

# 財團法人中華民國證券櫃檯買賣中心零息殖利率曲線說明

## ■ 編製零息殖利率曲線價格資料來源

每日本中心公債指數計算價格，樣本採公債指數內全部的債券

## ■ 編製零息殖利率曲線的模型說明

### Steeley Basis Spline 模型

樣條 (splines) 函數法在學術界的討論及研究最為多元，可以使用的�方法亦最為豐富。Spline 這個名詞源起於建築界，原本是指利用數個固定點來彎曲細長的薄木片用以繪製出平滑的曲線，透過固定點的數量及位置的改變，就能夠變化出相當豐富的曲線形狀。樣條函數此一類型的配適殖利率曲線方法皆根據 Weierstrass 的逼近定理 (Approximation Theorem)：任何連續函數均可利用多項式加以逼近，而且兩者間的差異可控制在任意小的範圍內，其定理如下：任意定義在有界閉區間  $[a,b]$  的連續函數  $f$ ，總可以用多項式  $P_n$  來逼近兩者

$$E_n(f) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| = \|f - P\|_{\infty}$$

當  $n \rightarrow \infty$  時誤差趨近於零

一般說來雖然可藉由增加多項式函數的次數 (degree) 來增進配適的狀況，但高次多項式由於方程式的自由度過大，曲線的最外側的兩端常會產生大幅震盪的不穩定現象，為改善尾端大幅震盪的現象，利用分段 (piecewise) 多項式進行來逼近，可有效降低分段多項式的次數，降低尾端大幅震盪的不穩定現象，但仍可獲得良好的配適結果，因此採用樣條法配適殖利率曲線，通常會將整個配適期間切為數個段落，而切割的時點我們通常稱為節點 (knot point，以  $\xi_i$  表示)，

針對每一個段落分別進行配適。

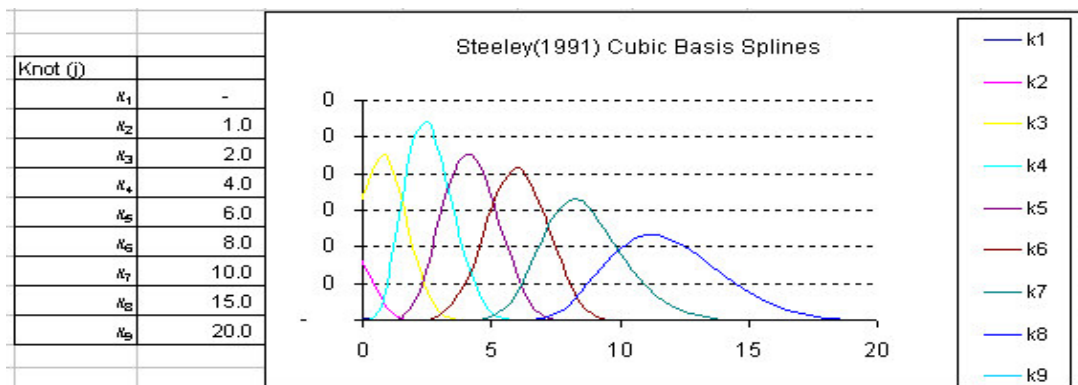
Steeley 於 1991 年以英國公債 (U.K. Gilt-Edged Bond) 配適英國的利率期限結構，其基底函數亦採用 3 次 (cubic) 方程式，乃採用 Powell 於 1981 年推導的 basis spline (B-spline) 定義，其 B-spline 的函數形式如下：

在閉區間  $[A, B]$  中，若節點  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 且滿足  $A = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = B$  的關係，則單一  $k$  次的 B-spline 函數  $B_i^k(t)$  定義為：

$$B_i^k(t) = \sum_{j=0}^{k+1} \left\{ \left[ \prod_{l=0, l \neq j}^{k+1} \frac{1}{\xi_{i+l} - \xi_{i+j}} \right] [\max(t - \xi_{i+j}, 0)]^k \right\}$$

一般來說以上的 B-spline 函數，若  $k=1$  稱為 linear B-spline，若  $k=2$  則稱 quadratic B-spline，若  $k=3$  則稱為 cubic B-spline，另外此 B-spline 函數  $B_i^k(t)$  只有當時間  $t$  位於  $(\xi_i, \xi_{i+k+1})$  內其值不為零，其餘的區間  $B_i^k(t)$  皆為零，此性質稱為 local support。

Steeley 將 B-spline 函數設定為 3 次，即所謂的 cubic spline 其基底函數型態大致如下圖：



由於 B-spline 具有 local support 性質，因此較一般的 spline 函數具有良好的運算穩定性，可以在不增加函數次數  $k$  的情況下，提供較正確的逼近結果。

B-spline 需要  $n+k$  個線性獨立的  $k$  次 basis function 才能完整

來逼近欲擬合的曲線，但在閉區間  $[A, B]$  中具備節點  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )，只存在  $n-k$  個線性獨立的 basis function，因此必須於最外側的  $\xi_0$  與  $\xi_n$  的兩側再分別向外延伸  $k$  個新節點，若  $k=3$  則必須增加節點  $\xi_i$  ( $i = -3, -2, -1, n+1, n+2, n+3$ )，可再新建立  $2k$  個線性獨立的 basis function，再配合原先閉區間  $[A, B]$  中的  $n-k$  個線性獨立的 basis function，共可組成  $n+k$  個  $k$  次線性獨立的 basis function。

Spline 模型運用於殖利率曲線的配適上，基本假設折現函數為下列形式：

$$D(t) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$$

其中  $a_i$   $i = 1 \sim n$  為估計參數

$f_i(t)$  為設定的特定函數，即為上述的基底函數 (basis function)

能夠使符合下式的  $a_i$   $i = 1 \sim n$ ，即為最佳解

$$\text{Min} \left( \sum_{i=1}^n w_i \cdot (\hat{P}_i - P_i)^2 \right)$$

其中

$$w_i = \frac{1/D_j}{\sum_{j=1}^n 1/D_j} \quad D_j \text{ 為第 } j \text{ 期公債的存續期間 (MacCauley Duration)}$$

藉由最佳解可求得最適折現函數，透過折現函數代入下式，再行推算出零息利率。

$$R_t = D(t)^{-\frac{1}{t}} - 1 \quad R_t \text{ 為 } t \text{ 時的零息利率}$$

## Svensson 模型

1994 年 Svensson 針對 Nelson-Siegel 模型再增加一個駝峰或 U 字型，因此 Svensson 模型配適的殖利率曲線可以出現兩個彎曲點，在殖利率曲線的配置上更具有彈性，可展現出更豐富的殖利率曲線型態。

Svensson 模型將瞬間遠期利率延伸為下列式子：

$$f(TTM) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \right) + \beta_2 \cdot \left[ \frac{TTM}{\tau_1} \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \right) \right] + \beta_3 \cdot \left[ \frac{TTM}{\tau_2} \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_2}\right)} \right) \right]$$

瞬間遠期利率函數的估計參數  $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ 、 $\tau_1$  及  $\tau_2$ ，其意義分別如下：

$\beta_0$ ：必定為正數，此數值為  $f(TTM)$  遠端漸近值，亦即長期的瞬間遠期利率應收斂於  $\beta_0$

$\beta_1$ ：此參數為短期因子，此參數決定短期（或起始值）與遠期漸進值的差異，同時此參數決定短期值以多快的速度收斂至長期漸近值，若  $\beta_1$  為負數則  $f(TTM)$  曲線為正斜率，反之則為負斜率

$\tau_1$ ：此參數必定為正數，表示此曲線的第一個駝峰或 U 字型的位置，同時決定  $\beta_1$  的收斂速度，當  $\tau_1$  值較小時收斂速度較快，反之則收斂速度慢

$\beta_2$ ：此參數描述曲線第一個峰態的大小及方向，若此參數為正數則曲線呈現駝峰狀（hump），若為負數則曲線呈現 U 字型（U-shaped）

$\tau_2$ ：此參數必定為正數，表示此曲線的第二個駝峰或 U 字型的位置

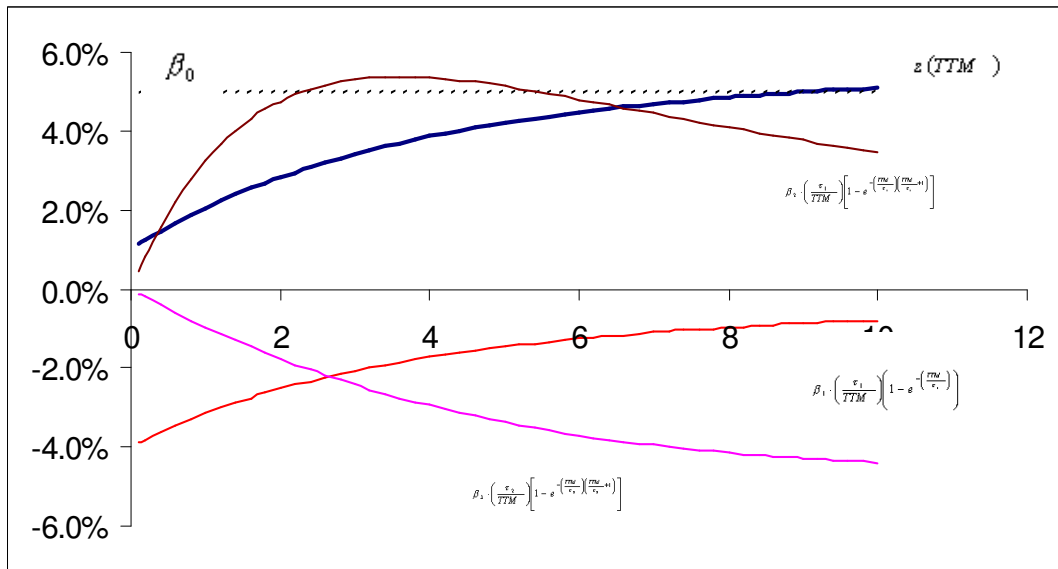
$\beta_3$ ：此參數描述曲線第二個峰態的大小及方向，若此參數為正數則曲線呈現駝峰狀（hump），若為負數則曲線呈現 U 字型

