МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

И.В. СЕМЕНОВА

БУЛЕВА АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

САМАРА
Издательство Самарского университета
2023

УДК 512.563(075)
ББК 22.1я7
С30

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. М. Н. Саушкин,
канд. физ.-мат. наук, доц. М. Е. Федина

Семенова, Ирина Владимировна

С30 **Булева алгебра и ее применение при построении математических моделей**: учебное пособие / *И.В. Семенова.* – Самара : Издательство Самарского университета, 2023. – 100 с. : ил.

ISBN 978-5-7883-1870-7

В пособии изложены основные вопросы булевой алгебры. Рассмотрены свойства булевых функций, методы их минимизации и приведения к нормальным формам. Приведено описание всех замкнутых классов булевых функций, а также методы определения полноты систем таких функций. Кроме того, в пособии рассматриваются вопросы практического применения булевой алгебры при построении математических моделей в различных областях.

Помимо основных понятий и теоретических результатов, пособие включает алгоритмы и примеры решения типовых задач, поэтому оно является не только дополнением к материалам лекций по курсу «Дискретная математика», но и поддержкой самостоятельной работы обучающихся по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Подготовлено на кафедре информатики и вычислительной математики.

УДК 512.563(075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-7883-1870-7

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

2 ноября 1815 года родился выдающийся английский математик и логик Джордж Буль. Одним из главных его достижений является создание математической логики – раздела математики, который строится на применении формальных математических методов для описания процесса человеческого мышления.

В 1848 году была опубликована его статья по началам математической логики — «Математический анализ логики, или опыт исчисления дедуктивных умозаключений», а в 1854 году появилась главная его работа — «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей».

Буль первым показал, что существует аналогия между алгебраическими и логическими действиями. Он ввел систему обозначений и правил, пользуясь которыми можно закодировать любые высказывания и манипулировать ими как обычными числами. Основными операциями булевой алгебры являются: конъюнкция (И), дизъюнкция (ИЛИ), отрицание (НЕ), которые позволяют производить операции как над числами, так и над символами.

После смерти Джорджа Буля его систему стали применять для описания и моделирования схем электрических переключателей, предполагая, что ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому, как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. Спустя несколько десятилетий ученые решили объединить созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Джордж Буль выделил три основные формы процесса человеческого мышления: понятие, суждение (высказывание, утверждение), умозаключение.

Определение. *Понятие* – это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.

Понятие имеет две характеристики: содержание и объем.

Определение. *Содержание* – это совокупность существенных признаков объекта.

Определение. *Объем* – это совокупность предметов, на которые распространяется понятие.

Определение. *Высказывание* – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о реальных предметах, их свойствах и отношениях между ними.

Высказывания могут быть выражены с помощью естественных и формальных языков.

Высказывания на естественном языке могут быть выражены только повествовательным предложением.

Высказывания могут быть *простыми* и *составными*.

Истинность простых высказываний определяется на основании здравого смысла.

Истинность составных высказываний определяется с помощью алгебры высказываний.

Пример 1

«Который час?» – не высказывание.

«$2 * 10 = 20$» – высказывание.

«$2 * x = 20$» – не высказывание, так как нет возможности однозначно определить истинный утверждается факт или ложный (все зависит от конкретных значений х).

Таким образом, если языковое предложение содержит параметр или условие, то оно не является высказыванием.

О высказывании всегда можно однозначно сказать: истинно оно или ложно.

Определение. *Умозаключение* – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких высказываний может быть получено новое суждение.

Определение. *Посылками умозаключения* могут быть только истинные суждения.

Пример 2

Умозаключение 1. «Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен».

Умозаключение 2. «Все граждане России имеют право на образование. Сидоров – гражданин России. Следовательно, Сидоров имеет право на образование».

Можно заметить, что все эти умозаключения построены по одной и той же схеме: все M – суть P. S есть M. Следовательно, S есть P. Поэтому с точки зрения математической логики они являются одинаковыми.

Определение. *Логика* – это наука о формах и способах мышления.

Определение. *Математическая логика* – наука, изучающая умозаключения с точки зрения их формального строения.

Определение. Истина и ложь называются *истинностными значениями*.

Истина интерпретируется как 1, а ложь – как 0.

Логические операции (связки)

Логические операции служат для связи высказываний. Они не выводят за класс высказываний.

1. *Отрицание (применяется к 1 высказыванию $\Rightarrow$ одноместная операция)*.

Отрицанием высказывания P является высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание P ложно.

Обозначение: P или $\overline{P}$.

Аналог в естественном языке: не верно, что P; не P.

2. *Конъюнкция (связывает 2 высказывания $\Rightarrow$ двухместная логическая операция).*

Конъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истины оба высказывания P и Q.

Обозначение: $P \wedge Q$; $P \,\&\, Q$; PQ.

Аналог в естественном языке: P и Q (логическое умножение).

3. *Дизъюнкция (связывает 2 высказывания $\Rightarrow$ двухместная логическая операция).*

Дизъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания P и Q.

Обозначение: $P \vee Q$.

Аналог в естественном языке: P или Q.

4. *Импликация (двухместная логическая операция)*.

Импликацией высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда P истинно, а Q – ложно (из истины не может следовать ложь).

Обозначение: $P \Rightarrow Q$, $P \to Q$, $P \supset Q$.

Аналог в естественном языке: из P следует Q; если P, то Q.

P – посылка импликации.

Q – заключение импликации.

5. *Эквиваленция или логическое равенство (двухместная логическая операция)*.

Эквиваленцией высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения P и Q совпадают (они либо оба истинны, либо оба ложны).

Обозначение: $P \sim Q$.

Аналог в естественном языке: P эквивалентно Q.

Алфавит математической логики состоит из следующих элементов:

1) высказывательные переменные – буквы латинского алфавита, возможно с индексами;

2) логические символы: ∧, ∨, &, ⇒, →, ⊃, ~;

3) символы скобок: ().

Определение. Элементы алфавита называются символами алфавита.

Определение. Произвольная конечная последовательность символов называется словом.

Определение. Слово в алфавите логики высказываний называется формулой, если:

1) это высказывательная переменная (такая формула называется атомарной);

2) x и y формулы, то $(\neg x)$, $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \to y)$, $(x \sim y)$ тоже формулы;

3) других формул нет.

Пример 3

$$(\underbrace{x \wedge y}_{\text{формула}}) \supset \underbrace{z\bar{a}}_{\text{не формула}} - \text{слово, но не формула;}$$

$$(x \wedge y) \supset (z \wedge \bar{a}) - \text{формула.}$$

2 БУЛЕВЫ (ДВОИЧНЫЕ НАБОРЫ)

Введем следующие обозначения:

$$E_2 = \{0, 1\},$$

$$\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \text{где } \alpha_i \in E_2,$$

где $\tilde{\alpha}^n$ – двоичный набор;

α_i – компоненты (координаты) набора $\tilde{\alpha}^n$, причем каждая координата α_i может принимать два значения: 0 или 1;

n – длина набора.

Определение. Совокупностью двоичных наборов называется множество

$$E_2^n = \{\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \ / \ \alpha_i \in E_2\}.$$

$|E_2^n| = 2^n$ – количество всех возможных двоичных наборов.

Определение. *Расстояние* между двумя двоичными наборами определяется как величина, значение которой может быть найдено следующим образом:

$$\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Пример 4

Пусть $\tilde{\alpha}^3 = (1, 0, 1), \tilde{\beta}^3 = (1, 1, 1)$.

Тогда $\rho(\tilde{\alpha}^3, \tilde{\beta}^3) = 1$.

Расстояние между двумя двоичными наборами также можно интерпретировать как количество компонент, в которых наборы различаются.

Определение. Наборы $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ называются *соседними*, если расстояние между ними равно 1.

Определение. Если $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = n$, то наборы называются *противоположными*.

Пример 5

Наборы $\tilde{\alpha}^3 = (0,0,0)$ и $\tilde{\beta}^3 = (1,1,1)$ являются противоположными, так как $\rho(\tilde{\alpha}^3, \tilde{\beta}^3) = 3$ $(n = 3)$.

Определение. Набор $\tilde{\alpha}^n$ предшествует набору $\tilde{\beta}^n$, если $\forall i = 1..n$ выполняется $\alpha_i \leq \beta_i$.

Обозначение: $\preccurlyeq$.

Пример 6

$(1,0,1) \preccurlyeq (1,1,1)$ так как $1 \leq 1, 0 \leq 1, 1 \leq 1$;

$(1,0,1) \not\preccurlyeq (0,1,0)$ – несравнимые наборы.

Определение. Наборы $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ *сравнимы*, если либо $\tilde{\alpha}^n \preccurlyeq \tilde{\beta}^n$, либо $\tilde{\beta}^n \preccurlyeq \tilde{\alpha}^n$. В противном случае наборы *несравнимы*.

3 БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Определение. *Булева функция* – это произвольная функция, область определения которой – декартово произведение множества E_2 само на себя n раз, а область значений – само множество E_2, где $E_2 = \{0, 1\}$:

$$f: \underbrace{E_2 \times E_2 \times \ldots \times E_2}_{n} \to E_2 \,,$$

n – количество переменных, от которых зависит функция.

3.1 Способы задания булевых функций

1. Таблица истинности $T(f)$:

№	$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0 0 … 0 0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
1	0 0 … 0 1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
…	…	…
n	1 1 … 1 1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Важно помнить: значения во втором столбце таблицы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ являются стандартным расположением двоичных наборов и записываются всегда в одном и том же порядке в соответствии со следующим правилом: каждый двоичный набор является записью номера строки № в двоичной системе счисления.

Пример таблицы истинности для функции, зависящей от 2-х переменных ($n = 2$):

№	$x_1,\quad x_2$	$f(x_1, x_2)$
0	0 0	$f(0,0)$
1	0 1	$f(0,1)$
2	1 0	$f(1,1)$
3	1 1	$f(1,1)$

Пример таблицы истинности для функции, зависящей от 3-х переменных ($n = 3$):

№	$x_1,\quad x_2,\quad x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0 0 0	$f(0,0,0)$
1	0 0 1	$f(0,0,1)$
2	0 1 0	$f(0,1,0)$
3	0 1 1	$f(0,1,1)$
4	1 0 0	$f(1,0,0)$
5	1 0 1	$f(1,0,1)$
6	1 1 0	$f(1,1,0)$
7	1 1 1	$f(1,1,1)$

2. Прямоугольная таблица истинности $\Pi_{k,n-k}(f)$

$x_1, x_2, \dots, x_k$	$\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k+1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_n & \cdots & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}$	$f(\alpha_1 \dots \alpha_n)$	

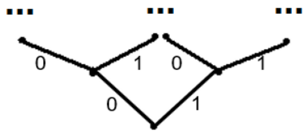
3. Вектор значений

$$\tilde{\alpha}_f^{2^n} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1}).$$

4. Аналитическая форма записи

$$f(\tilde{x}^2) = x_1 \vee x_2.$$

5. Корневые деревья



3.2 Элементарные булевы функции

1) $f_1(x) = 0;$
2) $f_2(x) = 1;$
3) $f_3(x) = x;$
4) $f_4(x) = \bar{x};$

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

5) $f_5(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \& x_2 = x_1 \cdot x_2;$
6) $f_6(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2;$
7) $f_7(x_1, x_2) = x_1 \supset x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \rightarrow x_2;$
8) $f_8(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2 = x_1 \leftrightarrow x_2;$

x_1	x_2	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

9) $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = x_1 + x_2$ – сложение по модулю 2;

x_1	x_2	f_9
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

10) $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 | x_2$ – штрих Шеффера (отрицание конъюнкции);

11) $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции).

x_1	x_2	f_{10}	f_{11}
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

3.3 Равносильность булевых функций

Определение. Упорядоченный набор переменных $<x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}>$ называется *списком формулы А*, если все переменные формулы содержатся в этом наборе.

Пример 7

Для формулы $A = (x_1 \wedge x_2) \supset x_5$ списком будет $< x_1, x_2, x_5 >$.

Для формулы $B = (x_2 \wedge \bar{x}_4) \sim x_8$ списком будет $< x_2, x_4, x_8 >$.

Определение. *Оценкой списка переменных* называется сопоставление каждой переменной истинностного значения.

Если список содержит n переменных, то число различных оценок для него (количество различных двоичных наборов длины n) равно 2^n.

Пример 8

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <1,1> – оценки списка переменных $< x_1, x_2 >$

Определение. Формулы A и B называются *равносильными* (эквивалентными), если на любой оценке списка переменных они принимают одинаковые значения.

Обозначение: $A \equiv B$.

Равносильность двух формул является отношением эквивалентности.

Основные равносильности

Для любых формул a, b, c справедливы следующие равносильности:

1. Коммутативность

$$a \wedge b \equiv b \wedge a,$$
$$a \vee b \equiv b \vee a.$$

2. Идемпотентность

$$a \wedge a \equiv a,$$
$$a \vee a \equiv a.$$

3. Ассоциативность

$$a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c,$$
$$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c.$$

4. Дистрибутивность

$$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$
$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

5. Законы поглощения

$$a \wedge (a \vee b) \equiv a,$$
$$a \vee (a \wedge b) \equiv a.$$

6. Снятие двойного отрицания

$$\bar{\bar{a}} \equiv a.$$

7. Законы де Моргана

$$\overline{(a \wedge b)} \equiv \bar{a} \vee \bar{b},$$
$$\overline{(a \vee b)} \equiv \bar{a} \wedge \bar{b}.$$

8. Расщепление

$$a \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}),$$

$$a \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}).$$

9. Взаимосвязь логических связок

$$a \vee b \equiv \overline{(\bar{a} \wedge \bar{b})} \equiv \bar{a} \supset b,$$

$$a \wedge b \equiv \overline{(\bar{a} \vee \bar{b})} \equiv \overline{(a \supset \bar{b})},$$

$$a \supset b \equiv \bar{a} \vee b \equiv \overline{(a \wedge \bar{b})} \equiv \big((a \wedge b) + a\big) + 1,$$

$$a + b \equiv (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \equiv (a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}),$$

$$a \sim b \equiv (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \equiv (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b) \equiv \overline{(a + b)}.$$

10. Тождества для операций с константами

$$a \wedge 0 \equiv 0,$$

$$a \vee 0 \equiv a,$$

$$a \wedge 1 \equiv a,$$

$$a \vee 1 \equiv 1.$$

11. Закон исключения третьего

$$a \vee \bar{a} \equiv 1.$$

12. Закон противоречия

$$a \wedge \bar{a} \equiv 0.$$

13. Правило вычеркивания

$$\bar{a} \wedge b \vee a \equiv b \vee a.$$

Способы доказательства равносильности булевых функций

1. С помощью таблицы истинности.

Пример 9

Докажем справедливость равенства левой и правой частей закона де Моргана: $\overline{(a \wedge b)} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$.

Для этого с помощью таблицы истинности найдем вектора значений для функций в левой и правой частях равенства, сравним их:

a	b	$a \wedge b$	$\overline{(a \wedge b)}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \vee \bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0

2. Путем рассуждений.

Пример 10

Докажем справедливость равенства левой и правой частей закона де Моргана: $\overline{(a \wedge b)} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$.

а) Предположим, что на некоторой оценке списка переменных левая часть формулы $\overline{(a \wedge b)}$ принимает значение ложь.

Следовательно, конъюнкция $(a \wedge b)$ принимает значение истина.

Таким образом значения a и b тоже истинны (по определению конъюнкции).

Тогда: $\bar{a}$ – принимает значение ложь, $\bar{b}$ – ложь.

Следовательно: $\bar{a} \vee \bar{b}$ – принимает значение ложь.

б) Предположим, что на некоторой оценке списка переменных левая часть формулы $\overline{(a \wedge b)}$ принимает значение истина.

Следовательно, конъюнкция $(a \wedge b)$ принимает значение ложь.

Таким образом, a и b (по определению конъюнкции) могут принимать следующие значения:

случай 1: a – ложь и b – ложь

тогда: $\bar{a}$ – принимает значение истина, $\bar{b}$ – принимает значение истина, следовательно, $\bar{a} \vee \bar{b}$ – принимает значение истина.

случай 2: a – ложь и b – истина

тогда: $\bar{a}$ – принимает значение истина, $\bar{b}$ – принимает значение ложь, следовательно, $\bar{a} \vee \bar{b}$ – принимает значение истина.

случай 3: a – истина и b – ложь

тогда: $\bar{a}$ – принимает значение ложь, $\bar{b}$ – принимает значение истина, следовательно, $\bar{a} \vee \bar{b}$ – принимает значение истина.

3) Эквивалентные преобразования

3.4 Существенные и фиктивные переменные

Определение. Оценки $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ списка переменных называются *соседними по* i*-й переменной* если они отличаются только i-й координатой, т.е. имеют вид:

$$u =< a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n >,$$
$$v =< a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n >.$$

Определение. Переменная $\boldsymbol{x_i}$ называется *фиктивной переменной* булевой функции f, если для любых оценок списка переменных u и v, соседних по i-й переменной, выполняется равенство:

$$f(u) = f(v).$$

Определение. Переменная $\boldsymbol{x_i}$ называется *существенной переменной* булевой функции f, если существует хотя бы одна пара оценок списка переменных $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, соседних по i-й переменной, такая, что справедливо неравенство:

$$f(u) \neq f(v).$$

4 ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Определение. Символы $\wedge$ и $\vee$ называются *двойственными* друг к другу.

