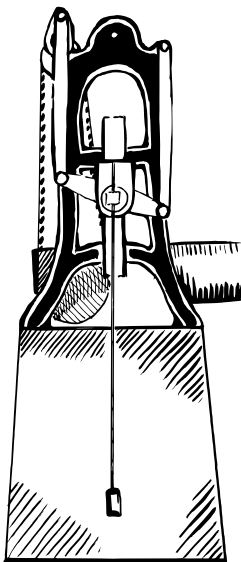


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет



ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

ЗАДАЧА
СПЕЦПРАКТИКУМА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКЕ

Электронная версия для damc.ru

2022

Из учебного издания

**СПЕЦПРАКТИКУМ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ**

*Под редакцией профессора Владимира Васильевича Александрова,
профессора Юрия Владимировича Болотина*

Рецензент Игорь Леонидович Антонов

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ
РЕЗОНАНС**

*В.М. Буданов, В.И. Каленова, А.В. Ленский,
В.М. Морозов*

Предварительная электронная версия

Редактор	Степан Степанович Лемак
Верстка	Маргарита Дмитриевна Белоусова Анна Павловна Кручинина
Иллюстрации	Алена Павловна Кручинина

Исправления и пожелания эждем на a.kruch@moids.ru

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

*В.М. Буданов, В.И. Каленова, А.В. Ленский,
В.М. Морозов*

Введение

Одним из важных разделов теории колебаний, тесно связанным с теорией устойчивости периодических движений механических систем и теорией динамической устойчивости упругих систем, является раздел, в котором исследуются параметрически возбуждаемые колебания и связанное с ними явление параметрического резонанса. Термин «параметрический резонанс» был введен А.А. Андроновым и М.А. Леонтовичем в 1927 г.

Существуют различные способы возбуждения колебаний в механических системах. **Прямое возбуждение** — такой механизм возбуждения колебаний, когда периодическая внешняя сила действует непосредственно на колебательную систему. **Параметрическое возбуждение** состоит в том, что внешняя или внутренняя сила периодически изменяет какой-либо параметр колебательной системы.

Возникающие колебания в первом случае называются вынужденными, во втором — параметрическими. Параметрическое возбуждение может привести к так называемому **параметрическому резонансу** — колебаниям в системе с возрастающей амплитудой.

Простые примеры задач, в которых могут возникать параметрические колебания, рассмотрены в §1. Математические модели этих и многих других задач — нелинейные дифференциальные уравнения, линеаризация которых приводит к необходимости изучения линейных систем с периодическими коэффициентами. Основные понятия и некоторые методы исследования устойчивости таких систем приведены в §2. В ряде случаев для изучения качественных свойств решений рассматриваемых систем (в частности, свойства устойчивости) анализа линеаризованных систем оказывается недостаточно и необходимо исследование исходных нелинейных систем.

Настоящая работа специального лабораторного практикума посвящена интересному и важному явлению — возникновению параметрического резонанса в колебательных системах. Простейшей моделью этого явления служит возникновение колебаний математического маятника, ось которого совершает вертикальные гармонические колебания.

§1. Задачи, приводящие к исследованию линейных систем с периодическими коэффициентами

1.1. Маятник с колеблющейся точкой подвеса. Простейшим примером появления параметрических колебаний является плоский математический маятник длиной l , ось подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой s и частотой ω . Показано на рисунке 1.1 $y_0 = s \cos \omega t$ [1, 2].

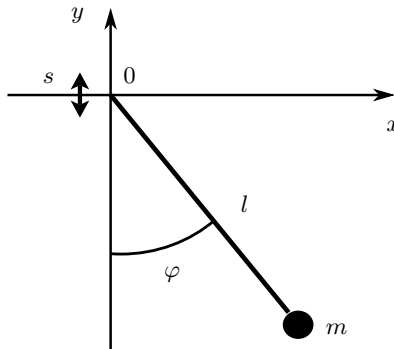


Рис. 1.1. Плоский математический маятник с колеблющейся точкой подвеса

Дифференциальное уравнение движения этой механической системы имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \left(1 + \frac{s\omega^2}{g} \cos \omega t \right) \sin \varphi = 0,$$

где φ — угол отклонения маятника от оси, направленной вертикально вниз.

Вводя обозначения $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, $\varepsilon = \frac{s}{l}$ и отбрасывая нелинейные слагаемые, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 + \varepsilon \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos \omega t \right) \varphi = 0. \quad (1.1)$$

Так же как и для маятника с неподвижной точкой подвеса, вертикальные положения ($\varphi = 0; \pi$) являются положениями равновесия. Но в отличие от случая маятника с неподвижной точкой подвеса нижнее положение ($\varphi = 0$) равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым, т. е. при некоторых значениях частоты ω вертикальные колебания точки подвеса маятника могут вызвать колебания маятника с возрастающей амплитудой. Эти колебания возбуждаются не возмущающей силой, а периодическим изменением параметра системы (приведенной длины маятника). Интересно отметить, что верхнее положение ($\varphi = \pi$) равновесия маятника, неустойчивое в случае неподвижной точки подвеса, может быть устойчивым при высокочастотной вертикальной вибрации точки подвеса [1].

1.2. Маятник с периодически изменяющейся длиной (качели). Рассмотрим снова математический маятник. Одним из параметров, характеризующих свойства маятника как колебательной системы, является его длина. Параметрическое воздействие на маятник можно осуществить, периодически изменяя его длину, т. е. втягивая и выпуская нить, на которой висит маятник.

Пусть маятник совершает малые колебания. Нить втягивается всякий раз, когда маятник проходит через среднее положение, и на столько же выпускается всякий раз, когда маятник проходит через крайние положения. При втягивании нити совершается положительная работа, т. е. увеличивается энергия колебаний маятника. Наоборот, при выпуске нити совершается отрицательная работа, т. е. энергия у маятника отбирается. Однако энергия, сообщаемая маятнику при втягивании нити в среднем положении и отбираемая при выпуске нити в крайних положениях, будет различна.

В самом деле, натяжение нити N при колебаниях маятника имеет вид $N = \frac{mv^2}{l} + mg \cos \varphi$, где m — масса маятника; $v = \frac{d\varphi}{dt}l$.

Натяжение нити N в среднем положении ($\varphi = 0, v > 0$) больше, чем в крайних положениях ($\varphi = \varphi_0, v = 0$). Поэтому положительная работа, совершаемая при втягивании нити в среднем положении, больше отрицательной работы, совершаемой при выпуске нити в крайних положениях. Если энергия, сообщаемая маятнику за каждый период колебаний, больше, чем потери энергии из-за наличия сопротивления среды, то амплитуда колебаний маятника должна нарастать. Следовательно, маятник можно раскачивать при помощи параметрического воздействия, происходя-

щего с надлежащей частотой и в надлежащей фазе. В частности, в данном случае частота воздействия должна быть вдвое больше частоты собственных колебаний.

Хорошо известный каждому способ раскачивания качелей, когда человек приседает в крайних положениях и выпрямляется в среднем положении, фактически состоит в периодическом изменении длины маятника, так как изменяется расстояние от точки подвеса до центра масс (пример, рассмотренный выше). Уравнение движения маятника переменной длины $l(t)$ имеет вид

$$\frac{1}{l(t)} \frac{d}{dt} \left[l^2(t) \frac{d\varphi}{dt} \right] = -g \sin \varphi.$$

Предполагая, что $l(t) = l_0 + a \cos \omega t$, и отбросив нелинейные члены, получим уравнение движения в виде

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2a_1(t) \frac{d\varphi}{dt} + a_2(t)\varphi = 0, \quad (1.2)$$

где $a_1(t) = -\frac{a\omega \sin \omega t}{l_0 + a \cos \omega t}$; $a_2(t) = \frac{g}{l_0 + a \cos \omega t}$.