(U-shaped)

而將瞬間遠期利率  $f(TTM)$  轉換成為即期利率  $z(TTM)$ ，可表示如下式：

$$z(TTM) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(\frac{\tau_1}{TTM}\right) \left(1 - e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)}\right) + \beta_2 \cdot \left(\frac{\tau_1}{TTM}\right) \left[1 - e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \left(\frac{TTM}{\tau_1} + 1\right)\right] + \beta_3 \cdot \left(\frac{\tau_2}{TTM}\right) \left[1 - e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_2}\right)} \left(\frac{TTM}{\tau_2} + 1\right)\right]$$

其零息殖利率曲線組成如下：



$\beta_0$	5.0%
$\beta_1$	-4.0%
$\beta_2$	18.0%
$\beta_3$	-15.0%
$\tau_1$	2.000
$\tau_2$	7.000

事實上 Svensson 模型的瞬間遠期利率  $f(TTM)$  的最後一項，乃是為了增強配適效果而加入，其並未有經濟上特殊的意義，故 Svensson 模型其實不能夠算是 Nelson-Siegel 模型的延伸，但由於 Svensson 模型在殖利率曲線的型態表現上更加豐富，因此能夠得到較 Nelson-Siegel 模型更佳的配適效果。

證券櫃檯買賣中心  
公債零息殖利率曲線技術手冊

## 建立公債零息殖利率曲線之研究

### 壹、緒論

國內零息殖利率曲線的研究，多數仍為學術性的探討與研究，因此在配適零息殖利率曲線的方法較專注於單一模型，而取樣的資料也因交易資訊不易取得，造成資料的範圍通常較為狹隘，而經訪查現行證券商對於零息殖利率曲線的計算不是付之闕如，就是以較簡易的方式進行計算，證券櫃檯買賣中心以豐富的公債價格資訊，並廣為蒐集各種文獻上零息殖利率曲線配適的方法，進行較為全面性的公債零息殖利率曲線配適實證研究，冀望透過此研究能找出較佳的零息殖利率曲線配適模型，以供市場上來實際應用。

在配適殖利率曲線上，最早期的研究並未注意到所謂的票息效果 (coupon effects)，故將市場上所流通的公債成交殖利率，直接拿來繪製殖利率與到期期限之間的關係，此方法無法釐清票息對於交易價格的影響，另一個大問題是經由離散的點主觀的描繪成連續的曲線，其殖利率曲線的正確性也大受質疑，直到 1966 年 Fisher 與 Cohen, Kramer and Waugh 開始採用迴歸的最小平方法 (Ordinary Least Squares, OLS) 來估計殖利率曲線，其設定的迴歸式分別設定為：

Fisher 的迴歸方程式設定為

$$\tau_i = a_0 + \sum_{j=1}^3 a_j t_{m_i}^j + a_4 \log t_{m_i} + a_5 C_i + a_6 C_i^2 + a_7 \log C_i$$

Cohen, Kramer and Waugh 的迴歸方程式設定為

$$\tau_i = a_0 + a_1 t_{m_i} + a_2 [\log t_{m_i}]^2$$

上述的兩個方法雖然迴歸式所配適的對象依然是含息殖利率而非零息殖利率，但仍為學術界首次引進客觀的標準，來衡量殖利率曲線配適的效果好壞。

1971 年 McCulloch 發表的論文 -- Measuring the term structure of interest rates，正式開啟了對於「零息殖利率曲線」配適的研究，這不但是學術界第一次用 Regression Splines 的方法估計殖利率曲線，同時開創了分段配適方法的研究先河，最重要的是 McCulloch 嘗試了從估計折現函數下手，再經過轉換得到零息殖利率曲線，是一條真正的零息殖利率曲線。該文採用 quadratic spline function (2 次樣條函數) 來逼近折現函數 (discount function)，由於受限於基底函數 (basis function) 僅為 2 次 (quadratic) 函數，故其連續條件僅可及於一階導數，故配適出之折現函數再轉換為遠期利率曲線容易出現折角而出現不平滑的現象。為改善 2 次函數配適不合理的現象，McCulloch 於 1975 年改以 3 次 (cubic) 函數為基底，來逼近折現函數，經研究以 McCulloch cubic

splines 方法配適出的即期利率曲線在長期有持續向上或向下彎曲的現象，以至於遠期利率曲線在長期時會出現大幅度的波動，其與遠期利率在長期利率期間結構漸進穩定的性質不符。

Vasicek and Fong (1982) 於是試圖想要建立可使長期遠期利率能夠漸進穩定的殖利率配適方法，因此提出 exponential spline 的基底函數，事實上 Vasicek and Fong 僅提出理論概念，但並未進行實證的分析，1985 年 Shea 應用 Vasicek and Fong 的方法進行實證配適，發現此方法並不能得到原先預期的效果，雖然在最遠端遠期利率斜率被固定為零，但其他部分遠期利率依然波動劇烈，與 McCulloch 配適出效果相差無幾，因此 Shea 還是建議採用 McCulloch 法估計殖利率曲線較佳。謝承熹 (2000) 進行實證認為，遠期利率曲線不夠穩定的缺失在配適台灣的交易資料時並不明顯。

Steeley 於 1991 年以英國公債 (U.K. Gilt-Edged Bond) 配適英國的利率期限結構，其基底函數亦採用 3 次 (cubic) 方程式，乃採用 Powell 於 1981 年推導的 basis spline (B-spline) 定義，由於 B-spline 具有 local support 性質，因此較一般的 spline 函數具有良好的運算穩定性，可以在不增加函數次數  $k$  的情況下，提供較正確的逼近結果。Lin (1999) 配適 1997/10/4~1998/5/2 期間每星期六的台灣公債殖利率曲線，亦認為可獲得平穩且平滑的殖利率曲線。

Nelson and Siegel 於 1987 年首度利用較簡單及較少的變數，但卻能夠表現殖利率曲線的形狀的 parsimonious 模型配適殖利率曲線，雖然 Nelson and Siegel 僅只有 4 個估計參數，但卻也能夠表達出豐富的殖利率曲線型態，因此幾乎已能夠大致表達出殖利率曲線的所有形狀。此外，此模型預測樣本期間外殖利率曲線的能力也相當良好。

1994 年 Svensson 針對 Nelson-Siegel 模型再增加一個駝峰或 U 字型，因此 Svensson 模型配適的殖利率曲線可以出現兩個彎曲點，在殖利率曲線的配置上更具有彈性，可展現出更豐富的殖利率曲線型態。

本研究對於債券市場的實際應用的貢獻如下：

- (1) 採用最新的等殖交易系統成交資料及中央公債主要交易商的報價資料進行殖利率曲線配適，為殖利率曲線相關研究中，資料期間最新且最完整可靠者。
- (2) 本研究共使用 McCulloch、Vasicek and Fong、Steeley、Smoothing Spline、Nelson and Siegel、Extend Nelson and Siegel 以及 Svensson 等 7 個模型進行實證研究，採用的實證模型堪稱相當完整，為國內首次採用多模型的大規模實證研究，對於未來實際應用時模型的選取有相當大的



幫助。

- (3) 本研究實證後，對於不同目的的殖利率曲線使用者，推薦不同的最佳化配適模型，大幅增加殖利率曲線在實務上的可應用性及方便性。
- (4) 本研究所採行的方法可廣泛的應用在公債的評價、利率衍生性商品的定價及利率相關的風險管理上，國內的證券商、銀行及票券等業者皆有相當大需求，實用性相當高。

## 貳、實證模型

本篇研究共採行 7 種模型進行實證研究，而又可將此些模型大致區分為兩大類，一類為樣條函數 (Cubic Spline) 模型，另一類為計量估計模型，下面將此七種模型分別簡單敘述：

### 一、樣條函數模型

樣條 (splines) 函數法在學術界的討論及研究最為多元，可以使用的方法亦最為豐富。Spline 這個名詞源起於建築界，原本是指利用數個固定點來彎曲細長的薄木片用以繪製出平滑的曲線，透過固定點的數量及位置的改變，就能夠變化出相當豐富的曲線形狀。樣條函數此一類型的配適殖利率曲線方法皆根據 Weierstrass 的逼近定理 (Approximation Theorem)：任何連續函數均可利用多項式加以逼近，而且兩者間的差異可控制在任意小的範圍內，其定理如下：