Определение. Функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если в функции f все символы $\wedge$ и $\vee$ заменены на двойственные.

Замечание. Построить функцию $f^*(x_1, \dots, x_n)$, двойственную к функции $f(x_1, \dots, x_n)$, можно только при условии, если в функции f из логических операций присутствуют $\wedge$, $\vee$ и $\neg$, а другие операции отсутствуют.

Замечание. Двойственной к 1 является 0, а двойственной к 0 является 1, то есть $1^* = 0$; $0^* = 1$.

Пример 11

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_1;$$

$$f^*(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge x_1.$$

Пример 12

$$f(x_1, x_2) = 1 \supset \overline{x_1 \vee x_2}.$$

Преобразуем исходную функцию с помощью равносильности:

$$a \supset b = \bar{a} \vee b,$$

$$f(x_1, x_2) = 0 \vee \overline{x_1 \vee x_2},$$

$$f^*(x_1, x_2) = 1 \wedge \overline{(x_1 \wedge x_2)}.$$

Определение. Если $f^* = f$, то функция f называется *самодвойственной*.

Пример 13

Покажем, что следующая функция является самодвойственной:

$$f(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz.$$

Для этого построим двойственную к ней функцию $f^*(x, y, z)$ и покажем, что она совпадает с самой функцией $f(x, y, z)$.

$f^*(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) =$(*по дистрибутивному закону*) $= (x \vee y) \wedge (xy \vee yz \vee zx \vee z) =$ (*сгруппируем*) $= (x \vee y) \wedge$

$\wedge \big((xy \vee z) \vee (yz \vee xz)\big) =$ (*раскроем скобки*) $= (x \vee y)(xy \vee z) \vee (x \vee y)(yz \vee xz) =$ (*вынесем z за скобку*) $= (x \vee y)(xz \vee z) \vee$ $(x \vee y)(x \vee \vee y)z = (x \vee y)(xy \vee z) \vee (x \vee y)z =$ (раскроем *скобки*) $= xyx \vee xz \vee\vee yyx \vee yz \vee yz \vee xz = xy \vee xz \vee xy \vee yz \vee xz = xy \vee xz \vee yz == f(x, y, z)$

Утверждение 1. $(F^*)^* = F$.

Лемма. Пусть формула A зависит от списка переменных $< x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} >$ и $< s_1, s_2, \dots, s_k >$ его произвольная оценка.

Тогда: $A(< s_1, \dots, s_k >) = 1$ тогда и только тогда, когда $A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0$, где оценка $< t_1, \dots, t_k >$ – двойственная к оценке $< s_1, \dots, s_k >$, т.е. оценка, в которой 1 и 0 заменены на двойственные значения (1 на 0, 0 на 1).

Доказательство

Доказательство будем проводить ***методом математической индукции***.

Параметр математической индукции – количество логических символов в A.

Пример 14

$x \vee y$ – 1 логический символ.

$\bar{x} \vee \bar{y}$ – 3 логических символа.

1 шаг. Докажем, что утверждение верно при количестве логических символов в A, равном 0 ($m = 0$).

Тогда, $A = x_{i_p}$ – атомарная формула. Очевидно, что $A^* = x_{i_p}$.

Пусть $A(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow x_{i_p}(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow s_p = 1 \Rightarrow t_p = 0 \Rightarrow \Rightarrow x_{i_p}(< t_1, \dots, t_k >) = 0$.

Пусть $A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \Rightarrow x_{i_p}(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \Rightarrow t_p = 0 \Rightarrow s_p = 1 \Rightarrow \Rightarrow x_{i_p}(< s_1, \dots, s_k >) = 1$.

2 шаг. Сделаем предположение математической индукции: пусть утверждение леммы верно для любого $m < n$.

3 шаг. Докажем, что утверждение леммы верно для $m = n$.

Рассмотрим различные виды формул.

1 случай.

$$A = \bar{B}.$$

Очевидно, что $A^* = \bar{B}^*$.

Пусть

$$A(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow B(< s_1, \dots, s_k >) = 0.$$

В B количество логических операций меньше, чем в A, а значит, выполняется шаг 2 леммы, т.е.

$$B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1 \Rightarrow \bar{B}^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0.$$

Так как $A^* = \bar{B}^*$, то $A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0$, *что и требовалось доказать*.

Пусть

$$A(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \Rightarrow B(< s_1, \dots, s_k >) = 1.$$

В B количество логических операций меньше, чем в A, а значит, выполняется шаг 2 леммы, т.е.

$$B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \Rightarrow \bar{B}^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1.$$

Так как $A^* = \bar{B}^*$, то $A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1$, *что и требовалось доказать*.

Докажем обратное утверждение.

Пусть

$$A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1 \Rightarrow B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0.$$

В B^* количество логических операций меньше, чем в A^*, а значит, выполняется шаг 2 леммы, т.е.

$$(B^*)^*(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow \overline{(\mathrm{B}^*)^*}(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{B}(< s_1, \dots, s_k >) = 0.$$

Так как $A = \bar{B}$, то $A(< s_1, \dots, s_k >) = 0$, *что и требовалось доказать*.

Пусть

$$A^*(< t_1, \dots, t_k) = 0 \Rightarrow B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1.$$

В B^* количество логических операций меньше, чем в A^*, а значит, выполняется шаг 2 леммы, т.е.

$$(B^*)^*(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \Rightarrow \overline{(\mathrm{B}^*)^*}(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{B}(< s_1, \dots, s_k >) = 1.$$

Так как $A = \bar{B}$, то $A(< s_1, \dots, s_k >) = 1$, *что и требовалось доказать*.

Таким образом, для случая 1 лемма доказана.

2 случай

$$A = B \wedge C.$$

Очевидно, что $A^* = B^* \vee C^*$.

Пусть

$$A(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \text{ и } C(< s_1, \dots, s_k >) = 1.$$

В B и C количество логических операций меньше, чем в A, а значит, выполняется шаг 2 леммы для B и C, т.е.

$$B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \text{ и } C^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (B^* \vee C^*)(< t_1, \dots, t_k >) = 0.$$

Так как $A^* = B^* \vee C^*$, то $A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0$, *что и требовалось доказать*.

Пусть

$$A(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \text{ и/или } C(< s_1, \dots, s_k >) = 0.$$

В B и C количество логических операций меньше, чем в A, а значит, выполняется шаг 2 леммы для B и C, то есть

$$B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1 \text{ и/или } C^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (B^* \vee C^*)(< t_1, \dots, t_k >) = 1.$$

Так как $A^* = B^* \vee C^*$, то $A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1$, *что и требовалось доказать*.

Докажем обратное утверждение.

Пусть

$$A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (B^* \vee C^*)(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \text{ и } C^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0.$$

В B^* и C^* количество логических операций меньше, чем в A^*, а значит, выполняется шаг 2 леммы для B^* и C^*, т.е.

$$B(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \text{ и } C(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (B \wedge C)(< s_1, \dots, s_k >) = 1.$$

Так как $A = B \wedge C$, то $A(< s_1, \dots, s_k >) = 1$, *что и требовалось доказать*.

Пусть

$$A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (B^* \vee C^*)(< t_1, \dots, t_k >) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1 \text{ и/или } C^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1.$$

В B^* и C^* количество логических операций меньше, чем в A^*, а значит, выполняется шаг 2 леммы для B^* и C^*, т.е.

$$B(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \text{ и/или } C(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (B \wedge C)(< s_1, \dots, s_k >) = 0.$$

Так как $A = B \wedge C$, то $A(< s_1, \dots, s_k >) = 0$, *что и требовалось доказать*.

3 случай.

$$A = B \vee C.$$

Очевидно, что $A^* = B^* \wedge C^*$.

Доказательство проводится аналогично доказательству для случая 2.

Лемма доказана.

Теорема. (*Принцип двойственности*) Если $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.

Доказательство

1) Дано $A \equiv B$, надо доказать $A^* \equiv B^*$.

Пусть $< x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} >$ – список переменных для A и B,

$< t_1, t_2, \dots, t_k >$ – произвольная оценка этого списка переменных.

Допустим

$$A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1 \Rightarrow (A^*)^*(< s_1, \dots, s_k >) = 0,$$

где $< s_1, \dots, s_k >$ – двойственная оценка для $< t_1, \dots, t_k >$.

Так как $(A^*)^* = A$ и $A \equiv B$, то на основании леммы получим:

$$A(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \Rightarrow B(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1.$$

Допустим

$$A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \Rightarrow (A^*)^*(< s_1, \dots, s_k >) = 1,$$

где $< s_1, \dots, s_k >$ – двойственная оценка для $< t_1, \dots, t_k >$.

Так как $(A^*)^* = A$ и $A \equiv B$, то на основании леммы получим:

$$A(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow B(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0.$$

Так как оценка $< t_1, \dots, t_k >$ произвольная, то для любой оценки списка переменных доказано, что если $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.

2) Дано $A^* \equiv B^*$, надо доказать $A \equiv B$.

Допустим,

$$A(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0,$$

где $< t_1, \dots, t_k >$ – двойственная оценка для $< s_1, \dots, s_k >$.

Так как $A^* \equiv B^*$ и $(A^*)^* = A$, то на основании леммы получим:

$$B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 0 \Rightarrow (B^*)^*(< s_1, \dots, s_k >) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B(< s_1, \dots, s_k >) = 1.$$

Допустим,

$$A(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \Rightarrow A^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1,$$

где $< t_1, \dots, t_k >$ – двойственная оценка для $< s_1, \dots, s_k >$.

Так как $A^* \equiv B^*$ и $(A^*)^* = A$, то на основании леммы получим:

$$B^*(< t_1, \dots, t_k >) = 1 \Rightarrow (B^*)^*(< s_1, \dots, s_k >) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B(< s_1, \dots, s_k >) = 0.$$

Так как оценка $< s_1, \dots, s_k >$ произвольная, то для любой оценки списка переменных доказано, что если $A^* \equiv B^*$, то $A \equiv B$.

Теорема доказана.

5 ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ВСЮДУ ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

5.1 Разложение булевых функций по переменным

Теорема о дизъюнктивном разложении. Любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\forall m$ $(1 \le m \le n)$ можно представить в виде:

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) =$$
$$= \bigvee_{(\sigma_1 \dots \sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n),$$

где $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, \text{если } \sigma_i = 1 \\ \bar{x}_i, \text{если } \sigma_i = 0 \end{cases}$, т. е. $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$.

Доказательство

Необходимо доказать, что некоторая формула реализует заданную функцию. Для этого достаточно взять произвольный набор значений аргументов функции, вычислить на этом наборе значение формулы, и если оно окажется равным значению функции на этом наборе аргументов, то из этого будет следовать доказываемое утверждение (в силу произвольности выбора набора).

Возьмем произвольный набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Левая часть доказываемого равенства будет иметь вид:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Правая часть доказываемого равенства будет иметь вид:

$$\bigvee_{(\sigma_1 \dots \sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_m) =$$
$$= \bigvee_{(\sigma_1 \dots \sigma_m)} \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \alpha_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n).$$

Все конъюнкции, в которые входит такое i, что $\alpha_i \neq \sigma_i$ равны 0 и их можно опустить. Поэтому в дизъюнкции останется только одно слагаемое, в котором для любого i выполняется $\alpha_i = \sigma_i$. Тогда получим:

$$\alpha_1^{\alpha_1} \dots \alpha_m^{\alpha_m} \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) = \{\alpha_i^{\alpha_i} \equiv 1\} =$$
$$= f(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Так как набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – произвольный, то аналогичные рассуждения можно повторить для любого набора.

Теорема доказана.

Следствие 1. Разложение по одной переменной x_n.

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Следствие 2. Разложение по всем переменным ($m = n$).

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Если $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, то $f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$.

Теорема о конъюнктивном разложении. Любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \forall m\, (1 \leq m \leq n)$ можно представить в виде:

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) =$$
$$= \bigwedge_{(\sigma_1 \dots \sigma_m)} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_m^{\bar{\sigma}_m} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n),$$

где $x_i^{\bar{\sigma}_i} = \begin{cases} x_i, \text{если } \sigma_i = 0 \\ \bar{x}_i, \text{если } \sigma_i = 1 \end{cases}$, т. е. $x^0 = x$, $x^1 = \bar{x}$.

5.2 Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Определение. Формулу называют *элементарной конъюнкцией*, если она является конъюнкцией (может быть одночленной) переменных и отрицания переменных.

Пример 15

Элементарными конъюнкциями являются:

1) x_1; 2) $\bar{x}_2$; 3) $x_1 \wedge x_2$; 4) $x_1 \wedge \bar{x}_2$.

Элементарными конъюнкциями не являются:

1) $x_1 \vee (x_2 \supset x_3)$; 2) $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$.

Определение. Формула находится в *дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ),* если она является дизъюнкцией (может быть одночленной) элементарных конъюнкций.

Пример 16

Формулами, находящимися в ДНФ, являются:

1) x_1; 2) $\bar{x}_2$;

3) $x_1 \vee x_2$; 4) $(x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_4 \wedge \bar{x}_5)$.

Определение. Формулу называют *элементарной дизъюнкцией*, если она является дизъюнкцией (может быть одночленной) переменных и отрицания переменных.

Пример 17

Элементарными дизъюнкциями являются:

1) x_1; 2) $\bar{x}_2$; 3) $x_1 \vee x_2$; 4) $x_1 \vee \bar{x}_2$.

Элементарными дизъюнкциями не являются:

1) $x_1 \vee (x_2 \supset x_3)$; 2) $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$.

Определение. Формула находится в *конъюнктивной нормальной форме (КНФ),* если она является конъюнкцией (может быть одночленной) элементарных дизъюнкций.

Пример 18

Формулами, находящимися в КНФ, являются:

1) x_1; 2) $\bar{x}_2$;

3) $x_1 \wedge x_2$; 4) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_4 \vee \bar{x}_5)$.

Замечание: ДНФ и КНФ не являются однозначно определенными формулами.

Пример 19

$$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) \text{ – ДНФ.}$$

$$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) \equiv (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \equiv$$

$$\equiv (x_1 \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_3) \text{ – также ДНФ.}$$

Теорема о приведении к ДНФ. Для любой формулы A можно найти (существует) формулу B, находящуюся в ДНФ, такую что $A \equiv B$ (B называется ДНФ формулы A).

Доказательство

1 шаг. Для формулы A надо построить формулу A_1, такую что:

$A \equiv A_1$ и не содержит никаких логических операций ($\sim$, $\supset$ и т.д.) кроме $\wedge$, $\vee$ и $\neg$.

Это можно сделать, используя основные равносильности.

2 шаг. Докажем, что для формулы A_1 можно построить формулу A_2, такую что: $A_2 \equiv A_1$ и отрицание в ней содержится только перед переменными (формула с тесными отрицаниями).

Доказательство будем проводить методом математической индукции по числу логических символов в A_1.

1 этап. Обозначим через n – количество логических символов в A_1.

Докажем, что утверждение теоремы верно при количестве логических символов в A, равном 0 ($n = 0$).

$A_1 = x_i \Rightarrow A_2 = x_i \Rightarrow A_1 \equiv A_2$ – утверждение верно.

2 этап. Сделаем предположение математической индукции: пусть утверждение теоремы верно для количества логических символов меньшего n.

3 этап. Докажем, что утверждение теоремы верно для формулы A_1 с количеством логических операций равным n.

Рассмотрим случаи для разных видов формулы A_1.

1) $A_1 = B_1 \vee C_1$.

В B_1 логических операций меньше, чем в A_1, а следовательно, меньше n.

Поэтому по шагу 2 будет существовать формула B_2, такая что $B_2 \equiv B_1$ и в ней будут только тесные отрицания.

Аналогично, существует $C_2 \equiv C_1$ и C_2 – формула с тесными отрицаниями.

Таким образом, $A_1 \equiv B_2 \vee C_2$, следовательно A_1 может быть приведена к формуле с тесными отрицаниями.

2) $A_1 = B_1 \wedge C_1$

В B_1 логических операций меньше, чем в A_1, а следовательно, меньше n.

Поэтому по шагу 2 будет существовать формула B_2, такая что $B_2 \equiv B_1$ и в ней будут только тесные отрицания.

Аналогично, существует $C_2 \equiv C_1$ и C_2 – формула с тесными отрицаниями.

Таким образом, $A_1 \equiv B_2 \wedge C_2$, следовательно A_1 может быть приведена к формуле с тесными отрицаниями.

3) $A_1 = \bar{\bar{B}}_1$, $A_1 \equiv B_1$.

В B_1 логических операций меньше, чем в A_1, а следовательно, меньше n.

Поэтому по шагу 2 будет существовать формула с тесными отрицаниями B_2 и такая что $B_2 \equiv B_1$.

Таким образом, $A_1 \equiv B_2$, следовательно A_1 может быть приведена к формуле с тесными отрицаниями.

4) $A_1 = \overline{(B_1 \vee C_1)}$, $A_1 \equiv \bar{B}_1 \wedge \bar{C}_1$.

В $\bar{B}_1$ и $\bar{C}_1$ логических операций меньше, чем в A_1, т.е. меньше n.

