Topology Vol. 26, No. 2, pp. 143–151, 1987.
Printed in Great Britain.

0040–9383/87 $3.00 + .00

SUR LES GENRES MULTIPLICATIFS DEFINIS PAR DES INTEGRALES ELLIPTIQUES

SERGE OCHANINE

(*Received* 5 *November* 1985)

CET ARTICLE est consacré à la démonstration d'une conjecture que Landweber et Stong [8] ont émise dans leurs recherches sur les S^1-variétés spinorielles et qui donne la description de l'idéal I de $\Omega^{SO} \otimes \mathbf{Q}$ engendré par les projectivisations des fibrés complexes de dimension paire (théorème 2). Le lecteur est renvoyé à [8] pour l'historique de la question et ses récents développements.

L'idée principale de la démonstration est de décrire tous les genres multiplicatifs rationnels qui s'annulent sur I. Il se trouve que ce sont précisément les genres multiplicatifs dont le logarithme est donné par une intégrale elliptique de première espèce

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{R(u)}}, \tag{1}$$

où $R(u)$ est un polynôme pair de degré ≤ 4. Dans le cas où $R(u)$ a quatre racines distinctes, ce résultat découle d'un calcul de résidus simple basé sur les propriétés de la fonction elliptique obtenue par inversion de l'intégrale (1).

L'idéal I est également engendré par les varietis spinorelles qui admettent une action semi-libre *de type impair* de S^1 (cf. [2], [8]). Les genres elliptiques se trouvent ainsi étroitement liés à la théorie des S^1-variétés spinorielles, le $\hat{A}$-genre et la signature apparaissant comme cas particuliers dégénérés de ceux-ci.

§1. GENRES MULTIPLICATIFS

On notera $\mathbf{\Omega}^{SO}$ l'anneau de cobordisme orienté. Soit Λ une $\mathbf{Q}$-algèbre commutative. Par Λ-*genre multiplicatif* (ou Λ-*genre*) on entendra tout homomorphisme d'anneaux $\varphi: \mathbf{\Omega}^{SO} \to \Lambda$. Comme $\mathbf{\Omega}^{SO} \otimes \mathbf{Q}$ est l'anneau de polynômes $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_i, \ldots]$, où $X_i \in \mathbf{\Omega}^{SO}_{4i}$ est la classe de l'espace projectif $\mathbf{C}P_{2i}$, un Λ-genre est entièrement défini par son logarithme

$$g(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi(X_i)}{2i+1} u^{2i+1}.$$

Il est facile de voir que l'on établit ainsi une bijection entre l'ensemble des Λ-genres et l'ensemble des séries formelles $g(u)$ sur Λ telles que

$$g(u) = u \bmod u^2, g(-u) = -g(u).$$

Deux autres objets sont canoniquement associés à un Λ-genre:

(a) son *groupe formel* (cf. [7]),

$$f(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v)),$$

où $g^{-1}(u)$ est la série formelle définie par $g^{-1}(g(u)) = u$. C'est un groupe formel commutatif à un paramètre sur Λ tel que

$$f(-u, -v) = -f(u, v);$$

(b) sa *suite multiplicative* (cf. [10], §19),

$$\Phi_0 = 1, \Phi_1(x_1), \ldots, \Phi_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

dont la série caractéristique

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x, 0, \ldots, 0)$$

est donnée par $P(x^2) = x/g^{-1}(x)$.

La connaissance de l'un des objets φ, $g(u)$, $f(u, v)$, $P(x)$ permet de retrouver facilement les trois autres. C'est ainsi que l'on a

$$\frac{\partial f(u, 0)}{\partial v} = \frac{1}{g'(u)}$$

(cf. [7]) ce qui donne $g(u)$ lorsqu'on connaît $f(u, v)$. D'autre part, si l'on connaît $P(x)$, et donc $\Phi_n(x_1, \ldots, x_n)$, on retrouve φ par

$$\varphi([M^{4n}]) = \Phi_n(p_1, \ldots, p_n)[M^{4n}],$$

où $p_i = p_i(M)$ est la i-ème classe de Pontriaguine du fibré tangent de la variété M, $p_i \in H^{4i}(M; \Lambda)$.