Уравнение (1.2), в отличие от уравнения (1.1), содержит первую производную искомой функции $\frac{d\varphi}{d\tau}$, однако заменой переменной $\varphi = \psi \exp \left[-\int a_1 dt \right]$ уравнение (1.2) может быть сведено к уравнению типа (1.1) относительно новой переменной ψ — уравнению, не содержащему первой производной

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + (a_2 - a_1^2 - \frac{da_1}{dt})\psi = 0.$$

Параметрические колебания могут возникнуть при различных изменениях параметров системы: периодическом изменении жесткости системы, периодическом изменении распределения масс и т. д. [2]. При этом периодическое изменение параметров не обязательно должно описываться гладкими функциями типа $\sin \omega t$, $\cos \omega t$.

Явление параметрического резонанса возникает также во многих задачах динамической устойчивости упругих систем [3]. В частности, в задаче о поперечных колебаниях прямолинейного стержня постоянного сечения, нагруженного продольной периодической силой. Если амплитуда нагрузки меньше критического статического значения (так называемой эйлеровой силы), то стержень, вообще говоря, совершает только продольные колебания. Однако оказывается, что при определенных соотношениях между частотой возмущающей нагрузки и частотой собственных поперечных колебаний прямолинейная форма стержня становится

неустойчивой: возникают поперечные колебания, амплитуда которых быстро возрастает до больших значений. Параметрический резонанс возникает и в задаче о колебаниях гибких шлангов с пульсирующей скоростью жидкости. Пульсирующая составляющая скорости обусловлена пульсирующим давлением в шланге, вызываемым работающим насосом. При определенных значениях частоты пульсации скорости шланг начинает сильно вибрировать [4].

Примером параметрического возбуждения является также опыт Мельде (1859 г.). Этот опыт заключается в том, что натянутая струна прикрепляется одним концом к ножке колеблющегося камертона. При определенных значениях частоты камертона в струне возбуждаются параметрические колебания [2].

Подобных примеров из различных областей физики и техники можно было бы привести много. В частности, одним из возможных объяснений одной из крупнейших катастроф в истории мостостроения — крушения Такомского висячего моста (США, 1940) — является возникновение интенсивных параметрических колебаний под влиянием периодической ветровой нагрузки (подробнее об этом см. в [6]). Однако большинство исследователей склоняется к тому, что причиной крушения моста была потеря аэроупругой устойчивости и возникновение изгибно-крутильного флаттера [5].

Во всех рассмотренных примерах линеаризованные уравнения движения представляют собой линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda p(t)x = 0,$$

где $p(t)$ — периодическая функция времени, а λ — некоторый параметр.

Это уравнение в литературе называется уравнением Хилла. Интерес, который проявляется в литературе к этому частному виду линейного уравнения, заключается в следующем: задача исследования устойчивости периодического решения нелинейной системы с одной степенью свободы всегда приводит к уравнению Хилла (см., например, устойчивость периодического решения уравнения Дуффинга). В этих случаях уравнение в вариациях, определяющее малые отклонения от данного периодического решения, устойчивость которого исследуется, представляет собой уравнение Хилла.

Задача, которая нас интересует, состоит в определении тех значений параметра λ , при которых будет иметь место устойчивость или неустойчивость решений этого уравнения. Так как условия устойчивости и неустойчивости определяются неравенствами, то

значения λ , при которых имеет место устойчивость или неустойчивость, будут заполнять некоторые интервалы. Эти интервалы будем называть **областями устойчивости и неустойчивости** соответственно.

Параметрически возбуждаемые колебания, часто являющиеся спутником вынужденных колебаний, сходны с ними по проявлениям, и поэтому они могут иногда квалифицироваться как обычные резонансные колебания. Между тем в ряде случаев общепринятые методы демпфирования, состоящие во введении в систему сопротивления, пропорционального скорости, могут оказаться бессильными перед параметрическими колебаниями [см. § 2.4].

Если система находится строго в положении равновесия, то изменение параметра не приводит к ее раскачиванию.

Следует подчеркнуть, что линеаризованными математическими моделями систем, совершающих вынужденные колебания, часто служат линейные **неоднородные системы с постоянными коэффициентами и периодически изменяющейся правой частью**, в то время как при параметрических колебаниях линеаризованными математическими моделями служат **однородные линейные системы с периодически изменяющимися коэффициентами**.

§2. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами

2.1. Общие понятия. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x. \quad (1.3)$$

Здесь $x = \|x_1 \dots x_n\|^T$ — n -мерный вектор, $P(t)$ — матрица размерности $n \times n$, элементы $p_{ij}(t)$ которой являются непрерывными периодическими функциями времени t с одним и тем же периодом T ($P(t+T) = P(t)$).

Совокупность n линейно независимых решений уравнений (1.3)

$$x^{(1)}(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{vmatrix}, \dots, x^{(n)}(t) = \begin{vmatrix} x_{1n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

называется фундаментальной системой решений уравнений (1.3), а матрица

$$X(t) = \left\| \begin{matrix} x^{(1)}(t) \dots x^{(n)}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \dots x_{nn}(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_{11}(t) \dots & x_{1n}(t) \\ & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) \dots & x_{nn}(t) \end{matrix} \right\|$$

называется фундаментальной матрицей.

Не нарушая общности, можно считать, что фундаментальная система решений (1.4) удовлетворяет начальным условиям

$$x_{kj}(0) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad X(0) = E. \quad (1.5)$$

Фундаментальная матрица $X(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X \quad (1.6)$$

с начальным условием (1.5).

В силу периодичности матрицы $P(t)$ получим, что матрица $X(t+T)$ также удовлетворяет уравнению (1.6) и может быть выражена через фундаментальную матрицу $X(t)$ в виде

$$X(t+T) = X(t)C, \quad C = \text{const.} \quad (1.7)$$

Положив $t = 0$ в равенстве (1.7), найдем

$$C = X(T).$$

Матрица $X(T)$ носит название матрицы монодромии. Очевидно, что $\det X(T) \neq 0$.

Составим уравнение

$$D(\rho) = \det(\rho E - X(T)) = 0.$$

Это уравнение, играющее основную роль в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, называется характеристическим уравнением. Его можно представить в виде

$$D(\rho) = \rho^n + A_1 \rho^{n-1} + \dots + A_{n-1} \rho + A_n = 0, \quad (1.8)$$

причем по формуле Лиувилля свободный член A_n определяется следующим образом:

$$A_n = (-1)^n \exp \left[\int_0^T \text{Sp } P(t) dt \right], \quad \text{Sp } P(t) = \sum_{k=1}^n p_{kk}(t). \quad (1.9)$$

Корни характеристического уравнения (1.8) ρ_1, \dots, ρ_n называются мультипликаторами, а величины

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \ln \rho_k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1.10)$$

характеристическими показателями.

С учетом определения логарифма комплексного числа будем иметь

$$\alpha_k = \frac{1}{T} [\ln |\rho_k| + i(\arg \rho_k + 2\pi m)], \quad (k = 1, \dots, n; m = 0, \pm 1, \dots).$$

Поэтому характеристические показатели определяются с точностью до чисто мнимых слагаемых $2\pi m i/T$.

