathbb{R}$ e observe que $\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(\cdot) \in BV_{loc}(\mathbb{R},L(X))$. De fato, se $d = \{s_i\}_{i=0}^{|d|} \in D_{[a,b]}$ então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{|d|} \|\mathscr{U}(t)P[\mathscr{U}^{-1}(s_i) - \mathscr{U}^{-1}(s_{i-1})]\| &\overset{3.2.11,2.}{\leqslant} \|\mathscr{U}(t)\|\ \|P\|\ \mathrm{var}_a^b(U(t,\cdot)) \\
&\overset{(3.14)}{\leqslant} Ke^{K\mathrm{var}_a^b(A)}\|P\|\mathrm{var}_a^b(U(t,\cdot)) \\
&\overset{(3.17)}{\leqslant} Ke^{K\mathrm{var}_a^b(A)}\|P\|K^2e^{2K\mathrm{var}_a^b(A)}\mathrm{var}_a^b(A) \\
&\leqslant K^3e^{3K\mathrm{var}_a^b(A)}\|P\|\mathrm{var}_a^b(A) \\
&\overset{(H1)}{<} +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(\cdot) \in BV([a,b],L(X))$ e então $\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(\cdot) \in BV_{loc}(\mathbb{R},L(X))$.

Para obter a existência de $\mathscr{S}(t)$, basta mostrar que a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ (bem definida pela Observação 2.3.25) dada por

$$x_n \doteq \int_{-n}^{t} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)d_sf(s),$$

é de Cauchy em X, portanto, convergente. Afinal, se existe $\lim_{n\to+\infty} x_n$, pelo Teorema 2.3.29, adaptado à Observação 2.3.12 temos $\mathscr{S}(t) = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Sejam $n,m \in \mathbb{N}$ tais que $n \geqslant m > |t|$ então, por hipótese, como a função operador T dada por $T(s) \doteq \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s) \in BV_{loc}(\mathbb{R},L(X))$, temos

$$\begin{aligned}
0 \ \leqslant\ \|x_n - x_m\| &= \left\|\int_{-n}^{-m} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)d_sf(s)\right\| \\
&\leqslant \delta\int_{-n}^{-m} \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\|ds \\
&\overset{(Di.)}{\leqslant} \delta\int_{-n}^{-m} K_1e^{-\alpha_1(t-s)}ds \\
&\leqslant \delta K_1\frac{e^{-\alpha_1 m} - e^{-\alpha_1 n}}{\alpha_1}e^{-\alpha_1 t} \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathscr{S}(t)$ é limitada, pois, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \left\| \int_{-n}^{t} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s) d_s f(s) \right\| \\ &\leqslant \delta \int_{-n}^{t} \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| ds \\ &\overset{(Di.)}{\leqslant} \delta \int_{-n}^{t} K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} ds \\ &\leqslant \delta K_1 \frac{1-e^{-\alpha_1(n+t)}}{\alpha_1} \\ &\leqslant \frac{\delta K_1}{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Portanto, usando a continuidade da norma de X e a arbitrariedade de $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|\mathscr{S}(t)\| = \left\| \lim_{n\to+\infty} x_n \right\| = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\delta K_1}{\alpha_1} = \frac{\delta K_1}{\alpha_1} < +\infty.$$

2. Assim como no item 1, vamos mostrar a existência e a limitação de $\mathscr{S}(t)$ pela mesma estratégia e, também como no item 1, o mesmo valerá para $\mathscr{I}(t)$ seguindo os mesmos passos.

   Fixado $t \in \mathbb{R}$, considere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a mesma sequência do item 1 e tome $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $n \geqslant m \geqslant |t|$. Então valem as desigualdades

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|x_n - x_m\| &= \left\| \int_{-n}^{-m} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s) d_s f(s) \right\| \\ &\overset{(2.1)}{\leqslant} \sup_{s\in[-n,-m]} \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| \, [\mathrm{var}_{-n}^{-m}(f)] \\ &\overset{(Di.)}{\leqslant} K_1 V_f \sup_{s\in[-n,-m]} e^{-\alpha_1(t-s)} \\ &\leqslant K_1 V_f e^{-\alpha_1(t+m)} \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \left\| \int_{-n}^{t} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s) d_s f(s) \right\| \\ &\overset{(2.1)}{\leqslant} \sup_{s\in[-n,t]} \|\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)\| \, [\mathrm{var}_{-n}^{t}(f)] \\ &\overset{(Di.)}{\leqslant} K_1 V_f \sup_{s\in[-n,t]} e^{-\alpha_1(t-s)} \\ &\leqslant K_1 V_f. \end{aligned}$$

   Portanto, pelos mesmos argumentos feitos na demonstração do item 1, obtemos o resultado.

3. Assim como no item 1, vamos mostrar a existência e a limitação de $S(t)$ pela mesma estratégia e, também como no item 1, o mesmo valerá para $I(t)$ seguindo os mesmos passos.

Fixado $t \in \mathbb{R}$, defina, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \int_{-n}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s)-f(t_0))$. Como $f \in B(\mathbb{R},X)$, tome $M>0$ tal que $\|f(t)\|<M$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e observe que, seguindo a mesma estratégia empregada na demonstração do item 1, se $n,m \in \mathbb{N}$ são tais que $n \geqslant m \geqslant |t|$, temos as desigualdades

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \|x_n - x_m\| &\overset{(2.2)}{\leqslant} \operatorname{var}_{-n}^{-m}(\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(\cdot)) \sup_{s\in[-n,-m]} \|f(s)-f(t_0)\| \\
&\overset{[-n,-m]\subset[-n,t]}{\leqslant} 2M \operatorname{var}_{-n}^{t}(\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(\cdot)) \\
&\overset{4.3.7}{\leqslant} 2MK_1 e^{-\alpha_1(t+n)}\|P\|K^3 e^{3K.V_A}V_A \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}} \|S(t)\| &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \lim_{n\to+\infty} x_n \right\| \\
&= \sup_{t\in\mathbb{R}} \lim_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \\
&\overset{(2.2)}{\leqslant} 2M \operatorname{var}_{-n}^{t}(\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(\cdot)) \\
&\overset{4.3.7}{\leqslant} 2MK_1 e^{-\alpha_1(t+n)}\|P\|K^3 e^{3K.V_A}V_A \\
&\leqslant 2MK_1\|P\|K^3 e^{3K.V_A}V_A.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelos mesmos argumentos apresentados na demonstração do item 1, segue que $S(t)$ existe e é limitada. □

4.4 Dicotomia e soluções periódicas

Nesta seção, vamos estabelecer uma relação entre a EDOG (4.1) admitir dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$ e a existência de soluções $T-$periódicas da EDOG

$$
\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)], \tag{4.24}
$$

obtida pela perturbação da EDOG (4.1) por uma função f.

Definição 4.4.1. Considere $f : \mathbb{R} \to V$. Dizemos que f é $T-$periódica, se existir $T>0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

O espaço das funções $T-$periódicas será denotado por $Per_T(\mathbb{R},V)$.