Voici quelques exemples importants.

(1) Soit $\Lambda = \mathbf{Q}$ et $\tau : \Omega^{SO} \to \mathbf{Q}$ la signature définie par $\tau(X_i) = 1$ $(i \geq 1)$. Alors

$$g(u) = \operatorname{arctanh} u$$

$$f(u, v) = \frac{u + v}{1 + uv}$$

et la suite multiplicative correspondante est la suite de Hirzebruch $L_n(x_1, \ldots, x_n)$ (cf. [10], §19).

(2) Toujours pour $\Lambda = \mathbf{Q}$, soit $\hat{A} : \Omega^{SO} \to \mathbf{Q}$ le $\hat{A}$-genre défini par la suite multiplicative de série caractéristique

$$P(x) = \frac{\sqrt{x}/2}{\sinh(\sqrt{x}/2)}.$$

Le logarithme de $\hat{A}$ est

$$g(u) = 2\operatorname{arcsinh}(x/2),$$

et le groupe formel

$$f(u, v) = u\sqrt{1 + \frac{v^2}{4}} + v\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}.$$

(3) Soit $\Lambda = \Omega^{SO} \otimes \mathbf{Q}$ et $\imath : \Omega^{SO} \to \Lambda$ est le morphisme canonique.Le logarithme de $\imath$ est

$$G(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X_i}{2i+1} u^{2i+1},$$

et le groupe formel

$$F(u, v) = u + v + \sum_{i,j \geq 1} A_{i,j} u^i v^j$$

($A_{i,j} \in \Omega^{SO} \otimes \mathbf{Q}$) est *universel* en ce sens que pour tout Λ-genre $\varphi : \Omega^{SO} \to \Lambda$ on a:

$$f(u, v) = u + v + \sum_{i,j \geq 1} \varphi(A_{i,j}) u^i v^j.$$

Notons que $A_{i,j} = 0$ si $i + j \equiv 0 \pmod 2$.

§2. GENRES ELLIPTIQUES

Soit Λ une $\mathbf{Q}$-algèbre commutative. Par *Λ-genre elliptique*, on entendra un Λ-genre φ dont le logarithme est donné par une intégrale (formelle) de la forme

$$g(u) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{R(u)}}, \tag{1}$$

où $R(u) = 1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4 (\delta, \varepsilon \in \Lambda)$.

Par exemple, les genres τ et $\hat{A}$ sont des $\mathbf{Q}$-genres elliptiques avec $\delta = \varepsilon = 1$ pour le premier et $\delta = -1/8$, $\varepsilon = 0$ pour le second.

Soient M une variété orientée compacte sans bord, et ξ un fibré vectoriel complexe de dimension n sur M. On note $\mathbf{C}P(\xi)$ la projectivisation de ξ. C'est un espace fibré de base M et de fibre $\mathbf{C}P_{n-1}$. C'est ainsi que, pour n pair, on a toujours

$$\tau(\mathbf{C}P(\xi)) = \tau(M) \cdot \tau(\mathbf{C}P_{n-1}) = 0$$

(cf. [4]).

THÉORÈME 1. *Soit φ un Λ-genre. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) $\varphi(\mathbf{C}P(\xi)) = 0$ *pour tout fibré ξ de dimension paire sur une variété orientée compacte sans bord M*;

(b) *le genre φ est elliptique.*

La démonstration de ce théorème occupe les quatre sections suivantes, et contient la détermination de l'idéal I de $\Omega^{SO} \otimes \mathbf{Q}$ engendré par les classes $[\mathbf{C}P(\xi)]$ qui figurent dans son énoncé (cf. [2], [8]).

