Tipos principales y cierre semi–completo para Sistemas de Tipos Puros Extendidos (trabajo en desarrollo)[⋆]

Gilles Barthe[†] Blas C. Ruiz Jiménez[‡]

Resumen

Los Sistemas de Tipos Puros Extendidos (EPTS) generalizan los PTS (*Pure Type Systems*) y otras teorías añadiendo sumas dependientes y una jerarquía entre universos determinada por una relación entre constantes.

Estudiamos las aplicaciones de los tipos principales en los EPTS, centrándonos esencialmente en dos de ellas. Una es una prueba simple de la propiedad de condensación.

Mostramos que todo EPTS puede extenderse a un sistema semi–completo, en forma similar a la propuesta de [3] para los PTS. Vía tipos principales, es posible demostrar que tal extensión es conservativa, por lo que tales resultados pueden ser aplicados a resolver problemas típicos, entre los que aparece la posposición de la expansión.

Palabras clave: lambda cálculo con tipos, sistemas de tipos puros.

1 Introducción

Los Sistemas de Tipos Puros Extendidos (EPTS) [11] son una generalización de los Sistemas de Tipos Puros (PTS) [1] obtenida al añadir sumas dependientes y una jerarquía entre universos determinada por una relación γ entre constantes. Esta relación proporciona otro nivel jerárquico además de la jerarquía determinada por los conjuntos de axiomas y reglas usuales de los PTS. La relación γ permite definir una noción de reducción $\twoheadrightarrow_\gamma$ entre universos generalizados en forma independiente de la β reducción. La tipificación de los universos se captura en el sistema vía una regla adicional.

Algunas generalizaciones del Cálculo de las Construcciones, como son las teorías Ecc [7] y $\mathcal{CC}^\omega$[6], se obtienen tomando una versión particular de la relación γ. Los PTS se obtienen tomando como γ la relación vacía. En consecuencia, los EPTS proporcionan un marco común donde estudiar la mayoría de las extensiones del λ–cálculo con tipos, que forman la base de los lenguajes funcionales y de los sistemas de demostración asistida (*proof assistant systems*) [2].

En la literatura existen otras formulaciones de PTS con universos. El formalismo más cercano al nuestro son los PTS con conversión abstracta ($\mathrm{PTS}_\leq$) estudiados

[⋆] *Principal types and semi-full closure for EPTS (Work in Progress).* Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el proyecto CICYT TIC 98-0445-C03-03.

[†] INRIA (Sophia–Antipolis). e–mail: `Gilles.Barthe@sophia.inria.fr`.

[‡] Universidad de Málaga. ETSI Informática. e–mail: `blas@lcc.uma.es`. Fax: +34-5-2131397

en [9], donde la relación $\leq$ absorbe a la relación $=_\beta$. Sin embargo los $\text{PTS}_\leq$ no consideran sumas dependientes.

Es conocido que los PTS funcionales admiten β–unicidad de tipos. La unicidad de tipos es una propiedad muy restrictiva, pero simplifica las pruebas de otras propiedades.

Introduciremos dos conceptos para EPTS genéricos: funcionalidad débil (*lax functional*) y tipo principal (TP). El primero es más débil que el concepto de funcionalidad de los PTS. El segundo es un concepto más simple aunque similar al introducido en [7, 9]. [9] prueba la existencia de TPs (de forma indirecta) para $\text{PTS}_\leq$ funcionales, semi–completos y que además satisfacen otras condiciones sobre axiomas y reglas. En este artículo probaremos que la funcionalidad no es necesaria, y basta la funcionalidad débil, mientras las condiciones restantes pueden sustituirse por una condición de acumulatividad más simple. Por consiguiente, la funcionalidad débil es igual de potente que la funcionalidad.

Una propiedad interesante de los EPTS es la propiedad de *condensación* ya que proporciona en el sistema lógico subyacente una *regla del corte* que simplifica la tarea en los sistemas de demostración asistida. Por ejemplo, en LEGO [9], la propiedad de condensación es utilizada para implementar la orden `Discharge`. Al igual que para los PTS [14], para los EPTS, la propiedad de condensación es muy difícil de establecer y necesita técnicas especiales [10, 11]. En este artículo exponemos una prueba sencilla de la propiedad de condensación a través de los TPs. Para EPTS genéricos no conocemos pruebas más sencillas que la que expondremos, aunque [9] expone una demostración para los $\text{PTS}_{=_\beta}$, mientras que [7] la prueba para ECC.

Un aspecto esencial de los EPTS es el problema de la comprobación de tipos (*type–checking*). Es conocido que la búsqueda de algoritmos queda profundamente afectada debido a la segunda premisa de la regla para la tipificación de las abstracciones o regla (λ) (ver Figura 1). Para resolver el problema, [9] introduce los sistemas semi–completos (*semi–full*), en los cuales es posible simplificar la regla (λ). Ello permite encontrar algoritmos para la comprobación de tipos que son completos y correctos para una amplia clase de sistemas.

En la misma línea, [3] prueba que todo PTS funcional $\lambda\mathbf{S}$ puede sumergirse en un sistema semi–completo $\lambda\mathbf{S}^\omega$ (su cierre semi–completo o *semi–full closure*), de tal forma que si el sistema original es normalizable, también lo es su cierre $\lambda\mathbf{S}^\omega$ (es decir, tal propiedad es hereditaria). También prueba que la extensión es conservativa, en el sentido de que para una amplia clase de términos, las derivaciones en el cierre dan lugar a derivaciones *parecidas* en el sistema original. Usando tales técnicas, [3] describe un sistema para la comprobación de tipos que es decidible, correcto y completo, al menos para sistemas funcionales normalizantes.

En este artículo proponemos una generalización del cierre semi–completo. Usando tipos principales, probaremos que para una amplia clase de EPTS, el cierre es conservativo ya que la funcionalidad débil es hereditaria. Conjeturamos así mismo que la propiedad de normalización también es hereditaria.

Recientemente, [4] han logrado probar que las técnicas basadas en el cierre semi–completo permiten resolver el problema de la Posposición de la Expansión (*Expansion Postponement* problem, o *EP*) para sistemas funcionales normalizantes. Este problema, presentado por H. Barendregt en Agosto de 1990, puede ser formulado en la forma[1]: $\Gamma \vdash a : A \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_r \; a : A' \;{}_\beta\!\twoheadleftarrow A'$, donde la relación de tipificación $\vdash_r$ se obtiene al reemplazar la regla (β) (ver Figura 1) por la regla de reducción del predicado: $\Gamma \vdash_r \; b : B \wedge B \twoheadrightarrow_\beta B' \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_r \; b : B'$.

La importancia de EP queda reflejada en su aplicación a la demostración de la corrección de ciertos sistemas para la comprobación de tipos. Salvo para EPTS con limitaciones importantes, EP es todavía un problema abierto, incluso para PTS normalizantes [8, 12].

La conservatividad de $\lambda\mathbf{S}^\omega$ es un resultado esencial en la prueba de EP expuesta en [4], pero utiliza de forma masiva la unicidad de tipos. Conjeturamos que es posible utilizar las mismas técnicas para los EPTS ya que los TPs proporcionan también la conservatividad del cierre semi–completo de un EPTS.

El resto del artículo está organizado como sigue. La siguiente sección describe brevemente los EPTS y las propiedades esenciales que utilizaremos. La sección 3 introduce el concepto de funcionalidad débil y prueba la existencia de TPs en una amplia clase de EPTS, que será aplicada a la prueba de la propiedad de condensación. La siguiente describe el cierre semi–completo y la prueba de la conservatividad. La última sección estable algunas conclusiones y líneas futuras de investigación.

2 Descripción y propiedades de los EPTS

Presentamos en esta sección una descripción de los EPTS así como las propiedades esenciales. Para un estudio más completo nos remitimos a [11], o al clásico [1].

Si consideramos un conjunto infinito de variables $\mathcal{V}$ $(x, y, \dots \in \mathcal{V})$ y un conjunto de constantes $\mathcal{S}$ $(s, \Box, \dots \in \mathcal{S})$, el conjunto $\mathcal{T}$ de términos de un EPTS está definido inductivamente como:

$$\begin{array}{lcl} a \in \mathcal{V} \cup \mathcal{S} & \Rightarrow & a \in \mathcal{T} \\ A, C, a, b \in \Lambda & \Rightarrow & a\; b,\; \lambda x : A.b,\; \Pi x : A.C, \\ & & \Sigma x : A.C,\; (a, b)_C,\; \pi_1\, a,\; \pi_2\, a \in \mathcal{T} \end{array}$$

Denotaremos con $\to_\beta$ un paso de la β–reducción, con $\twoheadrightarrow_\beta$ su cierre reflexivo y transitivo, y con $=_\beta$ la igualdad generada por $\twoheadrightarrow_\beta$. $\mathrm{FV}(a)$ denotará el conjunto de variables libres de a. Como es habitual, $[x := B]$ es el operador sustitución. La relación $\twoheadrightarrow_\beta$ es *Church-Rosser*: ${}_\beta\!\twoheadleftarrow \cdot \twoheadrightarrow_\beta \;\subseteq\; \twoheadrightarrow_\beta \cdot {}_\beta\!\twoheadleftarrow$, donde el símbolo $\cdot$ representa la composición de dos relaciones; a_β denota (si existe) la forma β–normal de a.