任意定義在有界閉區間  $[a, b]$  的連續函數  $f$ ，總可以用多項式  $P_n$  來逼近兩者

$$E_n(f) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| = \|f - P\|_{\infty}$$

當  $n \rightarrow \infty$  時誤差趨近於零

一般說來雖然可藉由增加多項式函數的次數 (degree) 來增進配適的狀況，但高次多項式由於方程式的自由度過大，曲線的最外側的兩端常會產生大幅震盪的不穩定現象，為改善尾端大幅震盪的現象，利用分段 (piecewise) 多項式進行來逼近，可有效降低分段多項式的次數，降低尾端大幅震盪的不穩定現象，但仍可獲得良好的配適結果，因此採用樣條法配適殖利率曲線，通常會將整個配適期間切為數個段落，而切割的時點我們通常稱為節點 (knot point，以  $\xi_i$  表示)，針對每一個段落分別進行配適。以下就 McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley 三種樣條函數模型分別進行說明。

### McCulloch 模型

McCulloch 於 1975 年改以 3 次 (cubic) 函數為基底，來逼近折現函數。其

基底函數設定如下：

若

$$t \leq \xi_{i-1} \quad f_i(t) = 0$$

$$\xi_{i-1} \leq t \leq \xi_i \quad f_i(t) = \frac{(t - \xi_{i-1})^3}{6(\xi_i - \xi_{i-1})}$$

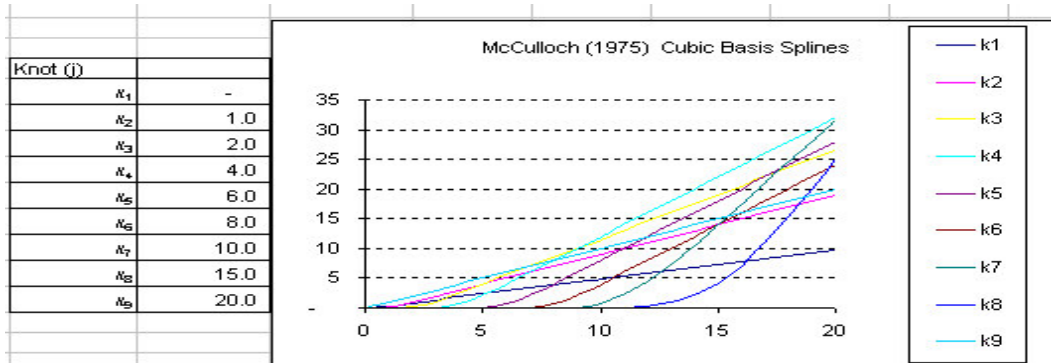
$$\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1} \quad f_i(t) = \frac{F^2 + 3FG + 3G^2}{6} - \frac{G^3}{6(\xi_{i+1} - \xi_i)}$$

$$\xi_{i+1} \leq t \quad f_i(t) = (\xi_{i+1} - \xi_i) \left[ \frac{2\xi_{i+1} - \xi_i - \xi_{i-1}}{6} + \frac{t - \xi_{i+1}}{2} \right]$$

$$i = n \quad f_n(t) = t$$

其中  $F = \xi_i - \xi_{i-1}$ ,  $G = t - \xi_i$

其基底函數型態大致如下圖：



### Vasicek and Fong 模型

由於 McCulloch cubic splines 方法配適出來的遠期利率在長期可能出現大幅度擺盪的現象，Vasicek and Fong (1982) 於是試圖想要建立可使長期遠期利率能夠漸進穩定的殖利率配適方法，因此提出 exponential spline 的基底函數，其折現函數設定如下：

$$D(t) = 1 + \alpha_1 A_1(t) + \alpha_2 A_2(t) + \alpha_3 A_3(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_{3i+1} A_{3i+1}(t)$$

其中  $A_i(t)$  為設定的特定函數或是基底函數，詳述如下：

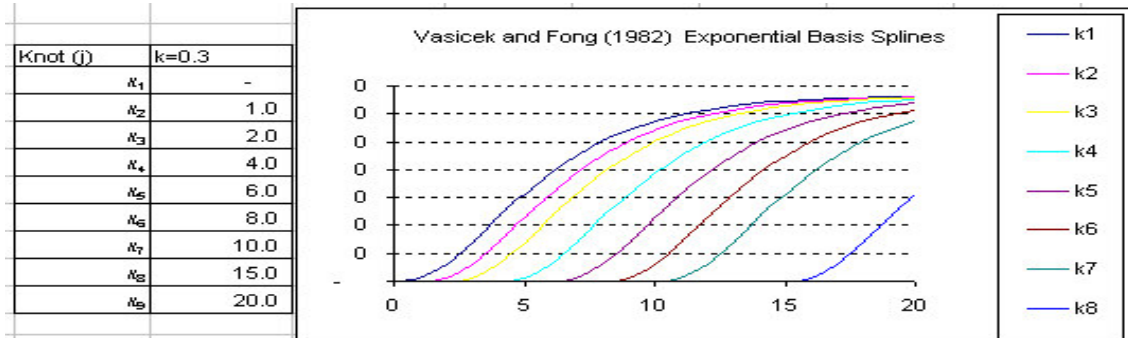
$$A_1(t) = 1 - e^{-kt}, \quad A_2(t) = 1 - e^{-2kt}, \quad A_3(t) = 1 - e^{-3kt}$$

$$A_{3i+1}(t) = O_i(t) \left[ A_1(t - t_i) - A_2(t - t_i) + \frac{1}{3} A_3(t - t_i) \right]$$

$$\text{其中 } O_i(t) = 0 \quad t < \xi_i$$

$$O_i(t) = 1 \quad t \geq \xi_i$$

其基底函數型態大致如下圖：



Vasicek and Fong 並證明，當  $t \rightarrow \infty$  時， $k$  即為瞬間遠期利率的收斂值，其證明如下：

$$\text{遠期利率} = -\frac{D'(t)}{D(t)}$$

在  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$  的假設下，由 L' Hospital' s 定理可證得

$$\text{極限遠期利率} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{D'(t)}{D(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{D''(t)}{D'(t)} = k$$

### Steeley Basis Spline 模型

Steeley 於 1991 年以英國公債 (U.K. Gilt-Edged Bond) 配適英國的利率期限結構，其基底函數亦採用 3 次 (cubic) 方程式，乃採用 Powell 於 1981 年推導的 basis spline (B-spline) 定義，其 B-spline 的函數形式如下：

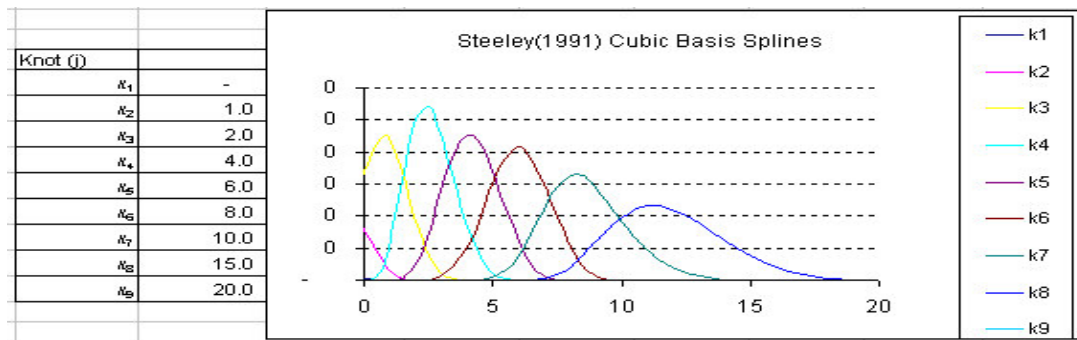
在閉區間  $[A, B]$  中，若節點  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 且滿足  $A = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = B$  的關係，則單一  $k$  次的 B-spline 函數  $B_i^k(t)$  定義為：

$$B_i^k(t) = \sum_{j=0}^{k+1} \left\{ \left[ \prod_{l=0, l \neq j}^{k+1} \frac{1}{\xi_{i+l} - \xi_{i+j}} \right] [\max(t - \xi_{i+j}, 0)]^k \right\}$$

一般來說以上的 B-spline 函數，若  $k=1$  稱為 linear B-spline，若  $k=2$  則稱 quadratic B-spline，若  $k=3$  則稱為 cubic B-spline，另外此 B-spline 函數  $B_i^k(t)$  只有當時間  $t$  位於  $(\xi_i, \xi_{i+k+1})$  內其值不為零，其餘的區間  $B_i^k(t)$  皆為零，此性質稱為 local support。

Steeley 將 B-spline 函數設定為 3 次，即所謂的 cubic spline 其基底函數

型態大致如下圖：



B-spline 需要  $n+k$  個線性獨立的  $k$  次 basis function 才能完整來逼近欲擬合的曲線，但在閉區間  $[A, B]$  中具備節點  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )，只存在  $n-k$  個線性獨立的 basis function，因此必須於最外側的  $\xi_0$  與  $\xi_n$  的兩側再分別向外延伸  $k$  個新節點，若  $k=3$  則必須增加節點  $\xi_i$  ( $i = -3, -2, -1, n+1, n+2, n+3$ )，可再新建立  $2k$  個線性獨立的 basis function，再配合原先閉區間  $[A, B]$  中的  $n-k$  個線性獨立的 basis function，共可組成  $n+k$  個  $k$  次線性獨立的 basis function。