§3. VARIÉTÉS DE MILNOR

Ces variétés fournissent des exemples 'calculables' de projectivisations. Soit $H_{i,j}$ l'hypersurface de bidegré (1, 1) de $\mathbf{C}P_i \times \mathbf{C}P_j$. Si $j \geq i$, et $[a_0 : \ldots : a_i]$ et $[b_0 : \ldots : b_j]$ sont les coordonnées homogènes dans $\mathbf{C}P_i$ et $\mathbf{C}P_j$ respectivement, $H_{i,j}$ est définie par l'equation

$$a_0 b_0 + \ldots + a_i b_i = 0.$$

On a $H_{i,0} = H_{0,i} = \mathbf{C}P_{i-1}$.

La projection de $\mathbf{C}P_i \times \mathbf{C}P_j$ sur le premier facteur induit, pour $j \geq i$, une fibration

$$\pi : H_{i,j} \to \mathbf{C}P_i.$$

Il est facile de voir que $H_{i,j}$ est la projectivisation du fibré $\xi = \gamma \oplus [j - i]$, où $[j - i]$ désigne le fibré complexe trivial de dimension $j-i$ et où γ est le supplémentaire du fibré tautologique sur CP_i: la fibre de γ au-dessus d'un point de CP_i représenté par une droite dans $\mathbf{C}^{i+1}$ est l'hyperplan de $\mathbf{C}^{i+1}$ orthogonal à cette droite.

Notons que $\dim_{\mathbf{C}} \xi = j$, $\dim_{\mathbf{C}} H_{i,j} = i+j-1$.

PROPOSITION 1. (cf. [3]). *Soit*

$$H(u, v) = u + v + \sum_{i+j \geq 2} [H_{i,j}]\, u^i v^j .$$

Alors on a:

$$H(u, v) = G'(u)\, G'(v)\, F(u, v),$$

les séries $G(u)$ *et* $F(u, v)$ *étant celles de l'exemple universel* (3) *ci-dessus.*□

PROPOSITION 2. (cf. [11], ch. V). *Pour* $i+j-1 = 2n$ *et* $i, j > 1$, *on a*:

$$s_{(2n)}[H_{i,j}] = -\binom{i+j}{i},$$

où $s_{(2n)}[\quad]$ *désigne le nombre de Milnor* (cf. [10], §16).□

En particulier, $[H_{i,j}]$ est indécomposable dans $\Omega^{SO} \otimes \mathbf{Q}$ pour $i, j > 1$ et peut être pris comme générateur de cet anneau en dimension $4n$.

On notera J l'idéal de $\Omega^{SO} \otimes \mathbf{Q}$ engendré par les classes $Y_{i+1} = [H_{3,2i}]$ $(i \geq 2)$. Comme $H_{3,2i}$ est la projectivisation d'un fibré complexe de dimension $2i$, on a: $J \subset I$.

THÉORÈME 2. *Si* ξ *est un fibré complexe de dimension paire sur une variété orientée compacte sans bord, on a* $[CP(\xi)] \in J$.

COROLLAIRE. $J = I$.

C'est la conjecture de Landweber et Stong mentionnée dans l'introduction.

PROPOSITION 3. *Soit* φ *un* Λ*-genre. Alors* $\varphi(J) = 0$ *si et seulement si* φ *est elliptique. Si le logarithme de* φ *est donné par l'intégrale* (1), *on a* $\delta = \varphi(\mathbf{C}P_2)$ *et* $\varepsilon = \varphi(H_{3,2})$.

Démonstration. Soit $h_{i,j} = \varphi(H_{i,j})$ et

$$h(u, v) = u + v + \sum_{i+j \geq 2} h_{i,j} u^i v^j .$$

D'après la proposition 1,

$$h(u, v) = g'(u)\, g'(v) f(u, v).$$

Posons

$$r(u) = \sum_{i=1}^{\infty} h_{3,2i} u^{2i} .$$

L'hypothèse $\varphi(J) = 0$ est équivalente à $r(u) = h_{3,2} u^2$. On a:

$$f(u, v) = u + \frac{\partial f(u, 0)}{\partial v} \cdot v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, 0)}{\partial v^2} \cdot v^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f(u, 0)}{\partial v^3} \cdot v^3 \mod v^4.$$