Характеристические показатели (1.10) играют для систем с периодическими коэффициентами ту же роль, что и корни характеристического уравнения для систем с постоянными коэффициентами. Связь между этими системами очень глубокая, а именно, имеет место теорема Ляпунова.

Теорема 1 [6–9]. *Любая система (1.3) с непрерывной периодической матрицей $P(t)$ приводима путем преобразования Ляпунова к системе с постоянной матрицей.*

Линейное преобразование $y = L(t)x$ называется преобразованием Ляпунова, если матрица $L(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ ограничены на интервале $[0, \infty)$.
2. $|\det L(t)| \geq \delta > 0$, где $\delta = \text{const}$, $t \geq 0$.

Отметим, что приводимыми к системам с постоянными коэффициентами (стационарным системам) могут быть не только системы с периодическими коэффициентами [8–10]. Имеет место теорема Флоке (теорема 2).

Теорема 2 [1, 7–9]. *Для линейной периодической системы (1.3) фундаментальная матрица, нормированная при $t = 0$, имеет вид*

$$X(t) = \Phi(t) \exp(Kt), \quad (1.11)$$

где $\Phi(t)$ — непрерывно дифференцируемая невырожденная T — периодическая матрица ($\Phi(0) = E$), K — постоянная матрица.

Характеристические показатели α_k являются собственными значениями матрицы K ($\det(\alpha E - K) = 0$). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($m \leq n$) — различные характеристические показатели, тогда

нетрудно показать, что система (1.3) имеет по крайней мере m ($1 \leq m \leq n$) линейно независимых решений вида

$$x^{(k)}(t) = p^{(k)}(t) \exp(\alpha_k t), \quad (k = 1, \dots, m), \quad (1.12)$$

где $p^{(k)}(t)$ — периодические вектор-функции с периодом T .

Из представлений (1.11), (1.12) следует, что поведение решений системы (1.3) при $t \rightarrow \infty$ определяется матрицей $\exp(Kt)$ (выражениями $\exp(\alpha_k t)$).

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (1.3).

Теорема 3 [1, 7–9]

1. Если все характеристические показатели α_k ($k = 1, \dots, n$) системы (1.3) имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение системы (1.3) асимптотически устойчиво.

2. Если хотя бы один характеристический показатель системы (1.3) имеет положительную действительную часть, то нулевое решение системы (1.3) неустойчиво.

3. Нулевое решение системы (1.3) устойчиво, если она не имеет характеристических показателей с положительной действительной частью, но имеет характеристические показатели с нулевой действительной частью, и эти показатели являются простыми или кратными, но с простыми элементарными делителями (если их рассматривать как собственные значения матрицы K).

Теорему 3 об устойчивости можно сформулировать в терминах мультипликаторов:

Теорема 3'

1. Если все мультипликаторы системы (1.3) расположены внутри единичного круга ($|\rho_k| < 1$), то ее нулевое решение асимптотически устойчиво.

2. Если хотя бы один мультипликатор ρ_s лежит вне единичного круга, то нулевое решение неустойчиво.

3. Нулевое решение системы (1.3) устойчиво, если все ее мультипликаторы расположены внутри замкнутого единичного круга $|\rho| \leq 1$, причем мультипликаторы, лежащие на окружности $|\rho| = 1$, имеют простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения матрицы монодромии $X(T)$.

Замечание 1. Простота элементарных делителей, отвечающих кратным собственным значениям матриц K и $X(T)$, означает, что жордановы клетки, соответствующие этим собственным

значениям, состоят из одного элемента (число этих клеток для каждого собственного значения равно его кратности).

Условия, обеспечивающие принадлежность корней уравнения (1.8) единичному кругу $|\rho| < 1$, можно получить следующим образом. Известно [8], что следующее преобразование

$$\rho = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

переводит единичный круг $|\rho| < 1$ плоскости ρ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda < 0$ плоскости λ .

Таким образом, уравнение (1.8) заменяется уравнением [8]

$$D \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right) = 0 \quad \text{или} \quad F(\lambda) = \pm (\lambda - 1)^n D \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right) = 0, \quad (1.13)$$

где многочлен $F(\lambda)$ должен быть многочленом Гурвица, причем знак в соотношении (1.13) нужно выбирать так, чтобы многочлен $F(\lambda)$ был стандартным, т. е. должно выполняться условие

$$F(0) = \pm (-1)^n D(-1) > 0.$$

Первые два утверждения теорем 3 и 3' сохраняются и для нелинейной системы [7, 8]

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + \varphi(t, x), \quad (1.14)$$

где через $\varphi(t, x)$ обозначена вектор-функция, содержащая члены выше первого порядка малости, для которой система (1.3) является системой первого приближения ($\varphi(t, 0) = 0$).

Таким образом, характер устойчивости систем (1.3) и (1.14) зависит от показателей α_k или, в силу (1.10), от корней ρ_k уравнения (1.8).

В уравнении (1.8) заранее известен только один коэффициент — A_n , определяемый по формуле (1.9). Для определения остальных коэффициентов A_j требуется вычисление фундаментальной матрицы решений, но не во все моменты времени, а только при $t = T$.

Следует отметить, что условия устойчивости определяются неравенствами, и поэтому достаточно знать лишь приближенные значения коэффициентов характеристического уравнения, что позволяет для их определения с успехом применять различные приближенные методы.

2.2. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами [6–9].

Рассмотрим скалярное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 [1 + \mu f(t, \mu)] x = 0, \quad (1.15)$$

где $f(t, \mu)$ — непрерывная периодическая функция времени t с периодом $T = \pi$.

Предположим, что функция $f(t, \mu)$ аналитически зависит от параметра μ , так что

$$f(t, \mu) = f_1(t) + \mu f_2(t) + \dots \quad (1.16)$$

Характеристическое уравнение для уравнения (1.15) имеет вид

$$\rho^2 - 2A(\lambda, \mu)\rho + 1 = 0. \quad (1.17)$$

Можно показать, что коэффициент A является аналитической функцией параметров λ и μ при всех значениях λ и всех значениях μ , для которых сходится ряд (1.16).

Определим области устойчивости и неустойчивости для уравнения (1.15) в зависимости от значений λ . Из (1.17) находим

$$\rho(\lambda, \mu) = A \pm \sqrt{A^2 - 1}.$$

Следовательно, если $A^2 > 1$, то уравнение (1.17) будет иметь два действительных корня, из которых один численно больше единицы, а другой — меньше. Если же $A^2 < 1$, то оба корня уравнения (1.17) будут комплексными с модулями, равными единице.

Таким образом, областям устойчивости уравнения (1.15) соответствуют те значения λ , для которых $A^2 < 1$, а областям неустойчивости — те значения, для которых $A^2 > 1$. Отсюда следует, что области устойчивости и неустойчивости разделяются теми значениями параметра λ , для которых выполняется либо уравнение

$$A(\lambda, \mu) = 1, \quad (1.18)$$

либо уравнение

$$A(\lambda, \mu) = -1. \quad (1.19)$$

При $\mu = 0$ характеристическими показателями уравнения (1.15) будут, очевидно, величины $\pm \lambda i$, а корнями уравнения (1.17):

$$\rho_1(\lambda, 0) = e^{\pi \lambda i}, \quad \rho_2(\lambda, 0) = e^{-\pi \lambda i}.$$

Следовательно,

$$A(\lambda, 0) = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = \cos \pi \lambda,$$

$$A(\lambda, \mu) = \cos \pi \lambda + \mu F(\lambda, \mu),$$

где $F(\lambda, \mu)$ — аналитическая функция параметров λ и μ .

