Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik

Von

Arend Heyting (Enschede, Niederlande)

Das Ziel, das der intuitionistische Mathematiker sich setzt, ist folgendes. Er will Mathematik treiben als natürliche Funktion des Intellekts, als freie, lebendige Aktivität des Denkens. Für ihn ist die Mathematik ein Erzeugnis des menschlichen Geistes. Die Sprache, sowohl die gewöhnliche wie die formalistische, gebraucht er nur zur Mitteilung, d. h. um andere oder sich selbst zum Nachdenken seiner mathematischen Gedanken zu veranlassen. Eine solche sprachliche Begleitung ist kein Bild der Mathematik, noch weniger die Mathematik selbst.

Es entspricht der aktiven Einstellung des Intuitionisten wohl am besten, wenn wir gleich zum Aufbau der Mathematik übergehen. Der wichtigste Baustein ist der Begriff der Einheit, zu dem als architektonisches Prinzip die Reihe der ganzen Zahlen gehört. Diese ganzen Zahlen müssen hier betrachtet werden als Einheiten, welche sich nur durch ihre Stellung in der Reihe voneinander unterscheiden. Ich verzichte hier auf die weitere Zergliederung dieser Begriffe, welche schon Natorp in seinen „Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften" durchgeführt hat in einer Weise, die, was die Hauptsachen betrifft, ziemlich gut mit der intuitionistischen Denkweise übereinstimmt. Eine Bemerkung muß ich aber hervorheben, weil sie für ein richtiges Verständnis wesentlich ist, nämlich, daß wir den ganzen Zahlen, und ähnlicherweise anderen mathematischen Gegenständen, eine Existenz unabhängig von unserem Denken, eine transzendente Existenz also, nicht zuschreiben. Vielleicht ist es wahr, daß jeder Gedanke auf einen als unabhängig von ihm bestehend gedachten Gegenstand Bezug nimmt; wir können das dahingestellt bleiben lassen. Jedenfalls braucht dieser Gegenstand nicht vom menschlichen Denken überhaupt unabhängig zu sein. Die mathematischen Gegenstände, wenn auch vielleicht unabhängig vom einzelnen Denkakt, sind ihrem Wesen nach durch das menschliche

Denken bedingt. Ihre Existenz ist nur gesichert, insoweit sie durch Denken bestimmt werden können; ihnen kommen nur Eigenschaften zu, insoweit diese durch Denken an ihnen erkannt werden können. Diese Möglichkeit der Erkenntnis offenbart sich uns aber nur durch das Erkennen selbst. Der Glaube an die transzendente Existenz, der durch die Begriffe nicht gestützt wird, muß als mathematisches Beweismittel zurückgewiesen werden. Hier liegt, wie ich gleich an einem Beispiel näher erörtern will, der Grund für den Zweifel an dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Eingehend hat Herr Oskar Becker die Probleme der mathematischen Existenz behandelt in seinem Buch über diesen Gegenstand; er deckt auch manchen Zusammenhang dieser Fragen mit den tiefsten philosophischen Problemen auf.

Wir wenden uns wieder dem Aufbau der Mathematik zu. Bei der Einführung der Brüche als Paare von ganzen Zahlen stößt man nicht auf grundsätzliche Schwierigkeiten; anders ist es bei der Definition der Irrationalzahlen. Nach Dedekind ist eine reelle Zahl dadurch definiert, daß jeder rationalen Zahl entweder das Prädikat „links" oder das Prädikat „rechts" zugeordnet ist, derart, daß der natürlichen Ordnung der rationalen Zahlen genügt wird. Wenn wir diese Definition genau so in der intuitionistischen Mathematik übernehmen wollten, so wäre es nicht sicher, daß die Eulersche Konstante C eine reelle Zahl ist. Ich brauche die Definition von C nicht; es genügt, zu wissen, daß sie auf eine Rechenvorschrift hinauskommt, welche gestattet, C in ein beliebig kleines rationales Intervall einzuschließen. (Ein rationales Intervall ist ein Intervall, dessen Endpunkte rationale Zahlen sind; der Ausdruck „einschließen" ist ungenau, weil noch gar keine Ordnungsbeziehungen von C zu den rationalen Zahlen definiert sind, aber praktisch und deutlich; es handelt sich um die Berechnung einer Reihe von rationalen Intervallen, deren jedes im vorigen enthalten ist, und welche man immer so weit fortsetzen kann, daß das letzte Intervall kleiner ist als eine beliebig vorgegebene Grenze.) Durch diese Vorschrift ist aber noch kein Mittel gegeben, für eine beliebige rationale Zahl A zu entscheiden, ob sie links oder rechts von C liegt oder vielleicht gleich C ist, und das ist es, was die Dedekindsche Definition, intuitionistisch aufgefaßt, verlangen würde.