Para obter o resultado principal desta seção, precisaremos dos dois lemas seguintes: o primeiro deles para obter funções auxiliares $T-$periódicas que serão utilizadas e o segundo para obter a limitação de soluções $T-$periódicas, permitindo assim que os resultados da seção anterior sejam aplicados.

Lema 4.4.2. Suponha que a EDOG (4.1) satisfaça a condição (D) em $\mathbb{R}$, que a projeção P da Definição 4.3.2 é única e que A e f são $T-$periódicas. Então, as aplicações $p_1,\ p_2 : \mathbb{R} \to L(X)$ definidas por

$$p_1(t) \doteq \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t) \ \text{ e}$$
$$p_2(t) \doteq \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(t)$$

são $T-$periódicas.

Demonstração. Vamos mostrar que $p_1 \in Per_T(\mathbb{R}, L(X))$, pois a prova de que $p_2 \in Per_T(\mathbb{R}, L(X))$ segue de maneira análoga.

Defina $R : \mathbb{R} \to L(X)$ por $R(t) = \mathscr{U}(t+T)$ e note que R é solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{d\tau} = D[A(t)R] \\ R(0) = \mathscr{U}(T), \end{cases} \tag{4.25}$$

pois satisfaz a equação integral

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathscr{U}(t+T) \overset{T.3.2.8}{=} I_d + \int_0^{t+T} d[A(s)]\mathscr{U}(s) \\ &= I_d + \int_0^{T} d[A(s)]\mathscr{U}(s) + \int_T^{t+T} d[A(s)]\mathscr{U}(s) \\ &\overset{T.3.2.8}{=} \mathscr{U}(T) + \int_T^{t+T} d[A(s)]\mathscr{U}(s) \\ &\overset{u=s-T}{=} \mathscr{U}(T) + \int_0^{t} d[A(s+T)]\mathscr{U}(s+T) \\ &\overset{A\in Per_T(\mathbb{R},L(X))}{=} \mathscr{U}(T) + \int_0^{t} d[A(s)]R(s) \\ &= R(0) + \int_0^{t} d[A(s)]R(s), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, em que na quinta igualdade estamos utilizando o Teorema 2.3.27. Desta forma, pela Observação 4.1.3 obtemos $\mathscr{U}(t+T) = R(t) = \mathscr{U}(t)\mathscr{U}(T)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Note que $\tilde{P} \doteq \mathscr{U}(T)P\mathscr{U}^{-1}(T)$ é uma projeção. De fato,

$$\tilde{P}^2 = \mathscr{U}(T)P\mathscr{U}^{-1}(T)\mathscr{U}(T)P\mathscr{U}^{-1}(T) = \mathscr{U}(T)P\mathscr{U}^{-1}(T) = \tilde{P}.$$

Além disso, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathscr{U}(t)\tilde{P}\mathscr{U}^{-1}(s)\| &= \|\mathscr{U}(t)\mathscr{U}(T)P\mathscr{U}^{-1}(T)\mathscr{U}^{-1}(s)\| \\ &= \|\mathscr{U}(t+T)P\mathscr{U}^{-1}(s+T)\| \overset{(Di.)}{\leqslant} K_1 e^{-\alpha_1(t-s)},\ t \geqslant s. \end{aligned}$$

Analogamente, usando (Dii.) temos

$$\|\mathscr{U}(t)(I_d - \tilde{P})\mathscr{U}^{-1}(s)\| \leqslant K_2 e^{-\alpha_2(s-t)},\ s \geqslant t.$$

Finalmente, pela unicidade da projeção obtemos $p_1 \in Per_T(\mathbb{R}, L(X))$, pois, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} p_1(t+T) &= \mathscr{U}(t+T)P\mathscr{U}^{-1}(t+T) \overset{R(t)}{=} \mathscr{U}(t)\mathscr{U}(T)P\mathscr{U}^{-1}(T)\mathscr{U}^{-1}(t) \\ &\overset{def.\tilde{P}}{=} \mathscr{U}(t)\tilde{P}\mathscr{U}^{-1}(t) \overset{P=\tilde{P}}{=} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(t) = p_1(t). \end{aligned}$$

□

Lema 4.4.3. Suponha que a EDOG (4.1) satisfaça a condição (D) em $\mathbb{R}$ e $f \in G(\mathbb{R}, X)$. Então toda solução $T-$periódica da EDOG (4.24) é limitada.

Demonstração. Considere $x : \mathbb{R} \to X$ uma solução $T-$periódica da EDOG (4.24). Pela periodicidade de x, basta provar que sua restrição ao intervalo $[0,T]$, $x_{|_{[0,T]}}$, é limitada. Note que $x_{|_{[0,T]}}$ é solução da EDOG (4.24) em $[0,T]$ então, quaisquer que sejam $t, t_0 \in [0,T]$, temos

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s) + f(t) - f(t_0),$$

logo, pelo mesmo argumento empregado na demonstração do Teorema 3.2.3, obtemos que $x_{|_{[0,T]}} \in G([0,T], X)$, consequentemente, pelo Corolário 2.2.6, $x_{|_{[0,T]}} \in B([0,T], X)$. □

Teorema 4.4.4. Suponha que a EDOG (4.1) satisfaça a condição (D) em $\mathbb{R}$, $f \in BG(\mathbb{R}, X)$ e que as funções integrais S, $I : \mathbb{R} \to X$ dadas por

$$S(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)) \text{ e}$$

$$I(t) \doteq \int_{t}^{\infty} d_s[\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)),$$

estão bem definidas e são limitadas. Além disso, suponha que a projeção P da Definição 4.3.2 é única e que A e f são $T-$periódicas. Então, a EDOG (4.24) tem única solução $T-$periódica.

Demonstração. Considere $x : \mathbb{R} \to X$ a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)], \\ x(t_0) = -\int_{-\infty}^{t_0} d_s[P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)) + \int_{t_0}^{+\infty} d_s[(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s) - f(t_0)). \end{cases} \tag{4.26}$$

De acordo com a demonstração da Proposição 4.3.5 temos, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = f(t) - f(t_0) - S(t) + I(t).$$

Assim, pelo Lema 4.4.2 temos, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
x(t+T) &= f(t+T)-f(t_0)-\int_{-\infty}^{t+T} d_s[\mathscr{U}(t+T)P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s)-f(t_0)) \\
&\quad +\int_{t+T}^{+\infty} d_s[\mathscr{U}(t+T)(I_d-P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s)-f(t_0)) \\
&\overset{T.2.3.27}{=} f(t)-f(t_0)-\int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{U}(t+T)P\mathscr{U}^{-1}(s+T)](f(s+T)-f(t_0)) \\
&\quad +\int_{t}^{+\infty} d_s[\mathscr{U}(t+T)(I_d-P)\mathscr{U}^{-1}(s+T)](f(s+T)-f(t_0)) \\
&= f(t)-f(t_0) \\
&\quad -\int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{U}(t+T)\mathscr{U}^{-1}(s+T)\mathscr{U}(s+T)P\mathscr{U}^{-1}(s+T)](f(s)-f(t_0)) \\
&\quad +\int_{t}^{+\infty} d_s[\mathscr{U}(t+T)\mathscr{U}^{-1}(s+T)\mathscr{U}(s+T)(I_d-P)\mathscr{U}^{-1}(s+T)](f(s)-f(t_0)).
\end{aligned}
$$