Уравнения (1.18), (1.19) удовлетворяются при $\mu = 0, \lambda = n$, где n — целое число. При этом, если n — нечетное, удовлетворяется уравнение (1.19), если n — четное, — уравнение (1.18).

Можно показать, что при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, уравнение (1.19) имеет два решения относительно λ в окрестности любого целого нечетного числа, а уравнение (1.18) имеет два решения в окрестности любого целого четного числа, причем решения обращаются в эти целые числа при $\mu = 0$. Отметим еще, что если λ удовлетворяет уравнению (1.18), то уравнение (1.15) имеет периодическое решение с периодом π (в таком случае $\rho = 1$). Если λ удовлетворяет уравнению (1.19), то уравнение (1.15) имеет периодическое решение с периодом 2π (в таком случае $\rho = -1$).

Можно также показать, что все корни уравнений (1.18) и (1.19) при достаточно малом μ являются аналитическими функциями μ .

Отложим на оси λ (Рис. 1.4) все корни уравнений (1.18) и (1.19). Обозначим через $\bar{\lambda}'_n, \bar{\lambda}''_n$ корни, расположенные вблизи целого нечетного числа n и через λ'_n, λ''_n — корни, расположенные вблизи целого четного числа n . Все эти корни разбивают ось λ на интервалы двух типов.

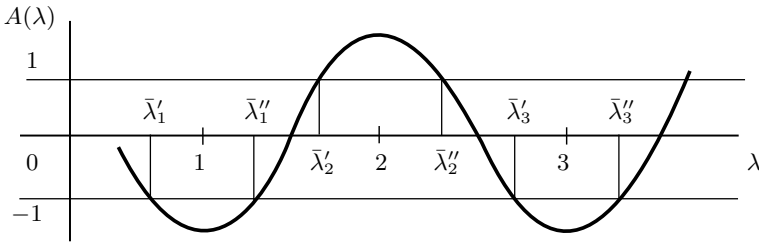


Рис. 1.2

Интервалы первого типа ограничены с обеих сторон корнями одного вида, т. е. такими, которые либо оба удовлетворяют уравнению (1.18), либо оба удовлетворяют уравнению (1.19) (например, $\bar{\lambda}'_1, \bar{\lambda}''_1$ и λ'_2, λ''_2). Интервалы второго типа ограничены с одной стороны корнем уравнения (1.18), а с другой — корнем уравнения (1.19) (например, $\bar{\lambda}'_1$ и λ'_2). Интервалы первого и второго типов чередуются. Некоторые из интервалов первого типа могут вырождаться в точку.

В каждом интервале первого типа (невыврожденном) имеет место неравенство $A^2 > 1$, а в каждом интервале второго типа — неравенство $A^2 < 1$. Другими словами, области неустойчивости совпадают с интервалами первого типа, а области устойчивости — с интервалами второго типа.

Придавая параметру λ в уравнении (1.17) всевозможные значения, получим бесконечную последовательность чередующихся об-

ластей устойчивости и неустойчивости, границами которых являются корни уравнений (1.18) и (1.19). Точки $\lambda = n$ представляют собой граничные точки между смыкающимися областями устойчивости; они сами принадлежат областям устойчивости и одновременно являются переходными. Однако можно показать, что только эти точки границ являются устойчивыми, все остальные граничные точки областей устойчивости принадлежат к неустойчивым точкам.

Таким образом, все области неустойчивости уравнения (1.12) расположены в окрестности целых чисел $\lambda = n$. При этом в окрестности каждого целого числа n расположена одна область неустойчивости.

2.3. Практический способ определения зон неустойчивости. Для практического определения зон неустойчивости можно пользоваться различными модификациями методов малого параметра и численными методами [1, 7, 10–12]. Рассмотрим один из таких методов [7].

Пусть в уравнении (1.15) параметр λ является корнем уравнения (1.18) или (1.19). Пусть для определенности речь идет о корне, обращающемся при $\mu = 0$ в заданное число n . Как уже указывалось, этот корень является аналитической функцией μ , поэтому можно записать

$$\lambda^2 = n^2 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2 + \dots \quad (1.20)$$

При этом уравнение (1.15) имеет аналитическое периодическое решение, которое представим в виде

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots, \quad (1.21)$$

где $x_j(t)$ — периодические функции времени.

Подставив ряды (1.20) и (1.21) в уравнение (1.15) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим уравнения для определения неизвестных функций $x_j(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + n^2 x_0 &= 0, \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + n^2 x_1 &= -n^2 f_1 x_0 - \beta_1 x_0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.22)$$

Уравнения (1.22) дают возможность последовательно определить неизвестные функции $x_j(t)$. Однако для того чтобы эти функции получались периодическими, необходимо, чтобы правые части уравнений (1.22) удовлетворяли некоторым условиям. Эти условия

позволяют определить неизвестные коэффициенты β_j в выражении для λ^2 . Укажем коротко, как это делается.

Общее решение первого уравнения из системы (1.22) для $x_0(t)$, которое имеет вид $x_0(t) = A_0 \cos nt + B_0 \sin nt$, всегда является периодическим и содержит две произвольные постоянные A_0, B_0 .

Рассмотрим теперь уравнение для $x_1(t)$ из системы (1.22). Правая часть этого уравнения является периодической функцией времени t . Для того чтобы это уравнение допускало периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы разложение Фурье правой части уравнения не содержало членов с функциями $\cos nt$ и $\sin nt$. Разлагая функции $f_1(t) \cos nt$ и $f_1(t) \sin nt$, присутствующие в правой части уравнения, в ряд Фурье и приравнивая нулю коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в правой части уравнения для $x_1(t)$, получим линейную однородную систему для определения величин A_0, B_0 . Система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель $\Delta(\beta_1)$ равен нулю, т. е. $\Delta(\beta_1) = 0$. Можно показать, что уравнение $\Delta(\beta_1) = 0$ имеет либо 1) два различных действительных корня, либо 2) двойной нулевой корень в зависимости от того, содержит ли разложение функции $f_1(t)$ члены с функциями $\cos 2t$ и $\sin 2t$ или нет. В первом случае, продолжая процесс для каждого из найденных значений β_1 , однозначно определим β_2, β_3 и т. д. Во втором случае ($\beta_1 = 0$) нужно рассмотреть уравнение для x_2 и повторить все рассуждения. Если окажется, что $\beta_2 = \pm\beta \neq 0$, то далее нужно поступать, как в первом случае; если же $\beta_2 = 0$, то следует рассмотреть уравнение для x_3 и т. д.

Таким образом, имея два значения β_1 , получим два разложения для λ^2 и для периодического решения. С другой стороны, как уже указывалось, значения параметра λ , при которых существуют периодическое решение уравнения (1.15), принадлежат границе области неустойчивости, т. е. являются решением уравнений $A = 1$ и $A = -1$. Эти решения $\lambda(\mu)$ являются аналитическими функциями параметра μ и представляются рядами вида (1.20). Отсюда следует, что полученные разложения для λ^2 как раз и представляют искомые границы области неустойчивости.

Здесь указана схема метода. Его подробное изложение и примеры можно найти в книгах [7, 10–12].