Nun ist der übliche Einwand gegen diesen Gedankengang, es mache nichts aus, ob man es entscheiden könne, aber wenn nicht $A = C$, so sei entweder $A < C$ oder $A > C$, und die letztere Alternative entscheide sich nach einer endlichen, wenn auch vielleicht unbekannten Anzahl N von Schritten in der Berechnung von C. Ich brauche den Einwand nur ein wenig anders zu formulieren, um ihn zu widerlegen. Er kann nämlich nur folgende Bedeutung haben: entweder es existiert eine natürliche Zahl N mit der Eigenschaft, daß sich nach N Schritten in der Berechnung von C entweder $A < C$ oder $A > C$ herausstellt, oder eine solche Zahl N existiert nicht; dann ist natürlich $A = C$. Nun bedeutet aber, wie wir gesehen haben, die Existenz von N nichts anderes als die Möglichkeit, eine Zahl mit der geforderten Eigenschaft wirklich aufzuweisen, und die Nichtexistenz bedeutet die Möglichkeit, diese Eigenschaft auf einen Widerspruch zurückzuführen. Weil wir nicht wissen, ob eine dieser Möglichkeiten besteht, können wir nicht behaupten, daß N entweder existiert oder nicht existiert. In diesem Sinn kann man sagen, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten hier nicht angewandt werden darf.

Die Dedekindsche Definition ist also in ihrer ursprünglichen Form für die intuitionistische Mathematik unbrauchbar. Brouwer hat sie in folgender Weise verbessert: Man denke sich die rationalen Zahlen in irgendeiner Weise abgezählt; zur Vereinfachung beschränke ich mich auf die Zahlen des abgeschlossenen Einheitsintervalls und lege immer diese Abzählung zugrunde:

$$0,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \ldots\ldots\ldots \qquad \text{(A)}$$

Eine reelle Zahl wird bestimmt durch eine Einschaltungsteilung in der Reihe (A); das heißt durch ein Gesetz, welches jeder rationalen Zahl der Reihe nach das Prädikat „links" oder „rechts" zuordnet, derart, daß der natürlichen Ordnung der rationalen Zahlen genügt wird; es wird aber zugelassen, daß auf jeder Stufe eine einzige Zahl von dieser Zuordnung ausgenommen bleibt. Zum Beispiel: das Gesetz sei so beschaffen, daß die Prädikatenreihe wie folgt anfängt:

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{l},\ \mathrm{r},\ \mathrm{l},\ \mathrm{l},\ ?,\ \mathrm{l}, \end{array}$$

Hier ist $\frac{2}{3}$ vorläufig von der Zuordnung ausgenommen; man braucht nicht zu wissen, ob das Prädikat für $\frac{2}{3}$ jemals bestimmt wird, es ist aber auch möglich, daß $\frac{3}{4}$ als neue Ausnahmezahl auftritt und $\frac{2}{3}$ also das Prädikat „links" erhält.

Es ist leicht, zu der Eulerschen Konstanten eine Einschaltungsteilung anzugeben. Es sei nämlich d_n die kleinste der Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden unter den ersten n Zahlen aus (A); setzt man nun die Berechnung von C so weit fort, daß das erhaltene rationale Intervall i kleiner als d_n ist, so kann höchstens eine von diesen n Zahlen innerhalb i fallen; wenn es eine solche gibt, tritt sie für die Einschaltungsteilung als Ausnahmezahl auf. Man sieht hieraus, wie eng die Brouwersche Definition sich an die wirkliche Berechnung einer reellen Zahl anschließt.

