Ватутин Э.И.[1], Кочемазов С.Е.[2], Заикин О.С.[2], Титов В.С.[1]

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИЧНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

[1] Юго-Западный государственный университет, Курск
[2] Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск

e-mail: evatutin@rambler.ru

Одним из классов комбинаторных объектов, находящих практическое применение в задачах управления, планирования эксперимента, теории групп, а также используемых при построении расписаний определенного вида, являются латинские квадраты. Латинским квадратом (ЛК) порядка N называется квадратная таблица $A = \left\| a_{ij} \right\|$, $i, j = \overline{1, N}$, элементами a_{ij} которой являются элементы некоторого множества U мощности $N = |U|$, причем в каждой строке и в каждом столбце ЛК каждый из элементов множества U встречается в точности один раз. Для диагональных латинских квадратов (ДЛК), являющихся специальным видом ЛК, по определению дополнительно вводятся требования на отсутствие совпадающих элементов на главной и побочной диагонали. ДЛК называется нормализованным, если элементы его первой строки упорядочены по возрастанию.

Симметричным ЛК будем называть такой ЛК, у которого имеется взаимно однозначное соответствие между всеми парами элементов $\left(a_{ij}, a_{i,\,N-j+1}\right)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor}$. Указанная симметрия имеет место в горизонтальной плоскости (относительно вертикальной линии, проходящей через центральный столбец ДЛК нечетного порядка и между парой центральных столбцов для ДЛК четного порядка), аналогично можно ввести определение симметрии в вертикальной плоскости. Для нормализованного ДЛК условие наличия симметрии в горизонтальной плоскости может быть записано в более простом виде: $a_{ij} + a_{i,\,N-j+1} = N - 1$. Симметричные ЛК обладают симметричным множеством трансверсалей, что может быть использовано для построения пар и троек полностью или частично ортогональных диагональных латинских квадратов. Примеры симметричных в горизонтальной и вертикальной плоскости ДЛК приведены на рис. 1.

0	1	2	3	4	5
4	2	0	5	3	1
5	4	3	2	1	0
2	5	4	1	0	3
3	0	1	4	5	2
1	3	5	0	2	4

0	1	2	3	4	5
4	2	5	0	3	1
3	5	1	2	0	4
5	3	0	4	1	2
2	4	3	1	5	0
1	0	4	5	2	3

Рис. 1. Примеры симметричных ДЛК (для наглядности одна из пар значений элементов, образующих симметрию, выделена серым; оси симметрии изображены жирными линиями)

Зависимость числа симметричных ЛК с фиксированной диагональю (или, что то же самое, – с фиксированной первой строкой) от размерности задачи N задается последовательностью A003191 в Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. Online Encyclopedia of Integer Sequences, сокр. OEIS). Зависимость числа симметричных ДЛК он размерности задачи N по состоянию на текущий момент в OEIS не представлена, поэтому вызывает интерес ее построение. Для этого в простейшем случае необходимо осуществление генерации всех ДЛК заданного порядка N с проверкой на наличие искомой симметрии. Возможна также разработка более эффективной программной реализации указанной задачи, базирующейся на заполнении половины элементов квадрата в сочетании с вариацией порядка заполнения элементов отталкиваясь от принципа минимума возможностей и использованием стратегии ветвей и границ.

Следуя первой стратегии, была разработана программная реализация, с использованием которой был организован вычислительный эксперимент для определения искомого числа нормализованных симметричных ДЛК для размерности задачи $1 \le N \le 8$ (время вычислений – 19 ч для однопоточной программной реализации на процессоре Intel Core i7 4770), полученные результаты представляют собой следующую последовательность: 1, 0, 0, 2, 0, 64, 0, 3 612 672, не представленную в OEIS (несложно заметить, что указанные симметричные ДЛК существуют только для четных порядков, не считая случая размерности 1). С учетом того, что путем перенумерации элементов любой ДЛК может быть приведен к нормализованному виду, в результате умножения полученной в ходе вычислительного эксперимента последовательности на $N!$ можно получить общее число симметричных ДЛК: 1, 0, 0, 48, 0, 46 080, 0, 145 662 935 040. Оценка числа симметричных нормализованных ДЛК порядка 10 в настоящее время не представляется возможной ввиду необходимости огромных затрат вычислительного времени (генерация соответствующих ДЛК с проверкой на наличие симметрии производится с темпом 200 000 ДЛК/с, при условии, что число нормализованных ДЛК порядка 10 составляет величину порядка 10^{22}, на это потребуется $1{,}6 \cdot 10^9$ лет при организации вычислений в один поток или около 160 лет на суперкомпьютере петафлопсного класса с 10 миллионами CPU-ядер).

Кроме того, существуют ДЛК, которые одновременно симметричны как по горизонтали, так и по вертикали. Пример подобного ДЛК приведен на рис. 2.

0	1	2	3	4	5	6	7
6	2	3	7	0	4	5	1
4	5	1	0	7	6	2	3
5	6	7	4	3	0	1	2
7	3	6	2	5	1	4	0
2	7	4	1	6	3	0	5
3	0	5	6	1	2	7	4
1	4	0	5	2	7	3	6

Рис. 2. Пример нормализованного ДЛК, симметричного как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости

Подобные ДЛК являются достаточно редкими комбинаторными объектами, зависимость их числа от размерности задачи N также была определена в ходе вычислительного эксперимента (затраты вычислительного времени – 19,5 ч): 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 15 780. Зависимость числа дважды симметричных ДЛК от N, аналогично рассмотренному выше, получается из полученной последовательности путем ее умножения на $N!$: 1, 0, 0, 48, 0, 0, 0, 636 249 600. Для ДЛК размерности $N \leq 20$ была организована серия вычислительных экспериментов, в ходе которой было определено, что дважды симметричные ДЛК существуют только для размерностей $N = 4n,\ n \in \mathbb{N}$.

Симметричные и дважды симметричные квадраты обладают рядом особенностей: как правило они обладают большим числом трансверсалей, для них зачастую (но не всегда) существует большое число ортогональных ДЛК (ОДЛК), для размерностей $N = 4$ и $N = 8$ квадраты с максимально возможным числом ОДЛК являются дважды симметричными.

Еще одним видом симметрии может быть симметрия относительно диагоналей, однако в ходе проведенных вычислительных экспериментов для размерностей $N \leq 8$ выявлено, что квадраты с подобной диагональной симметрией не существуют.