Имея в виду приложение к данной задаче, рассмотрим в качестве примера хорошо изученное уравнение Матье [1, 2, 6–8, 12]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0. \quad (1.23)$$

Чтобы применить изложенную выше теорию к уравнению (1.23), приведем его к виду (1.15), считая $\delta \geq 0$. Введем

новые обозначения $t = 2\tau$, $\delta = \frac{\lambda^2}{4}$, $\varepsilon = \frac{\lambda^2}{4}\mu$, тогда уравнение (1.23) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \lambda^2(1 + \mu \cos 2\tau)x = 0.$$

Ниже на плоскости параметров (δ, ε) рис. 1.3 приведены границы зон устойчивости и неустойчивости для уравнения (1.23) при малых значениях параметра ε , которые получаются при $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$. Эти границы определяются неравенствами:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots < \delta < \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} + \dots, \\ \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \dots < \delta < 1 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.24)$$

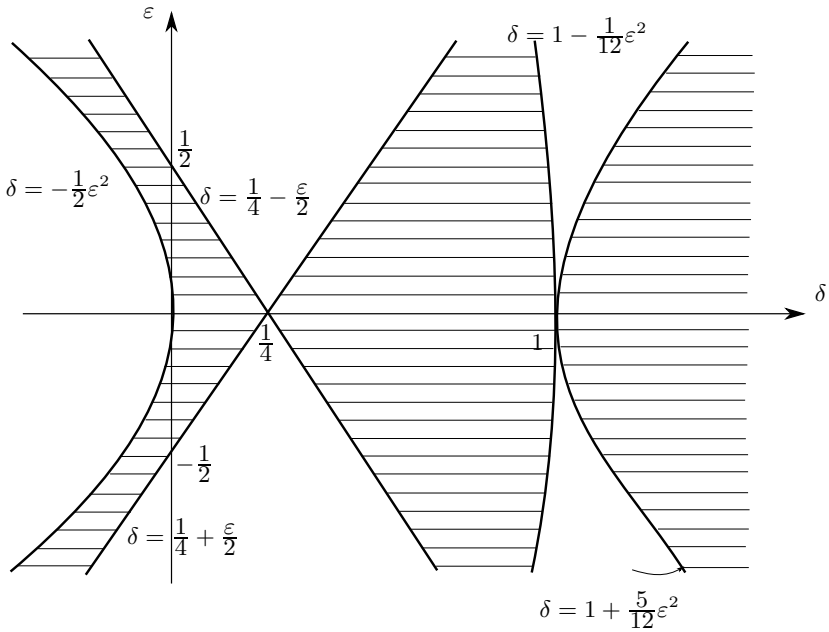


Рис. 1.3. Диаграмма устойчивости на плоскости параметров (δ, ε)

В случае когда точки (δ, ε) лежат в заштрихованной области, решение уравнения (1.23) является ограниченным. Такие области представляют собой области устойчивости уравнения Матье. Если точка (δ, ε) лежит в незаштрихованной области, то решение уравнения (1.23) неограниченно возрастает по экспоненциальному закону. Эти области являются областями неустойчивости или областями параметрического резонанса. Если точка (δ, ε) ($\varepsilon \neq 0$) лежит

на граничной кривой, то в общем случае решения уравнения (1.23) растут линейно со временем, а в частном случае — при некоторых начальных условиях могут быть периодическими.

Сравним полученные результаты с известными результатами для вынужденных колебаний линейных систем без демпфирования.

1. При вынужденных колебаниях существует совершенно определенное значение частоты возмущающей силы, при котором амплитуда линейно возрастает с течением времени; при параметрических колебаниях бесконечно много резонансных интервалов для частот параметрического возбуждения, в которых амплитуда увеличивается по экспоненциальному закону (она увеличивается во времени линейно только на границах интервалов). Один из таких интервалов содержит внутри себя значение частоты собственных колебаний. Однако важнейшим и наибольшим является другой интервал, содержащий внутри себя значения двойной частоты собственных колебаний. При параметрическом резонансе длины резонансных интервалов зависят от амплитуды возмущений и стягиваются к нулю, когда амплитуда стремится к нулю (значения частот, к которым стягиваются эти интервалы, называются критическими).

2. В случае прямого возбуждения при нерезонансных значениях частоты возмущающей силы движение складывается из собственных колебаний и вынужденных колебаний, имеющих частоту возмущающей силы. При параметрическом возбуждении движение вне резонансных интервалов в общем случае является ограниченным.

3. Если при вынужденных колебаниях с возмущающей силой, частота которой совпадает с частотой собственных колебаний, отклонения от положения равновесия остаются конечными, то это можно объяснить двумя причинами: либо действием демпфирования, пропорционального скорости, либо нелинейностью характеристики восстанавливающей силы. Для параметрически возбуждаемых колебаний это не так.

2.4. Построение зон неустойчивости для систем с демпфированием. Рассмотрим влияние демпфирования, пропорционального скорости, на параметрические колебания на примере уравнения Матье. Покажем, что и при наличии такого демпфирования возможны колебания с неограниченной амплитудой.

Будем считать, что коэффициенты демпфирования и параметрического возбуждения малы, т. е. $\delta = \mu\delta_0, q = \mu q_0$. Рассмотрим

уравнение типа Матье (1.23) при наличии демпфирования

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = -\mu \left[2\delta_0 \frac{dx}{dt} + \lambda^2 q_0 x \cos 2t \right] \quad (1.25)$$

и применим указанный в § 2.3 метод для случая $n = 1$.

Положим

$$\lambda^2 = 1 + \mu\beta_1 + \mu^2\beta_2 + \dots \quad (1.26)$$

и представим периодическое решение уравнения (1.25) в виде

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots \quad (1.27)$$

Подставляя разложения (1.26), (1.27) в уравнение (1.25) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим уравнения для определения неизвестных функций $x_j(t)$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= -\beta_1 x_0(t) - q_0 x_0(t) \cos 2t - 2\delta_0 \dot{x}_0(t), \end{aligned} \quad (1.28)$$

.....

Решение первого уравнения системы (1.28) представляется в виде $x_0(t) = A_0 \cos t + B_0 \sin t$. Условия периодичности решения $x_1(t)$ уравнения (1.28) имеют вид

$$\begin{aligned} (2\beta_1 + q_0) A_0 + 4\delta_0 B_0 &= 0, \\ 4\delta_0 A_0 + (-2\beta_1 + q_0) B_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Система (1.29) имеет ненулевое решение относительно A_0, B_0 тогда и только тогда, когда

$$\Delta = (q_0 + 2\beta_1)(q_0 - 2\beta_1) - 16\delta_0^2 = 0. \quad (1.30)$$

Из уравнения (1.30) получим

$$\beta_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{q_0^2 - 16\delta_0^2}. \quad (1.31)$$

Решение (1.31) существует, если

$$q_0^2 \geq 16\delta_0^2. \quad (1.32)$$

Имея два значения β_1 из (1.31), получим два разложения для λ^2 из (1.20), которые и представляют границу области неустойчивости в первом приближении

$$1 - \mu \frac{q_0}{2} \sqrt{1 - 16 \frac{\delta_0^2}{q_0^2}} \leq \lambda^2 \leq 1 + \mu \frac{q_0}{2} \sqrt{1 - 16 \frac{\delta_0^2}{q_0^2}}. \quad (1.33)$$

Условие (1.32) означает, что величина q_0 , характеризующая амплитуду возмущений, не может быть произвольно малой, но связана с величиной δ_0 , характеризующей демпфирование, и должна удовлетворять условию $q_0 > 4\delta_0$, т. е. условие $q_0 = 4\delta_0$ определяет порог возбуждения параметрических колебаний.