Nun kann man hier noch einen wichtigen weiteren Schritt machen. Die Forderung, daß die Prädikatenreihe durch ein Gesetz bis ins unendliche bestimmt ist, kann man fallen lassen; es genügt, wenn sie in irgendeiner Weise, z. B. durch freie Wahlen, nach und nach bestimmt wird; ich nenne solche Folgen unbeschränkt fortsetzbar. Die Definition der reellen Zahl wird also in der Weise erweitert, daß statt gesetzmäßige Folgen auch unbeschränkt fortsetzbare Folgen zugelassen werden. Bevor ich näher auf diese neue Definition eingehe, betrachte ich ein einfaches Beispiel. Ich fange mit einer links-rechts-Wahlfolge so an:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \ldots\ldots\ldots \\
\mathrm{l}, & \mathrm{r}, & \mathrm{l}, & \mathrm{l}, & \mathrm{r}, & \mathrm{l}, & \mathrm{r}, & \mathrm{l}, & \mathrm{l}, & & &
\end{array}
$$

Hier kann die Frage, welches Prädikat $\frac{3}{5}$ erhält, noch nicht beantwortet werden, weil das eben noch entschieden werden muß; dagegen kann die Frage nach dem Prädikat von $\frac{4}{5}$ schon jetzt mit „rechts" beantwortet werden, weil das für jede Fortsetzung der Folge gilt. Im allgemeinen sind nur diejenigen Fragen in bezug auf eine unbeschränkt fortsetzbare Folge einer bestimmten Antwort fähig, welche sich auf jede mögliche Fortsetzung der Folge beziehen; andere Fragen, wie oben diejenige nach dem Prädikat von $\frac{3}{5}$, müssen somit als sinnlos betrachtet werden. Die Wahlfolge ersetzt also nicht sosehr die einzelne gesetzmäßige Folge als vielmehr die Gesamtheit aller möglichen Gesetze. Eine rechts-links-Wahlfolge, deren Freiheit nur durch die aus der natürlichen Ordnung der rationalen Zahlen hervorgehenden Bedingungen eingeschränkt wird, bestimmt nicht eine reelle Zahl, sondern die Menge aller reellen Zahlen, oder das Kontinuum. Während man sonst jede reelle Zahl einzeln definiert denkt und nachher diese Zahlen zusammenfaßt, wird hier das Kontinuum als Ganzes definiert. Wenn man die Wahlfreiheit durch zuvor gegebene Regeln einschränkt, erhält man Mengen von reellen Zahlen; z. B. indem ich vorschreibe, die Folge müsse so anfangen, wie ich es soeben aufgeschrieben habe, definiere ich die Menge der reellen Zahlen zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$. Durch immer engere Einschränkung ihrer Freiheit geht die unbeschränkt fortsetzbare Folge stetig in eine gesetzmäßige Folge über.

Ich habe hier das Wort „Menge" genau im Brouwerschen Sinn gebraucht; seine Mengendefinition ist eine Verallgemeinerung dieser Begriffsbildung. Neben den Wahlfolgen betrachtet er auch solche Folgen, die aus einer Wahlfolge durch ein Zuordnungsgesetz hervorgehen. Eine Menge enthält zwei Gesetze: das erste gibt an, welche Wahlen von natürlichen Zahlen erlaubt sind, nachdem eine bestimmte endliche Reihe von erlaubten Wahlen gemacht worden ist. Es muß so beschaffen sein, daß nach jeder endlichen Reihe von erlaubten Wahlen wenigstens eine neue erlaubte Wahl bekannt ist. Ein Beispiel für ein Gesetz dieser Art wird für die soeben betrachteten links-rechts-Folgen durch die natürliche Ordnung der rationalen Zahlen gegeben. Zweitens enthält die Menge ein Gesetz, das jeder erlaubten Wahl einen mathematischen Gegenstand zuordnet, der natürlich auch von den früher schon gemachten Wahlen abhängen kann; hierbei wird zugelassen, daß die Zuordnung bei einer bestimmten Wahl beendet wird und sodann jeder weiteren Wahl nichts mehr zugeordnet ist. Eine Folge, welche durch das Zuordnungsgesetz aus einer erlaubten Wahlfolge hervorgeht, heißt Element der Menge.