Поэтому по шагу 2 будет существовать формула с тесными отрицаниями B_2, такая что $B_2 \equiv \bar{B}_1$ и будет существовать формула с тесными отрицаниями C_2, такая что $C_2 \equiv \bar{C}_1$.

Таким образом, $A_1 \equiv B_2 \wedge C_2$, следовательно A_1 может быть приведена к формуле с тесными отрицаниями.

5) $A_1 = \overline{(B_1 \wedge C_1)}$, $A_1 \equiv \bar{B}_1 \vee \bar{C}_1$

В $\bar{B}_1$ и $\bar{C}_1$ логических операций меньше, чем в A_1, т.е. меньше n.

Поэтому по шагу 2 будет существовать формула с тесными отрицаниями B_2, такая что $B_2 \equiv \bar{B}_1$ и будет существовать формула с тесными отрицаниями C_2, такая что $C_2 \equiv \bar{C}_1$.

Таким образом, $A_1 \equiv B_2 \vee C_2$, следовательно A_1 может быть приведена к формуле с тесными отрицаниями.

3 шаг. Формула A_2 построена из переменных и их отрицаний с помощью многочленной конъюнкции или дизъюнкции.

Применив дистрибутивный закон (если это необходимо), формулу A_2 можно преобразовать к виду: дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Полученная формула будет являться ДНФ.

Теорема доказана.

Пример 20

Построить ДНФ для функции

$$f(x_1, x_2) = \overline{(\overline{(x_1 \wedge \bar{x}_2)} \vee (x_2 \wedge \bar{x}_1))}.$$

Данная функция не находится в ДНФ, так как дизъюнкция применяется не к элементарным конъюнкциям.

1 шаг. Формула уже содержит только операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

2 шаг. Получим тесные отрицания. Для этого 2 раза применим закон де Моргана:

$$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1).$$

Полученная формула все еще не находится в ДНФ, так как не является дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

3 шаг. Применим дистрибутивный закон:

$(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_2 \wedge x_1)$ – ДНФ.

Теорема о приведении к КНФ. Для любой формулы A можно найти (существует) формулу B, находящуюся в КНФ, такую что $A \equiv B$ (B называется КНФ формулы A).

Доказательство

1 вариант. Аналогично доказательству теоремы о приведении к ДНФ.

2 вариант. На основании принципа двойственности.

Для формулы A существует формула A_1, такая что: $A \equiv A_1$ и не содержит никаких логических операций ($\sim$, $\supset$ и т. д.) кроме $\wedge$, $\vee$ и $\neg$.

Для формулы A_1^* (в силу теоремы о приведении к ДНФ) существует формула B_1, такая что: $B_1 \equiv A_1^*$ и B_1 – ДНФ.

По определению B_1^* – КНФ.

Имеем: $B_1^* \equiv (A_1^*)^* \equiv A_1$ (на основании утверждения 1).

В силу того, что $A \equiv A_1$ получим, что $B_1^* \equiv A$.

Следовательно, B_1^* будет являться КНФ для A.

Теорема доказана.

Пример 21

Построить КНФ для функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \sim (\bar{x}_1 \wedge x_3).$$

Применим следующую равносильность: $a{\sim}b \equiv (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$:

$$\underbrace{(x_1 \wedge x_2)}_{a} \sim \underbrace{(\bar{x}_1 \wedge x_3)}_{b} \equiv$$

$$\equiv \big((x_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_1 \wedge x_3)\big) \vee \big(\overline{(x_1 \wedge x_2)} \wedge \overline{(\bar{x}_1 \wedge x_3)}\big) \equiv$$

$$\equiv \ \{\text{по закону де Моргана}\} \equiv$$

$$\equiv (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_3) \vee \big((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{\bar{x}}_1 \vee \bar{x}_3)\big) \equiv$$

$$\equiv \{\text{с учетом } \bar{\bar{a}} = a\} \equiv (\underbrace{x_1}_{a} \wedge \underbrace{x_2}_{b} \wedge \underbrace{\bar{x}_1}_{c} \wedge \underbrace{x_3}_{d}) \vee \underbrace{((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)}_{f} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3))}_{g} \equiv$$

$$\equiv \{\text{по дистрибутивному закону}\} \equiv$$

$$\equiv (\underbrace{x_1 \vee \bar{x}_1}_{1} \vee \bar{x}_2) \wedge (\underbrace{x_1 \vee x_1}_{x_1} \vee \bar{x}_3) \wedge (\underbrace{x_2 \vee \bar{x}_2}_{1} \vee \bar{x}_1) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge$$

$$\wedge (\underbrace{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1}_{\bar{x}_1} \vee \bar{x}_2) \wedge (\underbrace{\bar{x}_1 \vee x_1}_{1} \vee \bar{x}_3) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\underbrace{x_3 \vee \bar{x}_3}_{1} \vee x_1) \equiv$$

$$\equiv (\underbrace{1 \vee \bar{x}_2}_{1}) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (\underbrace{1 \vee \bar{x}_1}_{1}) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge$$

$\wedge\ (\underbrace{1 \vee \bar{x}_3}_{1}) \wedge (\underbrace{1 \vee x_1}_{1}) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \equiv \{1 \wedge x = x\} \equiv$

$\equiv (x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2).$

5.3 Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Определение 1. Пусть формула A зависит от списка переменных $< x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} >$. A находится в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ),* если:

1) A есть ДНФ;

2) каждый дизъюнктивный член формулы A является k-членной конъюнкцией, причем на l-ом месте $(1 \leq l \leq k)$ обязательно стоит переменная x_{i_l} или ее отрицание;

3) все дизъюнктивные члены попарно различны.

Схематично структуру СДНФ можно представить следующим образом: $(\ldots \wedge \ldots) \vee (\ldots \wedge \ldots)$.

Пример 22

Рассмотрим ДНФ для $f(x_1, x_2)$

1) $x_1 \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2)$;

а) это ДНФ;

б) x_1 – не двухместный дизъюнктивный член.

Таким образом, это не СДНФ.

2) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge \bar{x}_1)$;

а) это ДНФ;

б) все члены ДНФ – 2-х-членные конъюнкции, но в $(x_2 \wedge \bar{x}_1)$ на первом месте стоит не x_1, а x_2.

Таким образом, это не СДНФ.

3) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$;

а) это ДНФ;

б) все члены ДНФ – 2-х-членные конъюнкции и на первом месте в них стоит x_1, а на втором x_2;

в) дизъюнктивные члены попарно не различны.

Таким образом, это не СДНФ.

4) $(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$;

а) это ДНФ;

б) все члены ДНФ – 2-х членные конъюнкции и на первом месте в них стоит x_1 или ее отрицание, а на втором x_2 или ее отрицание;

в) дизъюнктивные члены попарно различны.

Таким образом, это СДНФ.

Определение 2. Формула A находится в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ),* если она представима в виде:

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}:F(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_k^{\sigma_k},$$

$$\text{где } x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, \text{если } \sigma_i = 1, \\ \bar{x}_i, \text{если } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Теорема о приведении к СДНФ. Пусть формула A зависит от списка переменных $< x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} >$ и $A \neq 0$. Тогда существует формула B, зависящая от списка переменных $< x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} >$, $A \equiv B$ и B – находится в СДНФ.

Доказательство

В основе доказательства будет лежать определение СДНФ.

По теореме о приведении к ДНФ существует формула $A_1 \equiv A$ и при этом A_1 – ДНФ.

Рассмотрим дизъюнктивные члены A_1.

1 случай. Пусть в элементарные конъюнкции входят x_{i_p} и $\bar{x}_{i_p}$.

Если такая элементарная конъюнкция единственная, то она является тождественной ложью. Следовательно, $A \equiv 0$, что противоречит условию.

Следовательно, существуют другие элементарные конъюнкции и при этом:

$$A \equiv \underbrace{(x_{i_p} \wedge \bar{x}_{i_p})}_{0} \wedge D \equiv D,$$

причем в D нет одновременного вхождения x_{i_p} и $\bar{x}_{i_p}$.

2 случай. Пусть в элементарные конъюнкции x_{i_p} и $\bar{x}_{i_p}$ включаются несколько раз.

Тогда можно воспользоваться свойством: $(x_{i_p} \wedge x_{i_p}) \equiv x_{i_p}$.

3 случай. После исправления 1 и 2 случаев, элементарные конъюнкции будут содержать какую-либо переменную не более одного раза. Тогда возможны следующие варианты:

а) некоторая конъюнкция C содержит x_{i_p} и не содержит $\bar{x}_{i_p}$;

б) некоторая конъюнкция C содержит $\bar{x}_{i_p}$ и не содержит x_{i_p};

в) некоторая конъюнкция C не содержит x_{i_p} и не содержит $\bar{x}_{i_p}$.

В случаях а) и б) определение СДНФ не нарушается, а в случае в) получается, что в конъюнкции не хватает одной переменной, значит ее надо ввести в нее. Сделать это можно с помощью *закона расщепления*:

$$C = C_{x_{i_p}} \vee C_{\bar{x}_{i_p}},$$

где $C_{x_{i_p}}$ – исходная конъюнкция, в которую добавлена переменная x_{i_p};

$C_{\bar{x}_{i_p}}$ – исходная конъюнкция, в которую добавлена переменная $\bar{x}_{i_p}$.

Закон расщепления необходимо применять до тех пор, пока не будут выполняться а) и б).

На основе закона коммутативности, переставим в каждой элементарной конъюнкции переменные таким образом, чтобы на l-ом месте $(1 \leq l \leq k)$ обязательно стояла переменная x_{i_l} или ее отрицание.

Если в полученной формуле несколько раз повторяется какая-либо из элементарных конъюнкций, то необходимо применить закон идемпотентности.

Теорема доказана.

Пример 23

Построить СДНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\ x_1\bar{x}_3 \vee x_2$

Применим закон расщепления для введения в $x_1\bar{x}_3$ переменной x_2 и в x_2 – переменной x_1:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\ x_1\bar{x}_3 \vee x_2 \equiv x_1\bar{x}_3x_2 \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_2 \vee x_2x_1 \vee x_2\bar{x}_1 \equiv$

Применим закон расщепления для введения в x_2x_1 переменной x_2 и в $x_2\bar{x}_1$ – переменной x_3:

$\equiv x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \equiv$

$\equiv x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$.

Теорема о единственности СДНФ. Если f_1 и f_2 – СДНФ для A, то f_1 и f_2 могут отличаться только порядком своих дизъюнктивных членов.

Доказательство

С учетом теоремы о существовании СДНФ, докажем только вторую часть теоремы – о единственности.

Пусть f_1 и f_2 – две формулы, выражающие функцию A, находящиеся в СДНФ относительно списка переменных $< x_1, x_2, \dots, x_k >$ и существенно различные, т.е. либо в f_1 есть элементарные конъюнкции, не содержащиеся в f_2, либо наоборот.

Без потери общности рассмотрим случай, когда в f_1 есть элементарные конъюнкции, не содержащиеся в f_2.

Если $(x_1^{s_1} \wedge x_2^{s_2} \wedge \dots \wedge x_k^{s_k})$ – элементарная конъюнкция, содержащаяся в f_1, но не в f_2, то она будет ассоциирована с некоторой оценкой $< s_1, \dots, s_k >$.

В то же время, любая элементарная конъюнкция, содержащаяся в f_2 будет ассоциирована с некоторой другой оценкой (по определению 2), поэтому на оценке $< s_1, \dots, s_k >$ все конъюнкции, входящие в f_2 будут равны 0, а следовательно, и вся f_2 примет значение 0 (так как $0 \vee 0 \vee \dots \vee 0 = 0$).

С другой стороны, на этой оценке, входящая в f_1 конъюнкция $(x_1^{s_1} \wedge x_2^{s_2} \wedge \dots \wedge x_k^{s_k})$, примет значение 1, а следовательно, и вся f_1 примет значение 1 (так как $1 \vee 0 \vee \dots \vee 0 = 1$).

Тогда f_1 и f_2 будут выражать собой различные булевы функции, что противоречит условию.

Таким образом, если A выражает булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, то любая СДНФ для A должна (в силу равносильности) выражать собой ту же функцию.

Поэтому СДНФ f_1 и f_2 должны совпадать с точностью до порядка элементарных конъюнкций.

Теорема доказана.

Определение 1. Пусть формула A зависит от списка переменных $< x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} >$. A находится в *совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ),* если:

1) A есть КНФ;

2) каждый конъюнктивный член формулы A является k-членной дизъюнкцией, причем на l-ом месте $(1 \leq l \leq k)$ обязательно стоит переменная x_{i_l} или ее отрицание;

3) все конъюнктивные члены попарно различны.

Схематично структуру СКНФ можно представить следующим образом: $(\dots \vee \dots) \wedge (\dots \vee \dots)$.

Определение 2. Формула A находится в *совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ),* если двойственная к A формула A^* находится в СДНФ.

Определение 3. Формула A находится в *совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ),* если она представима в виде:

$$f(\tilde{x}^n) = \bigwedge_{\tilde{\sigma}:F(\tilde{\sigma})=0} (x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_k^{\overline{\sigma}_k}),$$

где $x_i^{\overline{\sigma}_i} = \begin{cases} x_i, \text{если } \sigma_i = 0, \\ \bar{x}_i, \text{если } \sigma_i = 1. \end{cases}$

Пример 24

а) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ – СКНФ;

б) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ – СКНФ;

в) $(x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ – не СКНФ, так как в первом конъюнктивном члене на первом месте должна стоять $\bar{x}_1$, на втором – x_2, а на третьем – x_3;

г) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ – СКНФ.

Теорема о приведении к СКНФ. Пусть формула A зависит от списка переменных $< x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} >$ и $A \neq 1$. Тогда существует формула B, зависящая от списка переменных $< x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} >$, $A \equiv B$ и B – находится в СКНФ.

Доказательство

1 вариант. Аналогично доказательству теоремы о приведении к СДНФ: с использованием закона расщепления:

$$C = (C \vee x_{i_p}) \wedge (C \vee \bar{x}_{i_p}).$$

2 вариант. На основе принципа двойственности.

Для формулы A существует формула A_1, такая что: $A \equiv A_1$ и не содержит никаких логических операций ($\sim$, $\supset$ и т. д.) кроме $\wedge$, $\vee$ и $\neg$.

Для формулы A_1^* (в силу теоремы о приведении к СДНФ) существует формула B_1, такая что: $B_1 \equiv A_1^*$ и B_1 – СДНФ.

По определению 2 B_1^* – СКНФ.

Имеем: $B_1^* \equiv (A_1^*)^* \equiv A_1$ (на основании утверждения 1).

В силу того, что $A \equiv A_1$ получим, что $B_1^* \equiv A$.

Следовательно, B_1^* будет являться СКНФ для A.

Теорема доказана.

Теорема о единственности СКНФ. Если B_1 и B_2 – СКНФ для A, то B_1 и B_2 могут отличаться только порядком своих конъюнктивных членов.

Доказательство

С учетом теоремы о существовании СКНФ, докажем только вторую часть теоремы о единственности.

Если B_1 и B_2 – СКНФ относительно списка переменных $< x_1, x_2, \dots, x_k >$, то B_1 и B_2, действительно, могут отличаться только порядком своих конъюнктивных членов.

В этом можно убедиться с помощью принципа двойственности:

B_1^* и B_2^* в условиях теоремы будут СДНФ для формулы A^* и могут отличаться (по теореме о единственности СДНФ) только порядком дизъюнктивных членов.

Следовательно, $B_1^* \equiv B_2^*$ и по принципу двойственности $B_1 \equiv B_2$.

Теорема доказана.

СДНФ и СКНФ могут использоваться при выяснении равносильности двух формул.

Критерий равносильности. Пусть формулы A_1 и A_2 зависят от списка переменных $< x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} >$ и $A_1 \neq 0$ (или 1), $A_2 \neq 0$ (или 1) тождественно. $A_1 \equiv A_2$ тогда и только тогда, когда они приводятся к СДНФ (СКНФ), отличающимся только порядком следования дизъюнктивных (конъюнктивных) членов.

Доказательство

Пусть $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_1 \equiv A_2$ и B_1 – СДНФ для A_1, а B_2 – СДНФ для A_2. Тогда $B_1 \equiv A_1 \equiv A_2$, т.е. B_1 будет являться СДНФ и для A_2 (в силу теоремы о единственности СДНФ) и B_2 должна отличаться от B_2 только порядком своих дизъюнктивных членов.

Обратно: пусть A_1 и A_2 приводятся к одной СДНФ B. Тогда $A_1 \equiv B \equiv A_2$.

Теорема доказана.

Поскольку приведение формул к СДНФ (СКНФ) можно проводить путем последовательных преобразований, то критерий позволяет устанавливать равносильность формул булевой алгебры, не обращаясь к определению и оценкам списка переменных.

Способы построения СДНФ (СКНФ):

1) с помощью эквивалентных преобразований;

2) по таблице истинности.

Способы выявления равносильности булевых функций:

1) по таблице истинности;

2) построение и сравнение СДНФ и СКНФ;

3) эквивалентные преобразования.

6 МИНИМИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ВСЮДУ ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

6.1 Метод Квайна

Определение. Логическая функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *импликантой* функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, если для всякой оценки списка переменных $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ выполнено неравенство $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \geq g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Эквивалентным условием является:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Согласно определению, импликантой может являться любая функция, для которой выполняется указанное в нем условие.