Итак, наличие демпфирования вызывает появление порога возбуждения, т. е. при малых значениях параметра μ области неустойчивости отсутствуют. В области устойчивости (незаштрихованной области рис. 1.4) отклонения теперь экспоненциально затухают (в отличие от случая отсутствия демпфирования, когда отклонения ограничены). В области неустойчивости (заштрихованной области рис. 1.4), несмотря на демпфирование, отклонения неограниченно возрастают. Таким образом, если в области неустойчивости имеют место ограниченные колебания, то их ограниченность не может быть объяснена наличием демпфирования, пропорционального скорости (как это было в случае вынужденных колебаний). Возможной причиной ограниченности колебаний является нелинейность характеристики восстанавливающей силы, действующей на систему, которую до сих пор не учитывали. Учет этой нелинейности будет произведен в следующем разделе.

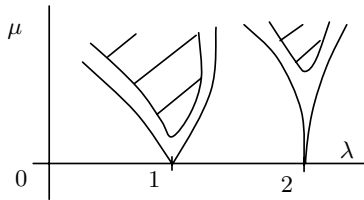


Рис. 1.4. Диаграмма устойчивости на плоскости параметров (λ, μ)

Замечание 2. Следует отметить, что уравнение (1.23) описывает помимо явления возникновения параметрических колебаний также явление стабилизации верхнего неустойчивого положения маятника при достаточно высокой частоте колебаний точки подвеса (см. область устойчивости на рис. 1.3 при $\delta < 0$ и, например, [1]).

Замечание 3. Задачи о резонансе в уравнениях вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + v_1(t)x = v_2(t),$$

(где параметрическое $v_1(t)$ и аддитивное $v_2(t)$ возмущения известны с точностью до функционального множества) могут

исследоваться при помощи вариационного подхода, основанного в этом случае на решении задачи Булгакова о максимальном отклонении. Вариационный подход оказывается эффективным и для решения задачи абсолютной устойчивости, когда $v_2(t) \equiv 0$, $v_1(\cdot) \in V$ (V — определенное функциональное множество) [13].

§3. Исследование квазилинейного уравнения

3.1. Уравнение движения маятника. Уравнение движения маятника, ось подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой s и частотой ω с учетом демпфирования, пропорционального скорости, имеет вид (см. §2)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + (\omega_0^2 + \varepsilon\omega^2 \cos\omega t) \sin\varphi = 0, \quad (1.34)$$

где $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, l — длина маятника; β — коэффициент демпфирования, φ — угол отклонения от вертикали, направленной вниз.

Для упрощения дальнейших аналитических выкладок ограничимся двумя членами разложения функции $\sin\varphi$ в окрестности положения равновесия $\varphi = 0$: $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6}$. Погрешность этого приближения равна 10% при углах φ , не превышающих $\frac{\pi}{2}$. При углах отклонения от нисходящей вертикали, больших $\frac{\pi}{2}$, эта формула уже не точна. Поэтому дальнейшие рассуждения и выводы относятся к уравнению (1.35) и для исходной задачи отражают только качественный характер поведения маятника. Обозначим: $x = \varphi$, $\tau = \omega_0 t$, $q = \varepsilon\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, $\varepsilon = \frac{s}{l}$, $p = \frac{\omega}{2\omega_0}$, $b = \frac{\beta}{\omega_0}$, $\gamma = -\frac{1}{6}$ и пренебрежем слагаемыми порядка $q\gamma$, тогда уравнение (1.34) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + (1 + q \cos 2p\tau) \varphi + \gamma\varphi^3 = 0, \quad (1.35)$$

и пренебрежем членами порядка $q\gamma$. Разложение в окрестности 0.

Уравнение (1.35) встречается также в ряде других задач и может быть исследовано различными методами [2, 7, 12]. Здесь для анализа уравнения (1.35) применим асимптотический метод разделения движений [10–12].

3.2. Асимптотический метод разделения движений. Предположим, что коэффициенты b , γ , q в уравнении (1.35) достаточно малы, так что $b = \mu b_0$, $\gamma = \mu\gamma_0$, $q = \mu q_0$, где μ — малый параметр, а величины b_0 , γ_0 , q_0 — порядка единицы. Тогда

уравнение (1.35) можно представить в виде:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu F(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau), \quad (1.36)$$

здесь $F = -2b_0 \frac{dx}{d\tau} - q_0 x \cos 2p\tau - \gamma_0 x^3$.

Введем новые переменные a, ψ по формулам

$$x = a \cos \psi, \quad (1.37)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -a \sin \psi. \quad (1.38)$$

Дифференцируя соотношение (1.37) и приравнявая результат правой части соотношения (1.38), получим

$$\frac{d^2a}{d\tau^2} \cos \psi - a \frac{d\psi}{d\tau} \sin \psi = -a \sin \psi.$$

Дифференцируя соотношение (1.38) и используя уравнение (1.36), получим

$$\frac{da}{d\tau} \sin \psi + a \frac{d\psi}{d\tau} \cos \psi = a \cos \psi - \mu F.$$

Тогда будем иметь уравнения для новых переменных

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\mu F(a \cos \psi, -a \sin \psi, \chi) \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= 1 - \frac{\mu}{a} F(a \cos \psi, -a \sin \psi, \chi) \cos \psi, \\ \frac{d\chi}{d\tau} &= 2p, \end{aligned} \quad (1.39)$$

здесь введена вспомогательная переменная $\chi = 2p\tau$.

Система (1.39) записана в стандартном виде для применения метода разделения движений и содержит одну медленную переменную a и две быстрых переменных ψ и χ .

Запишем систему (1.39) в развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\mu a (-2b_0 \sin \psi + q_0 \cos \varphi \cos \chi + a^2 \gamma_0 \cos^3 \psi) \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= 1 + \mu (-2b_0 \sin \psi + q_0 \cos \varphi \cos \chi + a^2 \gamma_0 \cos^3 \psi) \cos \psi, \\ \frac{d\chi}{d\tau} &= 2p. \end{aligned} \quad (1.40)$$

В отсутствие резонансных соотношений между частотами 1 и $2p$ ($k + 2ps \neq 0$, k, s — целые числа) можно провести независимое

осреднение по быстрым переменным ψ и χ . Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \frac{1}{2},$$

из (1.40) получим

$$\frac{da}{d\tau} = -\mu b_0 a, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = 1 + \frac{3}{8} \mu \gamma_0 a^2.$$

Отсюда следует, что в отсутствие резонансов амплитуда убывает по экспоненциальному закону, а частота стремится к собственной частоте ω_0 . Влияние параметрического возбуждения ($q_0 \cos 2p\tau$) в этом случае не сказывается (в первом приближении).

Рассмотрим теперь случай главного резонанса, когда частота собственных колебаний близка к половине частоты параметрического возбуждения: $p = 1 + \mu h$. Величина h называется расстройкой.

В этом случае система (1.40) с точностью до членов первого порядка по μ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \mu a \Phi \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= 1 + \mu \Phi \cos \psi, \\ \frac{d\chi}{d\tau} &= 2 + 2\mu h, \end{aligned} \tag{1.41}$$

где $\Phi(a, \psi, \chi) = -2b_0 \sin \psi + q_0 \cos \psi \cos \chi + a^2 \gamma_0 \cos^3 \psi$.