Un *contexto* Γ es una secuencia ordenada $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$. Escribiremos $x_i : A_i \in \Gamma$, $\Gamma \;\subseteq\; \Gamma' \doteq \forall x[x : A \in \Gamma \;\Rightarrow\; x : A \in \Gamma']$, $\mathrm{Var}(\Gamma) \doteq \{x_1, \dots, x_n\}$; $x \in \Gamma$ significa $x \in \mathrm{Var}(\Gamma)$; $\mathrm{FV}(\Gamma) \doteq \bigcup_{1 \le i \le n} \mathrm{FV}(A_i)$.

Los términos $\Sigma x : A.B$ y $\Pi x : A.B$ (universos generalizados) serán denotados genéricamente con $\Xi x : A.B$. En el mismo ámbito, el símbolo Ξ debe ser utilizado de una forma única: bien Π o bien Σ.

Sea γ ($\subseteq\; \mathcal{S} \times \mathcal{S}$) una relación o jerarquía inicial sobre $\mathcal{S}$. Sus objetos son llamados universos básicos. La relación $\to_\gamma$ denota el cierre Σ–compatible y Π–compatible a

[1]Un *objeto* libre en la parte derecha de una implicación o debajo de una regla se entenderá cuantificado implícitamente vía $\exists$.

$$(ax)\qquad \frac{}{\vdash \Box{:}\triangle} \qquad \Box : \triangle \in \mathcal{A}$$

$$(var)\qquad \frac{\Gamma \vdash A{:}s}{\Gamma, x{:}A \vdash x{:}A} \qquad x \notin \Gamma$$

$$(weak)\qquad \frac{\Gamma \vdash b{:}B \qquad \Gamma \vdash A{:}s}{\Gamma, x{:}A \vdash b{:}B} \qquad b \in \mathcal{S} \cup \mathcal{V}, x \notin \Gamma$$

$$(apl)\qquad \frac{\Gamma \vdash f{:}\Pi x{:}A.F \qquad \Gamma \vdash a{:}A}{\Gamma \vdash fa{:}F[x{:=}a]}$$

$$(\lambda)\qquad \frac{\Gamma \vdash A{:}s_1 \qquad \Gamma, x{:}A \vdash B{:}s_2 \qquad \Gamma, x{:}A \vdash b{:}B}{\Gamma \vdash \lambda x{:}A.b \,:\, \Pi x{:}A.B} \qquad s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^{\Pi}$$

$$(\beta)\qquad \frac{\Gamma \vdash a{:}A \qquad \Gamma \vdash A'{:}s}{\Gamma \vdash a{:}A'} \qquad A =_{\beta} A'$$

$$(\gamma)\qquad \frac{\Gamma \vdash a{:}A \qquad \Gamma \vdash A'{:}s}{\Gamma \vdash a{:}A'} \qquad A \twoheadrightarrow_{\gamma} A'$$

$$(\Xi)\qquad \frac{\Gamma \vdash A{:}s_1 \qquad \Gamma, x{:}A \vdash B{:}s_2}{\Gamma \vdash \Xi x{:}A.B \,:\, s_3} \qquad s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^{\Xi}$$

$$(pair)\qquad \frac{\Gamma \vdash a{:}A \qquad \Gamma \vdash b{:}B[x{:=}a] \qquad \Gamma \vdash \Sigma x{:}A.B{:}s}{\Gamma \vdash (a,b)_{\Sigma x:A.B} \,:\, \Sigma x{:}A.B}$$

$$(\pi_1)\qquad \frac{\Gamma \vdash d{:}\Sigma x{:}A.B}{\Gamma \vdash \pi_1\, d \,:\, A}$$

$$(\pi_2)\qquad \frac{\Gamma \vdash d{:}\Sigma x{:}A.B}{\Gamma \vdash \pi_2\, d \,:\, B[x{:=}\pi_1\, d]}$$

Figura 1: Reglas de inferencia para los EPTS

la derecha de la relación γ:

$$\frac{(\Box, \Box') \in \gamma}{\Box \rightarrow_{\gamma} \Box'} \qquad \frac{B \rightarrow_{\gamma} B'}{\Xi x : A.B \rightarrow_{\gamma} \Xi x : A.B'} \qquad \frac{A \rightarrow_{\gamma} A'}{\Sigma x : A.B \rightarrow_{\gamma} \Sigma x : A'.B}$$

Denotaremos con $\twoheadrightarrow_{\gamma}$ el cierre reflexivo y transitivo de $\rightarrow_{\gamma}$. La mezcla de reducciones β y γ verifica $\beta \diamond \gamma$ (I.e.: ${}_{\beta}\twoheadleftarrow \cdot \twoheadrightarrow_{\gamma} \subseteq \twoheadrightarrow_{\gamma} \cdot {}_{\beta}\twoheadleftarrow$).

La especificación de un EPTS es una tupla $\mathbf{S} = (\mathcal{S}, \gamma, \mathcal{A}, \mathcal{R}^{\Pi}, \mathcal{R}^{\Sigma})$, donde $\mathcal{A}(\subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S})$ es el conjunto de *axiomas*, y $\mathcal{R}^{\Pi}$ y $\mathcal{R}^{\Sigma}(\subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S})$ son los conjuntos de Π reglas y Σ reglas, respectivamente. La noción de derivación $\Gamma \vdash a : A$ está definida por el sistema inductivo de la Figura 1. La regla Ξ representa las dos reglas usuales (Π) y (Σ). Con objeto de simplificar, a veces escribiremos $\mathcal{R}$ en lugar de $\mathcal{R}^{\Pi}$.

Si $\Gamma \vdash$ (Γ es legal. I.e., $\exists c, C[\Gamma \vdash c : C]$) todas las variables de $\mathrm{Var}(\Gamma)$ son diferentes, $\mathrm{FV}(c : C) \subseteq \mathrm{Var}(\Gamma)$, y $y : D \in \Gamma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash y : D$. Además, si $\Gamma \vdash s : \Box$ y Δ es legal, entonces $\Delta \vdash s : \Box$.

La relación γ induce la reducción abstracta: $\leq \doteq \twoheadrightarrow_\beta \cdot \twoheadrightarrow_\gamma \cdot {}_\beta\twoheadleftarrow$. Todo EPTS verifica un *lema de generación* similar al estudiado en [1] pero reemplazando la relación $=_\beta$ por $\leq$. Propiedades típicas de los PTS pueden probarse en el marco de los EPTS sin imponer restricciones a su especificación. Así, todo EPTS verifica $S\beta$ (β–reducción del sujeto), $P\beta$ (β–reducción del predicado), además de los lemas de sustitución, de cubrimiento (*thinning*), y corrección de tipos:

$$\frac{\Gamma \vdash d : D \qquad \Gamma, y : D, \Delta \vdash c : C}{\Gamma, \Delta[y := d] \vdash c[y := d] : C[y := d]} \qquad \frac{\Gamma \vdash b : B}{\Psi \vdash b : B}\ \Gamma \subseteq \Psi,\ \ \Psi \vdash \qquad \frac{\Gamma \vdash c : C \notin \mathcal{S}}{\Gamma \vdash C : s}$$

Entre otras propiedades *notables* (no verificadas por un EPTS arbitrario) citemos:

$$(P\gamma)\ \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a : A'}\ A \twoheadrightarrow_\gamma A' \qquad (S^\partial\gamma)\ \frac{\Gamma \vdash a : \square}{\Gamma \vdash a : \square'}\ a \twoheadrightarrow_\gamma a' \qquad (S^\partial\gamma^{-1})\ \frac{\Gamma \vdash a : \square}{\Gamma \vdash a : \square'}\ a' \twoheadrightarrow_\gamma a$$