以上所提到的 McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley 所提出的殖利率配適方法，都可將欲配適的債券價格可轉換為估計參數方程式，詳見下列推導：

假設  $\Phi = \{\phi_k(t)\}_{k=1 \sim n}$  為  $n$  個 basis function 的集合

以 basis function 的集合逼近的折現函數

$$D(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t)$$

其中  $\alpha_i$  為估計參數

我們可將估計出之折現函數表示為  $\hat{D} = \Phi\alpha$

$S = C\Phi'$  其中  $C$  為債券現金流量

則債券價格為  $P = S\alpha + \varepsilon$

因此  $\alpha$  即可使用一般線性最小平方法迴歸的 (ordinary least squares, OLS) 法求解。

由於 McCulloch、Vasicek and Fong (參數  $k$  無法以線性迴求解) 及 Steeley 等法皆可使用線性迴歸求解，因此此類方法也常被稱之為有母數的線性迴歸法或 regression spline。此類的配適方法的特色是參數的求解皆可以簡單的以線性迴歸求解，故在求解的效率上稱得上相當的好。

### Smoothing Splines 模型

以上介紹的 McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley 的 Spline 法皆會產

生遠期利率曲線較不平滑的現象，因此發展出希望能夠在資料配適度 (goodness of fit) 或準確度及曲線平滑度 (smoothness) 之間作取捨的模型。

前面敘述的幾種 Spline 方法皆是先決定有幾個估計參數以及基底函數的形式，再對於殖利率曲線進行配適工作，而 Smoothing Spline 法則是藉由平滑度的選擇來決定估計參數的個數，以 1994 年 Fisher, Nychka, Zervos 所發表的方法為例，我們定義  $h(t)$  為 cubic spline 如下式：

$$h(t, \beta) = \sum_{k=1}^k \beta_k \phi_k(t) = \phi(t)\beta$$

而在 Smoothing Spline 中設定了一個不平滑的罰則 (penalty of roughness)，其定義如下：

$$\lambda \int_0^T h''(t)^2 dt$$

其中 T 為最大到期期限， $\lambda$  為常數

而 Fisher, Nychka, Zervos 將極小化的目標方程式由最小平方誤差改為下式：

$$\min \left[ \sum_{i=1}^n (p_i - \hat{p}_i)^2 + \lambda \int_0^T h''(t)^2 dt \right]$$

由上式可以簡單的看出 Smoothing Spline 的基本概念，其中目標方程式的前項及與一般的 regression spline 目標方程式相同，皆是希望能求得最小的配適誤差，而增加的后項 (不平滑的罰則) 則會因為配適出的函數平滑程度而有差異，當  $h(t)$  配適出的結果相當平滑時，不平滑的罰則項就會相對小，反之不平滑的罰則項就會變大，因此要取得整個目標方程式最小的解，就必須兼顧配適的準確度及配適結果的平滑程度，而  $\lambda$  的大小則主宰著配適結果平滑的程度，當  $\lambda$  越大時表示對於平滑程度的要求越高，相對若  $\lambda$  小則對於平滑程度的要求越小。

Smoothing Spline 模型的另一個重大特色為可不先行決定估計參數的個數，而是藉由平滑程度的選擇再來決定估計參數的個數，其計算乃藉由 General Cross Validation (GCV) 來推算最適參數

$$GCV(\lambda, \theta) = \frac{RSS(\lambda)}{[m - \theta \bar{k}(\lambda)]^2}$$

其中

$RSS(\lambda)$  : Residual Sum of Squares，配適誤差平方和

$m$  : 樣本個數

$\bar{k}(\lambda)$ ：有效估計參數個數

$\theta$ ：成本係數，控制配適度 (goodness of fit) 及極小參數化 (parsimony) 間的權衡，若此參數越小會使得配適結果越趨於較佳配適度，而此參數越大會使得配適結果越趨於平滑

透過求取最小化的 GCV 數值，即可決定  $\lambda$  的大小同時可間接求算出有效估計參數的個數。

上述的四個模型皆必須找尋節點 (knots)，進行殖利率曲線分段配適，本文採用 McCulloch 推導的節點數及節點位置，其節點個數及位置分別如下：

假設共有  $n$  期欲配適債券

節點數的決定：設定最接近  $\sqrt{n}$  的整數為  $Q$ ，共切割為  $Q-1$  個段落配適，故共計有  $K=Q-2$  個節點數目

節點 ( $d_j$ ) 之選擇：

$$d_j = m_L + \theta(m_{L+1} - m_L), \quad j = 1, 2, \dots, Q$$

其中 
$$\theta = \frac{n(j-1)}{Q-1} - L$$

$$L = \left[ \frac{n(j-1)}{Q-1} \right], \quad [ ] \text{ 為高斯符號}$$

$m_L$  為所有債券依序排列的到期期數

藉由以上的公式來對於配適的債券進行分割，可以達到在每一個分割的區間的配適債券數目相同，以避免因每一個分割的區間債券數目不同，而造成配適的效果好壞不同，因而影響整體殖利率曲線配適的效果。

## 二、計量估計模型

部分學者認為使用分段配適法 (樣條函數法) 必須估計相當多的參數才能夠配適出完整的一條殖利率曲線，因此部分學者開始嘗試用較少的參數來進行殖利率曲線的配適工作，通常我們又稱此類模型為最少參數 (parsimonious) 模型，其中以 Nelson and Siegel (1987) 及 Svensson (1994) 為此類模型的代表。

### Nelson and Siegel 模型

Nelson and Siegel 於 1987 年首度利用較簡單及較少的變數，但卻能夠表現殖利率曲線的形狀的 parsimonious 模型配適殖利率曲線，其模型概念如下：

假設在連續複利的基礎 (continuously compounded) 下，零息利率為  $z(t, T)$ ，

其中  $t$  為現在時間，而  $T$  為到期期間，可以由間斷複利 (discretely compounded) 的零息利率 (即期利率)  $Z(t, T)$  來作如下表達：

$$z(t, T) = e^{\left( \frac{Z(t, T) \cdot (T-t)}{100 \cdot 365} \right)}$$

則連續複利條件下的折現函數可以表現為：

$$disc(t, T) = e^{\left( \frac{Z(t, T) \cdot (T-t)}{100 \cdot 365} \right)}$$

而遠期利率則可以表現為如下的形式：(在目前時點  $t$  時，看未來時間點  $\tau$  至  $T$  的遠期利率)

$$f(t, \tau, T) = \frac{[(T-t) \cdot z(t, T)] - [(\tau-t) \cdot z(t, \tau)]}{T-\tau}$$

而在此再闡述一個瞬間遠期利率的概念，所謂瞬間遠期利率指的是在目前時點  $t$  時，看未來時間點  $\tau$  至  $T$  的遠期利率，但若  $\tau$  逼近於  $T$  則表示如下：

$$f(t, \tau, T)_{INST} = \lim_{\tau \rightarrow T} f(t, \tau, T)$$

以上所說明的即期利率及遠期利率，在經濟意義上瞬間遠期利率可視為融資的邊際成本，因此可把它當成在實務上的遠期隔夜拆款利率看待，而連續複利的零息利率  $z(t, T)$ ，則可當作在時間  $t$  到  $T$  的平均融資成本，依此等關係瞬間遠期利率可表示為：

$$f(t, \tau, T)_{INST} = z(t, T) + (T-t) \cdot \frac{\partial z(t, T)}{\partial t}$$

相對的連續複利的零息利率可以表示成：

$$z(t, T) = \frac{\int_{x=t}^T f(t, \tau, T)_{INST} dx}{T-t}$$

而 Nelson and Siegel 模型就是從此處出發，設定瞬間遠期利率為下列的結構：

$$f(TTM) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \right) + \beta_2 \cdot \left[ \frac{TTM}{\tau_1} \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \right) \right]$$

其中  $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、 $\beta_2$  及  $\tau_1$  為估計參數，其意義分別如下：

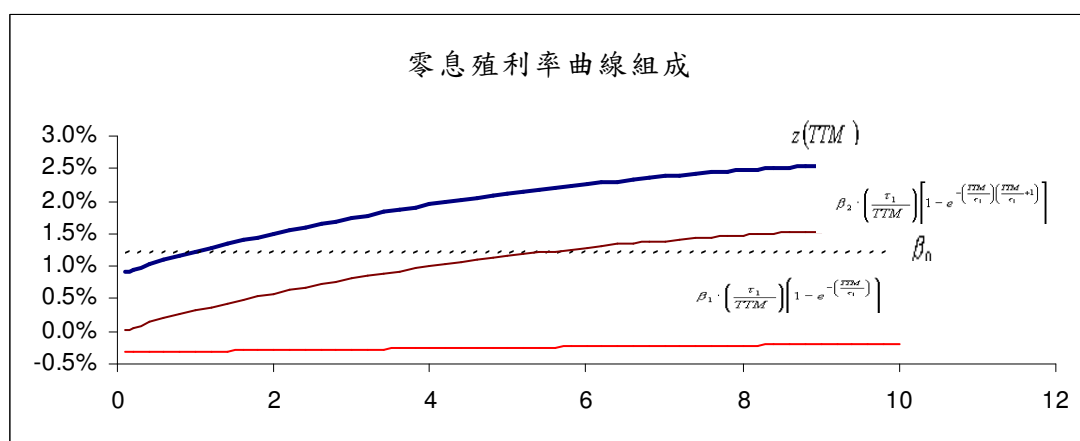
$\beta_0$ ：必定為正數，此數值為  $f(TTM)$  遠端漸近值，亦即長期的瞬間遠期利率應收斂於  $\beta_0$ 。