Donc, comme

$$g'(u) \cdot \frac{\partial f(u,0)}{\partial v} = 1,$$

on a:

$$h(u,v) = g'(v)\left(g'(u)\,u + v + \frac{1}{2}\,g'(u)\,\frac{\partial^2 f(u,0)}{\partial v^2}\,v^2\right)$$

$$+\frac{1}{6}\,g'(u)\,\frac{\partial^3 f(u,0)}{\partial v^3}\,v^3 \quad \mathrm{mod}\ v^4.$$

Comme la série $g'(v)$ est paire, on obtient tout de suite

$$r(u) = \frac{1}{6}\,g'(u)\,\frac{\partial^3 f(u,0)}{\partial v^3}.$$

Nous allons exprimer $r(u)$ en termes de

$$b(u) = \frac{\partial f(u,0)}{\partial v} = \frac{1}{g'(u)}.$$

Pour cela, calculons les dérivées successives de

$$f(u,v) = g^{-1}(g(u)+g(v))$$

par rapport à v. On a:

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = \frac{g'(v)}{g'(f(u,v))} = \frac{b(f(u,v))}{b(v)}$$

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2} = \frac{b'(f(u,v))\,b(f(u,v)) - b(f(u,v))\,b'(v)}{b(v)^2}$$

$$\frac{\partial^3 f(u,0)}{\partial v^3} = b(u)\,(b''(u)\,b(u) + b'(u)^2 - b''(0)),$$

où l'on a tenu compte de ce que $b'(0) = 0$. On a donc

$$6r(u) = 1/2\,(b(u)^2)'' - b''(0).$$

La condition $r(u) = h_{3,2}\,u^2$ est donc équivalente à: $b(u)^2$ est un polynôme de degré ≤ 4. Comme $b(u)^2$ est pair, posons

$$b(u)^2 = 1 - 2\,\delta\,u^2 + \varepsilon\,u^4 = R(u).$$

Il reste à calculer δ et ε. On a:

$$(b(u)^2)'' = -4\delta + 12\varepsilon\,u^2,$$

d'où

$$r(u) = h_{3,2}\,u^2 = \varepsilon\,u^2$$

et $\varepsilon = h_{3,2}$. D'autre part,

$$g'(u) = \frac{1}{\sqrt{R(u)}} = 1 + \delta\,u^2 \quad \mathrm{mod}\ u^4,$$

d'où $\delta = \varphi(\mathbf{C}P_2)$. □

§4. GROUPE FORMEL D'EULER

Le groupe formel défini par l'intégrale (1) est connu depuis le XVIII siècle sous le nom de formule d'addition pour les intégrales elliptiques.

PROPOSITION 4. (Euler [6], cf. [9], ch. 4). *Si*

$$g(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{R(u)}}, \; R(u) = 1 - 2\,\delta\, u^2 + \varepsilon\, u^4,$$

on a

$$f(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v)) = \frac{u\sqrt{R(v)} + v\sqrt{R(u)}}{1 - \varepsilon\, u^2 v^2}. \square$$

Le calcul de $h(u, v)$ pour ce groupe est très simple:

$$h(u, v) = \frac{1}{\sqrt{R(u)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(v)}} \cdot f(u, v)$$

$$= \left(\frac{u}{\sqrt{R(u)}} + \frac{v}{\sqrt{R(v)}} \right) (1 + \varepsilon\, u^2 v^2 + \varepsilon^2 u^4 v^4 + \ldots),$$

d'où l'on tire non seulement que $h_{3,2i} = 0$ $(i \geq 2)$, mais aussi que $h_{2i+1,2j} = 0$ $(j > i)$ en accord avec le fait que $H_{2i+1,2j}$ $(j > i)$ est la projectivisation d'un fibré complexe de dimension paire.