Estas serán utilizadas en la prueba de la existencia de TPs. En [11] hemos demostrado que todo sistema que verifica $S^\partial\gamma^{-1}$ además de $P\gamma \vee S^\partial\gamma$, verifica la propiedad de *condensación*:

$$(Con)\ \ \frac{\Gamma, y : D, \Delta \vdash a : A}{\Gamma, \Delta \vdash a : A' \ {}_\beta\twoheadleftarrow A} \qquad y \notin \mathrm{FV}(\Delta) \cup \mathrm{FV}(a)$$

Definición 2.1 (sistemas equivalentes, propiedades intrínsecas) *Definimos*

1. $\vdash \sqsubseteq \vdash' \ \doteq\ \forall \Gamma, a, A\ [\ \Gamma \vdash a : A \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash' a : A' \ {}_\beta\twoheadleftarrow A\ ]$.
2. $\vdash \approx \vdash' \ \doteq\ \vdash \sqsubseteq \vdash' \sqsubseteq \vdash$.
3. *Una propiedad $\mathcal{P}_{\vdash^*}$ que depende de una relación de inferencia $\vdash^*$ se dice* intrínseca *cuando para sistemas equivalentes arbitrarios $\vdash \approx \vdash'$, se verifica: $\mathcal{P}_\vdash \iff \mathcal{P}_{\vdash'}$.*

Es fácil probar que las propiedades $S^\partial\gamma$, $S^\partial\gamma^{-1}$ y (Con) son intrínsecas, y por tanto pueden ser independientes de una determinada especificación. Esto fortalece la idea de que aparezcan como condiciones en algunos resultados.

Definición 2.2 (acumulatividad) **S** *se dice acumulativa si verifica:*

$$\begin{array}{lll} s_1 : s_2 \in \mathcal{A} \wedge s_1' \twoheadrightarrow_\gamma s_1 & \Rightarrow\ s_1' : s_2' \in \mathcal{A} \wedge s_2' \twoheadrightarrow_\gamma s_2 & (cum_\mathcal{A}) \\ s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^\Xi \wedge (s_1', s_2') \twoheadrightarrow_\gamma (s_1, s_2) & \Rightarrow\ s_1' : s_2' : s_3' \in \mathcal{R}^\Xi \wedge s_3' \twoheadrightarrow_\gamma s_3 & (cum_\mathcal{R}) \end{array}$$

Un EPTS *se dice acumulativo si admite una especificación acumulativa equivalente.*

Lema 2.3 *Todo* EPTS *acumulativo verifica $S^\partial\gamma^{-1}$. Más concretamente:*

$$\Gamma \vdash a : A \wedge a' \twoheadrightarrow_\gamma a \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash a' : A' \wedge A \leq A'$$

Observación La condición $(cum_\mathcal{A})$ es intrínseca, de forma que para probar la acumulatividad basta tomar un sistema que verifique $(cum_\mathcal{A})$ y después buscar uno equivalente que verifique $(cum_\mathcal{R})$. La condición $(cum_\mathcal{R})$ también ha sido introducida en [9] para los $\mathrm{PTS}_\leq$, y es utilizada para probar la completitud de un sistema dirigido a la sintaxis. Para verificar $P\gamma$ basta incluir condiciones contravariantes con respecto a las de la Definición 2.2:

$$\begin{array}{lll} s_1 : s_2 \in \mathcal{A} \wedge s_2 \twoheadrightarrow_\gamma s_2' & \Rightarrow\ s_1 : s_2'' \in \mathcal{A} \wedge s_2' \twoheadrightarrow_\gamma s_2'' & (sub - cum_\mathcal{A}) \\ s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^\Xi \wedge (s_1, s_2) \twoheadrightarrow_\gamma (s_1', s_2') & \Rightarrow\ s_1' : s_2' : s_3' \in \mathcal{R}^\Xi \wedge s_3 \twoheadrightarrow_\gamma s_3' & (sub - cum_\mathcal{R}) \end{array}$$

3 Funcionalidad y Tipos Principales

Recordemos que la especificación $\mathbf{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ de un PTS se dice *funcional* si:

$$\begin{array}{lll} 1. & p : q,\ p : q' \in \mathcal{A} & \Rightarrow \quad q = q' \\ 2. & s_1 : s_2 : s,\ s_1 : s_2 : s' \in \mathcal{R} & \Rightarrow \quad s = s' \end{array}$$

Todo PTS funcional admite unicidad de tipos: $\Gamma \vdash c : C, C' \ \Rightarrow\ C =_\beta C'$. Veamos que la funcionalidad es también necesaria. Una regla $\overline{s} \in \mathcal{R}$ es *útil* si $\exists \Gamma, A, B$ **.** $\Gamma \vdash A : s_1 \wedge \Gamma, x : A \vdash B : s_2$. Al utilizar solo reglas útiles obtenemos las mismas derivaciones y si el sistema original tiene unicidad de tipos, la especificación formada por reglas útiles es funcional. En ausencia de unicidad de tipos, que es lo habitual en los EPTS, los TPs proporcionan un herramienta con una utilidad similar:

Definición 3.1 (tipo principal) *Se dice que un término a admite un tipo principal en el contexto Γ si existe un término $\mathsf{PT}(\Gamma|a)$ verificando:*

$$\Gamma \vdash a : A \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash a : \mathsf{PT}(\Gamma|a) \leq A$$

*Un sistema admite tipos principales si $\forall \Gamma \in \mathcal{G}, a \in \mathcal{T}$ **.** $\exists \mathsf{PT}(\Gamma|a)$.*

Lema 3.2 (unicidad) *En todo sistema con tipos principales se verifica:*

- *(i)* $\Gamma \vdash a : A \wedge \Gamma \vdash a : A' \ \Rightarrow\ A \simeq A'$, *donde $\simeq$ es la relación $\geq \cdot \leq$*
- *(ii) Si γ es una relación de orden, $\mathsf{PT}(\Gamma|a)$ es único salvo β–equivalencias.*

Demostración *(i)* trivial. *(ii)* sigue de $A \leq A' \leq A \ \Rightarrow\ A =_\beta A'$. ⊠

Luego solamente cabe plantearse la existencia de tipos principales para sistemas con $\simeq$–unicidad de tipos. Utilizando Church–Rosser y $\beta \diamond \gamma$ se prueba que la relación $\simeq$ se puede escribir en la forma $\twoheadrightarrow_\beta \cdot {}_\gamma\!\twoheadleftarrow \cdot \twoheadrightarrow_\gamma \cdot {}_\beta\!\twoheadleftarrow$. Luego todos los tipos de un término estarán conectados de una forma especial.

Estudiemos ahora las condiciones para que cada término a admita tipo principal en todo contexto Γ. Razonemos por inducción sobre a:

— Si $\Gamma \vdash \Box : M$, entonces, por el lema de generación, existe un axioma $\Box : \triangle$ con $\triangle \leq M$. Si el conjunto $\{\triangle \,|\, \Box : \triangle \in \mathcal{A}\}$ tuviera un único mínimo[2] , sea $\Box^+ \ \doteq\ \min\{\triangle \,|\, \Box : \triangle \in \mathcal{A}\}$. Entonces, por definición de mínimo tendremos $\Box : \Box^+ \in \mathcal{A}$, y por ser Γ legal, $\Gamma \vdash \Box : \Box^+ \leq M$.

— Supongamos ahora $\Gamma \vdash \Xi x : A.B : M$. Por el lema de generación existe una regla $s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^\Xi$ verificando: $\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2 \qquad s_3 \leq M$. Por HI:

$$\Gamma \vdash A : \mathsf{PT}(\Gamma|A)_\beta \equiv s_1' \twoheadrightarrow_\gamma s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : \mathsf{PT}(\Gamma, x : A|B)_\beta \equiv s_2' \twoheadrightarrow_\gamma s_2$$

Si el sistema es acumulativo, por la propiedad $(cum_\mathcal{R})$ de la Definición 2.2 obtenemos

$$s_1' : s_2' : s_3' \in \mathcal{R}^\Xi \qquad \Gamma \vdash \Xi x : A.B : s_3' \leq M$$

Ya que s_3' puede depender de M impondremos que el conjunto $\{s \,|\, s_1' : s_2' : s \in \mathcal{R}^\Xi\}$ tenga un mínimo único, y éste es un tipo principal de $\Xi x : A.B$. Luego:

[2]No estamos suponiendo ninguna propiedad adicional sobre la estructura algebraica $(\mathcal{S}, \twoheadrightarrow_\gamma)$, y tomaremos la definición de mínimo de [5]: $\triangle = \min \mathbb{A} \iff \triangle \in \mathbb{A} \wedge \forall s$ **.** $s \twoheadrightarrow_\gamma \triangle, s \neq \triangle$ **.** $s \notin \mathbb{A}$ Ya que la relación $\twoheadrightarrow_\gamma$ podría ser solamente parcial, pueden existir elementos diferentes verificando la definición de mínimo. La definición de TP exigirá la unicidad.