Um das vorher angeführte Beispiel der Menge der rationalen Zahlen zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ unter diese allgemeine Definition zu bringen, ersetzen wir die Prädikate „rechts", „links", „vorläufig unbestimmt" durch 1, 2, 3, leiten das Gesetz für die erlaubten Wahlen aus der natürlichen Ordnung der rationalen Zahlen und aus der Forderung, die Folge solle in einer bestimmten Weise anfangen, her, und wählen für das Zuordnungsgesetz die Identität.

Eine Menge ist nicht Inbegriff ihrer Elemente (das hat keinen Sinn, wenn man diese nicht als an sich existierend betrachtet), sondern wird mit ihrem definierenden Gesetz identifiziert. Zwei Mengenelemente heißen gleich, wenn für jedes n in beiden an der n-ten Stelle gleiche Gegenstände stehen. Die Gleichheit von Mengenelementen besagt also nicht, daß sie dasselbe Element sind; dazu müßten sie in derselben Menge derselben Wahlfolge zugeordnet sein. Es wäre unpraktisch, zwei mathematische Gegenstände nur dann gleich zu nennen, wenn sie derselbe Gegenstand sind; vielmehr muß für jede Art von Gegenständen eine eigene Gleichheitsdefinition aufgestellt werden.

Die durch eine kennzeichnende Eigenschaft ihrer Elemente definierten Mengen (klassische Terminologie) nennt Brouwer Spezies.

Eine Spezies wird, ebensowenig wie eine Menge, als Inbegriff ihrer Elemente betrachtet, sondern mit ihrer definierenden Eigenschaft identifiziert. Imprädikative Definitionen sind schon hierdurch unmöglich, daß, wie für den Intuitionisten von selbst spricht, als Elemente einer Spezies nur vorher definierte Gegenstände auftreten können. Daraus ergibt sich eine stufenweise Einführung der Spezies. Die erste Stufe bilden die Mengenspezies, deren definierende Eigenschaft in der Identität mit einem Element einer bestimmten Menge besteht; so gehört zu jeder Menge *M* die Mengenspezies derjenigen Mengenelemente, die einem Element von *M* gleich sind[1]). Eine Spezies erster Ordnung kann Mengenelemente und Mengenspezies enthalten; eine Spezies zweiter Ordnung hat außerdem Spezies erster Ordnung als Elemente usw.

Die Einführung der unbeschränkt fortsetzbaren Folgen geht nicht mit Notwendigkeit aus dem intuitionistischen Standpunkt hervor. Man könnte eine intuitionistische Mathematik ohne Wahlfolgen aufbauen. Wie sehr man dadurch die Mathematik verarmen würde, zeige ich an dem folgenden mengentheoretischen Satz über das Kontinuum, dessen Beweis zugleich als Beispiel für einen intuitionistischen Gedankengang dienen kann.

Es sei jeder reellen Zahl durch ein Gesetz eine natürliche Zahl als ihre Nummer zugeordnet. Wir nehmen an, daß die reellen Zahlen *a* und *b* verschiedene Nummern haben, z. B. 1 und 2. Dann kann man durch eine einfache Konstruktion eine dritte Zahl *c* bestimmen, welche die folgende Eigenschaft hat: in jeder noch so kleinen Umgebung von *c* gibt es eine anders als *c* genummerte Zahl; das heißt, jedes endliche Anfangssegment der Einschaltungsteilung, die *c* definiert, kann so fortgesetzt werden, daß man eine anders als *c* genummerte Zahl bekommt. Nun definiere ich die Zahl *d* mittels einer Wahlfolge wie folgt: Ich fange an wie für *c*, behalte mir aber die Freiheit vor, von einer beliebigen Wahl an anders fortzufahren als für *c*. Offenbar wird die Nummer von *d* nach keiner vorher bekannten endlichen Anzahl von Wahlen bestimmt; folglich ist *d* gar keine bestimmte Nummer zugeordnet. Das widerspricht der Voraussetzung, daß jede reelle Zahl ihre Nummer hat, so daß sich unsere Annahme von zwei verschieden genummerten Zahlen *a* und *b* als widerspruchsvoll erweist. Da nun zwei natürliche Zahlen, die nicht verschieden sein können, gleich sind, haben wir folgenden Satz:

[1]) Die Definition der Mengenspezies entnehme ich einer Mitteilung von Herrn Prof. Brouwer.

Wenn jeder reellen Zahl eine Nummer zugeordnet ist, so haben sie alle dieselbe Nummer.

Als Sonderfall hebe ich hervor:

Wenn ein Kontinuum in zwei Teilspezies zerlegt ist, derart, daß jedes Element zu einer und nur einer dieser Teilspezies gehört, so ist eine Teilspezies leer, die andere mit dem Kontinuum identisch.

Zum Beispiel kann das Einheitskontinuum nicht zerlegt werden in die Spezies der Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ und die Spezies der Zahlen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1; die soeben angegebene Konstruktion liefert hier eine Zahl, von der niemals entschieden zu werden braucht, ob sie kleiner oder größer als $\frac{1}{2}$ ist. Auch die Sätze über die Stetigkeit einer in einem Intervall bestimmten Funktion hängen mit obigem Satz zusammen; der Brouwersche Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit jeder vollen Funktion geht aber weit über diese Ergebnisse hinaus.

Wir wollen uns jetzt fragen, was aus dem oben bewiesenen Satz wird, wenn man in der Mathematik keine unbeschränkt fortsetzbare Folgen zuläßt. An Stelle des Kontinuums müßte dann die Spezies der durch gesetzmäßige Folgen definierten Zahlen treten. Diese Definition ist zulässig, wenn man sie nur so auffaßt, daß eine Zahl erst dann zu dieser Spezies gehört, wenn ein Gesetz vorliegt, das gestattet, alle Prädikate der Folge nacheinander wirklich zu bestimmen.

Der obige Beweis bleibt für diesen Fall gültig, wenn es nur gelingt, die Zahl d durch eine gesetzmäßige Folge, statt durch eine Wahlfolge, zu definieren. Das ist leicht möglich, wenn man von irgendeinem ungelösten Problem, z. B. von der Frage nach dem Auftreten einer Sequenz 0123456789 in der dezimalen Entwicklung von π Gebrauch machen kann; von dem Auftreten einer Sequenz bei der n-ten Ziffer nach dem Dezimalzeichen in π kann man es abhängen lassen, ob man bei dem n-ten Prädikat in der Prädikatenfolge für d von derjenigen für c abweicht. Dieser Beweis wird offenbar hinfällig, sobald die Frage über die Sequenz gelöst wird; dann kann diese aber durch eine ähnliche ungelöste Frage ersetzt werden, wenn es noch solche gibt. Man kann den Satz für gesetzmäßige Folgen nur beweisen unter der Bedingung, daß es immer ungelöste Probleme geben wird. Genauer: der Satz ist richtig, wenn es zwei durch gesetzmäßige Folgen bestimmte Zahlen gibt, für welche die Frage, ob sie gleich oder verschieden sind, ein nachweisbar unlösbares Problem bildet; er ist falsch, wenn die Existenz von zwei solchen Zahlen ungereimt ist. Das durch diese Bedingungen angedeutete Problem ist aber vollständig unangreifbar; eben hierin zeigen sich die Wahlfolgen den gesetzmäßigen Folgen überlegen, daß sie die Mathematik von der Frage nach der Existenz unlösbarer Probleme unabhängig machen.

Ich schließe hier meine Betrachtungen über den Aufbau der Mathematik ab, um noch etwas über die intuitionistische Aussagenlogik zu sagen. Ich unterscheide zwischen Aussagen und Sätzen: ein Satz ist die Behauptung einer Aussage. Eine mathematische Aussage drückt eine bestimmte Erwartung aus; z. B. bedeutet die Aussage „Die Eulersche Konstante C ist rational" die Erwartung, man könne zwei ganze Zahlen a und b finden, derart, daß $C = a/b$. Vielleicht noch besser als das Wort „Erwartung" drückt das von den Phänomenologen geprägte Wort „Intention" aus, was hier gemeint wird. Ich gebrauche das Wort „Aussage" auch für die durch die Aussage sprachlich zum Ausdruck gebrachte Intention. Die Intention geht, wie schon früher betont, nicht auf einen als unabhängig von uns bestehend gedachten Sachverhalt, sondern auf ein als möglich gedachtes Erlebnis, wie es auch aus dem obigen Beispiel deutlich hervorgeht.

Die Behauptung einer Aussage bedeutet die Erfüllung der Intention, z. B. würde die Behauptung „C ist rational" bedeuten, man habe die gesuchten ganzen Zahlen tatsächlich gefunden. Ich unterscheide die Behauptung von der entsprechenden Aussage durch das Behauptungszeichen $\vdash$ das von Frege herrührt und auch von Russell und Whitehead zu diesem Zweck gebraucht wird. Die Behauptung einer Aussage ist selbst nicht wieder eine Aussage, sondern die Feststellung einer empirischen Tatsache, nämlich der Erfüllung der durch die Aussage ausgedrückten Intention.

Eine logische Funktion ist ein Verfahren, um aus einer gegebenen Aussage eine andere Aussage zu bilden. Die Negation ist eine solche Funktion; ihre Bedeutung hat Becker, im Anschluß an Husserl, sehr deutlich beschrieben. Sie ist nach ihm etwas durchaus Positives, nämlich die Intention auf einen mit der ursprünglichen Intention verbundenen Widerstreit. Die Aussage „C ist nicht rational" bedeutet also die Erwartung, man könne aus der Annahme, C sei rational, einen Widerspruch herleiten. Es ist wichtig, zu bemerken, daß die Negation einer Aussage immer auf ein Beweisverfahren, welches den Widerspruch herbeiführt, Bezug nimmt, auch, wenn in der ursprünglichen Aussage von keinem Beweisverfahren die Rede ist. Als Zeichen für die Negation verwende ich $\neg$.

Für den Satz vom ausgeschlossenen Dritten brauchen wir noch die logische Funktion „entweder — oder". $p \vee q$ bedeutet diejenige Intention, welche dann und nur dann erfüllt ist, wenn wenigstens eine der Intentionen p und q erfüllt ist. Die Formel für den Satz vom ausgeschlossenen Dritten wäre $\vdash p \vee \neg p$. Man kann diesen Satz für eine bestimmte Aussage p erst dann behaupten, wenn p entweder bewiesen oder auf einen Widerspruch zurückgeführt ist. Ein Beweis für den allgemeinen Satz müßte also in der Angabe einer Methode bestehen, nach der man, wenn eine beliebige Aussage gegeben wäre, immer entweder diese Aussage selbst oder ihre Negation beweisen könnte. Die Formel $p \vee \neg p$ deutet also auf die Erwartung einer mathematischen Konstruktion (Beweismethode), welche diese Forderung erfüllt; das heißt, diese Formel ist eine mathematische Aussage, und die Frage nach ihrer Gültigkeit ist eine mathematische Frage, welche, wenn überhaupt, mit mathematischen Mitteln lösbar ist. In diesem Sinn ist die Logik von der Mathematik abhängig.

Ich schließe mit einigen Bemerkungen über die Frage nach der Lösbarkeit mathematischer Probleme. Ein Problem ist gegeben durch eine Intention, deren Erfüllung gesucht wird. Es ist gelöst, wenn entweder die Intention durch eine Konstruktion erfüllt ist, oder bewiesen ist, daß sie auf einen Widerspruch führt. Die Lösbarkeitsfrage kann also auf die Beweisbarkeitsfrage zurückgeführt werden.

Ein Beweis für eine Aussage ist eine mathematische Konstruktion, welche selbst wieder mathematisch betrachtet werden kann. Die Intention auf einen solchen Beweis ergibt also eine neue Aussage; wenn wir die Aussage: „die Aussage p ist beweisbar" durch $+ p$ andeuten, so ist $+$ eine logische Funktion, die „Beweisbarkeit". Die Behauptungen $\vdash p$ und $\vdash + p$ haben genau dieselbe Bedeutung; denn wenn p bewiesen ist, so ist auch die Beweisbarkeit von p bewiesen, und wenn $+ p$ bewiesen ist, so hat sich die Intention auf einen Beweis für p erfüllt, d. h. man hat p bewiesen. Trotzdem sind die Aussagen p und $+ p$ nicht identisch; man macht sich das am besten an einem Beispiel deutlich. Bei der Berechnung der Eulerschen Konstanten C kann es vorkommen, daß ein bestimmter rationaler Wert, sagen wir A, außerordentlich lange in dem Intervall, darin wir C immer enger einschließen, enthalten bleibt, so daß wir schließlich zu der Vermutung neigen, C sei $= A$, d. h. wir erwarten, daß wir A bei der Fortsetzung der Berechnung immer wieder in unserem Intervall finden werden. Dabei brauchen wir noch durchaus nicht an einen Beweis dafür zu denken, daß dieses immer zutreffen müsse. Die Aussage $+ (C = A)$ enthält also mehr als $(C = A)$.

Wenn man auf diese beiden Aussagen die Negation anwendet, so erhält man nicht nur zwei verschiedene Aussagen $\neg p$ und $\neg + p$, sondern auch die Behauptungen $\vdash \neg p$ und $\vdash \neg + p$ sind verschieden. $\vdash \neg + p$ bedeutet, daß die Annahme einer solchen Konstruktion, wie sie $+ p$ fordert, widerspruchsvoll ist; dann braucht die einfache Erwartung p noch nicht auf einen Widerspruch zu führen. In unserem Beispiel ist es so: Nehmen wir an, die Annahme einer Konstruktion, welche beweist, daß A in jedem C enthaltenden Intervall liegt, habe sich als widerspruchsvoll herausgestellt ($\vdash \neg + p$); dann braucht noch nicht die Annahme, daß wir bei der wirklichen Berechnung von C tatsächlich immer A in unserem Intervall finden werden, auf einen Widerspruch geführt zu sein. Der Fall ist selbst denkbar, daß wir beweisen könnten, die letztere Annahme könne niemals als widerspruchsvoll erwiesen werden, so daß wir zugleich $\vdash \neg + p$ und $\vdash \neg \neg p$ behaupten könnten. In diesem Fall wäre die Frage, ob $C = A$, grundsätzlich unlösbar.

Der Unterschied zwischen p und $+ p$ verschwindet, sobald in p selbst eine Konstruktion intendiert wird, denn die Möglichkeit einer Konstruktion kann nur durch ihre wirkliche Ausführung bewiesen werden. Wenn man sich auf solche Aussagen beschränkt, in welchen eine Konstruktion gefordert wird, tritt die logische Funktion der Beweisbarkeit überhaupt nicht auf. Diese Beschränkung kann hierdurch erreicht werden, daß man nur Aussagen der Form „p ist beweisbar" betrachtet, oder, anders gesagt, zu jeder Intention die Intention auf eine Konstruktion zu ihrer Erfüllung hinzugefügt denkt. In diesem Sinn muß die intuitionistische Logik, soweit sie bisher ohne Benutzung der Funktion $+$ entwickelt ist, verstanden werden. Die Einführung der Beweisbarkeit würde große Komplikationen nach sich ziehen; bei dem geringen praktischen Wert würde es sich wohl kaum lohnen, diese in Einzelheiten zu verfolgen[1]). Uns hat der Begriff hier zu der Einsicht geführt, wie sich ein grundsätzlich unlösbares Problem denken läßt.

Ich habe meine Absicht erreicht, wenn ich Ihnen gezeigt habe, daß der Intuitionismus keine willkürliche Annahmen enthält, noch weniger künstliche Verbote, etwa um die logischen Paradoxien zu vermeiden, sondern daß er den einzig möglichen Weg bildet, von der einmal angenommenen Grundeinstellung aus die Mathematik aufzubauen.

---

[1]) Die in diesem Absatz behandelte Frage fand ihre vollständige Klärung erst in einer nach der Tagung fortgesetzten Diskussion mit Herrn H. Freudenthal; das Resultat dieser Diskussion ist im vorhergehenden Text wiedergegeben.