Однако, в случае минимизации ДНФ выгодно искать импликанты в виде элементарных конъюнкций, а в случае минимизации КНФ – в виде элементарных дизъюнкций.

Определение. *Импликанта E* (являющаяся элементарной конъюнкцией) называется *простой,* если при удалении из нее любой переменной она перестанет быть импликантой булевой функции f.

Пример 25

Для функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee \bar{x}_2(x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3)$$

функция $g_1 = x_1 \vee \bar{x}_2x_3x_4$ является импликантой, т.к.

$$f \wedge g_1 = (\underbrace{x_1 \vee \bar{x}_2x_3x_4}_{A} \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)(\underbrace{x_1 \vee \bar{x}_2x_3x_4}_{A}) = x_1 \vee \bar{x}_2x_3x_4$$

{по закону поглощения $(A \vee B)A = A$}

g_1 – не конъюнкция, поэтому импликанта g_1 – не простая.

$g_2 = \bar{x}_2 x_3 x_4$ – импликанта, однако не простая.

$g_3 = \bar{x}_2 x_4$ – импликанта, полученная из g_2 вычеркиванием x_3.

g_3 – простая импликанта, так как $g_4 = \bar{x}_2$ и $g_5 = x_4$, полученные из g_3, импликантами не являются.

Определение. *Сокращенной ДНФ* называется ДНФ, состоящая из всех простых импликант данной булевой функции.

Определение. *Ядровая импликанта* – импликанта, удаление которой из ДНФ некоторой булевой функции f приводит к ДНФ, не равносильной f.

Определение. *Минимальная ДНФ* данной функции f – ДНФ, имеющая наименьшее число символов переменных из всех ДНФ, задающих функцию f.

Определение. *Кратчайшая ДНФ* данной функции f – ДНФ, содержащая минимально возможное число конъюнкций.

Определение. *Тупиковой ДНФ* функции f называется такая ее ДНФ, состоящая из простых импликант, таких что удаление из нее любой конъюнкции нарушает равносильность ДНФ данной функции.

Определение. *Сложностью ДНФ (КНФ)* называется количество символов переменных, использованных в записи формулы.

Построение простых импликант методом Квайна

Все импликанты, имеющие вид элементарных конъюнкций, и только они, могут быть образованы в результате последовательного «склеивания» конъюнкций из СДНФ.

Пример 26

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4 =$$
$$= (x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4) \vee (x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4) =$$
$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3(\bar{x}_4 \vee x_4) \vee x_1x_2\bar{x}_3(\bar{x}_4 \vee x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 =$$
$$= x_1\bar{x}_3(\bar{x}_2 \vee x_2) = x_1\bar{x}_3$$ – простая импликанта.

Конъюнкции удобно задавать наборами длины n, состоящими из символов 0, 1 и «–», используя следующее правило: если переменная x_i входит в конъюнкцию в форме $x_i^{\sigma_i}$, то в этом наборе на i-*м* месте записывается σ_i, а если x_i отсутствует, то на i-*м* месте проставляется «–».

Так, для функции, зависящей от списка переменных (x_1, x_2, x_3, x_4), конъюнкции $x_1\bar{x}_3$ будет соответствовать набор (1–0 –).

Рассмотрим на примере алгоритм построения всех импликант, имеющих вид конъюнкции.

Пример 27

Пусть булева функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Для того чтобы найти все простые импликанты для функции f при помощи метода Квайна, построим новую таблицу, в которую выпишем все оценки списка переменных, на которых функция f обращается в 1.

При этом разобьем их на группы в соответствии с количеством единичных компонент.

Так как «склеиваются» лишь соседние наборы, отличающиеся в одной компоненте, то достаточно просмотреть всевозможные пары наборов, входящие в соседние группы. Наборы из полосы I, которые участвовали в «склеиваниях», пометим «+».

На основании результатов «склеивания» наборов из полосы I сформируем новую полосу II.

В полосе II наборы автоматически разобьются на группы по количеству единиц.

0 0 0 0 +++	0 0 0 – +	– 0 0 –
	0 – 0 0 +	– – 0 0
0 0 0 1 +	– 0 0 0 +	– 0 – 1
0 1 0 0 +		1 – 0 –
1 0 0 0 +		
	0 0 – 1 +	
0 0 1 1 +	0 1 – 0	
0 1 1 0 +	– 0 0 1 +	
1 0 0 1 +	1 0 0 – +	
1 1 0 0 +	– 1 0 0 +	
	1 – 0 0 +	
1 0 1 1 +	– 0 1 1 +	
1 1 0 1 +	1 0 – 1 +	
	1 – 0 1 +	
	1 1 0 – +	
I	**II**	**III**

Будем повторять эти действия до тех пор, пока будет возможность осуществлять процесс «склеивания», т.е. пока в соседних блоках очередной полосы будут находиться наборы, отличающиеся только одной компонентой.

В полученной таким образом итоговой таблице будут содержаться все простые импликанты функции f, имеющие вид конъюнкции.

Простыми из них будут те, которые не помечены знаком «+», так как из них нельзя вычеркнуть ни одной переменной, иначе снова будет применима операция «склеивания».

В рассмотренном примере простыми импликантами являются:

$$\begin{array}{ll} \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 & \text{– Полоса II} \\ \left.\begin{array}{l} \bar{x}_2 \bar{x}_3 \\ \bar{x}_3 \bar{x}_4 \\ \bar{x}_2 x_4 \\ x_1 \bar{x}_3 \end{array}\right| & \text{– Полоса III} \end{array}$$

Таким образом, сокращенная ДНФ данной булевой функции будет иметь вид:

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_3.$$

Формирование минимальной ДНФ. Матрица Квайна

Определение. Конъюнкция *K покрывает набор* $\tilde{\alpha}$, если на этом наборе она обращается в 1.

Определение. Обозначим через A_1, A_2, …, A_s все простые импликанты функции f. Импликанты A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_t} образуют *покрытие функции* f, если

$$A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \ldots \vee A_{i_t} = f.$$

Для построения минимальной ДНФ после нахождения простых импликант, необходимо построить по функции f импликантную таблицу.

Строки таблицы соответствуют оценкам списка переменных, на которых функция f принимает значение 1, а столбцы – простым импликантам.

На пересечении строки и столбца ставится 1, если импликанта покрывает двоичный набор, соответствующий строке.

Такая таблица называется *матрицей Квайна*.

Множество импликант образует покрытие функции f, если столбцы, соответствующие импликантам этого множества, содержат 1 в каждой строке.

Импликантная таблица (матрица Квайна) для функции из примера 29 приведена в таблице 1.

В результате анализа таблицы 1 можно установить, что ядровыми будут импликанты с номерами 4,1 и 5, так как для каждой из них найдется набор, на котором она одна принимает значение 1.

Далее найдем наименьшее покрытие функции f импликантами. Для этого необходимо найти наименьшее число столбцов, соответствующих импликантам, содержащих 1 в каждой строке.

Запишем символическое выражение, представляющее собой конъюнкцию дизъюнкций, построенных по строкам таблицы и включающих номера тех, импликант, напротив которых стоит 1 в данной строке.

Таблица 1 – **Матрица Квайна**

№ Простой ипликанты	1	2	3	4	5
Простые импликанты / Оценки переменных	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_2 x_4$	$x_1 \bar{x}_3$
0 0 0 0		1	1		
0 0 0 1		1		1	
0 0 1 1				1	
0 1 0 0	1		1		
0 1 1 0	1				
1 0 0 0		1	1		1
1 0 0 1		1		1	1
1 0 1 1				1	
1 1 0 0			1		1
1 1 1 0					1

Для рассматриваемого примера символическое выражение будет иметь следующий вид:

$$(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 4) \wedge 4 \wedge (1 \vee 3) \wedge 1 \wedge (2 \vee 3 \vee 5) \wedge (2 \vee 4 \vee 5) \wedge 4 \wedge (3 \vee 5) \wedge 5.$$

Приведем полученное символическое выражение к ДНФ, используя дистрибутивный закон и закон поглощения:

$$(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 4) \wedge 4 \wedge (1 \vee 3) \wedge 1 \wedge (\underbrace{2 \vee 3 \vee 5}_{B}) \wedge (\underbrace{2 \vee 4 \vee 5}_{B}) \wedge 4 \wedge$$

$$\wedge (\underbrace{3 \vee 5}_{B}) \wedge \underbrace{5}_{A} = (2 \vee 3) \wedge (\underbrace{2 \vee 4}_{B}) \wedge \underbrace{4}_{A} \wedge (\underbrace{1 \vee 3}_{B}) \wedge \underbrace{1}_{A} \wedge 4 \wedge 5 =$$

$$= (2 \vee 3) \wedge 1 \wedge 4 \wedge 5 = (1 \wedge 2 \wedge 4 \wedge 5) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5).$$

Сопоставим каждой символической конъюнкции тупиковую ДНФ и выберем из них кратчайшую.

Символической конъюнкции $(1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5)$ соответствует ДНФ

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_3.$$

Символической конъюнкции $(1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)$ соответствует ДНФ

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_3.$$

Каждая из полученных ДНФ является минимальной для данной булевой функции и имеет сложность, равную количеству символов переменных в формуле, а именно – 9.

6.2 Карты Карно

Карта Карно́ — графический способ минимизации булевых функций.

Карты Карно были изобретены в 1952 г. Эдвардом В. Вейчем и усовершенствованы в 1953 г. Морисом Карно, физиком из «Bell Labs», для упрощения цифровых электронных схем.

В карту Карно булевы переменные передаются из таблицы истинности и упорядочиваются с помощью кода Грея, в котором каждое следующее число отличается от предыдущего только одним разрядом.

Благодаря использованию кода Грея в картах Карно верхняя строка является соседней с нижней, а правый столбец соседний с левым, таким образом, вся Карта Карно может быть ассоциирована с некоторой геометрической фигурой (в зависимости от используемого количества переменных).

На пересечении строки и столбца в карте Карно проставляется соответствующее значение булевой функции из таблицы истинности.

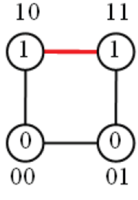
Так как главной задачей при минимизации СДНФ (ДНФ) и СКНФ (КНФ) является поиск термов (элементарных дизъюнкций для КНФ или элементарных конъюнкций для случая ДНФ), пригодных к «склейке» с последующим поглощением, то Карты Карно предоставляют наглядный, визуальный способ отыскания таких термов.

Булевы функции n переменных, представленные в виде СДНФ или СКНФ, могут иметь в своем составе 2^n различных термов. Все эти члены составляют некоторую структуру, топологически эквивалентную n–мерному кубу, причум любые два терма, соединенные ребром, пригодны для склейки и поглощения.

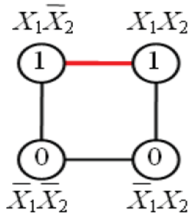
Процесс построения карты Карно, а также ее графическую интерпретацию для функции, зависящей от *двух переменных* можно представить следующим образом:

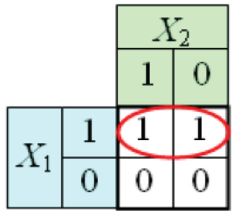
X_1	X_2	$f(X_1, X_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

таблица истинности



2-мерный куб (квадрат)





2-мерный куб с членами СДНФ *карта Карно*

Процесс построения карты Карно, а также ее графическую интерпретацию для функции, зависящей от *трех переменных* можно представить следующим образом:

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

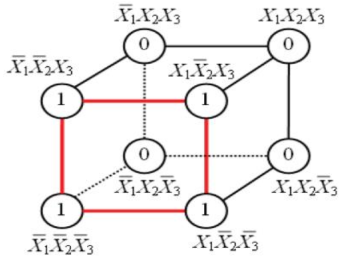


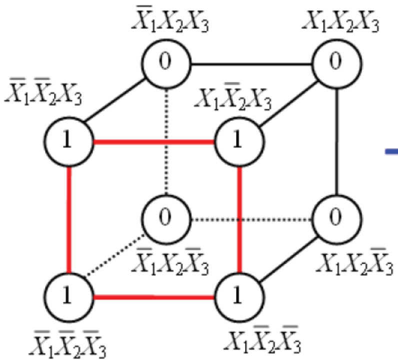
таблица истинности *3-мерный куб*

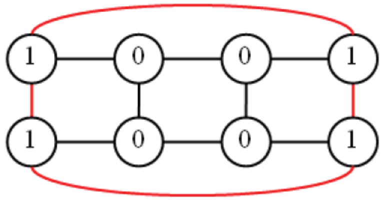
В общем случае можно сказать, что 2^K термов, принадлежащие одной K–мерной грани гиперкуба, «склеиваются» в один терм, при этом поглощаются K переменных.

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 =$$
$$= \bar{x}_2(\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3) = \bar{x}_2(\bar{x}_1 \vee x_1)(\bar{x}_3 \vee x_3) = \bar{x}_2.$$

Для упрощения работы с булевыми функциями большого числа переменных куб, представляющий собой структуру термов, «разворачивается» на плоскость.

При этом следует помнить, что порядок кодов термов в таблице (00 01 11 10) не соответствует порядку следования двоичных чисел, а клетки, находящиеся в крайних столбцах таблицы, соседствуют между собой.



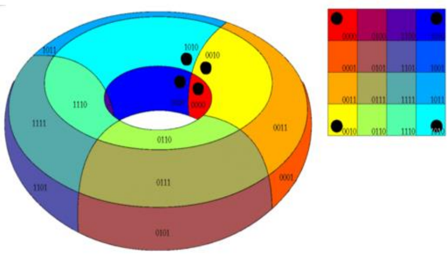


X_2X_3		00	01	11	10
X_1	1	1	0	0	1
	0	1	0	0	1

Карта Карно для функции, зависящей от *четырех переменных* имеет следующую графическую интерпретацию:

X_3X_4		00	01	11	10
X_1X_2	00				1
	01		1	1	
	11				
	10				1

карта Карно



4-мерный куб (тор)

Карта Карно для функции, зависящей от *пяти переменных* имеет следующий вид:

	X_5	0				1			
	X_3X_4	00	01	11	10	00	01	11	10
X_1X_2	00								
	01								
	11			1				1	
	10								

Также карта Карно для функции, зависящей от *пяти переменных* может быть записана следующим образом:

	$X_1X_2X_3 \backslash X_4X_5$	00	01	11	10
000	000				
001	001				
010	011				
011	010				
100	100				
101	101				
110	111				
111	110				

Особенность: квадраты 4х4 виртуально находятся друг над другом в третьем измерении, поэтому соответственные клетки двух соседних квадратов 4х4 являются соседними, и соответствующие им термы можно склеивать.

Запись минимальной ДНФ по карте Карно

При получении минимальной ДНФ, в карте рассматриваются только клетки содержащие единицы, а при получении КНФ – нули.

Минимизация производится по следующим правилам (на примере ДНФ):

1) необходимо объединить смежные клетки, содержащие единицы, в область так, чтобы одна область содержала 2^n (n – целое число = 0… ∞) клеток (с учетом того, что крайние строки и столбцы являются соседними между собой), в области не должно находиться клеток, содержащих нули;

2) область должна располагаться симметрично оси(ей) (оси располагаются через каждые четыре клетки);

3) несмежные области, расположенные симметрично оси(ей), могут объединяться в одну;

4) область должна быть как можно больше, а количество областей как можно меньше;

5) области могут пересекаться;

6) для одной и той же карты Карно возможно несколько вариантов покрытия.

Далее необходимо проанализировать каждую область и выяснить, какие переменные ***не меняют*** своих значений в пределах этой области. Для каждой области выпишем конъюнкцию таких переменных, причем, если неменяющаяся переменная принимает значение 0, она входит в конъюнкцию с отрицанием.

Записанные конъюнкции объединяем операцией дизъюнкция.

Пример 28

У мальчика Коли есть мама, папа, дедушка и бабушка. Коля пойдут гулять на улицу, если ему разрешат хотя бы двое родственников.

Решение

Для удобства обозначим родственников Коли буквами:

мама – x_1
папа – x_2
дедушка – x_3
бабушка – x_4

Условимся обозначать согласие родственников единицей, несогласие – нулем. Возможность пойти погулять обозначим буквой f. Коля пойдет гулять, если $f = 1$, Коля гулять не пойдет, если $f = 0$.

Составим таблицу истинности в соответствии с условиями задачи.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Перерисуем таблицу истинности в 2-мерный вид, переставив в ней строки и столбцы в соответствии с кодом Грея.

Заполним ее значениями из таблицы истинности. Получили Карту Карно:

$x_3\ x_4$ / $x_1\ x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	0	1	0
0 1	0	1	1	1
1 1	1	1	1	1
1 0	0	1	1	1

По карте Карно запишем минимальную ДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_4 \vee x_1x_4 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3.$$

Пример 29

Используя карту Карно, записать минимальную ДНФ для функции:

h(x, y, z, w, t) = (1111 0111 1010 0110 1111 0111 1010 1010).

Решение

Запишем карту Карно для функции, зависящей от пяти переменных и перенесем в нее вектор значений заданной функции.

xyz \ wt	00	01	11	10
000	1	1	1	1
001	0	1	1	1
011	0	1	0	1
010	1	0	0	1
100	1	1	1	1
101	0	1	1	1
111	1	0	0	1
110	1	0	0	1

Выделим блоки из смежных единиц (количество блоков должно быть как можно меньше, а размер каждого блока должен быть как можно больше).