Definición 3.3 (débil–funcionalidad) *Una especificación* **S** *(o sistema) se dice* débil–funcional (o *lax–functional*) *si para cualesquiera constantes* $\Box, s_1, s_2 \in \mathcal{S}$*, los conjuntos* $\{\triangle \mid \Box : \triangle \in \mathcal{A}\}$ *y* $\{s_3 \mid s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^{\Xi}\}$ *o son vacíos o tienen mínimos que son únicos. En este caso escribiremos:*

$$\Box^+ \doteq \min\{\triangle \mid \Box : \triangle \in \mathcal{A}\} \qquad \rho_\Xi(s_1, s_2) \doteq \min\{s_3 \mid s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^{\Xi}\}$$

Los sistemas funcionales y los débil–funcionales tiene un comportamiento similar, y de una especificación débil–funcional se puede extraer su *núcleo funcional* (*kernel*) dado por $\mathcal{A}_\circ = \{\Box : \Box^+ \mid \Box : \triangle \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{R}_\circ = \{s_1 : s_2 : \rho_\Xi(s_1, s_2) \mid s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^{\Xi}\}$

Lema 3.4 (existencia de tipos principales) *Todo sistema que admite una especificación débil–funcional y acumulativa, también admite tipos principales.*

Demostración Definiremos una versión especial de $\mathsf{PT}(\Gamma|a)$ por inducción sobre a[3]:

$$\begin{array}{llcl}
(1) & \mathsf{PT}(\Gamma|\Box) & = & \Box^+ \\
(2) & \mathsf{PT}(\Gamma|\Xi x : A.B) & = & \rho_\Xi(\mathsf{PT}(\Gamma|A)_\beta, \mathsf{PT}(\Gamma, x : A|B)_\beta) \\
(3) & \mathsf{PT}(\Gamma_0, x : A, \Gamma_1|x) & = & A \\
(4) & \mathsf{PT}(\Gamma|\pi_1\, d) & = & A, \qquad \text{con } \mathsf{PT}(\Gamma|d) \twoheadrightarrow_\beta \Sigma x : A.B \\
(5) & \mathsf{PT}(\Gamma|\pi_2\, d) & = & B\{x := \pi_1 d\}, \qquad \text{con } \mathsf{PT}(\Gamma|d) \twoheadrightarrow_\beta \Sigma x : A.B \\
(6) & \mathsf{PT}(\Gamma|(a, b)_c) & = & c \\
(7) & \mathsf{PT}(\Gamma|b\, c) & = & F\{x := c\}, \qquad \text{con } \mathsf{PT}(\Gamma|b) \twoheadrightarrow_\beta \Pi x : C.F \\
(8) & \mathsf{PT}(\Gamma|\lambda x : A.b) & = & \Pi x : A.Q, \qquad \text{con } \mathsf{PT}(\Gamma, x : A|b) \twoheadrightarrow_\beta Q
\end{array}$$

Todos los casos siguen del lema de generación. Veamos solamente uno de ellos. Si $\Gamma \vdash \lambda x : A.b : M$, aplicando el lema de generación encontramos:

$$\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash \Pi x : A.B : s \qquad \Pi x : A.B \le M$$

Por HI tendremos: $\mathsf{PT}(\Gamma, x : A|b) \twoheadrightarrow_\beta Q \twoheadrightarrow_\gamma Z\ {}_\beta\!\twoheadleftarrow B$. Ahora, aplicando $S\beta$ seguida de $S^\partial\gamma^{-1}$, obtenemos $\Gamma \vdash (\Pi x : A.Q) : s'$ y de aquí $\Gamma \vdash \lambda x : A.b : \Pi x : A.Q$. Es fácil probar que $\Pi x : A.Q$ es un tipo principal. ⊠

Observación No conocemos demostraciones de la existencia de TPs más simples. [9] no cita una prueba directa de la existencia de TPs para $\mathrm{PTS}_\le$, pero prueba que cierto sistema $\vdash_{\mathsf{sdsf}}$ solo genera tipos principales si el sistema original es funcional, semi–full, y además verifica otras condiciones similares a la acumulatividad. Ya que el sistema $\vdash_{\mathsf{sdsf}}$ es completo en las mismas condiciones, podemos deducir de aquí la existencia de TPs. Enfatizamos que [9] utiliza funcionalidad y semi–full, mientras que nosotros solo consideramos funcionalidad débil.

La condición ($cum_{\mathcal{A}}$) de la Definición 2.2 no puede suprimirse como mostramos en [11]:Ejemplo 6.4. Podemos confirmar que en cierto sentido la condición de funcionalidad débil es también necesaria:

Lema 3.5 *Si un sistema admite TPs y tiene reglas útiles, entonces, para cualesquiera* $\Box, s_1, s_2 \in \mathcal{S}$*, los conjuntos* $\mathbb{A}_\Box \doteq \{s \mid \Box : s \in \mathcal{A}\}$ $\quad \mathbb{B}_{s_1,s_2} \doteq \{s_3 \mid s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^{\Xi}\}$ *son vacíos o están acotados inferiormente. Si la relación* $\twoheadrightarrow_\gamma$ *es un orden parcial, y* $\mathbb{A}_\Box$ *no es vacío, entonces existe un único* $\min \mathbb{A}_\Box$.

[3] Para sistemas normalizantes podemos modificar notablemente la definición de $\mathsf{PT}()$. Por ejemplo podemos tomar: $\mathsf{PT}(\Gamma|\lambda x : A.b) = \Pi x : A_\beta.\mathsf{PT}(\Gamma, x : A|b)$.

Demostración Si $\mathbb{A}_\Box \neq \emptyset$, es fácil probar que $\forall s \in \mathbb{A}_\Box \,.\, \mathsf{PT}(|\Box)_\beta \twoheadrightarrow_\gamma s$. Si $\mathbb{B}_{s_1,s_2} \neq \emptyset$, utilizando que las reglas son útiles encontramos un contexto y términos de forma que $\mathsf{PT}(\Gamma|\Xi x : A.B)_\beta$ es una cota inferior de $\mathbb{B}_{s_1,s_2}$. ⊠

Corolario 3.6 (monotonía) *En todo sistema débil–funcional y acumulativo existen tipos principales verificando:*

$$\Gamma \subseteq \Psi \vdash \wedge \Gamma \vdash a : \_ \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{PT}(\Psi|a) \leq \mathsf{PT}(\Gamma|a) \leq \mathsf{PT}(\Psi|a)$$

Demostración $\mathsf{PT}(\Psi|a) \leq \mathsf{PT}(\Gamma|a)$ es consecuencia de la definición de tipo principal. $\mathsf{PT}(\Gamma|a) \leq \mathsf{PT}(\Psi|a)$ se prueba por inducción sobre a utilizando el Lema 3.4. Todos los casos siguen directamente de la HI. Veamos sólo el caso $a \equiv \Xi x : A.B$,

$$\mathsf{PT}(\Gamma|\Xi x : A.B) = \rho_\Xi(\mathsf{PT}(\Gamma|A)_\beta, \mathsf{PT}(\Gamma, x : A|B)_\beta)$$
$$\mathsf{PT}(\Psi|\Xi x : A.B) = \rho_\Xi(\mathsf{PT}(\Psi|A)_\beta, \mathsf{PT}(\Psi, x : A|B)_\beta)$$

Sean pues dos reglas $s_1 : s_2 : s_3, s_1' : s_2' : s_3' \in \mathcal{R}^\Xi$ verificando:

$$s_1' \equiv \mathsf{PT}(\Gamma|A)_\beta \quad s_2' \equiv \mathsf{PT}(\Gamma, x : A|B)_\beta \quad s_3' = \rho_\Xi(s_1', s_2')$$
$$s_1 \equiv \mathsf{PT}(\Psi|A)_\beta \quad s_2 \equiv \mathsf{PT}(\Psi, x : A|B)_\beta \quad s_3 = \rho_\Xi(s_1, s_2)$$

Por HI tendremos $s_1' \twoheadrightarrow_\gamma s_1 \wedge s_2' \twoheadrightarrow_\gamma s_2$. Por acumulatividad existe otra regla $s_1' : s_2' : s_3''$, con $s_3'' \twoheadrightarrow_\gamma s_3$, y por definición de mínimo: $\rho_\Xi(s_1', s_2') \twoheadrightarrow_\gamma \rho_\Xi(s_1, s_2)$. Luego $\mathsf{PT}(\Gamma|\Xi x : A.B) \twoheadrightarrow_\gamma \mathsf{PT}(\Psi|\Xi x : A.B)$. ⊠