Для анализа системы (1.41) введем переменную ϑ , которая представляет собой разность быстрых переменных ψ и χ , так, чтобы ее скорость $\frac{d\vartheta}{d\tau}$ была порядка μ :

$$\vartheta = \psi - \frac{\chi}{2}, \quad \chi = 2(\psi - \vartheta).$$

Обозначим через $\tilde{\Phi}(a, \vartheta, \psi)$ функцию Φ , в которой переменная χ заменена выражением $\chi = 2(\psi - \vartheta)$. В переменных a, ϑ, ψ система (1.41) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \mu a \tilde{\Phi} \sin \psi, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \mu(-h + \tilde{\Phi} \cos \psi), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= 1 + \mu \tilde{\Phi} \cos \psi. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Таким образом, система (1.42) содержит две медленные переменные — a, ϑ и одну быструю — ψ . Проведем осреднение этой системы уравнений по быстрой переменной ψ .

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2(\psi - \vartheta) \cos \psi d\psi = \frac{1}{4} \sin 2\vartheta, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi = \frac{3}{8},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cos 2\vartheta \cos 2\psi + \sin 2\vartheta \sin 2\psi \right] \cos^2 \psi d\psi = \frac{1}{4} \cos 2\vartheta,$$

из системы (1.42) получим осредненные уравнения для медленных переменных

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \mu a \left(-b_0 + \frac{1}{4} q_0 \sin 2\vartheta \right), \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \mu \left[\frac{1}{4} q_0 \cos 2\vartheta + \frac{3}{8} \gamma_0 a^2 - h \right]. \end{aligned} \quad (1.43)$$

3.3. Стационарные режимы. Стационарные режимы в системе (1.43) определяются из уравнений

$$\begin{aligned} a_* \left[-b + \frac{1}{4} q \sin 2\vartheta_* \right] &= 0, \\ \frac{3}{8} \gamma a_*^2 + \frac{1}{4} q \cos 2\vartheta_* - p + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Система (1.44) имеет три стационарных режима. Учитывая, что $p = \frac{\omega}{2\omega_0}$, $\mu\gamma_0 = -\frac{1}{6}$, и $\mu h = p - 1$, $\mu q_0 = 4\varepsilon p^2$, представим эти режимы в виде:

1. $a_* = 0$, $\cos 2\theta_* = \frac{p-1}{\varepsilon p^2}$, который существует, если $p_1 \leq p \leq p_2$, где $p_1 = \frac{1}{2\varepsilon}(-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})$, $p_2 = \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon})$.

При малых ε последнее неравенство переходит в

$$2\omega_0(1 - \varepsilon) < \omega < 2\omega_0(1 + \varepsilon). \quad (1.45)$$

2. Решения, отличные от $a_* = 0$, проанализируем для простоты при $b_0 = 0$. Тогда из первого уравнения (1.43) следует $\sin 2\theta_* = 0$ ($\cos 2\theta_* = \pm 1$). Из второго уравнения (1.43) имеем два решения:

$$a_* = 4\sqrt{1 - p + \varepsilon p^2}, \quad \text{при } \cos 2\theta_* = 1, \quad (1.46)$$

которое существует, если $0 < p < p_2$;

$$a_* = 4\sqrt{1 - p - \varepsilon p^2}, \quad \text{при } \cos 2\theta_* = -1, \quad (1.47)$$

которое существует, если $0 < p < p_1$.

Учитывая выражение $p = \frac{\omega}{2\omega_0}$, при малых значениях ε получим:

$$a_* = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{4\omega_0^2 - 2\omega_0\omega + \varepsilon\omega^2}, \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_2^*, \quad (1.48)$$

$$a_* = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{4\omega_0^2 - 2\omega_0\omega - \varepsilon\omega^2}, \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_1^*, \quad (1.49)$$

здесь $\omega_1^* = 2\omega(1 - \varepsilon)$, $\omega_2^* = 2\omega(1 + \varepsilon)$

Исследуем устойчивость этих стационарных решений.

Положим в возмущенном движении $a = a_* + \xi_1$, $\vartheta = \vartheta_* + \xi_2$. Тогда уравнения (1.43), линеаризованные в окрестности стационарного движения a_* , ϑ_* , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{d\tau} &= \mu \left(\frac{1}{4} q_0 \sin 2\vartheta_* - b_0 \right) \xi_1 + \frac{\mu q_0}{2} a_* \cos 2\vartheta_* \xi_2, \\ \frac{d\xi_2}{d\tau} &= \frac{\mu}{2} \left(\frac{3}{2} \gamma_0 a_* \xi_1 - q_0 \sin 2\vartheta_* \xi_2 \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

При $b_0 = 0$ имеем $\sin 2\vartheta_* = 0$, поэтому характеристическое уравнение системы (1.50) для решений (1.48) и (1.49) имеет вид

$$\lambda^2 + \frac{1}{16} q a_*^2 \cos 2\vartheta_* = 0,$$

откуда следует, что необходимым условием устойчивости является условие $\cos 2\vartheta_* > 0$. Это означает, что решение (1.48) является устойчивым, а решение (1.49) — неустойчиво.

Для решения $a_* = 0$ при $b = 0$ уравнения (1.50) принимают вид

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = \mu \frac{q_0}{4} \sin 2\vartheta_* \xi_1, \quad \frac{d\xi_2}{d\tau} = -\frac{\mu q_0}{2} \sin 2\vartheta_* \xi_2.$$

Отсюда видно, что если $\sin 2\vartheta_* \neq 0$, то решение $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ всегда неустойчиво, независимо от знака $\sin 2\vartheta_*$, т. е. решение $a_* = 0$, $\vartheta = \vartheta_*$, существующее в области (1.45), всегда неустойчиво. Это согласуется с известным результатом.

На рис. 1.6 представлены графики стационарных резонансных амплитуд в зависимости от частоты возбуждения ω . Резонансная зона (ω_1^* , ω_2^*) в первом приближении имеет вид (1.45).

При наличии диссипации энергии ($b > 0$) картина, представленная на рис. 1.6, несколько изменится (см. рис. 1.5), т. е. срыв колебаний происходит при некоторой частоте $\omega_C > 0$.

При увеличении частоты колебаний точки подвеса маятника ω , начиная с малых значений, вертикальное положение маятника ($\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$) будет устойчивым, и установившиеся колебания с

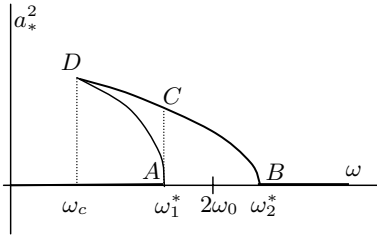


Рис. 1.5. Графики стационарных резонансных амплитуд в зависимости от частоты возбуждения ω в системе с диссипацией энергии ($b > 0$)

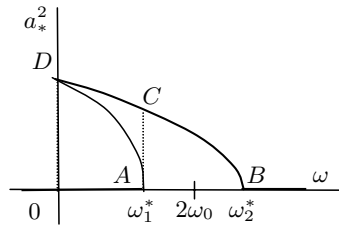


Рис. 1.6. Графики стационарных резонансных амплитуд в зависимости от частоты возбуждения ω в системе без диссипации энергии ($b = 0$)

ненулевой амплитудой в системе будут отсутствовать до тех пор, пока ω не достигнет значения ω_1^* (точка A).