Проанализируем каждую область и выясним, какие переменные ***не меняют*** своих значений в пределах области.

Для каждой области выпишем конъюнкцию таких переменных или их отрицаний, соединив их знаком дизъюнкции. Получим следующую минимальную ДНФ:

$$f(x,y,z,w,t) = \boldsymbol{w\bar{t}} \vee \boldsymbol{\bar{y}t} \vee \boldsymbol{\bar{z}\bar{t}} \vee \boldsymbol{xy\bar{t}} \vee \boldsymbol{\bar{x}z\bar{w}t}.$$

7 ПОЛНОТА И ЗАМКНУТОСТЬ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

7.1 Полнота систем булевых функций

Обозначим $\boldsymbol{P_2}$ – множество всех булевых функций.

Рассмотрим некоторое конечное множество булевых функций:

$$K^0 = \{f_1(x_1, \dots, x_{k_1}), f_2(x_1, \dots, x_{k_2}), \dots, f_m(x_1, \dots, x_{k_m})\},$$

где $f_i(x_1, \dots, x_{k_i}) \in P_2$.

Определение. Функция $f \in P_2$ называется *суперпозицией первого ранга* функций f_1, f_2, ..., f_m, где $f_i \in P_2$, если f может быть получена одним из следующих способов:

1) переименованием какой-либо переменной x_i:

$$f = f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_{k_i}),$$

где y может быть любой переменной (в том числе, может совпадать с любой имеющейся переменной).

2) подстановкой некоторой функции $f_l (1 \leq l \leq m)$ вместо x_j в функции $f_i \in K^0$

$$f = f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, f_l(x_1, \dots, x_{k_l}), x_{j+1}, \dots, x_{k_i}.$$

Все суперпозиции первого ранга обозначаются K^1.

Определение. Класс функций, получающийся из функций класса K^{r-1} суперпозиций $(r-1)$-го ранга, называется *классом функций* K^r суперпозиций r-го ранга.

Определение. *Суперпозицией функций из класса* K^0 называется функция, входящая в один из классов K^r.

Пример 30

Пусть $K^0 = \{\bar{x}_1 \vee x_2\}$ – система булевых функций из одной функции.

Построить все возможные суперпозиции функций данной системы.

1) переименуем x_2 в x_1;

Получим: $\bar{x}_1 \vee x_1 = 1$.

Таким образом, тождественная единица является суперпозицией над K^0.

2) переименуем x_1 в x_2;

Получим: $\bar{x}_2 \vee x_2 = 1$ – аналогично случаю 1.

3) Второе правило задействовать невозможно, так как функция одна. Таким образом,

$K^1 = \{\bar{x}_1 \vee x_2, 1\}$.

Однако, можно получить суперпозицию 2-го ранга K^2:

4) подставим функцию-константу 1 в функцию x_1 .

Получим: $\bar{1} \vee x_2 = 0 \vee x_2 = x_2$.

5) подставим функцию-константу 1 в функцию x_2 .

Получим: $\bar{x}_1 \vee 1 = 1$.

Таким образом,

$K^2 = \{\bar{x}_1 \vee x_2, 1, x_2\}$.

Определение 1. Система функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, где $f_i \in P_2$ является ***полной***, если любая булева функция может быть представлена в виде формулы через функции этой системы (с помощью операции суперпозиции).

Пример 31

1) само множество P_2 – полная система;

2) $\{\bar{x}_1, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ – полная система;

3) $\{0, 1\}$ – не полная система.

4) $\{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\oplus, \wedge, 1\}, \{\neg, \supset\}$ – полные системы.

Теорема о сведении к заведомо полной системе. Пусть система функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, где $f_i \in P_2$ является полной и любая функция из f_i может быть выражена через функции системы $\{g_1 \dots g_l\}$ (с помощью операции суперпозиции). Тогда система $\{g_1 \dots g_l\}$ также является полной.

Доказательство

Возьмем произвольную функцию $h \in P_2$.

Так как $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ – полная, то $h = C(f_1, f_2, \dots, f_n)$, где C – обозначение операции, с помощью которой строится суперпозиция.

По условию:

$$f_1 = C_1(g_1 \dots g_l), f_2 = C_2(g_1 \dots g_l), \dots\ f_n = C_n(g_1 \dots g_l),$$

где $C_1, C_2 \dots\ C_n$ – обозначение операций, с помощью которых строятся суперпозиции.

Подставим в h эти выражения для $f_1, f_2, \dots, f_n$. Получим:

$h = C(C_1(g_1 \dots g_l), C_2(g_1 \dots g_l), \dots, C_n(g_1 \dots g_l))$.

Таким образом, показано, что h – произвольная функция и она может быть записана через функции системы $\{g_1 \dots g_l\}$. Следовательно, по определению $\{g_1 \dots g_l\}$ – полная система.

Теорема доказана.

7.2 Замыкание систем булевых функций

Определение. Пусть есть $A \subset P_2$ (A – подмножество P_2).

Замыканием A (обозначается как $[A]$)называется множество всех булевых функций, представимых в виде формул через функции множества A (совокупность всех суперпозиций функций из A).

Свойства замыканий

1) $[A] \supseteq A$ – само множество A содержится в $[A]$;
2) $\big[[A]\big] = [A]$;
3) Если $A_1 \subseteq A_2$, то $[A_1] \subseteq [A_2]$;
4) $[A_1 \cup A_2] \supseteq [A_1] \cup [A_2]$.

Определение. Множество функций называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием: $[A] = A$.

Пример 32

1) $[P_2] = P_2$, следовательно, P_2 – замкнутый класс;

2) $A = \{1, x_1 \oplus x_2\}$, $[A] = L$, где L – класс линейных функций. Следовательно, A – незамкнутый класс.

Определение 2. Система булевых функций A является *полной системой*, если $[A] = P_2$.

7.3 Класс булевых функций T_0, сохраняющих ноль

Определение. $f \in P_2$, $f \in T_0$ тогда и только тогда, когда $f(0 \dots 0) = 0$.

Пример 33

1) $0, x, x_1x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2$ – функции из класса T_0;

2) $1, \bar{x}$ – функции, не принадлежащие классу T_0.

Утверждение. T_0 – замкнутый класс.

Доказательство

Надо доказать: замыкание (совокупность всех суперпозиций функций класса) класса T_0 совпадает с самим классом T_0.

Рассмотрим функцию $g = f(f_1, \dots, f_m)$ – произвольную суперпозицию функций, сохраняющих 0: $f_i \in T_0 (i = 1..m)$.

Надо показать, что если $f \in T_0$, то $g \in T_0$.

Действительно,

$$g(0 \dots 0) = f\big(f_1(0 \dots 0), f_1(0 \dots 0), \dots, f_m(0 \dots 0)\big) =$$
$$= f(0 \dots 0) = 0.$$

Таким образом, в силу произвольности выбора функции f доказано, что замыкание (совокупность всех суперпозиций функций класса) класса T_0 совпадает с самим классом T_0.

Утверждение доказано.

7.4 Класс булевых функций T_1, сохраняющих единицу

Определение. $f \in P_2$, $f \in T_1$ тогда и только тогда, когда $f(1 \dots 1) = 1$.

Пример 34

1) $1, x, x_1 x_2, x_1 \vee x_1, x_1 \to x_2$ – функции из класса T_1;
2) $0, \bar{x}$ – функции, не принадлежащие классу T_1.

Утверждение. T_1 – замкнутый класс.

Доказательство

Надо доказать: замыкание (совокупность всех суперпозиций функций класса) класса T_1 совпадает с самим классом T_1.

Рассмотрим функцию $g = f(f_1, \dots, f_m)$ – произвольную суперпозицию функций, сохраняющих 0: $f_i \in T_1 (i = 1..m)$.

Надо показать, что если $f \in T_1$, то $g \in T_1$.

Действительно,

$$g(1 \dots 1) = f\big(f_1(1 \dots 1), f_1(1 \dots 1), \dots, f_m(1 \dots 1)\big) =$$
$$= f(1 \dots 1) = 1.$$

Таким образом, в силу произвольности выбора функции f, доказано, что замыкание (совокупность всех суперпозиций функций класса) класса T_1 совпадает с самим классом T_1.

Утверждение доказано.

7.5 Класс самодвойственных булевых функций S

Определение. $f \in P_2, f \in S$ тогда и только тогда, когда $f = f^*$, где f^* – двойственная к f функция.

Пример 35

1) $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ – функция, принадлежащая классу S;
2) $x, \bar{x} \notin S$ – функции, не принадлежащие классу S.

Способы выявления самодвойственности

1) построить для функции f двойственную функцию f^* по определению и сравнить совпадает ли она с самой функцией f;

2) построить для функции f двойственную функцию f^* по таблице истинности и сравнить совпадает ли она с f.

В основу алгоритма построения для f двойственной функции f^* по таблице истинности, положены следующие соотношения:

$$f^* = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n),$$
$$f \in S \Leftrightarrow f = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Таким образом, перевернув вектор значений булевой функции f и, взяв отрицание от каждого значения в векторе, можно получить вектор значений двойственной функции f^*.

Если вектор значений f^* совпадает с вектором значений f, то $f = f^*$, и, следовательно, f является самодвойственной функцией.

В следующей таблице истинности приведен пример построения вектора значений f^* с помощью описанного алгоритма для функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

x_1	x_2	x_3	$f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	f^*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Таким образом, действительно, $\boldsymbol{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \in S}$.

Утверждение. S – замкнутый класс.

Доказательство

Надо доказать: замыкание (совокупность всех суперпозиций функций класса) класса S совпадает с самим классом S.

Рассмотрим функцию $g = f(f_1, \dots, f_m)$ – суперпозицию самодвойственных функций $f_i \in S (i = 1..m)$.

Таким образом, надо показать, что если $f \in S$, то и $g \in S$.

Действительно, $g^* = f^*(f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*) = f(f_1, f_2, \dots, f_m) = g$.

Таким образом, в силу произвольности выбора функции f, доказано, что замыкание (совокупность всех суперпозиций функций класса) класса S совпадает с самим классом S.

Утверждение доказано.

7.6 Класс линейных булевых функций L. Полином Жегалкина

Определение. *Полиномом Жегалкина* называется многочлен, являющийся суммой констант и различных многочленов (являющихся конъюнкцией каких-либо переменных), в которых каждая из переменных входит не выше, чем в первой степени:

$$\sum x_{i_1} \land \dots \land x_{i_k} \oplus a_j,\ a_j \in E_2.$$

Понятие степени трактуется следующим образом: $x^2 = x \land x = x$.

Следовательно, в определении говорится о том, что суммирование происходит по наборам $< i_1, \dots, i_k >$, в которых i_j различны.

Теорема Жегалкина. Каждая булева функция может быть представлена полиномом Жегалкина, причем единственным образом.

Способы построения полинома Жегалкина

1. Эквивалентные преобразования

$$f = x \lor y = \overline{(\bar{x} \land \bar{y})} = \{\bar{x} = x \oplus 1\} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$= xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y.$$

2. Способ неопределенных коэффициентов.

Для любой булевой функции может быть записан общий вид полинома Жегалкина. Так, для функции, зависящей от двух переменных, он будет иметь следующий вид:

$$f = x \vee y = axy \oplus bx \oplus cy \oplus d,$$

где a, b, c, d – неопределенные коэффициенты.

Неизвестные коэффициенты могут быть найдены путем подстановки в общий вид полинома значений переменных на конкретной оценке списка переменных и приравниваем полученного выражения к значению функции на этой оценке.

x	y	$x \vee y$	
0	0	0	$f(0,0) = a \cdot 0 \cdot 0 \oplus b \cdot 0 \oplus c \cdot 0 \oplus d = 0 \Rightarrow d = 0$
0	1	1	$f(0,1) = a \cdot 0 \cdot 1 \oplus b \cdot 0 \oplus c \cdot 1 \oplus 0 = 1 \Rightarrow c = 1$
1	0	1	$f(1,0) = a \cdot 1 \cdot 0 \oplus b \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 0 = 1 \Rightarrow b = 1$
1	1	1	$f(1,1) = a \cdot 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 0 = 1 \Rightarrow a = 1$

Таким образом: $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.

3. С использованием разложения вида:

$$f(\tilde{x}^n) = \sum_{\tilde{\sigma}: f(\tilde{\sigma})=1} (x_1 \oplus \bar{\sigma}_1)(x_2 \oplus \bar{\sigma}_2) \dots (x_n \oplus \bar{\sigma}_n).$$

Рассмотрим использование указанного разложения при построении полинома Жегалкина на примере функции, заданной вектором значений $f(x_1, x_2, x_3) = (00010111)$.

Из таблицы истинности видно, что функция принимает значения, равные 1 на четырех оценках списка переменных: (011), (101), (110), (111). Для каждой из этих оценок запишем соответствующее слагаемое, раскроем скобки и приведем подобные.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\substack{(011)\\(101)\\(110)\\(111)}} (x_1 \oplus \bar{\sigma}_1)(x_2 \oplus \bar{\sigma}_2)(x_3 \oplus \bar{\sigma}_3) =$$

$$= (x_1 \oplus \bar{0})(x_2 \oplus \bar{1})(x_3 \oplus \bar{1}) \oplus (x_1 \oplus \bar{1})(x_2 \oplus \bar{0})(x_3 \oplus \bar{1}) \oplus$$
$$\oplus (x_1 \oplus \bar{1})(x_2 \oplus \bar{1})(x_3 \oplus \bar{0}) \oplus (x_1 \oplus \bar{1})(x_2 \oplus \bar{1})(x_3 \oplus \bar{1}) =$$
$$= (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 0)(x_3 \oplus 0) \oplus (x_1 \oplus 0)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 0) \oplus$$
$$\oplus (x_1 \oplus 0)(x_2 \oplus 0)(x_3 \oplus 1) \oplus (x_1 \oplus 0)(x_2 \oplus 0)(x_3 \oplus 0) =$$
$$= (x_1 \oplus 1)x_2x_3 \oplus (x_2 \oplus 1)x_1x_3 \oplus (x_3 \oplus 1)x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3 =$$
$$= \{A \oplus A = 0\} = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2.$$

4. Способ преобразования вектора значений.

Для нахождения неизвестных коэффициентов в общем виде полинома Жегалкина будем использовать преобразование вида:

$$T(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha \oplus \beta).$$

а) разобьем вектор значений функции на последовательные пары:

$$f = (\underbrace{0\,0}\ \underbrace{0\,1}\ \underbrace{0\,1}\ \underbrace{1\,1});$$

б) будем последовательно применять преобразование T:

$$T(00) = (0, 0 \oplus 0) = (0,0)$$
$$T(01) = (0, 0 \oplus 1) = (0,1)$$
$$T(\overbrace{00}^{\alpha},\overbrace{01}^{\beta}) = (00, 0\oplus0, 0\oplus1) = (0001)$$
$$T(01) = (0, 0 \oplus 1) = (0,1)$$
$$T(11) = (1, 1 \oplus 1) = (1,0)$$
$$T(\overbrace{01}^{\alpha},\overbrace{10}^{\beta}) = (01, 0\oplus1, 1\oplus0) = (0111)$$
$$T(\overbrace{0001}^{\alpha},\overbrace{0111}^{\beta}) = (0001, 0\oplus0, 0\oplus1, 0\oplus1, 1\oplus1) = =(0001,0110)$$

вектор коэффициентов полинома Жегалкина

в) Запишем общий вид полинома Жегалкина.

Важно: для данного метода слагаемые должны быть записаны в строго определенной последовательности!

Восстановить унифицированную запись общего вида полинома Жегалкина можно с использованием таблицы истинности, записывая слагаемые в той же последовательности, что и оценки списка переменных, а также считая, что полином имеет вид:

$$f = \sum a_i K_i,$$

где a_i – неизвестные коэффициенты,

K_i – конъюнкции переменных, входящих в слагаемое.

Для записи K_i используется следующий подход: каждую конъюнкцию можно ассоциировать с соответствующей оценкой списка переменных и включать в конъюнкцию только те переменные, которые на этой оценке принимают значение 1.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	$0 \to K_0 = 1$
0	0	1	$0 \to K_1 = x_3$
0	1	0	$0 \to K_2 = x_2$
0	1	1	$0 \to K_3 = x_2x_3$
1	0	0	$1 \to K_4 = x_1$
1	0	1	$1 \to K_5 = x_1x_3$
1	1	0	$1 \to K_6 = x_1x_2$
1	1	1	$1 \to K_7 = x_1x_2x_3$

$$f = \alpha_0 \oplus \alpha_1x_3 \oplus \alpha_2x_2 \oplus \alpha_3x_2x_3 \oplus \alpha_4x_1 \oplus$$
$$\oplus\ \alpha_5x_1x_3 \oplus \alpha_6x_1x_2 \oplus \alpha_7x_1x_2x_3.$$

г) подставим в общий вид полинома найденные коэффициенты:

$$f = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2.$$

Определение. *Класс линейных функций* L – это класс функций, представимых в виде:

$$f(x_1, \dots x_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1x_1 \oplus \alpha_2x_2 \oplus \dots \oplus \alpha_nx_n, \text{ где } \alpha_i \in E_2.$$

Пример 36

1) $0, 1, x, \bar{x}, x_1 \oplus x_2$ – функции, принадлежащие классу L;

2) $x_1x_2, x_1 \vee x_2$ – функции, не принадлежащие классу L.