Teorema 3.7 (condensación) *En las condiciones del Corolario 3.6, si el sistema verifica además $P\gamma \vee S^\partial\gamma$, entonces también verifica la propiedad de condensación.*

Demostración Por [11]:Teorema 7.7, la propiedad de condensación equivale a:

$$\frac{\Psi \vdash a : \Box}{\Gamma \vdash a : \Box} \qquad \Gamma \subseteq \Psi, \Gamma \vdash a : \_$$

Probemos lo anterior por inducción sobre a. Supongamos $\Psi \vdash a : \Box, \Gamma \subseteq \Psi, \Gamma \vdash a : \_$. Por Lema 3.6 tenemos $\Gamma \vdash a : \mathsf{PT}(\Gamma|a) \leq \mathsf{PT}(\Psi|a)$, y por definición de tipo principal $\mathsf{PT}(\Psi|a) \leq \Box$. Uniendo ambos resultados junto a $P\beta$ encontramos $\Gamma \vdash a : \Box' \twoheadrightarrow_\gamma \Box$. Si fuera cierto $P\gamma$, obtenemos directamente $\Gamma \vdash a : \Box$. Por tanto supongamos $S^\partial\gamma$. Ahora aplicamos la siguiente propiedad (que es trivial por IDs):

$$\Gamma \vdash a : \Box' \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \overset{1}{\vdash} \Box' : \_ \vee a \overset{2}{\equiv} s \vee a \overset{3}{\equiv} \Xi x : A.B$$

En el caso (1) aplicamos $S^\partial\gamma$ y la regla (γ) para obtener $\Gamma \vdash a : \Box$. En el caso (2), $(a \equiv s)$ tendremos $\Psi \vdash s : \Box$, y por el lema de generación, o bien $s : \Box \in \mathcal{A}$ (y por ser Γ legal, tendremos $\Gamma \vdash s : \Box$), o bien $\Box : \_ \in \mathcal{A}$, y razonamos como antes. En el caso (3) tendremos $a \equiv \Xi x : A.B$. Aplicando el lema de generación a la derivación $\Psi \vdash \Xi x : A.B : \Box$, tendremos, para cierta regla $s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^\Xi$,

$$\Psi \overset{4}{\vdash} A : s_1 \qquad \Psi, x : A \overset{5}{\vdash} B : s_2 \qquad (s_3 \overset{6}{\equiv} \Box \vee s_3 \overset{7}{\twoheadrightarrow_\gamma} \Box : \_ \in \mathcal{A})$$

Aplicando HI y la regla (Ξ) tendremos $\Gamma \vdash \Xi x : A.B : s_3$. Si ocurre (6) tenemos $\Gamma \vdash \Xi x : A.B : \Box$; si ocurre (7) aplicamos de nuevo la regla (γ). ⊠

Observación El resultado obtenido en el Teorema 3.7 es más débil que el obtenido en [11]:Corolario 7.15, ya que en este último no se exigen las hipótesis débil–funcional y cumulativo, pero sí se exigen $S^\partial\gamma^{-1}$ además de $P\gamma \vee S^\partial\gamma$. Sin embargo, la demostración que exponemos aquí es muy simple. Por otro lado tenemos:

Todo EPTS verificando $P\gamma$ y la propiedad de condensación, verifica $S^{\partial}\gamma$

En efecto. Supongamos $\Gamma \vdash A : M \wedge A \twoheadrightarrow_{\gamma} A' \wedge A \not\equiv A'$. Entonces $\Gamma \vdash A : s$, y por la regla (var), $\Gamma, x : A \vdash x : A$. Ahora aplicamos $P\gamma$ $(\Gamma, x : A \vdash x : A')$, corrección de tipos para las variables $(\Gamma, x : A \vdash A' : s')$ y condensación para obtener $\Gamma \vdash A' : s'$. Luego, en todo sistema acumulativo, débil–funcional y verificando $P\gamma$, condensación equivale a $S^{\partial}\gamma$, y podemos suprimir del antecedente de la regla (γ) la segunda derivación.

4 Cierre semi–completo de un EPTS

Definición 4.1 (semi–completo) *Un EPTS de especificación* $\mathbf{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \gamma, \mathcal{R}, \mathcal{R}^{\Sigma})$ *se dice semi–completo (semi–full) si verifica la siguiente condición, para cada* $s_1 \in \mathcal{S}$*:*

$$s_1 : \_ : \_ \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; \forall s_2 \in \mathcal{S} \;\centerdot\; s_1 : s_2 : \_ \in \mathcal{R}$$

En los sistemas semi–completos es posible sustituir la regla (λ) por la regla:

$$(\lambda_{\mathsf{sf}})\quad \frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.b : \Pi x : A.B} \qquad s_1 : \_ : \_ \in \mathcal{R} \qquad B \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; B : s \in \mathcal{A}$$

Esto permite probar de forma simple otras propiedades de los EPTS, como la propiedad de condensación, o incluso EP, tal como exponemos en [4].

Si un sistema no es semi–completo es posible añadir suficientes constantes y reglas para obtener un sistema semi–completo. Partiremos de la construcción descrita en [3]. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O} & = & \{s \in \mathcal{S} \,|\, \exists s', s'' \in \mathcal{S} \;\centerdot\; s : s' : s'' \in \mathcal{R}\} \\ \mathcal{P} & = & \{(s_1, s_2) \in \mathcal{O} \times \mathcal{S} \,|\, \forall s \in \mathcal{S} \;\centerdot\; s_1 : s_2 : s \notin \mathcal{R}\} \end{array}$$

Si $\lambda\mathbf{S}$ no es semi–completo, entonces $\mathcal{P} \neq \emptyset$, y para *aproximar* el sistema a uno semi-completo debemos añadir las reglas $s_1 : s_2 : \_$ con $(s_1, s_2) \in \mathcal{P}$. Si incluimos un nuevo sort tenemos $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R} \cup \{s_1 : s_2 : \bullet_0 \,|\, (s_1, s_2) \in \mathcal{P}\}$, que no es semi–full ya que para $s_1 \in \mathcal{O}$ no aparecen las reglas $s_1 : \bullet_0 : \_$. Por ello [3] propone dos soluciones:

1. Añadir además todas las reglas de la forma $s_1 : \bullet_0 : \_$ vía el mismo sort. Es decir, tomando $\bullet_0 = \bullet$, tendremos el nuevo conjunto de reglas:

$$\mathcal{R}^{\bullet} = \mathcal{R} \cup \{s_1 : s_2 : \bullet \,|\, (s_1, s_2) \in \mathcal{P}\} \cup \{s : \bullet : \bullet \,|\, s \in \mathcal{O}\}$$

2. Hacerlo en forma estratificada, añadiendo una sucesión de constantes $\bullet_i$, para obtener una sucesión estrictamente creciente de conjuntos de reglas $\mathcal{R}^0 \subseteq \mathcal{R}^1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{R}^{\omega}$, donde

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}^j & = & \mathcal{R} \cup \{s_1 : s_2 : \bullet_0 \,|\, (s_1, s_2) \in \mathcal{P}\} \cup \{s : \bullet_i : \bullet_{i+1} \,|\, s \in \mathcal{O} \wedge i < j\} \\ \mathcal{R}^{\omega} & = & \mathcal{R} \cup \{s_1 : s_2 : \bullet_0 \,|\, (s_1, s_2) \in \mathcal{P}\} \cup \{s : \bullet_i : \bullet_{i+1} \,|\, s \in \mathcal{O} \wedge i \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

La solución 1 proporciona el cierre compacto $\lambda\mathbf{S}^\bullet$, y la solución 2 proporciona estratificación. Para PTS, o PTS$_\Sigma$ (PTS con Σ–términos) lo construcción anterior es suficiente para encontrar aplicaciones interesantes. Desgraciadamente, para EPTS arbitrarios la solución no es satisfactoria si queremos conservar algunas propiedades del sistema original, como la propiedad de acumulatividad.

Supongamos que $\lambda\mathbf{S}$ es acumulativo y busquemos las condiciones para que $\lambda\mathbf{S}^\omega$ también lo sea. Sea $s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^\omega$, con $s'_1 \twoheadrightarrow_\gamma s_1, s'_2 \twoheadrightarrow_\gamma s_2$. Hay que probar que existe una regla $s'_1 : s'_2 : s'_3 \in \mathcal{R}^\omega$ verificando $s'_3 \twoheadrightarrow_\gamma s_3$. Por otro lado consideremos que la relación γ no queda afectada por las nuevas constantes $\bullet_i$. Entonces:

— Si $s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}$, aplicamos directamente la acumulatividad de $\mathcal{R}$.