Voici une autre application simple de la proposition 3. On sait ([4]) que la signature a la propriété multiplicative stricte

$$\tau(E) = \tau(B)\,\tau(F)$$

pour toute fibration localement triviale $E \to B$ de fibre F, où E, B, F sont des variétés orientées compactes sans bord, telle que $\pi_1(B)$ agit trivialement sur $H^*(F; \mathbf{Q})$. Il est clair que cette même propriété est vérifiée par le Λ-genre τ_λ $(\lambda \in \Lambda)$ défini par

$$\tau_\lambda = \lambda^n \tau \text{ sur } \Omega_{4n}^{SO}.$$

PROPOSITION 5. ([1]), §28). *Soit φ un Λ-genre ayant la propriété multiplicative stricte décrite ci-dessus. Alors il existe un $\lambda \in \Lambda$ tel que $\varphi = \tau_\lambda$.*

Démonstration. Il est clair que $\varphi(J) = 0$, donc φ est elliptique. Comme $H_{3,2}$ est un fibré sur $\mathbf{C}P_2$ de fibre $\mathbf{C}P_2$, on a $\varepsilon = \delta^2$, d'où $R(u) = (1 - \delta u^2)^2$ et

$$g'(u) = \frac{1}{1 - \delta u^2} = 1 + \delta u^2 + \delta^2 u^4 + \ldots.$$

Donc $\varphi(\mathbf{C}P_{2i}) = \delta^i = \tau_\lambda(\mathbf{C}P_{2i})$, avec $\lambda = \delta$.$\square$

§5. C-GENRES ELLIPTIQUES NON-DÉGÉNÉRÉS

Soit φ un $\mathbf{C}$-genre elliptique. On dira que φ est *non-dégénéré* si le polynôme $R(u)$ a quatre racines distinctes, i.e. si $\delta^2 \neq \varepsilon \neq 0$. Dans ce cas, la série $g^{-1}(u)$ est le développement en $u = 0$ d'une fonction elliptique impaire d'ordre 2 que l'on notera $s(u)$ (cf. [5]). On considérera toujours $s(u)$ comme fonction méromorphe sur le tore $\mathbf{C}/2\Omega$, où 2Ω est le réseau des périodes de $s(u)$. Comme $s(-u) = -s(u)$, les points u de $\mathbf{C}/2\Omega$ tels que $u = -u$ sont nécessairement des zéros ou des pôles $s(u)$. On en déduit que Ω est engendré par deux pôles d'ordre 1, ω_1, ω_2, de $s(u)$ et que $\omega = \omega_1 + \omega_2$ est un zéro simple. On voit également que la fonction $u \to s(u+\omega)$ a le même diviseur que $s(u)$, donc $s(u+\omega) = \lambda s(u)$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Comme 2ω est une période et ω n'en est pas une, on a $\lambda^2 = 1$ et $\lambda \neq 1$. Donc $s(u+\omega) = -s(u)$.

PROPOSITION 6. *Soient φ un $\mathbf{C}$-genre elliptique non-dégénéré, et $\mathbf{C}P(\xi)$ la projectivisation d'un fibré complexe de dimension paire $2m$ sur une variété orientée compacte sans bord. Alors* $\varphi(\mathbf{C}P(\xi)) = 0$.

Démonstration. Soit $\pi : \mathbf{C}P(\xi) \to M$ la projection sur la base de ξ. Le fibré tangent stable de $\mathbf{C}P(\xi)$ est isomorphe à

$$\pi^* T(M) \oplus \eta \otimes \pi^* \xi,$$

où $T(M)$ est le fibré tangent de M et η le fibré conjugué du fibré tautologique sur $\mathbf{C}P(\xi)$ (cf. [12]). Soit $t = c_1(\eta)$. Alors $H^*(\mathbf{C}P(\xi); \mathbf{C})$ est un $H^*(M; \mathbf{C})$-module libre de base 1, $t, \ldots, t^{2m-1}$. La structure multiplicative de $H^*(\mathbf{C}P(\xi); \mathbf{C})$ est donnée par l'unique relation