Чтобы выяснить является ли функция линейной нужно построить полином Жегалкина. Если его вид соответствует виду, указанному в определении, то функция является линейной.

7.7 Класс монотонных булевых функций М

Определение. $f \in P_2, f \in M$, если для любых пар предшествующих наборов $\underbrace{\tilde{\alpha}^n \preccurlyeq \tilde{\beta}^n}_{\text{сравнение наборов}}$ выполняется $\underbrace{f(\tilde{\alpha}^n) \leq f(\tilde{\beta}^n)}_{\text{сравнение значений функций}}$.

Пример 37

1) $0, 1, x, x_1x_2, x_1 \vee x_2$ – функции, принадлежащие классу M;

3) 2) $x_1 \oplus x_2, \bar{x}$ – функции, не принадлежащие классу M.

Способы выявления монотонности

1. Эквивалентные преобразования.

Если функция содержит только операции $\wedge$ и $\vee$, то она монотонна.

2. С помощью анализа вектора значений.

Пусть вектор $\alpha_f = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n})$ – вектор значений функции f.

Разделим его пополам. Получим два вектора:

$$\left(\alpha_1, \dots, \alpha_{2^{n}/_2}\right) \text{ и } \left(\alpha_{2^{n}/_2+1}, \dots, \alpha_{2^n}\right).$$

Если первый вектор предшествует второму, то каждый из векторов разделим пополам и снова сравним.

Повторим эти действия до тех пор, пока размерность векторов не станет равной 1.

Если на всех этапах имело место отношение предшествования первого вектора второму, то функция монотонна, иначе – не монотонна.

Пример 38

1) Выяснить является ли монотонной функция $f = (0110)$

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(0\ 1\ |\ 1\ 0)$$
$$(0\ 1) \npreccurlyeq (1\ 0)$$
$$\Downarrow$$
$$f \notin M$$

2) Выяснить является ли монотонной функция $f = (01010111)$

$$\alpha = (0\ 1\ 0\ 1\ |\ 0\ 1\ 1\ 1)$$
$$(0\ 1\ |\ 0\ 1) \preccurlyeq (0\ 1\ |\ 1\ 1)$$
$$(0\ |\ 1) \preccurlyeq (0\ |\ 1) \quad (0\ |\ 1) \preccurlyeq (1\ |\ 1)$$
$$(0) \preccurlyeq (1)\ (0) \preccurlyeq (1)\ (0) \preccurlyeq (1)\ (1) \preccurlyeq (1)$$
$$\Downarrow$$
$$f \in M.$$

Утверждение. **М – замкнутый класс.**

Доказательство

Надо доказать: замыкание (совокупность всех суперпозиций функций класса) класса M совпадает с самим классом M.

Рассмотрим функцию $g = f(f_1, \dots, f_m)$ – суперпозицию монотонных функций, т.е.:

$$f_i \in M\ (i = 1..m).$$

Таким образом, надо показать, что если $f \in M$, то и $g \in M$.

Пусть g определена на наборе переменных $\tilde{x} =< x_1, \dots, x_m >$.

Тогда: $f_i(\tilde{x}^i)$ будет определена на наборе $\tilde{x}^i =< x_{i1}, \dots, x_{ip_i} >$, а $f_m(\tilde{x}^m)$ будет определена на наборе $\tilde{x}^m =< x_{m1}, \dots, x_{mp_{mi}} >$.

Рассмотрим двоичные наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$, $\tilde{\alpha}^2$ и $\tilde{\beta}^2$, …, $\tilde{\alpha}^m$ и $\tilde{\beta}^m$, такие что $\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\beta}^1$, $\tilde{\alpha}^2 \preccurlyeq \tilde{\beta}^2$, …, $\tilde{\alpha}^m \preccurlyeq \tilde{\beta}^m$.

В силу того, что функции f монотонные и $\tilde{\alpha}^i \preccurlyeq \tilde{\beta}^i$ получим:

$$f_1(\tilde{\alpha}^1) \leq f_1(\tilde{\beta}^1), f_2(\tilde{\alpha}^2) \leq f_2(\tilde{\beta}^2), \dots, f_m(\tilde{\alpha}^m) \leq f_m(\tilde{\beta}^m).$$

Тогда, если составить наборы из соответствующих значений функций, то будет иметь место следующее соотношение:

$$(f_1(\tilde{\alpha}^1), f_2(\tilde{\alpha}^2), \dots, f_m(\tilde{\alpha}^m)) \preccurlyeq (f_1(\tilde{\beta}^1), f_2(\tilde{\beta}^2), \dots, f_m(\tilde{\beta}^m)).$$

В силу того, что функция f монотонная, получим, что

$$\underbrace{f(f_1(\tilde{\alpha}^1), f_2(\tilde{\alpha}^2), \dots, f_m(\tilde{\alpha}^m))}_{g(\tilde{\alpha})} \leq \underbrace{f\left(f_1(\tilde{\beta}^1), f_2(\tilde{\beta}^2), \dots, f_m(\tilde{\beta}^m)\right)}_{g(\tilde{\beta})}.$$

Таким образом, $g(\tilde{\alpha}) \leq g(\tilde{\beta})$, следовательно $g \in M$.

Таким образом, в силу произвольности выбора функции f, доказано, что замыкание (совокупность всех суперпозиций функций класса) класса M совпадает с самим классом M.

Утверждение доказано.

7.8 Критерий Поста

Пусть дана система функций $A = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$.

Таблица Поста для систем булевых функций имеет вид:

классы / функции	T_0	T_1	S	L	M
f_1					
f_2					
…					
f_k					

На пересечении класса и функции ставится «+», если функция принадлежит классу и «–», если не принадлежит.

Критерий Поста. Для того чтобы система функций была полной необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти важнейших замкнутых классов (чтобы в каждом столбце таблицы Поста был хотя бы один «–»).

Лемма о несамодвойственной функции. Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin S$, то из нее путем подстановки x и $\bar{x}$ можно получить несамодвойственную функцию одной переменной – константу.

Доказательство

Если $f \notin S$, то существует двоичный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, для которого будет нарушаться определение самодвойственной функции, а значит будет выполняться следующее равенство:

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Рассмотрим искусственные функции, которые определяются следующим образом:

$$\varphi_i = x^{\alpha_i}, i = 1..n, \quad \text{где } x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, \text{если } \sigma = 0, \\ x, \text{если } \sigma = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим функцию $\psi(x) = f\big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\big)$, которая будет описывать результат подстановки x и $\bar{x}$ в функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Найдем значения $\psi(x)$ при $x = 0$ и $x = 1$.

$$\psi(0) = f\big(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)\big) = f(0^{\alpha_1}, \dots, 0^{\alpha_n}) \boxed{=}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Если } \alpha_i = 0, \text{ то } 0^0 = \bar{0} = 1 \\ \text{Если } \alpha_i = 1, \text{ то } 0^1 = 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{по (1)}} 0^{\alpha_i} = \bar{\alpha}_i$$

$$\boxed{=} f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \boxed{=}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Если } \alpha_i = 0, \text{ то } 1^0 = \overline{1} = 0 \\ \text{Если } \alpha_i = 1, \text{ то } 1^1 = 1\end{array}\right\}, \xRightarrow{\text{по (1)}} 1^{\alpha_i} = \alpha_i$$

$$= f(1^{\alpha_1}, \dots, 1^{\alpha_n}) = f\big(\varphi_1(1), \dots, \varphi_n(1)\big) = \psi(1).$$

Таким образом доказано, что $\psi(0) = \psi(1)$, а, следовательно, функция ψ является константой.

Лемма доказана.

Лемма о немонотонной функции. Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin M$, то из нее путем подстановки 0, 1, x можно получить немонотонную функцию одной переменной – $\bar{x}$.

Доказательство

1 этап. Покажем, что если $f \notin M$, то существуют два двоичных набора $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ таких, что $\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\beta}^1$ и $\rho\big(\tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1\big) = 1$, но при этом $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$.

1 случай. Если наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ изначально оказались такими, что $\rho\big(\tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1\big) = 1$, то доказывать ничего не надо, так как $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$ в силу немонотонности f.

2 случай. $\rho\big(\tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1\big) \neq 1$. Пусть тогда $\rho\big(\tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1\big) = t > 1$

Покажем, что от наборов $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ можно перейти к другим наборам, которые будут соседними:

$$\tilde{\alpha}^1 = (\underbrace{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}}_{0}, \dots, \alpha_{1n}),$$

$$\tilde{\beta}^1 = (\underbrace{\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}}_{1}, \dots, \beta_{1n}).$$

Наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ различаются в t компонентах (которые могут стоять и не подряд) и при этом имеет место отношение предшествования. Значит в наборе $\tilde{\alpha}^1$ на месте этих компонент будут стоять 0, а в наборе $\tilde{\beta}^1$ – 1.

Между $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ можно взять $(t-1)$ промежуточных набора, причем таких, что

$$\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\alpha}^2 \preccurlyeq \tilde{\alpha}^3 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \tilde{\alpha}^t \preccurlyeq \tilde{\beta}^1 \text{ и } \rho\left(\tilde{\alpha}^i, \tilde{\alpha}^{i+1}\right) = \rho\left(\tilde{\alpha}^t, \tilde{\beta}^1\right) = 1.$$

$f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$ значит, что хотя бы для одной пары промежуточных наборов (обозначим их $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$) будет выполняться неравенство:

$$f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}).$$

Пусть данные наборы имеют соседство по i-й координате:

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\beta} = (\beta_{11}, \dots, \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n).$$

2 этап. Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, которая будет описывать результат подстановки 0, 1, x в функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\varphi(x) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n).$$

Рассмотрим значения $\varphi(x)$ при $x = 0$ и $x = 1$:

$$\varphi(0) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = f(\tilde{\alpha}) > f\left(\tilde{\beta}\right) =$$
$$= f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \varphi(1).$$

Учитывая, что мы работаем с булевыми функциями, это становится возможным только если: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$.

Следовательно, $\varphi(x) = \bar{x}$.

Лемма доказана.

Лемма о нелинейной функции. Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin L$, то из нее путем подстановки 0, 1, x можно получить нелинейную функцию – $x_1 \wedge x_2$.

Доказательство

Для любой функции можно построить полином Жегалкина, притом единственный. Построим его для функции f:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 \dots i_s} a_{i_1 \dots i_s} x_{i_1 \dots i_s}$$

Так как $f \notin L$, то в полиноме найдется член, содержащий не менее двух переменных одновременно. Без ограничения общности, но для удобства записи, можно считать, что среди этих переменных присутствуют x_1 и x_2. Тогда можно преобразовать полином следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 f_1(x_3, \dots, x_n) \oplus x_1 f_2(x_3, \dots, x_n) \oplus$$
$$\oplus\, x_2 f_3(x_3, \dots, x_n) \oplus f_4(x_3, \dots, x_n).$$

Очевидно, что $f_1(x_3, \dots, x_n) \neq 0$, так как $f \notin L$.

Возьмем двоичный набор $(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$, на котором $f_1 = 1$.

Пусть функция

$$\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in E_2 = \{0, 1\}$.

Рассмотрим функцию, которая будет описывать результат подстановки 0, 1, x в функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma.$$

Подставим в функцию ψ формулу для функции φ.

$$\psi(x_1, x_2) =$$
$$= (x_1 \oplus \beta)(x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(x_1 \oplus \beta) \oplus \beta(x_2 \oplus \alpha) \oplus \gamma \oplus \alpha\beta \oplus \gamma =$$
$$= x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \alpha\beta \oplus \alpha x_1 \oplus$$
$$\oplus\, \alpha\beta \oplus \beta x_2 \oplus \alpha\beta \oplus \gamma \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = x_1 x_2 = x_1 \wedge x_2.$$

Лемма доказана.

Доказательство критерия Поста

Необходимость.

Дано: система полна

Надо доказать: система не содержится целиком ни в одном из 5 важнейших замкнутых классов

Если система A полна, то по определению ее замыкание совпадает с P_2: $[A] = P_2$.

Воспользуемся методом от противного.

Пусть A содержится целиком хотя бы в одном из 5 важнейших замкнутых классов.

Следовательно: $A \subset R$, где $R \in \{T_0, T_1, L, S, M\}$.

Тогда $\underbrace{[A]}_{P_2} \subset \underbrace{[R]}_{R}$ $(P_2 \subset R)$ по свойству замыканий.

Получено противоречие, следовательно, исходное предположение не верно.

Необходимость доказана.

Достаточность.

Дано: система не содержится целиком ни в одном из 5 важнейших замкнутых классов.

Надо доказать: система полна.

Для доказательства достаточности воспользуемся доказанной ранее теоремой о сведении системы булевых функций к заведомо полной системе.

Пусть система A целиком не содержится ни в одном из 5 важнейших замкнутых классов. Тогда из нее можно выделить подсистему $A' \subset A$, содержащую не более 5 функций, которая также обладает этим свойством. Для этого возьмем в A функции f_i, f_j, f_k, f_m, f_l, которые не принадлежат соответственно классам T_0, T_1, S, M, L. Таким образом, положим $A' = \{f_i, f_j, f_k, f_m, f_l\}$ и $f_i \notin T_0$, $f_j \notin T_1$, $f_k \notin S$, $f_m \notin M$, $f_l \notin L$.

Без ограничения общности можно считать, что все эти функции зависят от одних и тех же переменных: $x_1, \dots, x_n$.

Общая схема дальнейшего доказательства будет выглядеть следующим образом: покажем, что функции выделенной подсистемы

$A' = \{f_i, f_j, f_k, f_m, f_l\}$ могут быть выражены через функции полной системы $\{\bar{x}, x \wedge y\}$. Согласно теореме о сведении к заведомо полной системе это будет означать, что система A', а следовательно и вся система A также является полной.

$$f_i, f_j, f_k, f_m, f_l$$
$$\Downarrow$$
$$\bar{x}, x \wedge y$$
$$\text{(полная система)}$$
$$\Downarrow$$
$$\{f_i, f_j, f_k, f_m, f_l\} - \text{полная система.}$$

Показать, что функции выделенной подсистемы A' могут быть выражены через функции полной системы $\{\bar{x}, x \wedge y\}$ можно проведя три следующих этапа рассуждений:

$$\text{I. } f_i \notin T_0, f_j \notin T_1, f_k \notin S$$
$$\Downarrow$$
$$\text{константы } 0 \text{ и } 1$$
$$\text{II. } 0, 1, f_m \notin M$$
$$\Downarrow$$
$$\bar{x}$$
$$\text{III. } 0, 1, \bar{x}, f_l \notin L$$
$$\Downarrow$$
$$x \wedge y.$$

Рассмотрим каждый из этих этапов подробнее.

I этап.

Рассмотрим функции $f_i \notin T_0$, $f_j \notin T_1$, $f_k \notin S$.

Так как $f_i \notin T_0$, то $f_i(0, \dots, 0) = 1$. При этом на значения $f_i(1, \dots, 1)$ не накладывается никаких ограничений и они могут быть любыми.

1 случай. Пусть $f_i(1, \dots, 1) = 1$.

Построим функцию $\varphi(x) = f_i(x, \dots, x)$.

Рассмотрим значения $\varphi(x)$ при $x = 0$ и $x = 1$.

$\varphi(0) = f_i(0, \dots, 0) = 1,$

$\varphi(1) = f_i(1, \dots, 1) = 1.$

Получается, что функция φ принимает всегда одно и то же значение вне зависимости от значений переменных, значит она является константой 1.

2 случай. Пусть $f_i(1, \dots, 1) = 0$.

Построим функцию $\varphi(x) = f_i(x, \dots, x)$.

Рассмотрим значения $\varphi(x)$ при $x = 0$ и $x = 1$.

$\varphi(0) = f_i(0, \dots, 0) = 1,$

$\varphi(1) = f_i(1, \dots, 1) = 0.$

Получается, что функция φ принимает значения, двойственные значениям переменных, следовательно, $\varphi(x) = \bar{x}$.

Таким образом, функция f_i либо сама может быть представлена как константа 1, либо она может быть представлена как $\bar{x}$, но тогда, используя лемму о несамодвойственной функции, как константа может быть представлена функция f_k.

Так как $f_j \notin T_1$, то $f_j(1, \dots, 1) = 0$. При этом на значения $f_j(0, \dots, 0)$ не накладывается никаких ограничений и они могут быть любыми.

1 случай. Пусть $f_j(0, \dots, 0) = 0$.

Построим функцию $\varphi(x) = f_i(x, \dots, x)$.

Рассмотрим значения $\varphi(x)$ при $x = 0$ и $x = 1$.

$\varphi(0) = f_j(0, \dots, 0) = 0,$

$\varphi(1) = f_j(1, \dots, 1) = 0.$

Получается, что функция φ принимает всегда одно и то же значение вне зависимости от значений переменных, значит она является константой 0.

2 случай. Пусть $f_j(0, \dots, 0) = 1$.

Построим функцию $\varphi(x) = f_j(x, \dots, x)$.

Рассмотрим значения $\varphi(x)$ при $x = 0$ и $x = 1$.