— Si $s_1 : s_2 : s_3 \equiv s_1 : \bullet_i : \bullet_{i+1}$, con $s_1 : q : r \in \mathcal{R}$ y $s'_2 \twoheadrightarrow_\gamma \bullet_i$, tendremos $s'_2 \equiv \bullet_i$. En definitiva $s'_1 \twoheadrightarrow_\gamma s_1$, y por acumulatividad de $\mathcal{R}$ existe cierta regla $s'_1 : q : r' \in \mathcal{R}$, de donde $s'_1 \in \mathcal{O}$ y $s'_1 : \bullet_i : \bullet_{i+1} \in \mathcal{R}^\omega$.

— Si $s_3 \equiv \bullet_i$ con $(s_1, s_2) \in \mathcal{P}$, la regla que buscamos debe ser $s'_1 : s'_2 : \bullet_{i+1}$. Por consiguiente el conjunto $\mathcal{P}$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$(s_1, s_2) \in \mathcal{P} \wedge s'_1 \twoheadrightarrow_\gamma s_1 \wedge s'_2 \twoheadrightarrow_\gamma s_2 \;\Rightarrow\; (s'_1, s'_2) \in \mathcal{P}$$

Es decir, nuestro conjunto $\mathcal{P}$ debe ser acumulativo. Lo que no es cierto en general y tomamos una definición alternativa.

Definición 4.2 (cierre semi–completo estratificado) *Dada la especificación* $\mathbf{S} = (\mathcal{S}, \gamma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\Sigma)$*, definimos la especificación* $\mathbf{S}^\omega = (\mathcal{S}^\omega, \gamma, \mathcal{A}, \mathcal{R}^\omega, \mathcal{R}^\Sigma)$*, donde*

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{S}^\omega & = & \mathcal{S} \cup \{\bullet_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \\
\mathcal{R}^\omega & = & \mathcal{R} \cup \{s_1 : s_2 : \bullet_0 \,|\, (s_1, s_2) \in \mathcal{P}_\gamma\} \cup \{s : \bullet_i : \bullet_{i+1} \,|\, s \in \mathcal{O} \wedge i \in \mathbb{N}\} \\
\mathcal{P}_\gamma & = & \{(p_1, p_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \,|\, \exists (s_1, s_2) \in \mathcal{P} \;\centerdot\; p_1 \twoheadrightarrow_\gamma s_1, p_2 \twoheadrightarrow_\gamma s_2\}
\end{array}$$

En forma similar consideramos la sucesión de sistemas $\lambda\mathbf{S}^j$ *con especificación* $\mathbf{S}^j = (\mathcal{S}^j, \gamma, \mathcal{A}, \mathcal{R}^j, \mathcal{R}^\Sigma)$*, donde* $\mathbf{S}^{-1} \equiv \mathbf{S}$*, y*

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{S}^j & = & \mathcal{S} \cup \{\bullet_i \,|\, i \leq j\} \\
\mathcal{R}^j & = & \mathcal{R} \cup \{s_1 : s_2 : \bullet_0 \,|\, (s_1, s_2) \in \mathcal{P}_\gamma\} \cup \{s : \bullet_i : \bullet_{i+1} \,|\, s \in \mathcal{O} \wedge i < j\}
\end{array}$$

Ya que estamos considerando el *cierre*, debemos asegurarnos que no estamos añadiendo demasiadas reglas. Es fácil demostrar que $\mathcal{P}_\gamma$ es el menor conjunto acumulativo que contiene a $\mathcal{P}$. Ya que todo conjunto vacío es acumulativo, de aquí es fácil deducir que $\mathcal{P} = \emptyset$ si y solo si $\mathcal{P}_\gamma = \emptyset$. Por consiguiente: un EPTS con especificación $\lambda\mathbf{S}$ es semi–completo si $\mathcal{P}_\gamma = \emptyset$. Además:

Lema 4.3 (o) $\lambda\mathbf{S}^\omega$ *es semi–completo.*

(a) *Si* $\lambda\mathbf{S}$ *es débil–funcional, entonces* $\lambda\mathbf{S}^\omega$ *es débil–funcional.*

(b) *Si* $\lambda\mathbf{S}$ *es acumulativo, entonces* $\lambda\mathbf{S}^\omega$ *es acumulativo.*

(d) *Si* $\lambda\mathbf{S}$ *es acumulativo y débil funcional, entonces* $\lambda\mathbf{S}^\omega$ *admite TPs.*

Demostración (d) es consecuencia de las anteriores y de Lema 3.4. Veamos solamente (a). Sean $s_1, s_2 \in \mathcal{S}^\omega$ y sea el conjunto $\mathbb{A} = \{s \mid s_1 : s_2 : s \in \mathcal{R}^\omega\}$. Si $\mathbb{A}$ es no vacío, sea $s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^\omega$. Distinguimos dos casos:

1. Si $s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}$, sea $\mathbb{A}' = \{s \mid s_1 : s_2 : s \in \mathcal{R}\}$. Entonces, por ser $\lambda\mathbf{S}$ débil–funcional, existe $\Box' = \min \mathbb{A}' = \rho_\Pi(s_1, s_2)$. Pero si $s \twoheadrightarrow_\gamma \Box', s \neq \Box'$, entonces $s \in \mathcal{S}$, de donde, por definición de mínimo $s \notin \mathbb{A}'$, y por ser $s \in \mathcal{S}$, $s \notin \mathbb{A}$. Luego $\Box' = \min \mathbb{A}$.

2. Si $s_3 \equiv \bullet_i$ razonando en forma similar obtenemos $\min \mathbb{A} = \bullet_i$. $\boxtimes$

Denotaremos con $\vdash^\omega$ y $\vdash^i$ las relaciones de derivación de tipos en los sistemas $\lambda\mathbf{S}^\omega$ y $\lambda\mathbf{S}^i$, respectivamente. El siguiente resultado, inspirado en [3], relaciona los sistemas introducidos (su demostración es inmediata por IDs):

Lema 4.4 (1) $\Gamma \vdash^\omega a : A \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \,\centerdot\, \Gamma \vdash^k a : A$

(2) *Si* $\Gamma \vdash^\alpha a : A$*, con* $\alpha \in \{\omega, k\}$*, entonces* $a \in \mathcal{T}$*,* $\Gamma \in \mathcal{G}$*,* $A \in \mathcal{T} \cup \{\bullet_i \mid i \in \mathbb{N}\}$*.*

Estudiemos ahora bajo qué condiciones es posible probar

$$\Gamma \vdash^\omega a : A \wedge \boxed{¿?} \;\Rightarrow\; \Gamma' \vdash a' : A', \qquad \text{con } a \twoheadrightarrow_\beta a' \wedge A \twoheadrightarrow_\beta A' \wedge \Gamma \twoheadrightarrow_\beta \Gamma'$$

De nuevo nos inspiramos en algunas definiciones de [3]:

Definición 4.5 (funciones contractivas) *Sean los predicados contractivos:*

$$\begin{array}{lcl}
!^i_\Gamma a & \equiv & a \in \mathcal{S}^{i-1} \vee \exists A \in \mathcal{T} \,\centerdot\, \Gamma \vdash^i a : A \wedge !^i_\Gamma A \\
!^i \langle\rangle & & \\
!^i(\Gamma, x : A) & \equiv & !^i\Gamma \wedge !^i_\Gamma A \\
!!^i_\Gamma a & \equiv & !^i\Gamma \wedge !^i_\Gamma a
\end{array}$$

así como la función contractiva $\widehat{\cdot} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$*, definida en la forma:*

$$\begin{array}{lrcl}
si\ b \in \mathcal{S} \cup \mathcal{V}, & \widehat{b} & = & b \\
si\ \Theta \in \{\Pi, \Sigma, \lambda\}, & \widehat{\Theta x : A.B} & = & \Theta x : \widehat{A}.\widehat{B} \\
 & \widehat{f\,a} & = & \begin{cases} \widehat{b}[x := \widehat{a}] & si\ f \equiv \lambda x : A.b \\ \widehat{f}\,\widehat{a} & en\ otro\ caso \end{cases} \\
 & \widehat{\pi_i\,d} & = & \pi_i \widehat{d} \\
 & \widehat{(a, b)_c} & = & (\widehat{a}, \widehat{b})_{\widehat{c}}
\end{array}$$

que se extiende a los contextos en la forma habitual: $\widehat{\langle\rangle} = \langle\rangle \qquad \widehat{\Gamma, x : A} = \widehat{\Gamma}, x : \widehat{A}$