Начиная с этой частоты, вертикальное положение маятника становится неустойчивым. Периодическое движение с амплитудой, соответствующей кривой AD (режим 3), также неустойчиво, поэтому отклонения маятника будут быстро увеличиваться до тех пор, пока не будет достигнута кривая BD (точка C) (устойчивый режим 2). После того как переходный процесс закончится, маятник будет совершать устойчивое периодическое движение с амплитудой, соответствующей точке C , и имеющее частоту, равную $\omega/2$. При дальнейшем увеличении частоты ω амплитуда колебаний будет уменьшаться вдоль кривой CB до тех пор, пока частота не достигнет значения ω_2^* . При $\omega > \omega_2^*$ вертикальное положение маятника снова устойчиво.

При изменении величины ω , начиная с больших значений, в точке возникнут колебания с постоянной амплитудой, и при последующем уменьшении ω амплитуда колебаний будет изменяться вдоль кривой BD . В точке D эти колебания внезапно прекратятся (сорвутся) (см. рис. 1.5), и маятник после некоторого переходного процесса вернется в свое вертикальное положение равновесия, в котором и будет оставаться при дальнейшем уменьшении частоты.

Для последующих резонансных частот эффект параметрического возбуждения в первом приближении не обнаруживается, что согласуется с диаграммой устойчивости (рис. 1.4) (вторая зона неустойчивости в первом приближении по параметру ε в ней отсутствует).

Следует отметить, что рисунки 1.6 и 1.5 относятся именно к стационарным решениям уравнения (1.34), в котором функция $\sin x$

заменена выражением $x - \frac{x^3}{6}$. Такая замена справедлива при значениях x , не превышающих $\frac{\pi}{2}$, с погрешностью не более 10%. При значениях углов, больших чем $\frac{\pi}{2}$, которые могут возникнуть при эксперименте, картины, представленные на этих рисунках, будут отражать только качественный характер поведения решений.

§4. Установка «Параметрический резонанс»

Установка представляет собой маятник *1* с точкой подвеса *3*, совершающей вертикальные колебания с фиксированной амплитудой, равной 1 см. Угол отклонения маятника измеряется импульсным датчиком *4*.

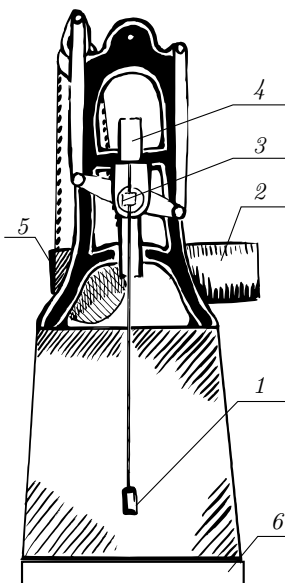


Рис. 1.7. Схема установки «Параметрический резонанс»

Вертикальные колебания точки подвеса создаются за счет работы двигателя *2*, вращательное движение которого преобразуется в линейное возвратно-поступательное движение выходного звена специального механизма. Частота вертикальных колебаний пропорциональна скорости вращения двигателя и зависит от подаваемого на него напряжения.

Задаваемая скорость вращения стабилизируется за счет введения обратной связи с импульсного датчика *5*.

Информация с датчиков поступает в систему управления *b*, которая обеспечивает формирование напряжения, поступающего на двигатель, и связь с компьютером.

С функциональной точки зрения система управления обеспечивает вертикальные колебания точки подвеса с частотой, задаваемой с компьютера, и пересылает на компьютер в реальном времени информацию о текущем отклонении маятника.

Программа для установки «Параметрический резонанс» обеспечивает наглядный графический интерфейс.

Кнопка «StartMotor» включает двигатель, кнопка «Stop Motor» его выключает.

Поле «Frequency» служит для задания частоты вертикальных колебаний точки подвеса маятника. Частота задается в герцах и вводится при двойном щелчке мыши.

При нажатии кнопки «Show» в графическом окне в реальном времени рисуется график изменения угла отклонения маятника от вертикали. Этот режим доступен как при включенном, так и выключенном двигателе, что обеспечивает визуализацию как вынужденных, так и свободных колебаний маятника.

Вычисление периода колебаний и их амплитуды делается следующим образом. Если указатель «мыши» находится в графическом окне, то при нажатии левой кнопки фиксируется его положение, и в двух полях «Mouse information» высвечивается следующая информация: в поле «Value» — отклонение маятника (число 50 соответствует отклонению на угол $\pi/2$), в поле «Time» — время в секундах относительно начала записи. Общее время записи устанавливается в поле «RecordDuration».

Для измерения амплитуды нужно щелкнуть «мышью» на последовательные максимум и минимум и взять полуразность значений, появляющихся в поле «Value». Это обеспечивает независимость измерений от возможного «смещения нуля» импульсных датчиков.

Разность показаний в поле «Time» дает полупериод колебаний. Для более точного измерения периода можно оценить суммарную продолжительность нескольких колебаний.

§5. Порядок выполнения работы

1. Запустить программу. При запуске маятник должен находиться в состоянии покоя в нижнем положении.

2. Не включая двигатель, отклонить маятник на небольшой угол, записать колебания и сделать оценку для частоты свободных малых колебаний.

3. Включить двигатель.

4. Изменяя частоту возбуждения, начиная с $\omega = 0$, определить диапазон возникновения параметрического резонанса вблизи удвоенной частоты свободных малых колебаний. Далее, увеличивая частоту, добиться прекращения параметрических колебаний.

5. При каждой частоте возбуждения дождаться установившегося режима параметрических колебаний и зафиксировать амплитуду колебаний. Изменять частоту следует на 0,1 Гц. Уменьшение частоты производить вплоть до срыва параметрических колебаний при частоте ω_c .

6. При одной и той же частоте в диапазоне $\omega_A < \omega < \omega_1^*$ получить два устойчивых стационарных режима с амплитудами $a_* = 0$ и $a_* \neq 0$.

7. Выключить двигатель.

8. При выключенном двигателе отклонить маятник на угол A_0 , соответствующий точке срыва колебаний, и отпустить. Вывести график свободных колебаний и по графику определить амплитуду A_0 , амплитуду A_1 после двух периодов колебаний, T — длительность соответствующего промежутка времени и вычислить экспериментальную оценку коэффициента затухания по формуле $\beta = \frac{1}{T} \ln \frac{A_0}{A_1}$. Вычислить теоретическое значение коэффициента затухания по формуле $\beta = \frac{\varepsilon \omega_c^2}{4\omega_0}$, соответствующей неравенству (3.14). Сравнить полученные значения коэффициента затухания.

5.1. Задания по выполненной работе.

1. Определить зону параметрического резонанса.

2. Построить экспериментальные и теоретические графики зависимости амплитуды нелинейных установившихся параметрических колебаний от частоты возбуждения.

§6. Контрольные вопросы

1. Характеристические показатели линейных систем с периодическими коэффициентами. Теорема об устойчивости.
2. Зоны устойчивости и неустойчивости для уравнений второго порядка. Аналитическое построение одной из зон неустойчивости для уравнения Матье.
3. Исследование нелинейного уравнения параметрических колебаний. Стационарные режимы и исследование их устойчивости.
4. Сопоставление параметрического и обычного резонанса в колебательной системе.

Литература

1. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1976.
2. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.
4. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М: Наука, 1987.
5. Гуляев В.И., Багренев В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. М.: Высшая школа, 1989.
6. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М: Наука, 1972.
7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М: Наука, 1966.
8. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
9. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физмалит, 2010.
10. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
11. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во Моск.ун-та, 1991.
12. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М.: Физматгиз, 1963.
13. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимизация динамики управляемых систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.