$\varphi(0) = f_j(0, \dots, 0) = 1,$

$\varphi(1) = f_j(1, \dots, 1) = 0.$

Получается, что функция φ принимает значения, двойственные значениям переменных, следовательно, $\varphi(x) = \bar{x}$.

Таким образом, функция f_j либо сама может быть представлена как константа 0, либо она может быть представлена как $\bar{x}$, но тогда, используя лемму о несамодвойственной функции, как константа может быть представлена функция f_k.

В силу произвольности выбора функций f_i, f_j, f_k показано, что любая система булевых функций, содержащая хотя бы одну функцию, не принадлежащую классу T_0, хотя бы одну функцию, не принадлежащую классу T_1 и хотя бы одну функцию, не принадлежащую классу S, может быть либо выражена через функции константы 0 и 1, либо через функцию $\bar{x}$. При этом, в первом случае для дальнейшего доказательства необходимо перейти к этапу II, а во втором случае – сразу к этапу III.

II этап.

Используя функции-константы 0 и 1, полученные на этапе I, функцию $f_m \notin M$, можно представить в виде $\bar{x}$ в силу леммы о немонотонной функции.

III этап.

Используя функции 0, 1, $\bar{x}$, полученные на этапах I и II, функцию $f_l \notin L$, можно выразить через функцию $x \wedge y$ в силу леммы о нелинейной функции.

В силу произвольности выбора функций f_i, f_j, f_k, f_m, f_l показано, что любая система булевых функций, содержащая хотя по одной функции, не принадлежащей соответственно классам T_0, T_1, L, S, M может быть выражена через функции $\bar{x}$ и $x \wedge y$. Согласно теореме о сведении к заведомо полной системе это означает, что такая система является полной.

Критерий доказан.

Пример 39

Выяснить, является ли следующая система булевых функций полной: $A = \{x \oplus y, x \vee y, 1\}$.

Решение

Введем следующие обозначения: $f_1 = x \oplus y$, $f_2 = x \vee y$, $f_3 = 1$. Построим таблицы истинности для функций рассматриваемой системы:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_1^*	f_2^*	f_3^*
0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0

Используя соответствующие определения, выясним принадлежность каждой функции классам T_0, T_1, L, S, M и заполним таблицу Поста:

	T_0	T_1	S	L	M
f_1	+	–	–	+	–
f_2	+	+	–	–	+
f_3	–	+	–	+	+

Согласно критерию Поста, можно сделать вывод о том, что данная система функций является полной.

7.9 Базис полной системы булевых функций

Определение. *Система функций* из замкнутого класса A называется *полной в* A, если ее замыкание совпадает с A.

Определение. Пусть дан замкнутый класс A. Возьмем систему функций $B = \{F_1, \dots, F_s\}$ из $A (B \subseteq A)$. Система функций B является *базисом в классе* A, если она полна в A, а любая ее собственная подсистема не является полной A, то есть $[B] = A$, а для любого подмножества $B' \mid B' \subset B$ $[B'] \neq A$.

Пример 40

1) $\{x_1 \wedge x_2, 0, 1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ – базис в P_2;

2) $\{0, 1, x_1 \vee x_2, x_1 \wedge x_2\}$ – базис в M.

Замечание: система функций является базисом, если ее полнота теряется при удалении из нее хотя бы одной функции.

Алгоритм построения базисов

1. Построить таблицу Поста и определить, что система функций является полной.

2. По таблице Поста составить символическое выражение в виде КНФ, в которой элементарные дизъюнкции соответствуют столбцам таблицы и включают в качестве дизъюнктивных членов символы тех функций, которые не входят в класс, соответствующий столбцу.

3. Применяя дистрибутивный закон, законы идемпотентности и поглощения привести построенную символическую КНФ к символической ДНФ.

4. В качестве базисов принимаются подмножества функций, символы которых входят в элементарные конъюнкции полученной ДНФ.

Теорема 1. Каждый замкнутый класс в P_2 имеет конечный базис.

Теорема 2. Мощность множества замкнутых классов в P_2 счетна.

Пример 41

Построить все возможные базисы для полной системы булевых функций, которой соответствует следующая таблица Поста:

	T_0	T_1	S	L	M
f_1	+	–	–	+	–
f_2	+	–	–	–	–
f_3	–	–	+	+	–
f_4	+	+	+	–	+

Решение

На основании имеющейся таблицы Поста запишем следующее символическое выражение в виде КНФ:

$$\underbrace{f_3}_{T_0} \wedge \underbrace{(f_1 \vee f_2 \vee f_3)}_{T_1} \wedge \underbrace{(f_2 \vee f_4)}_{L} \wedge \underbrace{(f_1 \vee f_2)}_{S} \wedge \underbrace{(f_1 \vee f_2 \vee f_3)}_{M} =$$
$$= \{\text{по закону поглащения}\} = f_3 \wedge (f_2 \vee f_4) \wedge (f_1 \vee f_2) =$$
$$= \{\text{раскроем скобки}\} = f_3\big(f_2(f_1 \vee f_2) \vee f_4(f_1 \vee f_2)\big) = =$$
$$f_3(f_2 \vee f_4 f_1 \vee f_4 f_2) = f_3(f_2(1 \vee f_4) \vee f_4 f_1) =$$
$$= f_3(f_2 \vee f_4 f_1) = \underbrace{f_3 f_2 \vee f_1 f_3 f_4}_{\text{ДНФ}}.$$

Таким образом, рассматриваемая система булевых функций имеет следующие базисы:

$$B_1 = \{f_3, f_2\}, B_2 = \{f_1, f_3, f_4\}.$$

8 ПРИМЕНЕНИЕ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СХЕМЫ

Одно из основных приложений булевых функций лежит в области создания схем функциональных элементов или функциональных схем, которые можно реализовать в виде электронных устройств с конечным числом входов и выходов, причем на каждом входе и выходе может появляться только два значения.

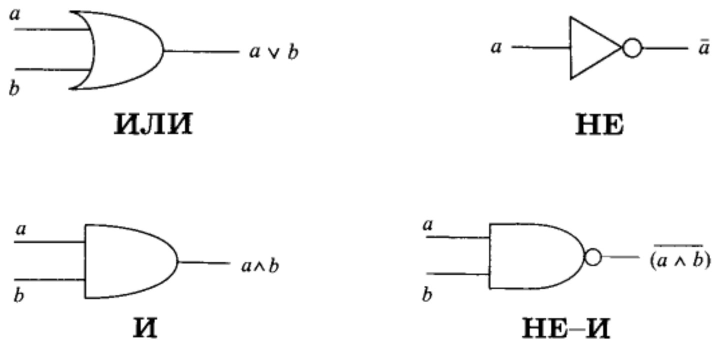
В ЭВМ применяются электрические схемы, состоящие из множества переключателей. Переключатель может находиться только в двух состояниях: замкнутом и разомкнутом. В первом случае – ток проходит, во втором – нет. Описывать работу таких схем очень удобно с помощью булевой алгебры. В зависимости от положения переключателей можно получить или не получить сигналы на выходах.

В основе построения компьютеров, а точнее их аппаратного обеспечения, лежат так называемые *вентили*. Они представляют собой достаточно простые элементы, которые можно комбинировать между собой, создавая тем самым различные схемы. Одни схемы подходят для осуществления *арифметических операций*, а на основе других строят различную *память* ЭВМ.

Простейший вентиль представляет собой транзисторный инвертор, который преобразует низкое напряжение в высокое или наоборот (высокое в низкое). С точки зрения математической модели этот процесс можно представить как преобразование логического нуля в логическую единицу или наоборот, таким образом получается *вентиль НЕ*.

Выходной сигнал вентиля можно выражать как функцию от входных сигналов.

Один из вариантов обозначения основных функциональных элементов (вентилей) показан на рисунке:



Соединяя функциональные элементы вместе, получаем функциональную схему. Пример такой схемы приведен на рисунке 1. С ее помощью можно реализовать любую булеву функцию.

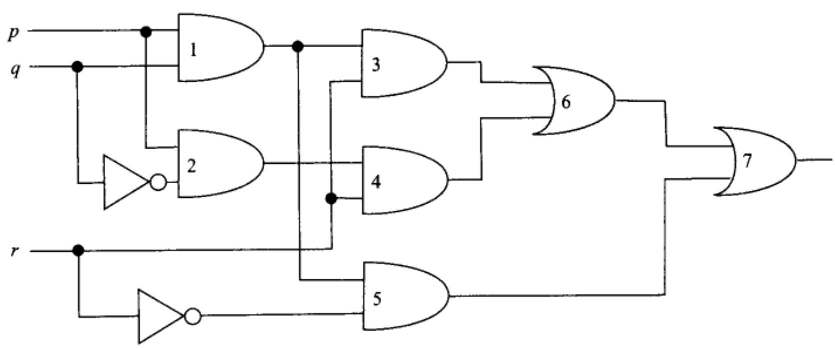


Рисунок 1– Функциональная схема

Триггеры и сумматоры – это относительно сложные устройства, состоящие из более простых элементов – вентилей.

Определение. *Триггер* способен хранить один двоичный разряд, за счет того, что может находиться в двух устойчивых состояниях. В основном триггеры используются в регистрах процессора.

Определение. *Сумматоры* широко используются в арифметико-логических устройствах (АЛУ) процессора и выполняют суммирование двоичных разрядов.

Пример 42

Определить какую булеву функцию реализует схема, приведенная на рисунке 1.

Решение

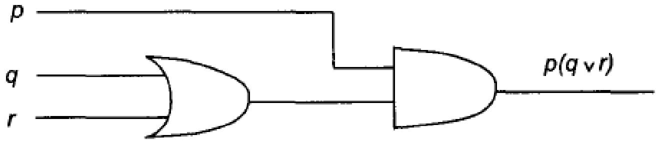
В таблице перечислены входы и соответствующие выходы для каждого функционального элемента в соответствии с нумерацией из приведенного рисунка.

Вентиль	Вход	Выход
1	p, q	pq
2	$p, \bar{q}$	$p\bar{q}$
3	pq, r	pqr
4	$p\bar{q}, r$	$p\bar{q}r$
5	$pq, \bar{r}$	$pq\bar{r}$
6	$pqr, p\bar{q}r$	$pqr \vee p\bar{q}r$
7	$pqr \vee p\bar{q}r, pq\bar{r}$	$pqr \vee p\bar{q}r \vee pq\bar{r}$

Таким образом, на выходе схемы получится функция: $pqr \vee p\bar{q}r \vee pq\bar{r}$.

Диаграммы функциональных схем можно упростить, если разрешить функциональным элементам И и ИЛИ иметь не по два входа, а больше. Но более впечатляющего упрощения можно добиться, если привлечь карту Карно для преобразования функции, полученной на выходе сложной схемы.

Более простая схема, реализующая функцию из вышерассмотренного примера, выглядит следующим образом:



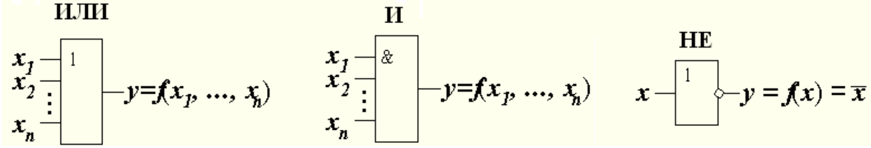
Данная схема построена для функции $p(q \vee r)$, полученной путем минимизации функции в предыдущем примере с использованием карты Карно.

При вычерчивании функциональных схем нет необходимости использовать все типы функциональных элементов. Например, множество $\{\wedge, \neg\}$ является полной системой функций. Поэтому мы можем построить любую схему, ограничившись функциональными элементами И и НЕТ.

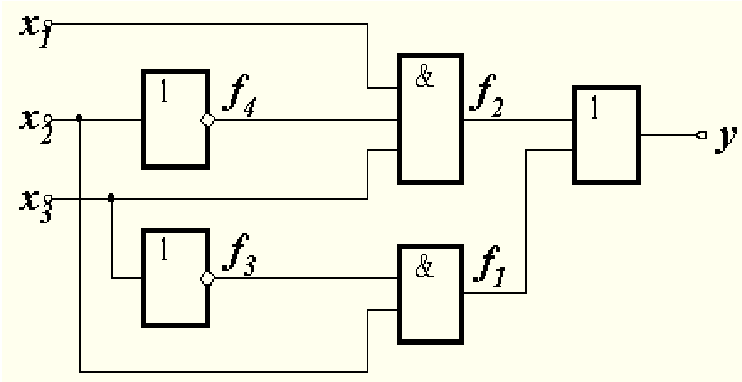
Более того, если по той или иной причине нам неудобно использовать большое число компонент, мы могли бы использовать только функциональный элемент НЕ–И.

2 подход

Допускается и более простое изображение функциональных элементов:



Функциональная схема, построенная с использованием такого подхода будет выглядеть следующим образом:



3 подход

Схемой из функциональных элементов (СФЭ) называется ориентированная бесконтурная сеть с помеченными вершинами. Полюса сети делятся на входные (входы) и выходные (выходы). Входные полюса помечаются символами переменных (иногда также символами отрицаний переменных или констант). Каждая вершина, отличная от входа (внутренняя вершина), помечается функциональным символом (или символом логической связки). При этом должны выполняться следующие условия:

1) полустепень захода каждого входного полюса равна нулю;

2) полустепень захода каждой вершины, отличной от входного полюса, равна числу мест функционального символа (или логической связки), которым эта вершина помечена.

На рисунке 2а представлено изображение СФЭ.

Входы помечаются светлыми кружками, внутренние вершины – темными кружками, а выходы – двойными кружками.

Другой способ изображения схем представлен на рисунке 2б. Здесь входы, как и ранее, изображаются светлыми кружками, каждая внутренняя вершина заменена треугольником, внутрь которого помещена пометка (функциональный символ). К одной из сторон треугольника присоединены входы элемента, а вершина треугольника, противоположная этой стороне, является выходом элемента. Выходы схемы отделены от функциональных элементов и обозначены, как и прежде, двойными кружками. Выходам иногда будут приписываться символы функций, реализуемых в них. Понятие функции, реализуемой в вершине схемы, определим следующим образом.

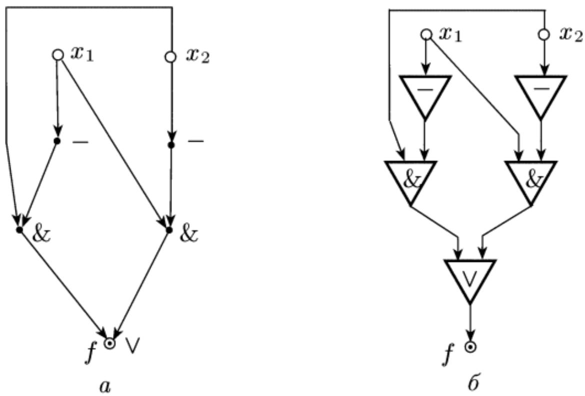


Рисунок 2 – Схема функциональных элементов

Определение. *Функция* f *реализуется схемой* Σ, если в Σ существует выход, в котором реализуется функция f.

Определение. *Сложностью СФЭ* будем называть число вершин, не являющихся входами (т.е. число функциональных элементов).

Определение. *СФЭ* Σ называется *минимальной*, если она имеет наименьшую сложность среди всех СФЭ, реализующих функции, реализуемые схемой Σ.

9 ПРИМЕНЕНИЕ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ

Булевы функции широко применяются не только при описании работы дискретных управляющих систем (контактных схем, схем из функциональных элементов, логических сетей и т.д.), но и при исследовании некоторых электрических цепей, так называемых релейно-контактных схем.

Под релейно-контактной схемой понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты релейно-контактной схемы могут быть двух типов: замыкающие и размыкающие. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов – как замыкающих, так и размыкающих. Технически реле представляет собой катушку с металлическим сердечником (магнитопроводом), вблизи которого находится соответствующий контакт. Когда через катушку пропускается электрический ток, металлический сердечник намагничивается и замыкает все находящиеся при нем замыкающие контакты. Одновременно все размыкающие контакты, относящиеся к данному реле, размыкаются. Поскольку замыкающие контакты при отсутствии в реле электрического тока разомкнуты, то они называются также нормально разомкнутыми. Аналогично, размыкающие контакты называются также нормально замкнутыми. При обесточивании обмоток реле (т.е. когда реле отключается) все замыкающие контакты снова размыкаются, а все размыкающие, замыкаются.

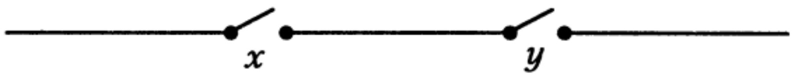
Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x_1, или $x_2, \dots, x_n$, которая принимает значение 1, когда реле срабатывает, и принимает значение 0 при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются тем же символом x, а все размыкающие контакты, подключенные к этому реле, обозначаются отрицанием $\bar{x}$. Это означает, что при срабатывании реле x все его замыкающие контакты x проводят ток и им сопоставляется значение 1, а все размыкающие контакты $\bar{x}$ не проводят электрический ток и им сопоставляется значение 0. При отключенном реле x создается противоположная ситуация: все его замыкающие контакты x разомкнуты, т.е. в этот момент им сопоставляется (переменная x принимает) значение 0, а все его размыкающие контакты $\bar{x}$ замкнуты, т.е. в этот момент им сопоставляется (другими словами, переменная $\bar{x}$ принимает значение 1).