$$t^{2m} + c_1(\xi)\, t^{2m-1} + \ldots + c_{2m}(\xi) = 0 \tag{2}$$

(cf. [11], chap. V). Si

$$y = b_0 + b_1 t + \ldots + b_{2m-1} t^{2m-1},$$

($b_i \in H^*(M; \mathbf{C})$), on a (cf. [1], §8):

$$y[\mathbf{C}P(\xi)] = b_{2m-1}[M].$$

Soit $\Phi_n(x_1, \ldots, x_n)$ la suite multiplicative correspondant à φ, et soit

$$\Phi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(p_1, \ldots, p_n).$$

Alors

$$\Phi(\mathbf{C}P(\xi)) = \pi^* \Phi(M) \cdot \Phi(\eta \otimes \pi^* \xi),$$

et, d'après ce qui précède, il suffira de démontrer que le coefficient de t^{2m-1} dans la décomposition de $\Phi(\eta \otimes \pi^* \xi)$ selon la base $1, t, \ldots, t^{2m-1}$ est nul. Introduisons des variables formelles $u_1, \ldots, u_{2m}$ telles que

$$p(\pi^* \xi) = \prod_{k=1}^{2m} (1 + u_k^2).$$

Alors

$$\Phi(\eta \otimes \pi^* \xi) = \prod_{k=1}^{2m} \frac{t + u_k}{g^{-1}(t + u_k)}, \tag{3}$$

la relation (2) devenant

$$\prod_{k=1}^{2m} (t + u_k) = 0.$$

Il est clair que le produit (3) s'écrit de manière unique comme

$$F(u_1, \ldots, u_{2m}, t) + \left(\prod_{k=1}^{2m} (t + u_k) \right) A(u_1, \ldots, u_{2m}, t),$$

où $F(u_1, \ldots, u_{2m}, t)$ est un polynôme de degré $\leq 2m-1$ en t. Pour calculer $F(u_1, \ldots, u_{2m}, t)$ explicitement, posons

$$B(u) = P(u^2) = u/g^{-1}(u).$$

On a, pour tout i,

$$F(u_1, \ldots, u_{2m}, -u_i) = \prod_{k \neq i} B(u_k - u_i)$$

(car $B(0) = 1$). Donc

$$F(u_1, \ldots, u_{2m}, t) = \sum_{i=1}^{2m} \prod_{k \neq i} \left(B(u_k - u_i) \frac{u_k + t}{u_k - u_i} \right).$$

Cette égalité doit être comprise dans le corps des fractions de l'anneau de séries formelles symétriques en $u_1, \ldots, u_{2m}$. Le coefficient de t^{2m-1} est

$$\sum_{i=1}^{2m} \prod_{k \neq i} \frac{1}{g^{-1}(u_k - u_i)}.$$

Comme série de Laurent formelle en $u_1, \ldots, u_{2m}$, c'est le développement en $(0, \ldots, 0)$ de la fonction

$$\sum_{i=1}^{2m} \prod_{k \neq i} \frac{1}{s(u_k - u_i)} = \sum_{i=1}^{2m} \prod_{k \neq i} \mu(u_k - u_i)$$

($\mu(u) = 1/s(u)$) qui est méromorphe sur le tore $(\mathbf{C}/2\Omega)^{2m}$. Notre proposition sera démontrée si l'on démontre que cette fonction est nulle pour tous les $(u_1, \ldots, u_{2m})$ d'un ouvert non-vide U de ce tore.

La fonction $\mu(u)$ est elliptique d'ordre 2 et a le même réseau de périodes 2Ω que $s(u)$. Prenons un $U \subset (\mathbf{C}/2\Omega)^{2m}$ tel que $(u_1, \ldots, u_{2m}) \in U$ entraîne $u_i \not\equiv u_j \pmod{\Omega}$ si $i \neq j$. Soit

$$f(u) = \prod_{k=1}^{2m} \mu(u_k - u).$$

C'est encore une fonction elliptique 2Ω-périodique. Le choix de U est tel que $f(u)$ a $4m$ pôles distincts