Utilizando a Proposição 3.2.11, 3. no produto dos dois primeiros operadores de cada integral e a $T-$periodicidade de p_1 e p_2, dados pelo Lema 4.4.2, no produto dos três últimos operadores de cada integral, obtemos

$$
\begin{aligned}
x(t+T) &= f(t)-f(t_0) \\
&\quad -\int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)\mathscr{U}(T)\mathscr{U}^{-1}(T)\mathscr{U}^{-1}(s)\mathscr{U}(s)P\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s)-f(t_0)) \\
&\quad +\int_{t}^{+\infty} d_s[\mathscr{U}(t)\mathscr{U}(T)\mathscr{U}^{-1}(T)\mathscr{U}^{-1}(s)\mathscr{U}(s)(I_d-P)\mathscr{U}^{-1}(s)](f(s)-f(t_0)) \\
&\overset{3.2.11,1.}{=} f(t)-f(t_0)-S(t)+I(t) \\
&= x(t),
\end{aligned}
$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, x é $T-$periódica.

Observe agora que, pela Proposição 4.3.5, a EDOG (4.24) admite única solução limitada. Em particular, x é limitada, pois f, S e I são limitadas. Portanto, pelo Lema 4.4.3, temos que x é única solução $T-$periódica da EDOG (4.24). □

Corolário 4.4.5. Suponha que a EDOG (4.1) satisfaça a condição (D) em $\mathbb{R}$, $A \in BV(\mathbb{R}, L(X))$, $f \in BG(\mathbb{R}, X)$ e que exista $K > 0$ tal que $\|[I_d - \Delta^- A(t)]^{-1}\| \leqslant K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, suponha que a projeção P da Definição 4.3.2 é única e que A e f são $T-$periódicas. Então, a EDOG (4.24) admite única solução $T-$periódica.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 4.3.8, 3. e do Teorema 4.4.4. □

CAPÍTULO

5

APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM MEDIDA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IMPULSIVAS

Neste capítulo, iremos aplicar os resultados de dicotomia exponencial obtidos no Capítulo 4 para as EDOGs associadas às classes de EDMs e EDIs apresentadas nas Seções 3.3.1 e 3.3.2, respectivamente, para encontrar condições suficientes para tais classes de equações admitirem únicas soluções limitadas e $T-$periódicas.

5.1 Dicotomia exponencial em EDMs

Nesta seção, considere a equação (3.25) **à qual nos referiremos simplesmente por EDM**. Lembrando que estamos assumindo as condições (M1) $, \ldots,$ (M6) e considerando todos os resultados presentes na seção 3.3.1.

Definição 5.1.1. Considere $t_0 \in I$ e V o operador fundamental associado à EDM (3.25). Definimos o operador $\mathscr{V} : I \to L(X)$ por

$$\mathscr{V}(t) \doteq V(t,t_0),\ t \in I.$$

Além disso, denote $\mathscr{V}^{-1}(t) = V(t_0,t),\ t \in I$.

Observação 5.1.2. Se $U : I \times I \to L(X)$ é o operador fundamental da EDOG (3.29) correspondente à EDM (3.25) então $\mathscr{U}(t) = \mathscr{V}(t)$, para todo $t \in I$.

Vamos apresentar o conceito de dicotomia exponencial para a EDM (3.25).

Definição 5.1.3. A EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em I, se existem constantes positivas $K_1, K_2, \alpha_1, \alpha_2$ e uma projeção $P : X \to X$ $(P^2 = P)$ tais que:

(Mi.) $\|\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)\| \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$, $t,s \in I$ com $t \geqslant s$;

(Mii.) $\|\mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}(s)\| \leqslant K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$, $t,s \in I$ com $t \geqslant s$.

Note que a Observação 5.1.2 e o Teorema 3.3.1 fornecem uma equivalência entre a EDM (3.25) admitir dicotomia exponencial com sua EDOG correspondente (3.29) admitir dicotomia exponencial. Enunciaremos este resultado no que segue.

Proposição 5.1.4. A EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em I se, e somente se, a EDOG (3.29) admite dicotomia exponencial em I.

O seguinte resultado é uma aplicação direta das Proposições 4.1.6 e 5.1.4, nele, obtemos uma caracterização para a EDM (3.25) admitir dicotomia exponencial.

Proposição 5.1.5. A EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em I se, e somente se, existem constantes positivas $L, L_1, L_2, \alpha_1, \alpha_2$ e uma projeção $P : X \to X$ $(P^2 = P)$ tais que, para todo $\xi \in X$ valem:

(i). $\|\mathscr{V}(t)P\xi\| \leqslant L_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\|\mathscr{V}(s)P\xi\|$, $t,s \in I$, com $t \geqslant s$;

(ii). $\|\mathscr{V}(t)(I_d - P)\xi\| \leqslant L_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\|\mathscr{V}(s)(I_d - P)\xi\|$, $t,s \in I$, com $s \geqslant t$;

(iii). $\|\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(t)\| \leqslant L$, $t \in I$.

Pela Observação 5.1.2 e pelos Teoremas 3.3.1 e 4.2.5, obtemos uma condição suficiente para a EDOG (3.29) admitir dicotomia exponencial em $[0,+\infty)$. Consequentemente, a Proposição 5.1.4 garante que a EDM (3.25) admitirá dicotomia exponencial em $[0,+\infty)$. Vamos enunciar este resultado.

Proposição 5.1.6. Suponha que

$$V_0 \doteq \{x_0 \in X : \ \|x_0\| = 1, \ x(\cdot, x_0) \text{ é solução ilimitada da EDM (3.25) com } x(0,x_0) = x_0\}$$

é compacto em X, que existam $T > 0$, $C > 1$ e $\theta \in (0,1)$ tais que, para qualquer solução $x : [0,+\infty) \to X$ da EDM (3.25), são satisfeitas:

1. Para todos $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s+T$,
$$\|x(t)\| \leqslant C\|x(s)\|;$$

2. Para todo $t \geqslant T$, temos
$$\|x(t)\| \leqslant \theta \sup_{|u-t| \leqslant T} \|x(u)\|.$$

Além disso, para cada $x_0 \in V_0$, existe uma sequência crescente $\{t_n^{x_0}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty)$ com $t_{n+1}^{x_0} \leqslant t_n^{x_0} + T$, para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo:

(i). $\|x(t,x_0)\| < \frac{C}{\theta^n}$, para todo $t \in [0,t_n^{x_0})$;

(ii). $\left\|x(t_n^{x_0},x_0)\right\| \geqslant \frac{C}{\theta^n}$.