- $\beta_1$ ：此參數為短期因子，此參數決定短期（或起始值）與遠期漸近值的差異，同時此參數決定短期值以多快的速度收斂至長期漸近值，若  $\beta_1$  為負數則  $f(TTM)$  曲線為正斜率，反之則為負斜率。
- $\beta_2$ ：此參數描述曲線峰態的大小及方向，若此參數為正數則曲線呈現駝峰狀 (hump)，若為負數則曲線呈現 U 字型 (U-shaped)
- $\tau_1$ ：此參數必定為正數，表示此曲線的駝峰或 U 字型的位置，同時決定  $\beta_1$  及  $\beta_2$  的收斂速度，當  $\tau_1$  值較小時兩者收斂速度較快（意指短期及中期的影響力消退的較快），反之則收斂速度慢

而將瞬間遠期利率  $f(TTM)$  轉換成為即期利率  $z(TTM)$ ，可表示如下式：

$$z(TTM) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( \frac{\tau_1}{TTM} \right) \left[ 1 - e^{-\left( \frac{TTM}{\tau_1} \right)} \right] + \beta_2 \cdot \left( \frac{\tau_1}{TTM} \right) \left[ 1 - e^{-\left( \frac{TTM}{\tau_1} \right)} \left( \frac{TTM}{\tau_1} + 1 \right) \right]$$

其零息殖利率曲線組成如下：



### Extend Nelson-Siegel 模型

1987 年時 Nelson and Siegel 在推導 Nelson-Siegel 模型時，其推導出之瞬間遠期利率函數如以下方程式：

$$f(TTM) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( e^{-\left( \frac{TTM}{\tau_1} \right)} \right) + \beta_2 \cdot \left[ \frac{TTM}{\tau_2} \left( e^{-\left( \frac{TTM}{\tau_2} \right)} \right) \right]$$

但 Nelson and Siegel 認為此瞬間遠期利率函數可能有過度參數化（估計參數過多）的問題，因此才將 Nelson-Siegel 模型的瞬間遠期利率函數改為 Nelson-Siegel 模型的形式，故 Extend Nelson-Siegel 模型的瞬間遠期利率函數的推導過程與 Nelson-Siegel 模型相同，其經濟意義也相同。

### Svensson 模型

Nelson and Siegel 指出即期利率  $z(TTM)$  函數可視為一個常數項  $\beta_0$  再加上



一個 Laguerre 函數,而所謂的 Laguerre 函數乃是指多項式乘上一個指數衰減項,亦是在數學上常用來逼近的方法,根據此概念 Nelson and Siegel 模型即可以再被延伸,因此 1994 年 Svensson 對於 Nelson and Siegel 模型再進行延伸。Svensson 針對 Nelson-Siegel 模型再增加一個駝峰或 U 字型, Svensson 模型配適的殖利率曲線可以出現兩個彎曲點,在殖利率曲線的配置上更具有彈性,可展現出更豐富的殖利率曲線型態。

Svensson 模型將瞬間遠期利率延伸為下列式子：

$$f(TTM) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left[ e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \right] + \beta_2 \cdot \left[ \frac{TTM}{\tau_1} \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \right) \right] + \beta_3 \cdot \left[ \frac{TTM}{\tau_2} \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_2}\right)} \right) \right]$$

而將瞬間遠期利率  $f(TTM)$  轉換成為即期利率  $z(TTM)$ , 可表示如下式：

$$z(TTM) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( \frac{\tau_1}{TTM} \right) \left[ 1 - e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \right] + \beta_2 \cdot \left( \frac{\tau_1}{TTM} \right) \left[ 1 - e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \left( \frac{TTM}{\tau_1} + 1 \right) \right] + \beta_3 \cdot \left( \frac{\tau_2}{TTM} \right) \left[ 1 - e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_2}\right)} \left( \frac{TTM}{\tau_2} + 1 \right) \right]$$

以上七種殖利率曲線的配適模型的比較,請見表一整理。

表一：各種殖利率曲線配適方法比較表<sup>4)</sup>

模型 <sup>4)</sup>	樣條函數模型 <sup>4)</sup>				計量估計模型 <sup>4)</sup>		
	McCulloch <sup>4)</sup>	Vasicek & Fong <sup>4)</sup>	Steeley <sup>4)</sup>	Smoothing <sup>4)</sup>	Nelson & Siegel	Extend N&S <sup>4)</sup>	Svensson <sup>4)</sup>
分段配適 <sup>4)</sup>	是 <sup>4)</sup>	是 <sup>4)</sup>	是 <sup>4)</sup>	是 <sup>4)</sup>	否 <sup>4)</sup>	否 <sup>4)</sup>	否 <sup>4)</sup>
配適段數 <sup>4)</sup>	N <sup>4)</sup>	N <sup>4)</sup>	N <sup>4)</sup>	N <sup>4)</sup>	1 <sup>4)</sup>	1 <sup>4)</sup>	1 <sup>4)</sup>
估計參數個數 <sup>4)</sup>	N-1 <sup>4)</sup>	N+3 <sup>4)</sup>	N+3 <sup>4)</sup>	視模型而定 <sup>4)</sup>	4 <sup>4)</sup>	5 <sup>4)</sup>	8 <sup>4)</sup>
基底函數個數 <sup>4)</sup>	N-1 <sup>4)</sup>	N+2 <sup>4)</sup>	N+3 <sup>4)</sup>	視模型而定 <sup>4)</sup>	$\frac{n}{a}$ <sup>4)</sup>	$\frac{n}{a}$ <sup>4)</sup>	$\frac{n}{a}$ <sup>4)</sup>
基底函數次數 <sup>4)</sup>	cubic(3次) <sup>4)</sup>	cubic(3次) <sup>4)</sup>	cubic(3次) <sup>4)</sup>	cubic(3次) <sup>4)</sup>	$\frac{n}{a}$ <sup>4)</sup>	$\frac{n}{a}$ <sup>4)</sup>	$\frac{n}{a}$ <sup>4)</sup>
特點 <sup>4)</sup>	1. 分段的數目越多,模型的準確度越高。 <sup>4)</sup> 2. 分段的數目越少,模型的平滑度越佳。 <sup>4)</sup> 3. 配適時切割的段數及節點位置並無定論,必須不斷嘗試才能找出最佳結果。 <sup>4)</sup> 4. 此類模型相較於計量估計模型,在準確度的表現上較為優異。 <sup>4)</sup> * : 分段切割數量可由殖利率曲線配適者自行決定 <sup>4)</sup>				1. 可藉由不平滑懲罰控制殖利率曲線平滑度。 <sup>4)</sup> 2. 模型可兼顧準確度及平滑度。 <sup>4)</sup> ** : 可藉由 GCY 找出最適 N <sup>4)</sup>		
					1. 相較於樣條函數模型,可使用較少的估計參數,故又稱為最少參數(parsimonious)模型。 <sup>4)</sup> 2. 此類模型相較於樣條函數模型,在平滑度的表現上較為優異。 <sup>4)</sup> 3. 由遠期利率之二階微分方程式推導而成,估計參數具有其經濟意義。 <sup>4)</sup>		

### 參、實證資料與實證結果

本研究規劃利用 94 年度開始上線的公債指數每日的價格資訊,來進行零息殖利率曲線的配置,而在樣本挑選上分為兩種樣本的篩選方式如下：

第一種：公債指數中的全部樣本皆納入進行配適(剔除一年付息兩次的公債),即為寬鬆的樣本篩選方式,以下稱為『大樣本』

第二種：僅篩選出流通性較佳（篩選 2005 年 1 至 4 月交易最活絡券次，單月平均成交金額至少 100 億以上）的公債期別進行配適，即為較嚴格的樣本篩選方式，以下稱為『小樣本』

而在研究的樣本上之所以會分成大樣本及小樣本兩種類別，主要是考量流通性的差異，大樣本包含大部分的公債，其中熱門債及冷門債的成交量差異就可能相當的大，而小樣本的選定至少皆為流通券，為市場上流通性較佳的一組投資組合，因此以小樣本資料來配適殖利率曲線，相對於大樣本配適殖利率曲線，已經是一種適度的流通性調整配適。

配適殖利率曲線在模型中直接考量債券的流通性，是較近期學者才開始研究的新領域，以 Subramanian 在 2001 年發表的 Term Structure Estimation In Illiquid Markets 中，即引入債券的成交量及債券的成交筆數兩個變數，來作為決定該期債券流通性的代理變數，以此兩個代理變數來決定配適殖利率曲線的目標函數的加權項，其論文中所使用的加權函數為

$$W_i = \frac{\left( \left( 1 - e^{-v_i/v_{\max}} \right) + \left( 1 - e^{-n_i/n_{\max}} \right) \right)}{\sum_i W_i}$$

其中

$v_i$  為  $i$  期債交易量

$v_{\max}$  為所有債券最大交易量

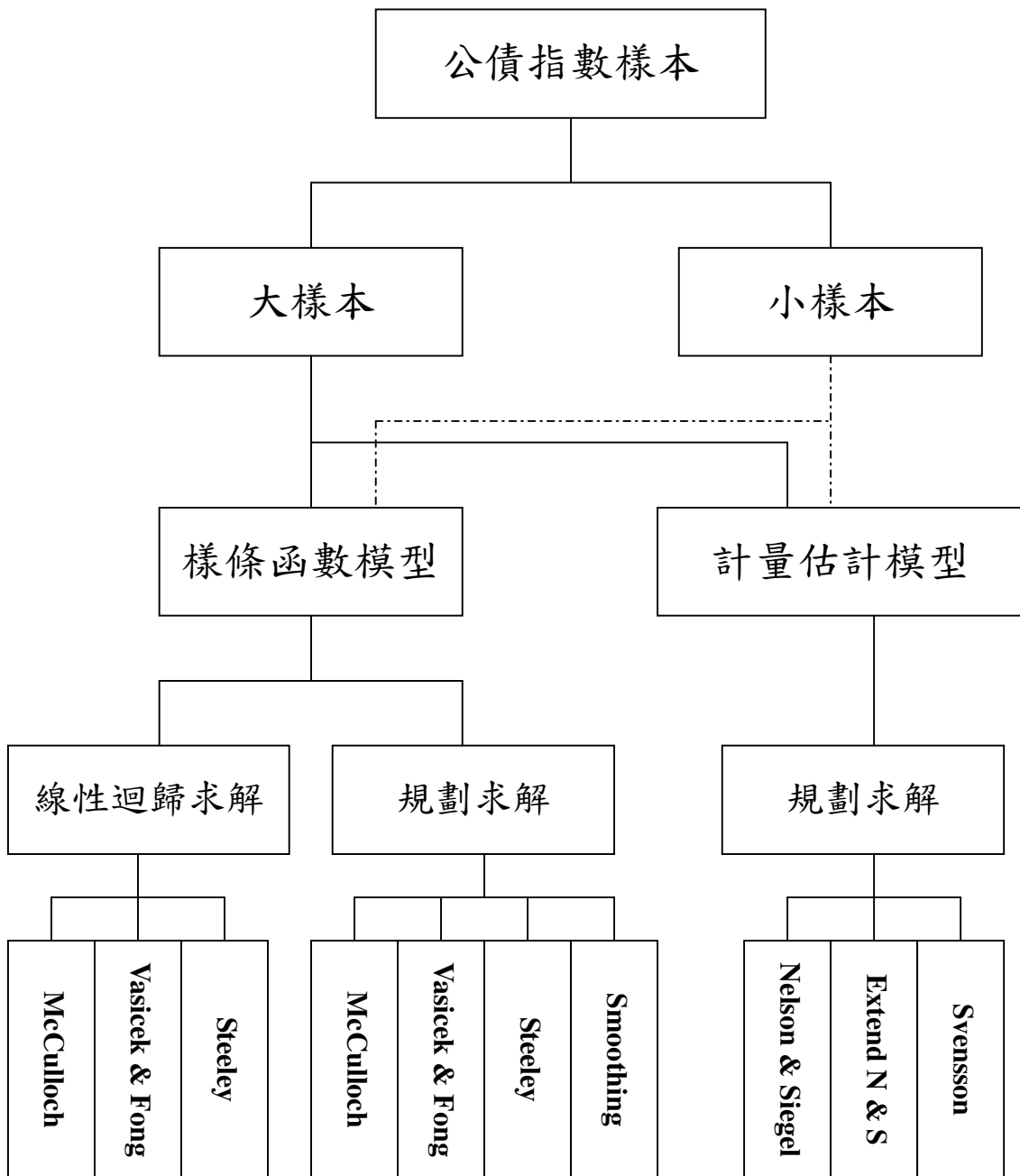
$n_i$  為  $i$  期債交易筆數

$n_{\max}$  為所有債券最大交易筆數

本文的實證研究並未採用類似上述的方法進行配適，原因有幾個：(1) 此類採用模型進行流動性修正者為較近期之研究，大多仍為學術性的論述為多，並未大量被實用化，目前流動性調整仍大多是在挑選樣本時，進行一定流動性的篩選。(2) 依上述的方法，在國內執行上仍會有些問題，例如流通性大小差異過大，且會造成配適公債樣本不穩定現象。(3) 此方法對於流通性高的債券配適結果精確性會較高，但用於反推所有公債價值，反而可能出現系統性的偏誤（價格系統性偏高）。

而在資料日期的選取上，選取 94 年 1 月至 4 月，每一個月中及月底的星期三之公債指數價格資訊進行配適，而 2 月適逢農曆春節交易日較少故僅挑選月中的星期三，總計共有 94/1/12、94/1/26、94/2/16、94/3/16、94/3/30、94/4/13 及 94/4/27 等共七個營業日資料。

實證研究流程如下：



### 一、樣條函數模型實證研究

#### 線性迴歸法——大樣本

此部份研究首先採用大樣本進行配適，而針對 McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley Cubic Basis Spline 等三個方法皆以線性迴歸 (OLS) 進行配適，至

於配適時的節點選取皆以 McCulloch 於 1971 年建議的節點選取法，三種配適模型以相同的節點及求解方法求解，以取得較為公平性的比較。

本次大樣本的配適實證所採用的七個營業日樣本數皆在 62 至 64 個之間，依 McCulloch 節點選取法應將殖利率曲線切割為 7 個段落配適，共 6 個節點，各配適模型所需估計參數如下：

### McCulloch 模型

McCulloch 模型若由 6 個節點估計則亦產生 6 條基底函數，故僅需 6 個估計參數即可進行殖利率曲線配適。

### Vasicek and Fong 模型

Vasicek and Fong 模型 6 個節點必須建立 9 條基底函數，再加上參數  $k$ ，總共將會有 10 個估計參數，不過由於  $k$  無法以線性迴歸進行估計，因此在線性迴歸模型中，此研究將  $k$  設定為 4.5%（符合  $k$  為瞬間遠期利率的收斂值的概念），故在線性迴歸模型中估計參數僅 9 個。

### Steeley Cubic Basis Spline 模型

Steeley Cubic Basis Spline 模型必須在 0 至 30 年間的閉區間設定 6 個節點，在閉區間的前後分別再加入 3 個節點，故共會有 12 個節點（若 0 及 30 亦當作節點計入，共 14 個節點）產生 10 條基底函數，因此配適殖利率曲線時須 10 個估計參數來進行配適。

表二：三種配適模型估計比較表（大樣本）

模型	McCulloch	Vasicek & Fong	Steeley
基底函數個數	6 條	9 條	10 條
分段配適切割段數	7 段	7 段	7 段
節點個數	依 McCulloch 節點公式決定，共 6 個節點	依 McCulloch 節點公式決定，共 6 個節點	依 McCulloch 節點公式決定 6 個節點，外加 0 及 30 兩節點，並在 0 至 30 區間外分別向外延伸 3 個節點，故共 14 個節點
參數個數	6 個估計參數	9 個估計參數 1 個預設參數(參數 $k$ 在此為預設) 共 10 個參數	10 個估計參數

表三中對於每一種殖利率配適模型皆以三種評估配適效果好壞的準則，包含「平均絕對誤差點數」、「平均絕對值誤差」及「誤差變異數」，其中

平均絕對誤差點數：

為所有樣本公債利用配適出的零息殖利率曲線回推出樣本公債的殖利率，與帶入配適的公債殖利率的差距絕對值總和（以基本點表示，b.p）除上樣本個數，此值越小代表配適的公債殖利率越接近真實公債的殖利率，亦即殖利率曲線配適的效果越佳。

平均絕對值誤差：

為所有樣本公債利用配適出的零息殖利率曲線回推出樣本公債的百元價格，與帶入配適的公債百元價格的差距絕對值總和除上樣本個數，此值越小代表配適的公債百元價格越接近真實公債的百元價格，亦即殖利率曲線配適的效果越佳。

誤差變異數：

為所有樣本公債利用配適出的零息殖利率曲線回推出樣本公債的百元價格，與帶入配適的公債百元價格差距的變異數，此值越小代表配適的誤差越趨於穩定，亦即殖利率曲線配適的效果越佳。

表三：McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley Cubic Basis Spline 模型大樣本配適效果比較表<sup>+</sup>

日期 <sup>+</sup>	McCulloch <sup>+</sup>			Vasicek & Fong <sup>+</sup>			Steeley <sup>+</sup>		
	平均絕對 誤差點數	平均絕對 值誤差 <sup>+</sup>	誤差 變異數 <sup>+</sup>	平均絕對 誤差點數	平均絕對 值誤差 <sup>+</sup>	誤差 變異數 <sup>+</sup>	平均絕對 誤差點數	平均絕對 值誤差 <sup>+</sup>	誤差 變異數 <sup>+</sup>
2005/1/12	9.41	0.4585%	2.90E-05	13.07	0.5211%	3.78E-05	12.65	0.5076%	3.89E-05
2005/1/26	12.41	0.5840%	6.56E-05	12.09	0.5846%	6.93E-05	12.06	0.5667%	6.96E-05
2005/2/16	11.01	0.6532%	1.32E-04	10.78	0.6425%	1.19E-04	10.75	0.6253%	1.19E-04
2005/3/16	7.57	0.4457%	3.22E-05	8.91	0.4525%	3.11E-05	9.09	0.4552%	3.49E-05
2005/3/30	8.71	0.4993%	3.11E-05	9.37	0.4856%	2.58E-05	9.67	0.4885%	4.87E-05
2005/4/13	9.50	0.5208%	5.81E-05	10.13	0.5049%	2.93E-05	10.18	0.5162%	3.01E-05
2005/4/27	8.68	0.5255%	3.76E-05	9.32	0.5199%	3.57E-05	11.15	0.5547%	3.72E-05

表註：1. 誤差點數是將價格的誤差轉換為誤差的殖利率點數(b.p)<sup>+</sup>

2. 表中陰影的部分為該天期各項指標中表現最佳者<sup>+</sup>

3. 2005/1/12、2005/1/26、2005/2/16 的樣本數為 62 期<sup>+</sup>

2005/3/16、2005/3/30、2005/4/13 的樣本數為 64 期公債<sup>+</sup>

2005/4/27 的樣本數為 63 期公債<sup>+</sup>

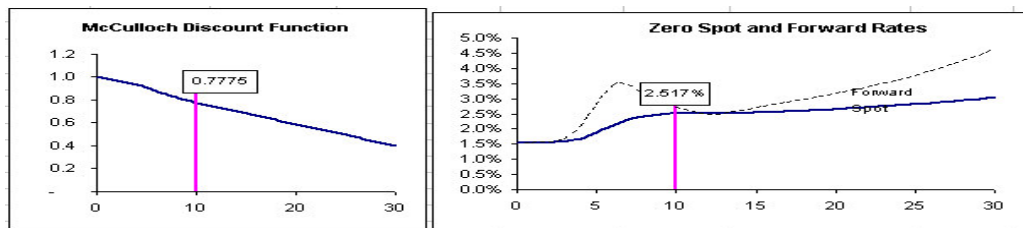
然而「平均絕對誤差點數」與「平均絕對值誤差」兩者之間有何差距呢？兩者概念上相似，皆是價格誤差的平均值概念，但兩者的差距在於一個價格差距以殖利率表示，另一個以百元價格表示，但可觀察到表 3-2 中的實證結果可能會出現某個模型的「平均絕對誤差點數」相對另一模型的為小，但相反的「平均絕對值誤差」指標卻相對較大，似乎會呈現兩個指標的結果不完全相等的現象，此種

現象與樣本中債券存續期間每支不同有相當大關係，例如債券百元價格一樣相差 0.1%，但對存續期間為 10 年的公債轉換為殖利率誤差為 1b. p，但對於存續期間為 2 年的公債轉換為殖利率誤差為 5b. p，因此用價格及殖利率來計算誤差其實基準並不完全相同，因此保留兩種評估準則，可作為判定殖利率曲線配適效果好壞的參考。

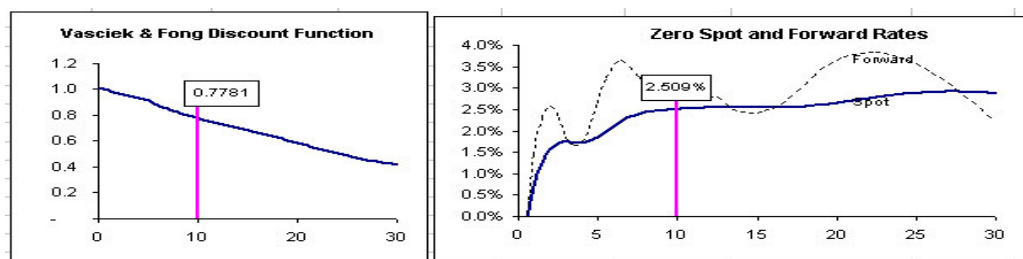
再回到三個模型的配適結果來看，表三中陰影的部分表示該交易日各項指標中表現最佳者，而陰影面積越大者表示該模型的配適效果越好，由該表中可以明顯看出 McCulloch 模型陰影區域面積最大，但配適績效較好集中在「平均絕對誤差點數」指標中，而 Vasicek and Fong 模型與 Steeley Cubic Basis Spline 模型兩者陰影面積則相當，顯示兩者配適效果亦相當，整體來看 McCulloch 模型似乎相對較適用於線性迴歸法估計殖利率曲線，但其實三種模型並未有何種模型出現絕對性配適的優勢。但以 McCulloch 模型僅以 6 個估計參數即可取得比 Vasicek and Fong 模型及 Steeley Cubic Basis Spline 模型（皆須 10 個參數進行配適）更佳的效果，基本上以取得相當的優勢了。

除了以上的三種指標，接下來將三種模型實際配適出的殖利率曲線（即期利率曲線及遠期利率曲線）圖形，供讀者參考：

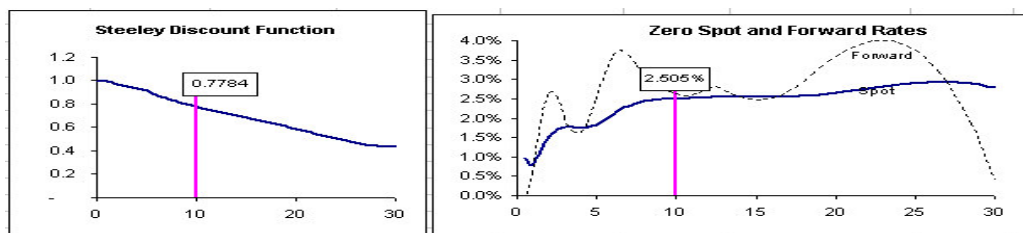
### McCulloch 模型



### Vasicek and Fong 模型



### Steeley Cubic Basis Spline 模型



註：以上三種模型皆為 2005/3/16 資料進行配適

依上列圖形進行下列項目相關比較：

### 1. 殖利率曲線形狀

以圖中的三模型 10 年期即期利率相差皆在 1.2 個基本點以內來看，三種模型配適出的殖利率曲線在 2 至 3 年後其實差距皆相當小，三模型在配適差異較大的部分為短期的部分，尤其極短期的差距可說相當的大，這部分應該也是決定配適效果好壞的關鍵決定因素，但大致上來說三種模型配適出之殖利率曲線形狀是相同的。

### 2. 殖利率曲線平滑度

要了解殖利率曲線的平滑程度，事實上看遠期利率曲線是相當好的一個指標，若遠期殖利率曲線呈現相當平滑的形狀，則表示零息殖利率曲線亦相當的平滑，若遠期殖利率曲線呈現多重又大幅度的跳動，則表示殖利率曲線平滑度不佳，由上頁圖形可明顯看出 Vasicek and Fong 模型及 Steeley Cubic Basis Spline 模型的遠期利率曲線皆出現多重又大幅度的跳動，而 McCulloch 模型在平滑性的表現上則相對來的優異。

### 3. 曲線最遠端遠期利率是否穩定

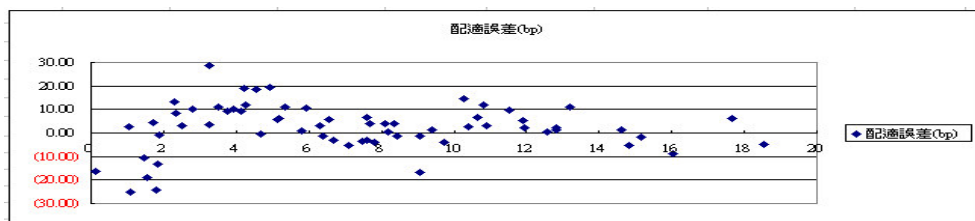
1985 年 Shea 應用 Vasicek and Fong 的方法進行實證配適，發現此方法並不能得到原先預期降低遠端遠期利率大幅震盪效果，且使用此法必須估計比使用 McCulloch 模型多用 4 個參數，在參數估計上增加許多難度，因此 Shea 還是建議採用 McCulloch 模型估計殖利率曲線較佳，而本研究結論亦相同。另 Steeley Cubic Basis Spline 模型在曲線最遠端配適狀況與 Vasicek and Fong 模型相當，亦有不夠穩定的現象。

接下來我們再來看看三種模型的估計殘差分配圖，由下頁的圖形可觀察到幾個現象：

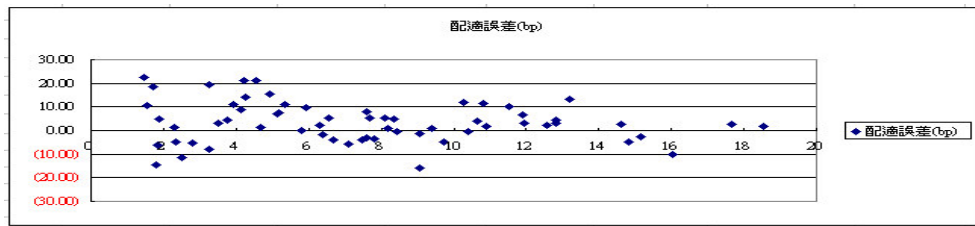
1. 三種模型配適出的殖利率曲線推出的債券理論價格皆有較為偏高的現象，三種模型配適結果推出了公債理論價，超過半數比市場上的價格為高。
2. 三種模型推算出的短期公債的誤差皆較為大，對於長期公債的價格推算則相對較準確。