Всей релейно-контактной схеме тогда ставится в соответствие булева переменная y, зависящая от булевых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, сопоставленным тем реле, которые участвуют в схеме. Поскольку каждый набор состояний реле $x_1, x_2, \dots, x_n$ характеризуется набором, составленным из нулей и единиц и имеющим длину n, то данная релейно-контактная схема определяет некоторое правило, по которому каждому такому набору длины n, составленному из нулей и единиц, сопоставляется либо 0, либо 1. Таким образом, каждая релейно-контактная схема, в которой занято n независимых реле (контактов в ней может быть n или больше), определяет некоторую булеву функцию y от n аргументов.

Определение. Такая булева функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *функцией проводимости* данной релейно-контактной схемы.

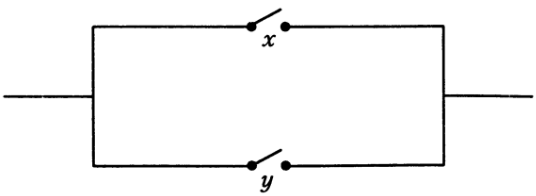
Таким образом, теория булевых функций предоставляет математические модели реальных физических релейно-контактных схем.

Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и найдем их функции проводимости. Пусть схема состоит из двух последовательно соединенных контактов x и y, т.е. контактов, связанных с двумя независимыми реле x и y, каждое из которых срабатывает независимо от другого:



Ясно, что данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба контакта x и y замкнуты, т.е. только тогда, когда оба переменных x и y принимают значение 1. Булева функция от двух аргументов x, y, удовлетворяющая такому условию, нам хорошо известна. Это конъюнкция $x \wedge y$. Таким образом, функцией проводимости релейно-контактной схемы, состоящей из двух последовательно соединенных контактов x и y, является конъюнкция xy. Говорят, что *последовательное соединение* двух контактов реализует конъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Пусть релейно-контактная схема состоит из двух параллельно соединенных контактов x и y:



Ясно, что эта схема проводит электрический ток в том и только в том случае, когда по меньшей мере один из контактов (x или y) замкнут, т.е. лишь в случае, когда хотя бы одна из булевых переменных (x или y) принимает значение 1. Булева функция от двух аргументов x и y, удовлетворяющая этому условию, также хорошо нам известна. Это, дизъюнкция $x \vee y$. Таким образом, функцией проводимости релейно-контактной схемы, состоящей из двух параллельно соединенных контактов x и y, является дизъюнкция $x \vee y$. Говорят, что *параллельное соединение* двух контактов реализует дизъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Итак, с помощью релейно-контактных схем можно реализовывать булевы функции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

Поскольку всякая булева функция может быть описана формулой, содержащей только такие операции как конъюнкция, дизъюнкция и тесные отрицания, которые, как показано выше, реализуются на релейно-контактных схемах, то и всякая булева функция может быть реализована с помощью релейно-контактной схемы.

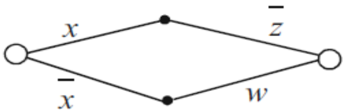
Составление релейно-контактных схем с заданными условиями работы называется *задачей синтеза* релейно-контактных схем и является первой важной задачей, состоящей в том, что требуется построить схему, которая проводила бы электрический ток лишь при вполне определенных задаваемых условиях. Естественно было бы выбирать для каждой булевой функции самую простую или одну из самых простых реализующих ее релейно-контактных схем. Поэтому упрощение релейно-контактных схем называется *задачей анализа* таких схем и является второй важной задачей теории релейно-контактных схем.

Определение. *Две релейно-контактные схемы*, составленные из одних и тех же реле, называются *равносильными*, если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток. Другими словами, две схемы, составленные из одних и тех же реле, равносильны, если они обладают одинаковыми функциями проводимости, зависящими от одних и тех же переменных. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов.

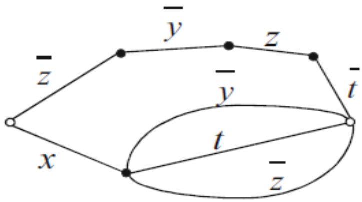
2 подход

Определение. *Контактной схемой* называется неориентированный граф, каждому ребру (контакту) которого приписан символ переменной в некоторой степени и выделены две вершины, которые называются полюсами.

Пример 43



$\bar{x}\cdot w \vee x\cdot \bar{z}$



$\bar{x}\,\bar{y}z\bar{t} \vee x\cdot(\bar{y}\vee t\vee \bar{z})$

Определение. Ребра схемы, помеченные символами переменных или их отрицаний, называются *контактами*. Контакт называется *замыкающим*, если он помечен символом переменной, и *размыкающим*, если он помечен символом отрицания переменной.

Определение. Функция, определяемая следующей формулой:

$$f_{a,b}(\tilde{x}^n) = \vee_{[a,b]} K_{[a,b]},$$

в которой дизъюнкция берется по всем простым цепям схемы, соединяющим полюса a и b, называется функцией проводимости между полюсами a, b схемы Σ.

Определение. Говорят, что *схема Σ реализует функцию* $g(\tilde{x}^n)$, если в ней существуют полюса a и b такие, что

$$g(\tilde{x}^n) = f_{a,b}(\tilde{x}^n).$$

Определение. Контактная схема с k+1 полюсами называется *(l, k)–полюсником, реализующим функции* $g_1(\tilde{x}^n)$, …. , $g_k(\tilde{x}^n)$, если существуют полюс a и полюса b_i $(1 \le i \le k)$ такие, что $f_{a,b_i}(\tilde{x}^n) = g_i(\tilde{x}^n)$.

Определение. При изображении (1, k)-полюсников полюс a изображается светлым кружком и называется *входом*, полюса b_i изображаются двойными кружками и называются *выходами*, остальные вершины изображаются темными кружками.

В тех случаях, когда число полюсов схемы не указывается, речь всегда будет идти о двухполюсных контактных схемах.

Определение. Две контактные схемы называются *эквивалентными*, если они реализуют одну и ту же булеву функцию или одну и ту же систему функций.

Определение. *Сложностью* контактной схемы называется число ее контактов.

Определение. Контактная схема, имеющая наименьшую сложность среди всех эквивалентных ей схем, называется *минимальной*.

10 ПРИМЕНЕНИЕ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Бурное развитие дискретной математики во второй половине XX века связывают с «цифровой революцией» в телекоммуникационной и вычислительной технике. Дискретная математика стала основой проектирования и применения многочисленных цифровых электронных устройств. Первые применения дискретной математики в этой области связаны с именами В.А. Котельникова, К.Э. Шеннона, В.И. Шестакова. Так К. Шенноном в 1938 г. булева алгебра была применена для анализа и разработки релейных переключательных сетей, результатом чего явилась разработка метода представления любой сети, состоящей из совокупности переключателей и реле, математическими выражениями и принципов их преобразования на основе правил булевой алгебры.

В этих случаях булевы значения – это 0 и 1. Они представляют собой состояние ячейки памяти объемом в 1 бит или наличие/отсутствие напряжения в электрической схеме. Алгебра логики позволяет строить сложные электронные узлы, элементы которых работают согласно этой математической теории.

Ввиду наличия аналогий между релейными и современными электронными схемами аппарат булевой алгебры нашел широкое применение для анализа, описания и проектирования таких схем.

Использование булевой алгебры позволяет не только более удобно оперировать с булевыми выражениями (представляющими те или иные электронные узлы), чем схемами или логическими диаграммами, но и на формальном уровне путем эквивалентных преобразований и базовых теорем упрощать их, давая возможность создавать экономически и технически более совершенные электронные устройства любого назначения.

Обычно логическое проектирование выполняется в следующей последовательности:

1) составление таблицы истинности синтезируемого узла согласно его определению, назначению и (словесному) описанию принципа работы;

2) составление математической формулы для логической функции, описывающей работу синтезирующего узла, согласно имеющейся таблице истинности (алгоритм построения СКНФ, СДНФ);

3) анализ полученной функции с целью построения различных вариантов ее математического выражения (на основании законов булевой алгебры) и нахождения наилучшего из них в соответствии с тем или иным критерием;

4) составление функциональной (логической) схемы узла из заранее заданного набора логических элементов.

Однозначность соответствия формы логической функции и параметров реальной электронной схемы приводит к необходимости оптимизации функции, т.е. к необходимости получения наилучшего ее вида по выбранному критерию. В общем случае речь должна идти об оптимизации функции по таким показателям, как быстродействие, надежность (достижение их максимума), количество потребного оборудования, вес, габариты, энергопотребление, стоимость (достижение их минимума) и т.п.

Чаще всего это делается по минимуму оборудования, так как при этом автоматически решаются задачи получения минимальных габаритов, веса, энергопотребления, стоимости.

Сам процесс логического проектирования также стараются максимально автоматизировать.

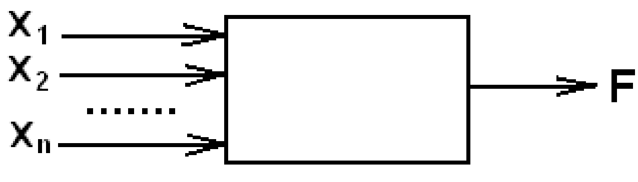
Для этого разработан ряд специализированных пакетов, например, Electronics Workbench фирмы Interactive Image Technologies Ltd. (Canada).

Одним из применений микропроцессоров является замена аппаратной логики на программную, поэтому операции булевой алгебры часто встречаются и в программном обеспечении микро-ЭВМ.

Утилитарная значимость аппарата булевой алгебры и описываемых с ее помощью логических схем заключается также и в наличии ряда методик автоматизированного обнаружения структурных ошибок программного обеспечения на основе конечноавтоматного подхода, базирующегося на булевой алгебре.

Также булева алгебра нашла широкое применение при анализе и синтезе логических схем.

Представив логическую схему в виде некоторого черного ящика, имеющего n входов и один выход, его поведение можно определять некоторой логической $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функцией от n логических переменных. Логическая F-функция может быть задана таблицей истинности или посредством булевых выражений. Логические схемы, представимые одним из этих способов, называются комбинационными.



Другой класс составляют логические схемы с внутренней памятью, называемые последовательностными (например, счетчики, сдвиговые регистры, элементы памяти и др.).

Для них значения выходных логических переменных определяются не только текущими значениями входных переменных, но также их значениями в предыдущие моменты времени.

Булева алгебра позволяет не только проводить анализ логических схем, описываемых логическими выражениями или таблицами истинности, но и синтез их из более простых, т.е. решать в комплексе структурно-аналитические вопросы логических схем.

Элементарные логические схемы, используемые при создании средств цифровой вычислительной техники, называются вентилями. Для построения ЭВМ используются функционально полные системы элементов, включающие наборы универсальных вентилей для построения произвольных комбинационных логических схем, и элементарные автоматы с полными системами переходов и выходов.

Физически элементы представляют собой микросхемы, сформированные в полупроводниковом кристалле по соответствующей технологии.

Методы, разрабатываемые дискретной математикой, часто используются в различных направлениях информатики.

Так, достижения математической логики и булевой алгебры используются для анализа процессов переработки информации с помощью ЭВМ. Теория автоматов разрабатывает методы, с помощью которых можно на основе моделей логического типа изучать процессы, протекающие в самой машине во время ее работы.

Булева алгебра – это область математики, позволяющая оперировать величинами, которые могут принимать только два значения (булевых значения). Следовательно, ее аппарат может быть применим при решении задач в абсолютно любых областях, в которых возникает необходимость моделировать объекты, принимающие только два значения или имеющие возможность переходить только в одно из двух состояний, а также процессы, связанные с ними.

Для записи булевых значений могут быть использованы различные обозначения. Наиболее часто используемыми из них являются: (0, 1), (F, T), (false, true), (ложь, истина), (Л, И). Для того чтобы некоторую величину можно было обозначать булевой переменной, должны выполняться следующие ограничения:

1) величина должна принимать не более двух возможных значений;

2) в любой момент времени величина не может принимать оба значения одновременно;

3) не должно быть ни одного момента времени, когда величина не приняла ни одного значения;

4) если рассматриваются несколько таких величин, то допускается, чтобы каждая из них принимала одно из двух состояний независимо;

5) не допускается применять одну пару состояний для одной величины, а для другой – другую.

Приведенные ограничения определяют границы применимости булевой алгебры при построении математических моделей.

Пример 44

Пусть в некоторой задаче речь идет о цехе автомобильного завода, где сушатся только что покрашенные автомобили. Возможно ли применение булевой алгебры в рассуждениях об автомобилях в этом цеху?

Применение булевой алгебры возможно, например, к цвету автомобилей, но только если все они либо «зеленые», либо «красные». Убедиться в этом можно проверив выполнение указанных выше ограничений.

Согласно ограничению 1, если в цехе есть помимо красных и зеленых еще, например, желтые автомобили, то применить булеву алгебру нельзя, деля их только на «красные» и «зеленые». Однако, указанное ограничение будет выполняться, если разделить автомобили на «зеленые» и «не зеленые» (т.е. всех остальных цветов).

Если в цехе есть красные автомобили в зеленую полоску или зеленые в красный горошек, то, согласно ограничению 2, применить булеву алгебру нельзя, деля их только на «красные» и «зеленые». В этом случае, о некоторых автомобилях можно будет сказать, что он одновременно и «красный», и «зеленый». Однако, указанное ограничение будет выполняться, если договориться считать «красными» автомобили, которые сначала покрывают красной краской.

Если в цехе помимо красных или зеленых есть вовсе неокрашенные автомобили, то, согласно ограничению 3, применить булеву алгебру нельзя, деля их только на «красные» и «зеленые». В этом случае, о неокрашенных автомобилях еще нельзя сказать, что они красные или зеленые. Можно выйти из этого затруднения, если считать красными те автомобили, которые запланировано покрасить в красный цвет, а зелеными те, которые запланировано покрасить в зеленый.

Если в цехе не все автомобили одновременно зеленые или красные, согласно ограничению 4, это не помешает применению алгебры логики к цвету автомобилей. С другой стороны, если в цехе всегда только красные автомобили или только зеленые, то нет смысла заводить столько переменных, сколько автомобилей. В этом случае достаточно одной переменной для всех автомобилей сразу.

Если в цехе есть только зеленые и красные автомобили, и все они – либо сломаны, либо исправны, то, согласно ограничению 5, нельзя смешивать в одних и тех же формулах переменные, обозначающие цвет автомобилей, и их исправность. Из этого затруднения можно выйти, если рассматривать не цвет и исправность самих автомобилей, а истинность или ложность правильно составленных фраз о цвете и исправности. Таким образом, каждому автомобилю будет соответствовать две булевы переменные: «автомобиль зеленый» и «автомобиль исправный». Каждая переменная может принимать два значения «истина» или «ложь».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы / О.Е. Акимов. – Москва : Издатель АКИМОВА, 2005. – 625 с.
2. Аляев, Ю.А. Дискретная математика и математическая логика: учебник / Ю.А. Аляев, С.Ф. Тюрин. – Москва : Финансы и статистика, 2006. – 368 с.
3. Балюк, А.С. Избранные вопросы теории булевых функций / А.С. Балюк, С.Ф. Винокуров, А.И. Гайдуков и др.; под ред. С.Ф. Винокурова, Н.А. Перязева. – Москва : Физматлит, 2001. – 192 с.
4. Белоусов, А.И. Дискретная математика: учебник для вузов / А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 5-е изд. – Москва : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. – 743 с.
5. Кузнецов, А.П. Дискретная математика для инженера / А.П. Кузнецов, А.М. Адельсон-Вельский. – Москва : Энергия, 1980. – 408 с.
6. Макоха, А.Н. Дискретная математика: учебное пособие / А.Н. Макоха, П.А. Сахнюк, Н.И. Червяков. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.
7. Марченков, С.С. Замкнутые классы булевых функций / С.С. Марченков. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 128 с.
8. Марченков, С.С. Основы теории булевых функций / С.С. Марченков. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 136 с.
9. Нигматуллин, Р.Г. Сложность булевых функций / Р.Г. Нигматуллин. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 240 с.
10. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов: учебник для вузов/ Ф.А. Новиков. – 3-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2009. — 384 с.
11. Плотников, А.Д. Дискретная математика: учебное пособие / А.Д. Плотников. – Москва : Новое знание, 2005. – 288 с.

12. Спирина, М.С. Дискретная математика / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – Москва, 2004 – 368 с.
13. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов. / Р. Хаггарти. – Издание 2-е, исправленное. – Москва: Техносфера, 2012. – 400 с.
14. Чашкин, А.В. Булевы функции и преобразования / А.В. Чашкин. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 157 с.
15. Шоломов, Л.А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. / Л.А. Шоломов. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 400 с.
16. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. – 4-е изд. – Москва : Высшая школа, 2003. – 384 с.
17. Яблонский, С.В. Функции алгебры логики и классы Поста / С.В. Яблонский, Г.П. Гаврилов, В.Б. Кудрявцев. – Москва : Наука, 1966. – 120.

Учебное издание

Семенова Ирина Владимировна

БУЛЕВА АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 17.03.2023. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 6,25.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ №   . Арт. – 5(Р1УП)/2023.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе