СВЕТ И КОНТИНУУМ – «КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ»

С.А. Векшенов

Российская академия образования

В статье предпринята попытка осмыслить теоретико-множественную модель континуума, играющую ключевую роль в современном математическом универсуме и в его многочисленных проекциях на самые разнообразные области. Делается вывод, что континуум является образованием, наделенным внутренним движением. Осмысление источников и механизмов этого движения приводит к выявлению ряда фундаментальных образов и соотношений между ними, которые имеют непосредственное отношение к основополагающим структурам современной физики. При этом возникают глубокие параллели с мыслями о световой природе окружающего мира, которые можно извлечь из трудов Р. Гроссетеста (1170–1253).

Ключевые слова: модель континуума, мощность континуума, концепция Гроссетеста, генерация пространства-времени.

Введение

Одной из удивительных особенностей науки является смыкание идей, разделенных не только значительными временными интервалами, но также менталитетом их авторов, культурным и социальным контекстом. В данной работе мы попытаемся «сомкнуть» две, казалось бы, очень разные идеи: идею Р. Гроссетеста о порождении мира светом и теоретико-множественную концепцию континуума. Подобное замыкание, несомненно, «коротит»: увидеть в континууме нечто большее, чем уже привыкли видеть, «встряхивает» очень многое. Однако подобные действия, безусловно, полезны, поскольку последствия такого «короткого замыкания» могут быть самыми освежающими.

Предлагаемая работа состоит из четырех частей.

В *первой* части обсуждается «патовая» ситуация с проблемой континуума, возникшей после результатов К. Гёделя и П. Коэна.

Во *второй* части приводятся аргументы в пользу того, что теоретико-множественный континуум, вопреки концепции его автора, Георга Кантора, видится структурой с внутренним движением. В этом случае вопрос о мощности континуума становится бессмысленным.

В *третьей* части работы предпринимается попытка понять источник и характер этого движения. В решении этой проблемы значимыми оказываются параллели с концепцией Гроссетеста и свойствами световых волн.

Заключительная, *четвертая* часть данной работы посвящена математическому контексту проблемы генерации пространства-времени из физических процессов.

1

Общепринятым (но уже не общепризнанным) фундаментом современной математики является понятие множества. В оригинальном определении Кантора его суть выражена так: *«Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten in unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem ganzen»*.

Абстрактный объект становится объектом математики, если ему можно присвоить некоторую характеристику, по которой его можно сравнивать с объектами того же рода. Самой естественной характеристикой множества является количество элементов, которое в него входит. Это определение, вполне естественное для конечных множеств, в случае бесконечных множеств становится мало понятным.

Попробуем, тем не менее, прояснить, какой смысл можно приписать «количеству элементов» бесконечного множества и как их реально «подсчитать».

Если множество конечно, ситуация тривиальна. Если же бесконечно, то возможно следующее понимание.

Будем называть *мощностью* количественную характеристику множества, которая в случае конечных множеств совпадает с числом их элементов.

Введем сначала понятие равномощности множеств. Множества будут равномощными, если между ними можно установить 1-1 соответствие, то есть взаимно однозначное соответствие. Таким образом, все множества разделились на классы равномощных множеств. То общее, что объединяет все множества, равномощные данному множеству, будем называть мощностью множества (или более формально, мощность – это класс равномощных множеств).

Данное определение, несмотря на свою парадоксальность – идея равенства мощностей предшествует самой идеи мощности, – использует почти стандартную методологию. Например, как определить «чистый» переход из точки A в точку B в пространстве $\boldsymbol{R}^3$**.** Надо рассмотреть то общее, что содержится во всех траекториях, соединяющих A и B, при этом движение по всем траекториям должно осуществляться одновременно. Разумеется, это принцип суперпозиции. Но есть и другое – общая методология исключения путем одновременного рассмотрения всех возможностей.

Самое важное в этом определении – это то, что мощность множества определяется не только внутренними характеристиками самого множества, но и наличием 1-1 соответствия с другими множествами. Можно сказать, что при таком определении мощность приобретает «социальный» характер, что не свойственно конечным множествам. Этот факт сразу заставляет задуматься о корректности такого определения мощности множества хотя бы в силу выполнения принципа соответствия. Тем не менее это определение осталось ведущим, что привело к целой серии проблемных результатов, о которых речь пойдет ниже.

Наиболее интригующей проблемой, в которую было вовлечено понятие мощности множества, была проблема континуума.

В рамках теории множеств континуум – это множество всех подмножеств натурального ряда ***S****(N)*. Проблема формулировалась предельно просто: если континуум множество, то какова его мощность? Кантор предполагал, что это первая несчетная мощность – тогда проблема принимала вид «континуум гипотезы».

Как гипотеза, так и сама проблема континуума оказались в центре внимания математики XX века в силу явной метафизической подоплеки – «очисливший» континуум неявно приравнивался к царю Соломону, который «все расположил весом, числом и мерою».

Обозначим основные вехи осмысления проблемы континуума.

Как известно, «наивная», то есть наиболее глубокая, теория множеств (за которой мы сохраним оригинальное название *Mengenlehere* – учение о множествах) перестала устраивать математиков именно в силу своей непредсказуемой глубины. Аксиоматика, возведенная в эталон математической ясности, требовала отрегулировать отношения *Mengenlehere* с остальной математикой: зафиксировать очевидное и упорядочить правила генерации содержательного из очевидного.

Результаты этой деятельности, разумеется, не могли быть однозначными – возникло несколько существенно различных аксиоматик: Цермело–Френкеля, Гёделя–Бернайса, New Foundation Куайна, Теория типов Рассела–Уайтхеда и др. Немедленно возникла чисто лингвистическая проблема соотнесения друг с другом этих аксиоматик, выявления утверждений, истинных во всех таких аксиоматиках. Такие утверждения имеют иммунитет против языкового релятивизма и могут считаться «настоящими» утверждениями о множествах.

К сожалению, ситуация с теоретико-множественными формализмами существенно более сложная, чем с многими иными абстракциями.

Существует множество теорем, утверждающих, что формальная конструкция, удовлетворяющая неким разумным условиям, в действительности оказывается вполне конкретным математическим объектом. К таким теоремам можно отнести: теорему Кэли о конечных группах, изоморфных группам подстановок, теорему Уитни о вложении m-мерного гладкого многообразия в евклидово пространства размерности $2m$, теорему Михайличенко о видах функций, реализующих фундаментальные симметрии, и др. К этим же результатом можно отнести и тезис Черча о том, что все имеющиеся на сегодняшний день уточнения интуитивного понятия алгоритма: машины Тьюринга, рекурсивные функции и др. – в строгом смысле оказываются эквивалентными.

Аксиоматическая теория множеств «выбивается» из этого списка. Приведенные аксиоматики не эквивалентны друг другу (за исключением некоторых фрагментов), поэтому приходится выбирать «единственно верную» аксиоматику, которой стала система Цермело–Френкеля (**ZF**) с дополнительной аксиомой выбора (**ZFC**). В конечном итоге интересующая нас континуум-проблема стала соотноситься именно с этой аксиоматикой.

Конкретно возник вопрос: что именно можно вывести из аксиом ZF – континуум-гипотезу (КГ) или ее отрицание. Вообще, в рамках ***ZFC*** можно ставить вопрос о статусе любого из утверждений $\boldsymbol{c} = \aleph_\lambda$, где $\boldsymbol{c}$ – мощность континуума.

С формальной точки зрения математики, ситуация, безусловно, прояснилась. Появился конкретный набор инструментов, с помощью которых можно попытаться дать ответы на заданные вопросы, в частности, строить подходящие модели ***ZFC***. Здесь и «вступает в игру» сформулированное выше понятие мощности.

Можно рассуждать следующим образом: «мощность множества» зависит от *1-1* соответствия. Если вообразить модель ***ZFC***, в которой существует *1-1* соответствие между континуумом $\boldsymbol{S}(N)$ и счетным множеством (и само это соответствие будет принадлежать модели), то континуум в этой модели будет счетным. Если же в модели такого *1-1* соответствия нет, то в этой модели континуум *не является* счетным множеством. Таким образом, включая или, наоборот, исключая *1-1* соответствия можно в принципе варьировать моделями с разными мощностями континуума.

Разумеется, дело обстоит не так просто, и построение необходимых моделей требует высокого профессионализма и фантазии. Однако это уже второй уровень проблемы – здесь все зависит от искусства строить модели с нужными свойствами. В этом искусстве преуспели два человека:

– К. Гёдель (1939) построил модель, в которой континуум-гипотеза совместима с аксиомами ***ZFC***;

– П. Коэн (1963) с помощью изобретенного им метода форсинга построил модель ***ZFC***, где отрицание континуум-гипотезы совместимо с аксиомами ***ZFC***.

Совмещение этих результатов означает, что континуум-гипотеза не зависит от аксиом ***ZFC***. Этот результат немедленно был приравнен к классическому результату о независимости аксиомы параллельных от остальных аксиом геометрии Евклида, хотя ситуация с КГ, идейно, принципиально иная.

Приведенные выше результаты хорошо известны. Однако при этом возникает чувство неловкости, поскольку ответа на «наивный» вопрос Кантора: «Чему равна мощность континуума?» они так и не дают. Действительно, вопрос Кантора состоял в том, чтобы указать мощность множества на кардинальной шкале – обобщением натуральных чисел на область бесконечных количеств: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \ldots \aleph_\lambda \ldots$(*). Сам он, повторяем, предположил, что мощность континуума равна $\aleph_1$.

Результат предпринятых усилий, растянувшихся на весь XX век, был парадоксален: утверждение Кантора не зависит от некой системы аксиом, волевым образом отождествленной с *Mengenlehere*. Параллели с независимостью постулата о параллельных от остальных аксиом геометрии Евклида здесь совершенно неуместны, поскольку задача как раз и заключалась в обосновании его независимости (или доказательстве постулата). Что касается КГ, то полученные результаты на бытовом уровне звучат примерно так: «Каково расстояние от Москвы до Александрова?» Ответ: «Какое хотите!»

Этот обескураживающий вывод (ценой в Филдсовскую премию), математику, естественно, не устраивал. Поэтому после осмысления по–настоящему выдающихся работ П. Коэна (и особенно их булевозначной трактовки Д. Скоттом и Р. Соловеем) были сделаны попытки пополнить ***ZFC*** новыми аксиомами, которые позволили бы сделать КГ (или ее отрицание) теоремами. Несмотря на предпринятые усилия, никаких удовлетворительных результатов на этом пути получено не было. Постепенно сложилось представление, что проблема континуума, вообще, не «по зубам» аксиоматической теории. Действительно, даже «наивные» рассуждения в рамках *Mengenlehre* позволяют предсказать результаты К. Гёделя – П. Коэна. Они таковы:

А. Понятие мощности возникло в контексте расширения натурального ряда на область трансфинитного (последовательность (*)). По своему смыслу, оно может быть распространено только на множества, «законным» образом сконструированные из обозреваемых трансфинитов (эта мысль воплощена в «конструктивных» множествах К. Гёделя).

Б. Модель континуума строится путем применения к «законному» объекту – натуральному ряду N «незаконной» операции – образования множества – степени $\boldsymbol{P}(N)$. Априори совершенно неясно, почему понятие мощности можно распространить на $\boldsymbol{P}(N)$, что, собственно говоря, и фиксирует результат Гёделя – Коэна.

Эти «патовые» результаты обусловлены вполне конкретными причинами, которые, однако, «не улавливаются» аксиоматикой и, тем самым, выпадают из рассмотрения.

2

Попытаемся разобраться вначале, почему не решенная в смысле прямого вопроса Кантора проблема, тем не менее, воспринимается научным сообществом как «закрытая».

Начнем с общефилософского фона, сопровождающего становление *Mengenlehre.* Как известно, значительное влияние на общее умонастроение этого периода оказали ряд тезисов неокантианства, в частности мысль Г. Риккерта о том, что бытие представляет собой экзистенциальный предикат [8]. Иными словами, бытие заменялось неким суждением о нем. Следующий шаг был уже очевиден – предикат погружался в аксиоматическую систему, и проблема онтологии окончательно становилась проблемой логики.

Это, в частности, означает, что сущность вещей определяется логическим «социумом», в который входят суждения об этой сущности. «*Границы моего мира есть границы моего языка» (Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt)* – развивал эту же мысль Л. Витгенштейн.

В этом контексте рассмотренное выше понятие мощности множества через «социум» равномощных множеств было совершенно естественным, равно как и последующая трансформация *Mengenlehre* в ***ZFC***. Вместе с тем математики, не испытавшие на себе хитросплетений названной философской доктрины, продолжали задавать «наивные» вопросы. Например, Н.Н. Лузин, размышляя о проблеме континуума, говорил: «*Мощность continuum'a, если только мыслить его как множество точек, есть некая единая реальность и она должна находиться на алефической шкале, где она есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или, как прибавил бы J. Hadamard, "даже невозможно для нас, людей"*» [7].

Вернемся к основной линии.

Как можно было понять из предыдущего, результаты о независимости КГ от остальных аксиом ***ZFC*** решающим образом опираются на сформулированное выше определение мощности множества. Это определение, разумеется, извлечено из *Mengenlehre,* однако возникает вопрос, насколько верно оно было истолковано, ведь Георг Кантор заведомо не был неокантианцем баденской школы и не пытался свести онтологию к логике.

Поставим мысленный эксперимент.

Студенту-математику на экзамене задают вопрос: «Что такое длина кривой?» С определенной долей вероятности его ответ будет таков: «Длина кривой выражается таким-то интегралом. Это, разумеется, верно, но хотели услышать, что «длина кривой – это точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в кривую». Это значит, что мы принципиально разделяем понятие «длины кривой» (как и многих других понятий) на «сущность» и «число». Все это хорошо известные вещи, и понятие «мощности множества», разумеется, не является исключением. Удивительно то, что приведенное выше определение в точности соответствует гипотетическому ответу студента, в то время как сам вопрос предполагал ответ в сущностной плоскости.

Если это действительно так, то можно предположить, что в оригинальных текстах Г. Кантора существует «сущностное» определение мощности множества, тогда как сформулированное выше определение – является *способом* его очисливания (в этом случае *1-1* соответствие играет роль своеобразной «линейки»).

Такое определение действительно есть!

«*Mäglichkeit oder Cardinalzahl von M nennen wir den Allgemeinbegriff, weleher mit Holfe unseres action Dennkvermögens dadurch* ***<u>aus der Menge M</u>*** *hervorgeht, dass von der Bashaffenheit ihrer vershhiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird»*. («*Мощностью или кардинальным числом множества M мы называем общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности* ***из M****, ко-*

гда мы абстрагируемся от качества его различных элементов т и от порядка из задания») [5].

Данное определение ставит все на свои места. Мощность множества становится естественной характеристикой множества, а *1-1* соответствие «включается» тогда, когда необходимо ввести его числовую характеристику. В конечном итоге, это приводит к принципиально иному взгляду на континуум.

Действительно, утверждение $\boldsymbol{c} = \aleph_1$ означает, что некой сущностной характеристике континуума (мощности) без противоречия присвоено значение $\aleph_1$. Вместе с тем этой же сущности можно также без противоречия присвоить значение $\aleph_2$ и т.д. (модель в данном случае выступает в роли инструмента присваивания). Объяснение этому может быть только одно: $\boldsymbol{c}$ – переменная величина, а сам континуум $\boldsymbol{S}(N)$ представляется неким образованием с неустранимой внутренней динамикой. Это значит, что континуум не является множеством, а континуум-проблема, как таковая, не имеет смысла.

Этот результат может показаться неожиданным только на первый взгляд.

Еще П. Коэн, завершая свою книгу, посвященную доказательству независимости КГ от аксиом ***ZFC***, говорил ровно следующее: «...Нет разумного основания ожидать, что какое-либо описание большого кардинала, которое пытается построить этот кардинал с помощью идей, происходящих от аксиомы подставки, окажется когда-либо достаточным для получения $\boldsymbol{c}$. Таким образом, $\boldsymbol{c}$ больше, чем $\aleph_n$, $\aleph_\omega \ldots \aleph_\alpha$, где $\alpha = \aleph_\omega$ и т.д. С этой точки зрения, $\boldsymbol{c}$ рассматривается как невероятно большое множество, которое дано нам какой-либо смелой аксиомой и к которому нельзя приблизиться путем какого бы то ни было постепенного процесса построения. Быть может, последующее поколение научится видеть эту проблему яснее и выражаться о ней более красноречиво» [6].

3

Будем следовать пожеланиям П. Коэна и попробуем понять, что является источником внутренней динамики континуума.

Будем в дальнейшем отождествлять континуум с ***D***-действительными числами.

Отправным пунктом наших рассуждений будет диагональный метод Кантора. Как известно, суть этого метода заключается в следующем. Возьмем счетное множество действительных чисел: $r_1, r_2, r_3 \ldots$ Используя хорошо известную диагональную конструкцию, можно построить действительное число r_d, которое отличается от всех чисел $r_1, r_2, r_3 \ldots$

Попробуем выделить существенные моменты этого метода.

Рассмотрим неограниченную последовательность различных объектов $\{\alpha_n\}$. Предположим, что эта последовательность идет дальше первого бесконечного ординала $\boldsymbol{\omega}$, но не переходит через него. В этом случае последовательность $\{\alpha_n\}$ «отразится» от $\boldsymbol{\omega}$ «внутрь» себя, образовав новый объект

a_d, отличный от всех членов последовательности. Сущность диагонального метода как раз и заключается в этом отражении. Таким образом, источником внутренней динамики континуума является «диагональный процесс», который в рамках теории множеств трансформируется в «диагональный метод».

Отметим, что процессуальная трактовка диагонального метода (но без идеи отражения) предлагалась еще О. Беккером А.А. Зиновьевым и др.

При этом принципиально важно отметить следующее. Последовательность объектов $\{\alpha_n\}$ – реальная в математическом смысле последовательность, в то время как объединение ее членов в множество или ее отражение от **ω** – *мысленные мыслимые по отношению к этой реальности* действия, которые *не «отменяют»* последовательности $\{\alpha_n\}$. Этот факт вполне соответствует интуиции: знание того, что река перегорожена плотиной, от которой течение пойдет вспять, не отменяет самого факта течения. В теории множеств ситуация иная – все элементы последовательности *реально* собираются в множество и только затем обнаруживается, что сама последовательность никуда «не делась».

Полученный в результате отражения новый объект a_d может быть присоединен к последовательности $\{\alpha_n\}$: $\{\alpha_n\} \cup a_d$. Полученная таким способом последовательность также отражается от **ω,** образовав новый объект a_{d1}**.** Последовательность $\{\alpha_n\} \cup a_d \cup a_{d1}$ снова отражается от **ω** и т.д.

Рассмотрим случай, когда в качестве последовательности $\{\alpha_n\}$ выступает стрелочный процесс $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$: → → →… Его отражение от **ω** означает появление объекта, отличного от стрелок процесса $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$, то есть некоторого набора противоположно направленных стрелок, которые «встраиваются» в процесс $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$. В результате получается процесс вида: → ← → →… ←… или в вертикальной форме: ↑↓↑↑↑↓↑... Это новый стрелочный процесс также отражается от **ω** и т.д.

Интерес к стрелочным процессам вызван тем, что с помощью всего лишь двух стрелок «вправо», «влево» можно построить модель действительных чисел, не прибегая к количественным характеристикам, например, «длине» стрелки. Такая модель была построена Дж. Конвеем для описания ряда аспектов теории игр. До настоящего времени (с 1974 г.) она не находила себе адекватного применения и, по большей части, рассматривалась как изящная математическая экзотика. Использование этой модели позволяет прояснить характер внутренней динамики континуума. В частности, встраивание в процесс $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$ противоположных стрелок эквивалентно появлению действительного числа, что соответствует классической схеме диагонального метода.

Опираясь на все вышесказанное, можно сформулировать следующую модель генерации континуума.

a. В основу модели положен процесс $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$.

b. Отражение процесса $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$ от **ω** оборачивается появлением стрелочного процесса $\boldsymbol{W}^{\leftarrow}$, отличающегося от процесса $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$ противоположным направлением стрелок.

с. Процессы $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$ и $\boldsymbol{W}^{\leftarrow}$ взаимодействуют по типу тензорного произведения $\boldsymbol{W}^{\rightarrow} \oplus \boldsymbol{W}^{\leftarrow}$**,** то есть образуется совокупность процессов, составленных из всевозможных комбинаций стрелок $\uparrow$ и $\downarrow$. При этом все эти процессы осуществляются *одновременно*.

В силу приведенного построения очевидно, что $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{W}^{\rightarrow} \oplus \boldsymbol{W}^{\leftarrow}$, где $\boldsymbol{D}$ – совокупность действительных чисел (которая, как мы убедились, множеством не является).

С другой стороны, в этой конструкции вырисовываются вполне определенные черты.

Можно вообразить, что «луч света – электромагнитная волна» $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$ – попадает в некоторый «ящик» $[0, \boldsymbol{\omega}]$, отражается от «стенки» $\boldsymbol{\omega}$**,** образуя «волну» $\boldsymbol{W}^{\leftarrow}$, движущуюся в обратном направлении. Операцию $\boldsymbol{W}^{\rightarrow} \oplus \boldsymbol{W}^{\leftarrow}$ можно воспринимать как абстрактный аналог интерференции этих волн. Сам же континуум становится абстрактным аналогом «стоячей волны».

При этом необходимо учитывать следующий тонкий момент, делающий эту аналогию более прозрачной. В традиционной конструкции действительному числу предшествует рациональное число, то есть отношение двух количеств, что делает эту конструкцию самодостаточной (инвариантной). В отличие от нее, действительные числа из $\boldsymbol{W}^{\rightarrow} \oplus \boldsymbol{W}^{\leftarrow}$ являются полностью порядковыми, то есть зависят от начала отсчета. Сделать эти числа инвариантными можно «замкнув» процессы $\boldsymbol{W}^{\rightarrow}$ и $\boldsymbol{W}^{\leftarrow}$. Линейные процессы можно рассматривать как «линейную часть» полученного «вращения». Можно предположить, таким образом, что континуум с внутренним движением строится на основе *комплексных чисел* (или точнее – амплитуд). Разумеется, все это требует строгого обоснования, которое выходит за рамки данной работы.

Приведенная «волновая» аналогия имеет примечательный метафизический контекст, упомянутый в начале данной работы, а именно – трактат «*О свете или о начале* форм» (*De luce seu de inchoatione formarum*) Р. Гроссетеста, епископа Линкольнского и учителя Р. Бэкона [3]. Приведем только один фрагмент из этого трактата: «Итак, свет, который есть первая форма в первой материи сотворенная, себя самого посредством себя же самого со всех сторон бесконечно умножающий и во все стороны равномерно простирающий, распростирал в начале времен материю, которую не мог оставить, растягивая ее вместе с собой до размеров мироздания… И распространение материи не могло происходить посредством конечного умножения света, ибо, как то показал Аристотель в “О Небе и Мире”, нечто простое, воспроизведенное конечное число раз, не порождает величины. Бесконечно же умноженное простое с необходимостью порождает конечную величину…».

Вернемся еще раз к порождающей конструкции континуума.

Ее основу составляет «диагональный» процесс, суть которого состоит в обращении времени. С другой стороны, условие независимости процесса от начальной точки ведет к идее комплексного числа. В соединении с диагональным процессом это означает появление комплексного числа, сопряженного данному. В целом же в соотношении $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{W}^{\rightarrow} \oplus \boldsymbol{W}^{\leftarrow}$ можно увидеть некий процессуальный аналог спинорного представления ***D.*** То, что такое представление оказывается «зашитым» в традиционную конструкцию континуума, представляется исключительно важным (и отчасти неожиданным) фактом. В следующем разделе мы попытаемся осмыслить этот факт в контексте известных алгебраических и физических результатов.

4

Современная физика опирается на метафизику света в гораздо большей степени, чем видится на первый взгляд. Начиная с концепции СТО идея света вошла в ткань пространства-времени в виде псевдоевклидовой метрики. Дальнейшее осмысление этого факта, особенно в контексте квантовой механики, привело к выявлению многочисленных связей между свойствами пространства-времени и физическими процессами. Эта деятельность с необходимостью должна была выйти на финальную идею: генерацию пространства-времени из физических процессов, конкретно – из электромагнетизма.

Очень кратко обрисуем текущее состояние этой проблемы.

Заметим, что в концепции пространства-времени важно разделять геометрическую составляющую и носитель геометрических свойств, в качестве которого традиционно выступает теоретико-множественный континуум.

Начнем с очевидных вещей.

Каждый элемент пространства R^1 можно представить как пару $[\xi\ ;\ r_n]$, где $\boldsymbol{x} = \xi\, \boldsymbol{e},$ где $\boldsymbol{e}$ – базис в R^1, r_n – бесконечная десятичная непериодическая дробь, которая дается потенциально, как некоторый процесс. Континуум, на котором определено пространство R^1 (то есть носитель R^1), определяется именно такими процессами. Определив на элементах континуума скалярное произведение, можно сказать, что R^1 генерируется этими процессами.

Как уже отмечалось, процесс r_n можно представить в таком виде, что каждый шаг процесса будет определяться только направлением, но не величиной. Для этого можно воспользоваться моделью Конвея, в которой каждое действительное число определяется как последовательность стрелок, направление «направо» и «налево».

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что в случае пространства R^1 проблема его генерации из процессов становится тривиальной, поскольку его носитель сам по себе является «процессуальным». При этом, разумеется, рассматриваемые линейные процессы являются абстрактными, и их отношение к реальным физическим процессам – предмет отдельного обсуждения.

Перейдем к пространству R^3.

Как известно, в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ любой действительный вектор $\boldsymbol{x} = \xi_1\, \boldsymbol{e}_1 + \xi_2\, \boldsymbol{e}_2 + \xi_3\, \boldsymbol{e}_3$ можно представить эрмитовой матрицей $\boldsymbol{H} = \xi_1\, \boldsymbol{\sigma}_1 + \xi_2\, \boldsymbol{\sigma}_2 + \xi_3\, \boldsymbol{\sigma}_3$, где $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ – матрицы Паули. Таким образом, снова можно говорить о паре $[\xi_1 . \xi_2, \xi_3;\ \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3]$. Опуская детали, это означает, что каждый элемент континуума R^3 (носителя пространства R^3) можно представить некоторым вращением. Внешне ситуация похожа на предыдущую, когда элемент континуума R^1 представлялся последовательностью шагов различного направления. Однако, в отличие от линейных шагов «↑» и «↓» в модели Конвея, идея абстрактного вращения не присуща нашей интуиции. Всякое вращение мыслится как вращение «чего-то», происходящее «где-то». Это, в свою очередь, требует введения как минимум пространства R^2 *и*, соответственно, континуума R^2. Это значит, что генерация пространства R^3 "из спиноров» сталкивается с проблемой порочного круга: в построении континуума мы опираемся на континуум. Ситуацию не спасает и идея слоя. Даже если качественно разделять «пространство состояний» R^2 и «реальное» пространство R^3, они имеют один тот же носитель – множество, которое и замыкает круг. Тем не менее идея расслоенного пространства – исключительно мощная и универсальная идея, которая в данном случае принимает вид «предгеометрии».

Несмотря на, казалось бы, тупиковую ситуацию, порочный круг можно разомкнуть, используя результаты предыдущего пункта.

Начнем с того, что «сконструировать» спинор можно без помощи пространства R^2. Необходимы лишь определенные симметрии с участием комплексных чисел $\alpha e^{i\beta}$ (вероятно, здесь уместно вспомнить мысль В. Гейзенберга, что первоосновой являются именно симметрии). Можно указать две такие конструкции, принадлежащие Ю.С. Владимирову [2] и А.П. Ефремову [4]. Несмотря на существенно различные идейные установки в решении названной задачи, они, по сути, реализуют одну и ту же идею.

Подход А.П. Ефремова в целом опирается на геометрические (предгеометрические) образы. Однако замечательным является то, что ключевая в его построении конструкция может быть сформулирована без обращения к этим образам. Действительно, поиск формы комплексного числа, инвариантного к обращению времени, приводит к виду $z = \alpha e^{i\beta}\, \boldsymbol{C}^{+} + \alpha e^{-i\beta}\, \boldsymbol{C}^{-}$, где $\boldsymbol{C}^{+}$ и $\boldsymbol{C}^{-}$ – некоторые матрицы, которые могут быть интерпретированы как проекторы вращений на две взаимно перпендикулярные комплексные плоскости («коническая передача»).

В подходе Ю.С. Владимирова двухкомпонентные комплексные спиноры возникают как следствия фундаментальных симметрий отношений ранга (3,3). Инвариантность к обращению времени в этом случае является следствием двух вещей: идеи начального и конечного состояний; структуры фундаментальных симметрий, первооснову которых составляли пространственные отношения теории физических структур Ю.И. Кулакова.

Завершающий момент состоит в том, что сделать комплексное число $\alpha e^{i\beta}$ (амплитуду) автономным от идеи континуума, сохраняя при этом идею вращения (фактически фазы). Для этого достаточно представить действительную часть в виде процесса из стрелок ↑ и ↓, а комплексную – в виде аналогичной структуры символов абстрактных вращений ↻ и ↺, отражающих порядковую инвариантность названного процесса.

Более того, как было показано в конце предыдущего пункта, опираясь *только* на такое представление комплексного числа и *внутренний* для континуума диагональный процесс, можно получить некоторый процессуальный аналог спинорного представления континуума – носителя пространства-времени. Это представление позволяет понять внутренние пружины приведенных выше конструкций.

Сделаем попытку схематично обрисовать возможность применения полученных результатов к решению сформулированной в начале этого пункте «сверхзадачи» – генерации пространства-времени из электромагнитных процессов.

Согласно фундаментальной идее Ю.С. Владимирова, решающую роль здесь играет совокупность испущенных, но не поглощенных излучений. В теории БСКО эта совокупность представлена в виде набора комплексных отношений. Фигурирующие в этом наборе комплексные числа можно представить в виде двух процессов из стрелок и символов вращений соответственно. Эти процессы завершаются на числе **ω,** которое трансцендентно физической реальности, и, следовательно, все процессы, определяющие комплексное число, даны лишь потенциально. Однако комплексное число, а значит, и названные процессы определяют физические характеристики излучения. Их потенциальный характер как раз и говорит о том, что излучение не поглощено. С другой стороны, как было показано в предыдущем пункте, набор комплексных чисел, каждое из которых представлено в виде двух названных процессов, задает континуум.

Таким образом, генерация пространства-времени из электромагнитного излучения *возможна на основе логически непротиворечивой конструкции*.

Заключение

Как нам представляется, одной из задач метафизики является нахождение образов, в определенных границах отражающих сущность предмета. При этом очень важно не оказаться заложниками языка и известных формализмов. С этих позиций в данной статье предпринята попытка осмыслить теоретико-множественную модель континуума ***S****(N),* играющую ключевую роль в современном математическом универсуме и его многочисленных проекциях на самые разнообразные области.

Результаты этого осмысления таковы.

1. Континуум ***S****(N)*, вопреки сложившимся представлениям, является конструкцией, наделенной внутренним движением (которое, разумеется, носит абстрактный характер). Это объясняет патовое состояние ряда ключевых проблем теории множеств, прежде всего континуум-проблемы. Несмотря на экзотичность этого вывода, абстрактные объекты с внутренним движением не только хорошо известны, но и активно используются для вполне конкретных расчетов. Речь идет о волновой функции, которая не несет энергии, то есть является абстрактным объектом, цель которого констатировать наличие периодического процесса.

2. Названный вывод, естественно, требует ответов на следующие вопросы, где источник и каков механизм внутреннего движения континуума. Ответ на первый из них известен, но он уводит в глубины оснований математики (речь идет о разности двух бесконечностей, которые выступают как своеобразная «разность потенциалов»). Что касается механизма, то таковым является диагональный процесс, традиционно «запрятанный» в диагональный метод.

3. Для точного представления о механизме порождения континуума диагональным процессом необходимо придать ему строго процессуальный характер, то есть полностью избавиться от количественных «примесей», например, длины шага. Возможным инструментом решения является модель Конвея, в которой действительные числа представлены процессами, состоящими из двух стрелок ↑ и ↓.

4. Опираясь на эту модель, можно трансформировать диагональный процесс так, что в нем проявятся два фундаментальных образа: обращение времени и тензорное произведение. Еще один образ возникает из следующих соображений. Переходя к строго процессуальному (порядковому) представлению действительного числа, необходимо сделать процесс независимым от начала отсчета. Этого можно добиться, замкнув линейный процесс, сделав равноправными все его шаги (этой процедуре можно придать вполне строгий характер). Забегая далеко вперед, можно сказать, приведенные рассуждения говорят о том, что комплексные числа играют в построении континуума более фундаментальную роль, чем действительные.

5. Названные образы составляют «ингредиенты» конструкции, которую можно назвать прообразом «спинорного представления» континуума, которая реализуется в диагональном процессе. Использование этого, семантически занятого понятия, именно в этом контексте продиктовано следующими соображениями.

Названные выше образы можно, разумеется, «закатать» в статический теоретико-множественный континуум. Однако необходимость более тонкого описания реальности, прежде всего квантовой (в которой время не подверстано под пространство), заставляет изобретать (или вспоминать) хорошо известные теоретико-множественные конструкции, в которых реализуются лежащие под спудом указанные образы. Можно предположить, что строгое определение спинорного представления в терминах алгебры Клиффорда в большей степени отражает именно теоретико-множественные конструкции, чем суть самого представления. Косвенным подтверждением этого могут быть альтернативные подходы Р. Пенроуза, Ю.С. Владимирова, А.П. Ефремова.

6. Магистральный путь развития концепции континуума, как нам представляется, состоит в замене его теоретико-множественной основы некой иной основой, более приближенной к физической реальности, вплоть до ее генерации из физических, прежде всего электромагнитных, процессов. В решении этой проблемы выявленные динамические образы вместе с адек-

ватной формализацией (также имеющей место) могут стать существенной опорой.

7. Методологию использования подобных образов продемонстрировал в свое время Л. де Бройль. Введя фиктивную волну, он одновременно говорил о «согласовании фаз векторов этой волны и процесса внутри движущегося объекта» (accord de phase entre les vecteurs de l'onde et phenomene interne du mobile». Возможно, стоит расширить этот подход.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векшенов С.А.* Математика и физика пространственно-временного континуума // Основания физики и геометрии. – М.: Российский университет дружбы народов, 2008. – С. 89–118.
2. *Владимиров Ю.С.* Метафизика. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2002.
3. *Гроссетест Р.* О свете или начале форм // Вопросы философии. – 1995. – № 6.
4. *Yefremov A.P.* The conic-gearing image of complex number and spinor – born surface geometry // Gravitation and Cosmology. – 2011. – Vol. 17. – № 1. – P. 1–6.
5. *Kantor G.* Beträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre // Mathematische Annalen. – Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1869. – P. 481–512.
6. *Коэн П.Д.* Теория множеств и континуум-гипотеза. – М.: Мир, 1969.
7. *Лузин Н.Н.* Цитата по книге Босс В. Теория множеств: от Кантора до Коэна. – М.: URSS, 2011.
8. *Rickert H.* Die Logik des Prädikats und das Problem der Ontologie. – Heidelberg, 1930.

LIGHT AND CONTINUUM – "SHORT CIRCUIT"

S.A. Vekshenov

The article attempts to comprehend the set-theoretic model of the continuum, which plays a key role in the modern mathematical universe and in its numerous projections into the most diverse areas. It concludes that the continuum is a formation endowed with inner movement. Comprehending the sources and mechanisms of this movement prompts to discover a number of fundamental images and relationships between them that are directly related to the fundamental structures of modern physics. Thereby, deep parallels arise with the thoughts about the light-specific nature of the surrounding world, which can be seen in the works of R. Grosseteste (1170–1253).

Key words: the model of continuum, continuum power, Grosseteste concept, space-time generation.