$$u_1, \ldots, u_{2m}, u_1 + \omega, \ldots, u_{2m} + \omega.$$

Le résidu de $\mu(u)$ en $u = 0$ est égal à 1. Donc le résidu de $f(u)$ en u_i est

$$\prod_{k \neq i} \mu(u_k - u_i).$$

De même, le résidu de $\mu(u)$ en $u = \omega$ est -1. Donc le résidu de $f(u)$ en $u_i + \omega$ est

$$-\prod_{k \neq i} \mu(u_k - u_i - \omega) = \prod_{k \neq i} \mu(u_k - u_i),$$

car $\mu(u + \omega) = -\mu(u)$ et il y a $2m - 1$ termes dans le produit. Comme la somme des résidus de $f(u)$ doit être nulle, on a

$$2 \sum_{k=1}^{2m} \prod_{k \neq i} \mu(u_k - u_i) = 0. \square$$

§6. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 1 ET 2

Remarquons que pour base de l'anneau de polynômes $\Omega^{SO} \otimes \mathbf{Q}$ on peut prendre $X = [CP_2], Y = [H_{3,2}], Y_3, Y_4, \ldots$. Si $Z = [CP(\xi)]$, où ξ est un fibré complexe de dimension paire, on peut ecrire

$$Z \equiv P(X, Y) \,(\mathrm{mod}\, J),$$

où $P(X,Y)$ est un polynôme à coefficients rationnels.

Pour toute paire $(\delta, \varepsilon) \in \mathbf{Q}^2$ telle que $\delta^2 \neq \varepsilon \neq 0$, si φ est le $\mathbf{Q}$-genre elliptique correspondant à $R(u) = 1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4$, on a

$$P(\delta, \varepsilon) = \varphi(Z) = 0,$$

en vertu des propositions 3 et 6. Donc $P(X,Y) = 0$ et $Z \in J$. Ceci prouve le théorème 2.

Le théorème 1 découle immédiatement du théorème 2 et de la proposition 3.□

Remerciements—Je remercie vivement Peter S. Landweber et Robert E. Stong pour m'avoir indiqué ce problème et pour les nombreux commentaires, suggestions et encouragements qu'ils m'ont prodigués.

RÉFÉRENCES

1. A. BOREL and F. HIRZEBRUCH: Characteristic classes and homogeneous spaces, I, II. *Am. J. Math.*, **80** (1958), 458–538; **81** (1959), 315–382.
2. L. D. BORSARI: Bordism groups of semi-free circle actions on Spin manifolds. *Trans. Am. Math. Soc.* (to appear).
3. V. M. BUCHSTABER: The Chern–Dold character in cobordisms. *I. Math. USSR—Sbornik*, **12** (1970), 573–594.
4. S. S. CHERN, F. HIRZEBRUCH and J.-P. SERRE: On the index of a fibered manifold. *Proc. Am. Math. Soc.*, **8** (1957), 587–596.
5. P. DU VAL: *Elliptic Functions and Elliptic Curves*. Cambridge University Press (1973).
6. L. EULER: De integratione aequationis differentialis $m\, dx/\sqrt{1-x^4} = n\, dy/\sqrt{1-y^4}$. *Opera omnia*, XX, 58–79; *Teubner-Füssli*, 1911–1976.
7. T. HONDA: Formal groups and zeta-functions. *Osaka J. Math.*, **5** (1968), 199–213.
8. P. S. LANDWEBER and R. E. STONG: Circle actions on Spin manifolds and characteristic numbers, preprint (1985).
9. A. I. MARKUSHEVICH: *The Remarkable Sine Functions*. Elsevier (1966).
10. J. MILNOR and J. D. STASHEFF: *Characteristic classes*. Princeton University Press (1974).
11. R. E. STONG: Notes on corbordism theory. Princeton University Press (1968).
12. R. H. SZCZARBA: On tangent bundles of fiber spaces and quotient spaces. *Am. J. Math.*, **86** (1964), 685–697.

Université de Paris-Sud,
Mathématique, Bât. 425,
91405 *Orsay,*
France