Es fácil demostrar que se tiene $a \twoheadrightarrow_\beta \widehat{a}$, $\widehat{a\,b} \twoheadrightarrow_\beta \widehat{\widehat{a}\widehat{b}}$, etc. Con las funciones contractivas obtenemos la siguiente aplicación de los tipos principales, que generaliza para los EPTS un resultado similar expuesto en [3] para PTS funcionales:

Lema 4.6 (conservatividad de $\lambda\mathbf{S}^i$) *Si* $\lambda\mathbf{S}$ *verifica* $S^\partial\gamma$ *o bien* $P\gamma$*, y el sistema* $\lambda\mathbf{S}^\omega$ *admite tipos principales, entonces*

$$!!^i_\Gamma a \wedge \Gamma \vdash^i a : A \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{a} : B =_\beta A$$

Demostración Véase el resto de la sección. ⊠

Consideremos ahora los siguientes predicados:

$$??^0_\Gamma a \;\equiv\; !!^0_\Gamma a \qquad ??^i_\Gamma a \;\equiv\; !!^i_\Gamma a \wedge ??^{i-1}_{\widehat{\Gamma}}\widehat{a} \qquad ??^\omega_\Gamma a \;\equiv\; \exists i \in \mathbb{N} \,.\, ??^i_\Gamma a$$

Entonces podemos ya enunciar el resultado principal de conservatividad[4]

Teorema 4.7 (conservatividad de $\lambda\mathbf{S}^\omega$) *Si* $\lambda\mathbf{S}$ *verifica* $S^\partial\gamma$ *o bien* $P\gamma$*, y el sistema* $\lambda\mathbf{S}^\omega$ *admite tipos principales, entonces*

$$\begin{array}{lll} (1) & \Gamma \vdash^\omega a : A \wedge ??^\omega_\Gamma a & \Rightarrow\ \Gamma' \vdash a' : A',\ \textit{con}\ a \twoheadrightarrow_\beta a' \wedge A \twoheadrightarrow_\beta A' \wedge \Gamma \twoheadrightarrow_\beta \Gamma' \\ (2) & \Gamma \vdash^\omega a : A \wedge \mathsf{CT}(\Gamma|A) & \Rightarrow\ \Gamma \vdash a' : A',\ \textit{con}\ a \twoheadrightarrow_\beta a' \wedge A \twoheadrightarrow_\beta A' \end{array}$$

donde $\mathsf{CT}(\Gamma|A) \;\doteq\; A \in \mathcal{S} \wedge \Gamma \vdash \quad \vee \quad \Gamma \vdash A : s$

Demostración Supongamos $\Gamma \vdash^\omega a : A \wedge ??^\omega_\Gamma a$. Ya que $\vdash^\omega \equiv \bigcup_{k\geq -1} \vdash^k$, existirá cierto índice tal que se cumple $??^i_\Gamma a \wedge \Gamma \vdash^i a : \_$. De aquí obtenemos, por Lema 4.6 y definición de $??^i_\Gamma a$, $??^{i-1}_{\widehat{\Gamma}}\widehat{a} \wedge \widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{a} : \_$. Este proceso se repite sucesivamente hasta encontrar lo deseado.

La segunda parte del teorema es consecuencia de las siguientes propiedades:

(a) $\quad \Gamma \vdash^i a : \Box \in \mathcal{S} \wedge \Gamma \vdash \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash a' : \Box \quad$, con $a \twoheadrightarrow_\beta a'$

(b) $\quad \Gamma \vdash^i a : A \wedge \Gamma \vdash A : s_1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash a' : A' \quad$, con $a \twoheadrightarrow_\beta a' \wedge A \twoheadrightarrow_\beta A'$

Probemos por ejemplo (b). Por ser $\Gamma \vdash A : s_1$ tendremos $\forall k \,.\, !^k\Gamma$. Por otro lado, por $\Gamma \vdash^i a : A$ tenemos $!!^i_\Gamma a$, y aplicamos el Lema 4.6 para obtener $\widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{a} : B =_\beta A$. Por Church–Rosser seguido de $P\beta$ tenemos $\widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{a} : A''$, con $A \twoheadrightarrow_\beta A''$, y por sustitución de contextos $\Gamma \vdash^{i-1} \widehat{a} : A''$. Este proceso se repite sucesivamente hasta encontrar $\Gamma \vdash a' : A'$. ⊠

Demostración del Lema 4.6. Por inducción sobre la derivación $\varphi \equiv \Gamma \vdash^i a : A$. Veamos solamente dos casos:

— Si φ ha sido inferida de la regla (apl)

$$\frac{\Gamma \vdash^i f : \Pi x : A.F \qquad \Gamma \vdash^i a : A}{\Gamma \vdash^i f\, a : F[x := a]}$$

De $!!^i_\Gamma(f\, a)$ deducimos fácilmente $!!^i_\Gamma a$, y por HI obtenemos $\widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{a} : A'' =_\beta A$. La dificultad esencial es que podría ocurrir $\neg !^i_\Gamma f$ y no podemos aplicar HI. Supongamos por un momento que hemos demostrado la propiedad:

$$f \not\equiv \lambda \ldots \qquad \Rightarrow \qquad !^i_\Gamma f \qquad\qquad (KEY)$$

[4]Existe un resultado de conservatividad más general, como el expuesto en [3]. Para muchas aplicaciones puede servir el que exponemos.

Entonces razonamos en la forma siguiente:

♦ Si $f \not\equiv \lambda$, tendremos $!^i_\Gamma f$, y aplicamos HI, Church–Rosser y la regla (*apl*).

♦ Si $f \equiv \lambda x : M.b$, ya que la derivación $\chi \equiv \Gamma \vdash^i \lambda x : M.b : \Pi x : A.F$ solo puede ser inferida por aplicaciones de las reglas (β), (γ) o (λ), existirán *sub–derivaciones* de χ de la forma

$$\Gamma, x : M \vdash^i b : B : s_2 \in \mathcal{S}^{i-1} \qquad \Gamma \vdash^i M : s_1 \qquad s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^i$$

que llevan a la derivación χ vía aplicaciones de las reglas (β) o (γ), y de forma que tenemos: $M =_\beta A$ además de $B \le F$. Luego, independientemente de la veracidad de $!^i_\Gamma f$, se verifica $!!^i_{\Gamma,x:M} b \wedge !!^i_\Gamma M$, y podemos aplicar HI para obtener

$$\widehat{\Gamma}, x : \widehat{M} \vdash^{i-1} \widehat{b} : B' =_\beta B \qquad \widehat{\Gamma, x : M} \vdash^{i-1} \widehat{B} : s_2 \qquad \widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{M} : s_1$$

Obsérvese que puede darse $s_1 : s_2 : s_3 \notin \mathcal{R}^{i-1}$, de donde no podemos aplicar la regla (λ) en $\lambda\mathbf{S}^{i-1}$. Pero ya que $B' =_\beta \widehat{B}$, aplicando la regla (β) encontramos:

$$\widehat{\Gamma}, x : \widehat{M} \vdash^{i-1} \widehat{b} : \widehat{B} : s_2 \qquad \widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{A} : A' =_\beta \widehat{M}$$

y aplicando Church–Rosser y el lema de sustitución llegamos a las derivaciones:

$$\widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{b}[x := \widehat{a}] : \widehat{B}[x := \widehat{a}] \ \ (*) \qquad \widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{B}[x := \widehat{a}] : s_2 \ \ (**)$$

Ahora bien, si $B \twoheadrightarrow_\beta Q \twoheadrightarrow_\gamma Q' \ {}_\beta\!\twoheadleftarrow F$, entonces,

$$\widehat{B}[x := \widehat{a}] \twoheadrightarrow_\beta Q[x := \widehat{a}] \twoheadrightarrow_\gamma Q'[x := \widehat{a}] =_\beta F[x := a]$$

y podemos aplicar $S\beta$, y $S^\partial\gamma$ a la derivación $(**)$ para obtener $\widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} Q'[x := \widehat{a}] : s'$. Ahora basta aplicar la regla (γ) a esta última derivación, junto a la obtenida de $(*)$ aplicando $P\beta$, para obtener finalmente $\widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{b}[x := \widehat{a}] : Q'[x := \widehat{a}] =_\beta F[x := a]$.

Por consiguiente hemos de probar (KEY). Supongamos $\neg !^i_\Gamma f$, de donde

$$\forall M, s \ \centerdot \ \Gamma \vdash f : M : s \qquad \Rightarrow \qquad s \equiv \bullet_i \tag{$\bullet$}$$

Ya que $\Gamma \vdash^i f : \Pi x : A.F$, por el lema de generación, f no puede ser, ni una constante, ni un Ξ término, ni un par. Las restantes posibilidades no pueden darse:

$f \equiv y$ En este caso $y \in \Gamma$, y también $y \in \widehat{\Gamma}$, y por ser el contexto $\widehat{\Gamma}$ legal en $\lambda\mathbf{S}^{i-1}$, tendremos $\widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} y : Q : s \in \mathcal{S}^{i-1}$, y por ser $\lambda\mathbf{S}^{i-1} \subseteq \lambda\mathbf{S}^i$, tendremos también $\widehat{\Gamma} \vdash^i y : Q : s \in \mathcal{S}^{i-1}$, y por sustitución de contextos, $\Gamma \vdash^i y : Q : s \in \mathcal{S}^{i-1}$, que contradice $(\bullet)$. Luego f no puede ser una variable.

$f \equiv \pi_1\, d$ Entonces, por el lema de generación $\Gamma \vdash^i d : \Sigma y : P.Q$, con $\Gamma \vdash P : s_1 \in \mathcal{S}$, y por la regla (π_1), $\Gamma \vdash^i f : P : s_1$, que contradice $(\bullet)$.

$f \equiv \pi_2\, d$ Entonces, por el lema de generación $\Gamma \vdash^i d : \Sigma y : P.Q$, con $\Gamma, y : P \vdash^i Q : s_2 \in \mathcal{S}$, y por el lema de sustitución $\Gamma \vdash^i Q[x := \pi_1\, d] : s_2$, y aplicando la regla (π_2), $\Gamma \vdash^i f : Q[x := \pi_1\, d] : s_2$, que contradice $(\bullet)$.

$f \equiv g\, c$ Entonces por el lema de generación

$\Gamma \vdash^i g : \Pi z : C.G \qquad \Gamma \vdash^i c : C : s_1 \qquad \Gamma, z : C \vdash^i G : s_2 \in \mathcal{S}^{i-1}$, y aplicando la regla (*apl*) y el lema de sustitución llegamos a $\Gamma \vdash^i f : G[z := c] : s_2 \in \mathcal{S}^{i-1}$, que contradice $(\bullet)$.

Luego (KEY) está demostrado, y también el paso (*apl*).

— Si φ ha sido inferida de la regla (Ξ):

$$\frac{\Gamma \vdash^i A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash^i B : s_2}{\Gamma \vdash^i \Xi x : A.B \ : \ s_3} \qquad s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^{\Xi i}$$

de $!!^i_\Gamma(\Xi x : A.B)$ obtenemos $!!^i_\Gamma A \wedge !!^i_{\Gamma,x:A} B$, y podemos aplicar la HI para llegar a
$\widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \widehat{A} : s_1 \qquad \widehat{\Gamma}, x : \widehat{A} \vdash^{i-1} \widehat{B} : s_2$
– Si $\Xi \equiv \Sigma$, entonces $s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^{\Sigma i}$, y aplicamos la regla ($\Sigma$).
– Si $\Xi \equiv \Pi$, razonamos en la forma siguiente. Por ser $!!^i_\Gamma(\Pi x : A.B)$, existe un término M verificando $\Gamma \vdash^i \Pi x : A.B : M \wedge !!^i_\Gamma M$, pero necesariamente $M \twoheadrightarrow_\beta q \in \mathcal{S}^i$. Entonces, aplicando $P\beta$ es fácil obtener $\Gamma \vdash^i \Pi x : A.B : q \in \mathcal{S}^i \wedge !!^i_\Gamma q$. De aquí tendremos $q \in \mathcal{S}^{i-1}$. Si el sistema $\vdash^\omega$ admite tipos principales debería tenerse $q =_\gamma s_3$ y de aquí $s_3 \in \mathcal{S}^{i-1}$, y $s_1 : s_2 : s_3 \in \mathcal{R}^{i-1}$. Ya podemos finalmente aplicar la regla (Π) en el sistema $\vdash^{i-1}$ para llegar a $\widehat{\Gamma} \vdash^{i-1} \Pi x : \widehat{A}.\widehat{B} : s_3$. $\boxtimes$

5 Conclusiones y trabajo futuro

El presente trabajo contiene un resultado esencial: los tipos principales proporcionan una herramienta tán útil como la proporcionada por la β–unicidad de tipos. En particular, vía TPs hemos probado la propiedad de condensación y la conservatividad del cierre semi–completo (Teorema 4.7).

A modo de ejemplo, exponemos una importante aplicación del resultado anterior. En [4] hemos demostrado que si un sistema es semi–completo y normalizante, entonces se verifica: $\Gamma \vdash a : A \ \Rightarrow \ \Gamma \vdash_n \ a : A_\beta$, donde $\vdash_n$ es una generalización del sistema expuesto en [8] que a su vez estudiamos en [13]. Además se verifica $\vdash_n \ \subseteq \vdash_r$, lo que conduce a la solución del problema EP.

Sea ahora un EPTS arbitrario normalizante y consideremos su cierre semi–completo. Para cada derivación $\Gamma \vdash c : C$ obtenemos también $\Gamma \vdash^\omega \ c : C$. Si el cierre $\lambda\mathbf{S}^\omega$ fuera normalizante (ya que es también semi–completo) obtenemos $\Gamma \vdash^\omega_n \ c : C_\beta$, y utilizando conservatividad, concluimos $\Gamma \vdash_n \ c : C_\beta$. En consecuencia $\Gamma \vdash c : C \ \Rightarrow$ $\Gamma \vdash_n \ c : C_\beta$, y por tanto EP.

En definitiva, si la propiedad de normalización es hereditaria tenemos resuelto el problema EP para una amplia clase de sistemas normalizantes, débil–funcionales y acumulativos. Conjeturamos que el uso de tipos principales permitirá demostrar que la normalización es hereditaria.

Referencias

[1] Henk P. Barendregt. Lambda Calculi with Types. En Samson Abramsky, Dov Gabbay, y Tom S.E. Maibaum, editores, *Handbook of Logic in Computer Science*, capítulo 2.2, páginas 117–309. Oxford University Press, 1992.

[2] Henk P. Barendregt y Herman Geuvers. Proof–assistants using dependent type systems. En Alan Robinson y Andrei Voronkov, editores, *Handbook of Automated Reasoning*, capítulo 1, páginas 1–84. Elsevier, 1999.

[3] Gilles Barthe. The semi–full closure of pure type systems. En Lubos Brim et al., editor, *MFCS'98*, volumen 1450 de *LNCS*, páginas 316–325. Springer-Verlag, 1998.

[4] Gilles Barthe y Blas Carlos Ruiz. Expansion postponement via semi–full closure for normalizing PTS_Σ. *(junio). en preparación*, 2001.

[5] Edsger W. Dijkstra y Carel S. Scholten. *Predicate Calculus and Program Semantics*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[6] Robert Harper y Robert Pollack. Type checking with universes. *Theoretical Computer Science*, 89:107–136, 1991.

[7] Zhaohui Luo. *An Extended Calculus of Constructions*. Tesis Doctoral, University of Edinburgh, 1990.

[8] Erik Poll. Expansion postponement for normalising pure type systems. *Journal of Functional Programming*, 8(1):89–96, january 1998.

[9] Robert Pollack. *The Theory of LEGO: A Proof Checker for the Extended Calculus of Constructions*. Tesis Doctoral, University of Edinburgh, 1994.

[10] Blas Carlos Ruiz. Condensing lemmas in pure type systems with universes. En Armando Martin Haeberer, editor, *7th International Conference on Algebraic Methodology and Software Technology (AMAST'98) Proceedings*, volumen 1548 de *LNCS*, páginas 422–437. Springer–Verlag, january 1999.

[11] Blas Carlos Ruiz. *Sistemas de tipos Puros con Universos*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga, 1999.

[12] Blas Carlos Ruiz. The Expansion Postponement Problem for Pure Type Systems with Universes. En *9th International Workshop on Functional and Logic Programming (WFLP'2000)*. Dep. de Sistemas Informáticos y Computación, Technical University of Valencia (Tech. Rep.), 2000. September 28-30, Benicassim, Spain.

[13] Blas Carlos Ruiz. Extended Pure Type Systems with Normalized Types. En *2000 Joint Conference on Declarative Programming (APPIA-GULP-PRODE'00), La Habana (Cuba), December 4-7*, 2000.

[14] L.S. van Benthem Jutting. Typing in pure type systems. *Information and Computation*, 105(1):30–41, 1993.