Então a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $[0,+\infty)$.

Agora, vamos estabelecer a relação entre a EDM (3.25) admitir dicotomia exponencial **em** $\mathbb{R}$ e as **soluções limitadas e** T**-periódicas** da **EDM perturbada** dada pela equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s)x(s)du(s) + \int_{t_0}^{t} h(s)du(s), \tag{5.1}$$

em que $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times X$, $h:\mathbb{R}\to X$ é função localmente Perron-Stieltjes integrável com respeito à u sobre $\mathbb{R}$ e $\mathscr{F},\mathscr{G}$ e u satisfazem as condições (M1), $\ldots$, (M6).

Se definirmos

$$A_1(t) \doteq \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s)ds,\;\; A_2(t) \doteq \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s)du(s),\;\; A(t) \doteq A_1(t)+A_2(t)$$

e

$$f(t) \doteq \int_{t_0}^{t} h(s)du(s),$$

para todo $t\in\mathbb{R}$, temos que a EDOG correspondente à EDM perturbada (5.1) é dada por

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x+f(t)], \tag{5.2}$$

em que, sua EDOG linear homogênea associada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x] \tag{5.3}$$

é a EDOG correspondente à EDM (3.25).

Como $u \in BV_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ por (M2), se a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, então sua EDOG (3.29) associada satisfaz a condição (D) dada pela Definição 4.3.2, uma vez que A satisfaz as condições (H1') e (H2') pela demonstração do Teorema 3.3.2, como enunciaremos no seguinte resultado.

Lema 5.1.7. Suponha que a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$. Então a EDOG (5.3) satisfaz a condição (D).

Além disso, vamos obter uma equivalência entre as soluções da EDM perturbada (5.1) e as soluções da EDOG (5.2) associada à EDM perturbada.

Lema 5.1.8. A função $x:\mathbb{R}\to X$ é solução da EDM (5.1) perturbada se, e somente se, x é solução da EDOG (5.2) associada à EDM perturbada.

Demonstração. Dado $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s)x(s)du(s) + \int_{t_0}^{t} h(s)du(s) \\
\overset{Prop.2.3.32}{=} &\int_{t_0}^{t} d[A_1(s)]x(s) + \int_{t_0}^{t} d[A_2(s)]x(s) + f(t) \\
= &\int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s) + f(t).
\end{aligned}$$

□

Supondo que a EDM (3.25) admita dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$ e que $f \in BG(\mathbb{R}, X)$, pelos Lemas 5.1.8, 5.1.7 e Corolário 4.3.4, concluímos que a EDOG (5.2) associada à EDM perturbada admite no máximo uma solução limitada o que implica, por sua correspondência com a EDM perturbada (5.1) dada pelo Lema 5.1.8, que a EDM perturbada (5.1) admite no máximo uma solução limitada. Vamos enunciar este resultado na seguinte proposição.

Proposição 5.1.9. Suponha que a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$. Então a EDM perturbada (5.1) admite no máximo uma solução limitada.

Naturalmente, prosseguindo com a aplicação dos resultados do Capítulo 4, vamos obter condições suficientes para a EDM perturbada (5.1) admitir única solução limitada.

Proposição 5.1.10. Suponha que a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, a função $f \in BG(\mathbb{R}, X)$ e que as funções integrais S, $I : \mathbb{R} \to X$ dadas por

$$S(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)] \int_{t_0}^{s} h(r)du(r) \;\text{ e}$$

$$I(t) \doteq \int_{t}^{\infty} d_s[\mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}^{-1}(s)] \int_{t_0}^{s} h(r)du(r),$$

estão bem definidas e são limitadas. Então a EDM perturbada (5.1) admite única solução limitada.

Demonstração. Como a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, então a EDOG (3.29) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.1.7. Além disso, como $f \in BG(\mathbb{R}, X), \mathscr{U}(t) = \mathscr{V}(t)$ e $f(t) = \int_{t_0}^{t} h(r)du(r)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue pela Proposição 4.3.5, que a EDOG perturbada (5.2) admite uma única solução limitada.

Por fim, pela correspondência entre as soluções da EDOG associada à EDM perturbada (5.2) e as soluções da EDM perturbada (5.1), dada pelo Lema 5.1.8, temos a unicidade de solução limitada para a EDM perturbada (5.1). □

Proposição 5.1.11. Suponha que a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, que as funções integrais $\mathscr{S}, \mathscr{I} : \mathbb{R} \to X$ dadas por

$$\mathscr{S}(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} \mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)h(s)du(s) \;\text{ e}$$

$$\mathscr{I}(t) \doteq \int_t^{\infty} \mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}^{-1}(s)h(s)du(s),$$

estão bem definidas, são limitadas e que a função

$$k(t) = \begin{cases} \mathscr{V}(t)\left(\displaystyle\sum_{t_0 \leqslant s < t} \Delta^+\mathscr{V}^{-1}(s)\Delta^+H(s) - \sum_{t_0 < s \leqslant t} \Delta^-\mathscr{V}^{-1}(s)\Delta^-H(s)\right), & t > t_0, \\ 0, & t = t_0, \\ \mathscr{V}(t)\left(\displaystyle\sum_{t \leqslant s < t_0} \Delta^+\mathscr{V}^{-1}(s)\Delta^+H(s) - \sum_{t < s \leqslant t_0} \Delta^-\mathscr{V}^{-1}(s)\Delta^-H(s)\right), & t < t_0, \end{cases} \tag{5.4}$$

onde $H(s) \doteq \int_{t_0}^{s} h(r)du(r)$, também é limitada. Então a EDM perturbada (5.1) admite única solução limitada.

Demonstração. Como a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, então a EDOG (3.29) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.1.7. Observe que, para $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)h(s)du(s) \overset{Prop.2.3.32}{=} \int_{-\infty}^{t} \mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)dH(s) \\ &= \int_{-\infty}^{t} \mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)d[f(s) - f(t_0)] = \int_{-\infty}^{t} \mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)df(s); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{I}(t) &= \int_{t}^{\infty} \mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}^{-1}(s)h(s)du(s) \overset{Prop.2.3.32}{=} \int_{t}^{\infty} \mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}^{-1}(s)dH(s) \\ &= \int_{t}^{\infty} \mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}^{-1}(s)d[f(s) - f(t_0)] = \int_{t}^{\infty} \mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}^{-1}(s)df(s), \end{aligned}$$

onde a Proposição 2.3.32 faz sentido nestes intervalos ilimitados por valer em cada intervalo compacto, consequentemente, para sequências de intervalos compactos convergindo a eles.

Assim, pela Proposição 4.3.6, a EDOG (5.2) associada à EDM perturbada admite única solução limitada, o que implica pelo Lema 5.1.8 que a EDM perturbada (5.1) tem única solução limitada. □

Vamos apresentar condições suficientes para as integrais das Proposições 5.1.10 e 5.1.11 existirem.

Teorema 5.1.12. Suponha que a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$ e as funções m_1 e m_2 dadas por (M4) e (M5) satisfazem

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_1(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} m_2(s)du(s) < +\infty.$$

Então valem as seguintes afirmações:

1. Se $f \in B(\mathbb{R}, X)$ dada por $f(t) \doteq \int_{t_0}^{t} h(s)du(s)$ então a EDM perturbada (5.1) admite única solução limitada.

2. Se $f \in BV(\mathbb{R},X)$ dada por $f(t) \doteq \int_{t_0}^{t} h(s)du(s)$ e vale que

$$\sum_{t\in\mathbb{R}} \|\Delta^+ f(t)\| < +\infty,$$

então a EDM perturbada (5.1) admite única solução limitada.

Demonstração. 1. Observe que $f \in G(\mathbb{R},X)$. De fato, como $f(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)du(s)$ e a função $u \in BV_{loc}(\mathbb{R},X)$, da Proposição 2.3.20, obtemos $f \in G([t_0,t],X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $f \in G(\mathbb{R},X)$. Além disso, como a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, segue que a EDOG (3.29) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.1.7.

Para concluir o resultado, basta mostrar que as funções integrais

$$S(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)]f(s) \text{ e}$$

$$I(t) \doteq \int_{t}^{\infty} d_s[\mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}^{-1}(s)]f(s),$$

estão bem definidas e são limitadas, uma vez que estas são as hipóteses restantes para aplicar a Proposição 5.1.10.

Pela definição de f temos $f(t_0) = 0$ e, além disso, pela Observação 5.1.2, temos que $\mathscr{U}(t) = \mathscr{V}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, para mostrar a existência e limitação de S e I, vamos verificar as hipóteses do Teorema 4.3.8, 3. e concluir o resultado, uma vez que as integrais em questão e as do Teorema 4.3.8, 3. serão as mesmas.

É claro que $f \in BG(\mathbb{R},X)$, pois $f \in B(\mathbb{R},X)$ por hipótese e mostramos que $f \in G(\mathbb{R},X)$ no início desta demonstração. Além disso, como $s.I_d \in C([t_0,t],L(X))$ e u é contínuo à esquerda em $\mathbb{R}$ por (M2), pela Observação 2.3.22 e por ser soma de funções contínuas à esquerda, temos que A é contínua à esquerda. Assim, $\Delta^- A(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|I_d - \Delta^- A(t)\| = \|I_d\| = 1.$$

Resta mostrar que $A \in BV(\mathbb{R},L(X))$. De fato, vamos mostrar que $V_A < +\infty$. Considere $d = \{d_i\}_{i=0}^{|d|} \in D_{[a,b]}$ e note que, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, as integrais $\int_K \mathscr{F}(s)ds$ e $\int_K \mathscr{G}(s)du(s)$ são positivas pelas condições (M4) e (M5). Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{|d|} \|A(s_i) - A(s_{i-1})\| \quad &= \quad \sum_{i=1}^{|d|} \left\| \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathscr{F}(s)ds + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathscr{G}(s)du(s) \right\| \\
&\leqslant \quad \sum_{i=1}^{|d|} \left\| \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathscr{F}(s)ds \right\| + \sum_{i=1}^{|d|} \left\| \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathscr{G}(s)du(s) \right\| \\
&\overset{(M4),(M5)}{\leqslant} \quad \int_a^b m_1(s)ds + \int_a^b m_2(s)du(s) \\
&\leqslant \quad \int_{-\infty}^{+\infty} m_1(s)ds + \int_{-\infty}^{+\infty} m_2(s)du(s) < +\infty.
\end{aligned}$$

Assim,
$$\mathrm{var}_a^b(A) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} m_1(s)ds + \int_{-\infty}^{+\infty} m_2(s)du(s) < +\infty.$$
Por fim, tomando o supremo dentre todos os intervalos $[a,b] \subset \mathbb{R}$ temos
$$V_A \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} m_1(s)ds + \int_{-\infty}^{+\infty} m_2(s)du(s) < +\infty.$$

2. Observe que $f \in G(\mathbb{R},X)$ pelo mesmo argumento do início da demonstração do Teorema 5.1.12, 1. Além disso, como a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, então a EDOG (3.29) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.1.7.

   Por hipótese temos $f \in G(\mathbb{R},X) \cap BV(\mathbb{R},X)$, portanto, as integrais
$$\mathscr{S}(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) \ \text{ e}$$
$$\mathscr{I}(t) \doteq \int_{t}^{\infty} \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)df(s),$$
   estão bem definidas e são limitadas pelo Teorema 4.3.8, 2.

   Além disso, note que a função $k : \mathbb{R} \to X$ dada pela equação (4.21) é limitada. De fato, como $A \in BV(\mathbb{R}, L(X))$ pelo mesmo argumento empregado na demonstração anterior, então $V_A < +\infty$. Assim, adaptando a Proposição 3.2.11, 2. para $\mathbb{R}$ tomando o supremo entre os intervalos compactos $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ com o fato de que $V_A < +\infty$, obtemos que existe $M > 0$ tal que $\|U(t,s)\| \leqslant M$ para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, pois, como
$$U(t,s) = I_d + \int_s^t d[A(r)]U(r,s), \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2,$$
   segue que
$$\|U(t,s)\| \leq 1 + \int_s^t d[var_s^r(A)]\|U(r,s)\|, \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$
   Como $U(\cdot,s)$ é limitado em compactos e $r \mapsto var_s^r(A)$ é não decrescente e contínua à esquerda (já que A é contínua à esquerda, veja Lema 2.2.19), segue da Proposição 2.3.26 que
$$\|U(t,s)\| \leq e^{var_s^t(A)} \leq e^{V_A} := M.$$
   Como a limitação X independe de t e s, segue o resultado. Assim, da definição de k temos
$$\|k(t)\| \leqslant M \left(\sum_{t \in \mathbb{R}} M^2 \|\Delta^+ f(t)\| \right) = M^3 \sum_{t \in \mathbb{R}} \|\Delta^+ f(t)\| < +\infty.$$

   Por sua vez, a Proposição 4.3.6 implica que a EDOG (5.2) associada à EDM perturbada admite única solução limitada, e isto implica que a EDM perturbada (5.1) tem única solução limitada pelo Lema 5.1.8.

□

Agora, vamos apresentar condições suficientes para a EDM (5.1) admitir soluções $T-$periódicas.

Teorema 5.1.13. Suponha que a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, $f \in B(\mathbb{R}, X)$ é dada por $f(t) \doteq \int_{t_0}^{t} h(s)du(s)$, as funções m_1 e m_2 dadas por (M4) e (M5) satisfazem

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_1(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} m_2(s)du(s) < +\infty.$$

Além disso, suponha que a projeção P da Definição 5.1.3 é única e que A e f são $T-$periódicas. Então, a EDM (5.1) admite única solução $T-$periódica.

Demonstração. Como a EDM (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, temos que a EDOG (3.29) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.1.7. Além disso, $f \in G(\mathbb{R}, X)$ e as funções integrais

$$S(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)]f(s) \text{ e}$$

$$I(t) \doteq \int_{t}^{\infty} d_s[\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)]f(s)$$

estão bem definidas e são limitadas pelos mesmos argumentos empregados na demonstração do Teorema 5.1.12, 1.

Logo, como a projeção P da Definição 5.1.3 é a mesma da condição (D), que é única e as funções A e f são $T-$periódicas, então a EDOG (5.2) associada à EDM perturbada admite uma única solução $T-$periódica pelo Teorema 4.4.4.

Por fim, concluímos do Lema 5.1.8 que a EDM perturbada (5.1) tem única solução $T-$periódica. □

5.2 Dicotomia exponencial em EDIs

Nesta seção, considere a equação (3.30) **à qual nos referiremos simplesmente por EDI**. Lembrando que estamos assumindo as condições de impulso, (I1), (I2) e considerando todos os resultados presentes na seção 3.3.2.

Definição 5.2.1. Considere $t_0 \in I$ e V o operador fundamental de (3.30). Definimos o operador $\mathscr{V} : I \to L(X)$ por

$$\mathscr{V}(t) \doteq V(t, t_0), \ t \in I.$$

Além disso, denote $\mathscr{V}^{-1}(t) = V(t_0, t)$, $t \in I$.

Observação 5.2.2. Se o operador $U : I \times I \to L(X)$ é o operador fundamental da EDOG (3.33) associada à EDI (3.30) então $\mathscr{U}(t) = \mathscr{V}(t)$, para todo $t \in I$.

Vamos apresentar o conceito de dicotomia exponencial para a EDI (3.30).

Definição 5.2.3. A EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em I, se existem constantes positivas $K_1, K_2, \alpha_1, \alpha_2$ e uma projeção $P : X \to X$ $(P^2 = P)$ tais que:

(Ii). $\|\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)\| \leqslant K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$, $t, s \in I$ com $t \geqslant s$;

(Iii). $\|\mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}(s)\| \leqslant K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$, $t, s \in I$ com $t \geqslant s$.

Note que a Observação 5.2.2 e o Teorema 3.3.8 fornecem uma equivalência entre a EDI (3.30) admitir dicotomia exponencial com sua EDOG correspondente (3.33) admitir dicotomia exponencial. Enunciaremos então este resultado.

Proposição 5.2.4. A EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em I se, e somente se, a EDOG (3.33) admite dicotomia exponencial em I.

O seguinte resultado é uma aplicação direta das Proposições 4.1.6 e 5.2.4, em que obtemos uma caracterização para a EDI (3.30) admitir dicotomia exponencial.

Proposição 5.2.5. A EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em I se, e somente se, existem constantes positivas $L, L_1, L_2, \alpha_1, \alpha_2$ e uma projeção $P : X \to X$ $(P^2 = P)$ tais que, para todo $\xi \in X$ valem:

(i). $\|\mathscr{V}(t)P\xi\| \leqslant L_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\|\mathscr{V}(s)P\xi\|$, $t, s \in I$, com $t \geqslant s$;

(ii). $\|\mathscr{V}(t)(I_d - P)\xi\| \leqslant L_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\|\mathscr{V}(s)(I_d - P)\xi\|$, $t, s \in I$, com $s \geqslant t$;

(iii). $\|\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(t)\| \leqslant L$, $t \in I$.

Pela Observação 5.2.2 e pelos Teoremas 3.3.8 e 4.2.5, obtemos condições suficientes para a EDOG (3.33) associada à EDI (3.30) admitir dicotomia exponencial em $[0, +\infty)$. Consequentemente, a Proposição 5.2.4 garante que a EDI (3.30) admitirá dicotomia exponencial em $[0, +\infty)$. Vamos enunciar este resultado.

Proposição 5.2.6. Suponha que

$$V_0 \doteq \{x_0 \in X : \ \|x_0\| = 1, \ x(\cdot, x_0) \text{ é solução ilimitada da EDI (3.30) com } x(0, x_0) = x_0\}$$

é compacto em X, que existam $T > 0$, $C > 1$ e $\theta \in (0, 1)$ tais que, para qualquer solução $x : [0, +\infty) \to X$ da EDI (3.30), são satisfeitas:

1. Para todo $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s + T$,
$$\|x(t)\| \leqslant C\|x(s)\|;$$
2. Para todo $t \geqslant T$, temos
$$\|x(t)\| \leqslant \theta \sup_{|u-t| \leqslant T} \|x(u)\|.$$

Além disso, para cada $x_0 \in V_0$, existe uma sequência crescente $\{t_n^{x_0}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty)$ com $t_{n+1}^{x_0} \leqslant t_n^{x_0} + T$, para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo:

(i). $\|x(t,x_0)\| < \frac{C}{\theta^n}$, para todo $t \in [0,t_n^{x_0})$;

(ii). $\left\|x(t_n^{x_0},x_0)\right\| \geqslant \frac{C}{\theta^n}$.

Então a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $[0,+\infty)$.

Agora, vamos estabelecer a relação entre a EDI (3.30) admitir dicotomia exponencial **em** $\mathbb{R}$ e as **soluções limitadas e** T**-periódicas** da **EDI perturbada** dada pelo sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(t)x + h(t),\ t \neq \tau_i,\ i \in \mathbb{Z}, \\ \Delta^+ x(\tau_i) = x(\tau_i^+) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i),\ i \in \mathbb{Z}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5.5}$$

em que $(t_0,x_0) \in \mathbb{R} \times X$, $h : \mathbb{R} \to X$ é função localmente Perron integrável em $\mathbb{R}$ e a satisfaz (I1), (I2) e as condições de impulso dadas na seção 3.3.2. Entretanto, precisaremos enfraquecer um pouco o conceito de solução como veremos adiante.

Se definirmos a função $f : \mathbb{R} \to X$ por

$$f(t) \doteq \int_{t_0}^{t} h(s)ds$$

e o operador $A : \mathbb{R} \to L(X)$ por

$$A(t) \doteq \begin{cases} \int_{t_0}^{t} a(s)ds + \sum\limits_{i \in \mathscr{I}_{t_0}^{t}} B_i H_{\tau_i}(t), & t \geqslant t_0, \\ \int_{t_0}^{t} a(s)ds - \sum\limits_{i \in \mathscr{I}_{t}^{t_0}} B_i(1 - H_{\tau_i}(t)), & t < t_0, \end{cases} \tag{5.6}$$

então temos que a EDOG correspondente à EDI (5.5) é dada por

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)], \tag{5.7}$$

em que sua EDOG linear homogênea associada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x] \tag{5.8}$$

é a EDOG linear correspondente à EDI (3.30).

Antes disso, vamos definir soluções da EDI (5.5).

Definição 5.2.7. Dizemos que $x : \mathbb{R} \to X$ é solução da EDI (5.5) se $x \in C((\tau_i, \tau_{i+1}], \mathbb{R}^n)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, $x'(t) = a(t)x(t) + h(t)$ para quase todo $t \in I \setminus \mathscr{O}$, $x(t_0) = x_0$ e $x(\tau_i^+) = x(\tau_i) + B_i(x(\tau_i))$ para $i \in \mathbb{Z}$. Neste caso, $\mathscr{O} = \{\tau_i :\ i \in \mathbb{Z}\}$.

Observação 5.2.8. Observe que, por definição, $x:\mathbb{R}\to X$ é solução da EDI perturbada (5.5) se, e somente se, x é solução da EDOG (5.7) associada a EDI.

Note que se a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, então a EDOG (3.29) correspondente satisfaz a condição (D) dada pela Definição 4.3.2, uma vez que A dado pela equação (3.34) satisfaz as condições (H1') e (H2') pela Observação 3.3.9. Enunciaremos este fato no seguinte resultado.

Lema 5.2.9. Suponha que a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$. Então a EDOG (5.8) correspondente satisfaz a condição (D).

Vamos dar condições suficientes para a EDI perturbada (5.5) admitir no máximo uma solução limitada.

Proposição 5.2.10. Suponha que a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$. Então a EDI perturbada (5.5) admite no máximo uma solução limitada.

Demonstração. Como a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, pela Proposição 5.2.4, sua EDOG associada (5.8) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$.

Observe que $f\in C(\mathbb{R},X)\subset G(\mathbb{R},X)$ (veja Proposição 2.3.21), uma vez que h é localmente Perron integrável e a função $t.I_d\in C([a,b],L(X))$ para todo $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

Portanto, a EDOG (5.7) correspondente à EDI perturbada admite no máximo uma solução limitada pelo Corolário 4.3.4. Consequentemente, pela Observação 5.2.8, temos que a EDI perturbada (5.5) admite no máximo uma solução limitada. $\square$

Naturalmente, prosseguindo com a aplicação dos resultados do capítulo 4, vamos obter condições suficientes para a EDI perturbada (5.5) admitir única solução limitada.

Proposição 5.2.11. Suponha que a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, que a função $f\in BG(\mathbb{R},X)$ e que as funções integrais $S,\ I:\mathbb{R}\to X$ dadas por

$$S(t)\doteq\int_{-\infty}^{t}d_s[\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)]\int_{t_0}^{s}h(r)dr \quad \text{e}$$

$$I(t)\doteq\int_{t}^{\infty}d_s[\mathscr{V}(t)(I_d-P)\mathscr{V}^{-1}(s)]\int_{t_0}^{s}h(r)dr$$

estão bem definidas e são limitadas. Então a EDI perturbada (5.5) admite uma única solução limitada.

Demonstração. Como a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, então a EDOG (5.8) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.2.9.

Além disso, como $f\in BG(\mathbb{R},X)$, $\mathscr{U}(t)=\mathscr{V}(t)$ e $f(t)=\int_{t_0}^{t}h(r)dr$ para todo $t\in\mathbb{R}$, pela Proposição 4.3.5, a EDOG (5.7) associada à EDI perturbada admite uma única solução limitada.

Por fim, pela Observação 5.2.8, temos a unicidade de solução limitada para a EDI perturbada (5.5). $\square$

Proposição 5.2.12. Suponha que a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, que as funções integrais $\mathscr{S},\mathscr{I}:\mathbb{R}\to X$ dadas por

$$\mathscr{S}(t)\doteq\int_{-\infty}^{t}\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)h(s)ds \text{ e}$$

$$\mathscr{I}(t)\doteq\int_{t}^{\infty}\mathscr{V}(t)(I_d-P)\mathscr{V}^{-1}(s)h(s)ds$$

estão bem definidas e são limitadas. Então a EDI perturbada (5.5) admite uma única solução limitada.

Demonstração. Como a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, segue que a EDOG (5.8) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.2.9.

Observe que, para $t\in\mathbb{R}$, temos

$$\mathscr{S}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t}\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)h(s)ds \overset{Prop.2.3.32}{=} \int_{-\infty}^{t}\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)df(s) \text{ e}$$

$$\mathscr{I}(t) \;=\; \int_{t}^{\infty}\mathscr{V}(t)(I_d-P)\mathscr{V}^{-1}(s)h(s)ds \overset{Prop.2.3.32}{=} \int_{t}^{\infty}\mathscr{V}(t)(I_d-P)\mathscr{V}^{-1}(s)df(s)$$

onde a Proposição 2.3.32 faz sentido nestes intervalos ilimitados por valer em cada intervalo compacto, consequentemente, para sequências de intervalos compactos convergindo a eles.

Note, também, que f é contínua pelo mesmo argumento utilizado na demonstração da Proposição 5.2.10, logo, $\Delta^{+}f(t)=\Delta^{-}f(t)=0$ para todo $t\in\mathbb{R}$, assim a função k definida na Proposição 4.3.6 é identicamente nula.

Por sua vez, a Proposição 4.3.6 implica que a EDOG (5.7) associada à EDI perturbada admite única solução limitada, o que implica que a EDI perturbada (5.5) tem única solução limitada pela Observação 5.2.8. $\square$

Vamos apresentar condições suficientes para as integrais das Proposições 5.2.11 e 5.2.12 existirem.

Teorema 5.2.13. Suponha que a EDI (3.25) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$. Então valem as seguintes afirmações:

1. Se $f\in B(\mathbb{R},X)$ dada por $f(t)\doteq\int_{t_0}^{t}h(s)ds$, a função m em (I2) satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty}m(s)ds<+\infty$$

e $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}\|B_i\|<+\infty$, então a EDI perturbada (5.5) admite única solução limitada.

2. Se $f \in BV(\mathbb{R},X)$ dada por $f(t) \doteq \int_{t_0}^{t} h(s)ds$, então a EDI perturbada (5.5) admite única solução limitada.

Demonstração. 1. Observe que $f \in G(\mathbb{R},X)$. De fato, como $f(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)ds$ e a função $s.I_d \in G([t_0,t],L(X))$, da Proposição 2.3.20, obtemos $f \in G([t_0,t],X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $f \in G(\mathbb{R},X)$. Além disso, a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, assim a EDOG (3.33) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.2.9.

Para concluir o resultado, basta mostrar que as funções integrais

$$S(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{V}(t)P\mathscr{V}^{-1}(s)]f(s) \ \text{ e}$$

$$I(t) \doteq \int_{t}^{\infty} d_s[\mathscr{V}(t)(I_d - P)\mathscr{V}^{-1}(s)]f(s)$$

estão bem definidas e são limitadas, uma vez que estas são as hipóteses restantes para aplicar a Proposição 5.2.11.

Note que podemos supor que os integrandos de S e I são da forma $f(s) - f(t_0) \in G(\mathbb{R},X)$. Além disso, pela Observação 5.1.2, temos que $\mathscr{U}(t) = \mathscr{V}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, para mostrar a existência e limitação de S e I, vamos verificar as hipóteses do Teorema 4.3.8, 3., uma vez que as integrais em questão e as do Teorema 4.3.8, 3. são as mesmas.

É claro que $f \in BG(\mathbb{R},X)$, pois $f \in B(\mathbb{R},X)$ por hipótese e mostramos que $f \in G(\mathbb{R},X)$ no início desta demonstração. Além disso, A é contínua à esquerda pela Observação 3.3.9, assim, $\Delta^- A(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|I_d - \Delta^- A(t)\| = \|I_d\| = 1.$$

Resta mostrar que $A \in BV(\mathbb{R},L(X))$. De fato, vamos mostrar que $V_A < +\infty$. Como a integral $\int_K m(s)ds$ é positiva para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$ (veja condição (I2)), da equação (3.35) e da hipótese de que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \|B_i\|$ converge temos, para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$,

$$\operatorname{var}_a^b(A) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} m(s)ds + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|B_i\| < +\infty.$$

Tomando o supremo entre os intervalos $[a,b] \subset \mathbb{R}$, concluímos

$$V_A \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} m(s)ds + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|B_i\| < +\infty.$$

2. Observe que $f \in G(\mathbb{R},X)$ pelo mesmo argumento do item anterior. Além disso, a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, então a EDOG (3.33) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.2.9.

Por hipótese, temos que $f \in G(\mathbb{R},X) \cap BV(\mathbb{R},X)$, portanto as integrais

$$\mathscr{S}(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} \mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)df(s) \ \text{ e}$$

$$\mathscr{I}(t) \doteq \int_t^{\infty} \mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)df(s)$$

estão bem definidas e são limitadas pelo Teorema 4.3.8, 2.

Note, também, que f é contínua pelo mesmo argumento utilizado na demonstração da Proposição 5.2.10, logo, $\Delta^+ f(t) = \Delta^- f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, assim a função k definida na Proposição 4.3.6 é identicamente nula.

Por sua vez, a Proposição 4.3.6 implica que a EDOG (5.7) associada à EDI perturbada admite única solução limitada, o que implica que a EDI perturbada (5.5) tem única solução limitada pela Observação 5.2.8.

□

Finalizamos esta Seção, com a apresentação de condições suficientes para a EDI perturbada (5.5) admitir soluções $T-$ periódicas.

Teorema 5.2.14. Suponha que a EDI (3.30) admita dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, $f \in B(\mathbb{R}, X)$ dada por $f(t) \doteq \int_{t_0}^t h(s)du(s)$ e que a função m dada por (I2) satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} m(s)ds < +\infty.$$

Além disso, suponha que a projeção P da Definição 5.2.3 seja única e que A e f sejam $T-$periódicas. Então, a EDI perturbada (5.5) admite única solução $T-$periódica.

Demonstração. Como a EDI (3.30) admite dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$, segue que a EDOG (3.33) satisfaz a condição (D) pelo Lema 5.2.9. Além disso, $f \in G(\mathbb{R}, X)$ e as funções integrais

$$S(t) \doteq \int_{-\infty}^{t} d_s[\mathscr{U}(t)P\mathscr{U}^{-1}(s)]f(s) \;\text{ e}$$

$$I(t) \doteq \int_t^{\infty} d_s[\mathscr{U}(t)(I_d - P)\mathscr{U}^{-1}(s)]f(s),$$

estão bem definidas e são limitadas pelos mesmos argumentos empregados na demonstração do Teorema 5.2.13, 1.

Logo, como a projeção P da Definição 5.2.3 é a mesma da condição (D), que é única e as funções A e f são $T-$periódicas, então a EDOG (5.7) associada à EDI perturbada admite uma única solução $T-$periódica pelo Teorema 4.4.4.

Por fim, concluímos da Observação 5.2.8 que a EDI perturbada (5.5) tem única solução $T-$periódica. □

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **A Modern Theory of Integration**. American Mathematical Society, 2001. (Crm Proceedings & Lecture Notes). ISBN 9780821808450. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=xuARCgAAQBAJ>. Citado na página 27.

BIANCONI, R.; FEDERSON, M. Linear Integral Equations of Volterra Concerning Henstock Integrals. **Real Analysis Exchange**, Michigan State University Press, v. 25, n. 1, p. 389 – 418, 1999. Disponível em: <https://doi.org/>. Citado nas páginas 24 e 25.

COLLEGARI, R. Equações diferenciais ordinárias generalizadas lineares e aplicações às equações diferenciais funcionais lineares. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014. Citado na página 19.

COPPEL, W. A. **Dichotomies in stability theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. ii+98 p. (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 629). ISBN 3-540-08536-X. Citado nas páginas 48, 52 e 55.

DAS, P. C.; SHARMA, R. R. Existence and stability of measure differential equations. **Czechoslovak Math. J.**, v. 22(97), p. 145–158, 1972. ISSN 0011-4642. Citado na página 38.

FEDERSON, M.; BONOTTO, E.; MESQUITA, J. **Generalized Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces and Applications**. Wiley, 2021. ISBN 9781119655008. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=dqo_EAAAQBAJ>. Citado nas páginas 16, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 37, 38, 39, 48, 52 e 56.

HENSTOCK, R. **Lectures on the theory of integration**. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1988. v. 1. xiv+206 p. (Series in Real Analysis, v. 1). ISBN 9971-50-450-2; 9971-50-451-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/0510>. Citado na página 22.

LEE, P. Y.; VýBORNý, R. **Integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2000. v. 14. xii+311 p. (Australian Mathematical Society Lecture Series, v. 14). ISBN 0-521-77968-5. Citado na página 27.

NACHBIN, L. **Volterra Stieltjes-Integral Equations: Functional analytic methods, linear constraints**. Elsevier Science, 2011. (ISSN). ISBN 9780080871271. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ZFiIZ6eAD5cC>. Citado nas páginas 19 e 20.

SCHWABIK, v. **Generalized Ordinary Differential Equations**. World Scientific Publishing Company, 1992. (Series In Real Analysis). ISBN 9789814505048. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=OLTsCgAAQBAJ>. Citado nas páginas 25, 39, 43, 44 e 45.

____. Abstract Perron-Stieltjes integral. **Math. Bohem.**, v. 121, n. 4, p. 425–447, 1996. ISSN 0862-7959. Citado na página 24.

____. Linear Stieltjes integral equations in Banach spaces. **Math. Bohem.**, v. 124, n. 4, p. 433–457, 1999. ISSN 0862-7959. Citado na página 32.

____. A note on integration by parts for abstract Perron-Stieltjes integrals. **Math. Bohem.**, v. 126, n. 3, p. 613–629, 2001. ISSN 0862-7959. Citado nas páginas 24 e 25.

TVRDý, M. Regulated functions and the Perron-Stieltjes integral. **Časopis Pěst. Mat.**, v. 114, n. 2, p. 187–209, 1989. ISSN 0528-2195. Citado na página 26.

ICMC USP
SÃO CARLOS