三種模型大樣本殘差分配圖如下

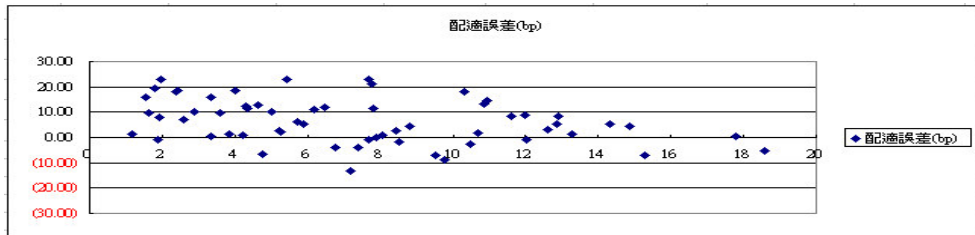
#### McCulloch 模型



### Vasicek and Fong 模型



### Steeley Cubic Basis Spine 模型



- 註： 1. 以上三種模型皆為 2005/3/16 資料配適誤差  
2. 以上殘差皆以誤差點數 (b. p) 表達，縱軸原點為配適出的殖利率，原點以上為真實殖利率較配適出殖利率為高者（債券價格較理論價格為低），原點以下為真實殖利率較配適出殖利率為低者（債券價格較理論價格為高）

### 線性迴歸法——小樣本

此部份研究繼大樣本後改採用小樣本進行配適，而針對 McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley Cubic Basis Spine 等三個方法皆以線性迴歸 (OLS) 進行配適，至於配適時的節點選取皆以 McCulloch 於 1971 年建議的節點選取法，三種配適模型以相同的節點及求解方法求解，以取得較為公平性的比較。

本次小樣本的配適樣本選取的日期皆與大樣本完全相同，而實證所採用的七個營業日樣本數皆為 19 個，依 McCulloch 節點選取法將殖利率曲線切割為 3 個段落配適，共 2 個節點，各配適模型所需估計參數如下：

### McCulloch 模型

McCulloch 模型若由 2 個節點估計則亦產生 2 條基底函數，故僅需 2 個估計參數即可進行殖利率曲線配適。

### Vasicek and Fong 模型

Vasicek and Fong 模型 2 個節點必須建立 5 條基底函數，再加上參數  $k$ ，總共將會有 6 個估計參數，不過由於  $k$  無法以線性迴歸進行估計，因此在線性迴歸模型中此研究將  $k$  設定為 4.5%（符合  $k$  為瞬間遠期利率的收斂值的概念），故在線性迴歸模型中估計參數共 5 個。



### Steeley Cubic Basis Spline 模型

Steeley Cubic Basis Spline 模型必須在 0 至 30 年間的閉區間設定 2 個節點，在閉區間的前後分別再加入 3 個節點，故共會有 8 個節點（若 0 及 30 亦當作節點計入，共 10 個節點）產生 6 條基底函數，因此配適殖利率曲線時須 6 個估計參數來進行配適。

表四：三種配適模型估計比較表（小樣本）

模型	McCulloch	Vasicek & Fong	Steeley
基底函數個數	2 條	5 條	6 條
分段配適切割段數	3 段	3 段	3 段
節點個數	依 McCulloch 節點公式決定，共 2 個節點	依 McCulloch 節點公式決定，共 2 個節點	依 McCulloch 節點公式決定 2 個節點，外加 0 及 30 兩節點，並在 0 至 30 區間外分別向外延伸 3 個節點，故共 10 個節點
參數個數	2 個估計參數	5 個估計參數 1 個預設參數(參數 k 在此為預設) 共 6 個參數	6 個估計參數

表五中對於每一種殖利率配適模型皆以兩種評估準則來看配適效果的好壞，包含「平均絕對誤差點數」、「平均絕對值誤差」，但與大樣本較為不同的是，在小樣本的配適上相當的注重該模型樣本外的延伸效果，亦即雖然小樣本僅以 19 期公債進行配適，但配適出之殖利率曲線依然必須拿來進行全部公債的評價作業，因此模型挑選上不僅要對拿來配適的公債評價效果良好，對於樣本外的公債的評價準確度也要高才好，因此在表五中並列小樣本及全樣本兩項，小樣本即表達樣本公債的配適效果，而全樣本即是以小樣本配適出之殖利率曲線，用於全部公債評價的效果。

由表五中可以明顯的看出 Vasicek and Fong 模型的陰影面積最大，幾乎全面性的較其他兩種模型為佳，此與在大樣本下三模型無一模型取得絕對性的優勢大不相同，另外有一個有趣的現象，三個模型中僅 Vasicek and Fong 模型小樣本的配適效果比大樣本來的佳（可比較表五與表三中的配適結果），其餘兩個模型的小樣本配適效果皆是明顯的變差，尤其 McCulloch 模型小樣本配適效果變差的現象特別明顯，由表五中其實可以簡單的看出結論，在小樣本的殖利率曲線配

適上，Vasicek and Fong 模型是明顯最佳的模型，而相反的 McCulloch 模型相當的不適宜拿來對於小樣本進行配適，此種結論可以說與大樣本的情況大不相同（在大樣本的配適中相反的 McCulloch 模型幾乎可說是最佳模型）。

表五：McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley Cubic Basis Spline 模型小樣本配適效果比較表<sup>1)</sup>

日期 <sup>2)</sup>	McCulloch <sup>3)</sup>				Vasicek & Fong <sup>3)</sup>				Steeley <sup>3)</sup>			
	小樣本 <sup>3)</sup>		全樣本 <sup>3)</sup>		小樣本 <sup>3)</sup>		全樣本 <sup>3)</sup>		小樣本 <sup>3)</sup>		全樣本 <sup>3)</sup>	
	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4)</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4)</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4)</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4)</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4)</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4)</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4)</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4)</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4)</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4)</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4)</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4)</sup>
2005/1/12	23.53	1.0873%	26.92	1.0290%	6.79	0.2956%	7.54	0.4829%	19.40	0.6916%	22.65	0.8017%
2005/1/28	26.65	1.3339%	28.92	1.2174%	15.84	0.5648%	13.03	0.6774%	14.46	0.5967%	21.28	0.8682%
2005/2/16	23.11	1.1799%	28.35	1.3344%	5.87	0.3682%	9.96	0.6301%	11.50	0.5319%	21.48	0.9364%
2005/3/16	21.89	1.1306%	26.42	1.0689%	3.91	0.2386%	7.85	0.5386%	11.83	0.4978%	20.78	0.7605%
2005/3/30	22.00	1.1577%	26.32	0.9716%	4.39	0.2696%	7.49	0.5887%	12.61	0.5686%	21.02	0.7762%
2005/4/13	21.23	1.0825%	25.93	0.9606%	4.14	0.2823%	7.60	0.5985%	11.94	0.6359%	18.50	0.7677%
2005/4/27	21.95	1.1442%	25.91	1.0912%	3.26	0.2153%	8.99	0.8566%	12.74	0.5612%	21.48	0.8524%

表註：1. 誤差點數是將價格的誤差轉換為誤差的殖利率點數(b.p)<sup>4)</sup>

2. 表中陰影的部分為該天期各項指標中表現最佳者<sup>4)</sup>

3. 七個營業日樣本數皆為 19 個<sup>4)</sup>

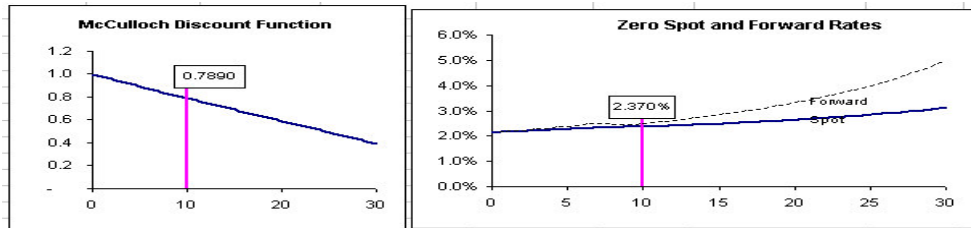
Vasicek and Fong 模型對於樣本公債的評價誤差可以小至 3 至 4 個基本點，即使以配適出的殖利率曲線來評價所有的公債，在「在平均絕對值誤差」的指標下甚至比大樣本配適還來的更好（詳見表 3-4 與表 3-2 的配適結果），這種現象歸納起來可能有兩種原因：

1. 大樣本由於公債數目多，其中包含許多冷門公債，價格的雜訊過多，反而使得殖利率曲線過度配適 (over fitting)，但其實台灣殖利率曲線可能其實結構相當單純，以平滑的曲線即能充分表達。
2. Vasicek and Fong 模型在小樣本下，配適出之短期殖利率較為平滑，可能剛好與台灣短期殖利率曲線真實狀況較為相符。

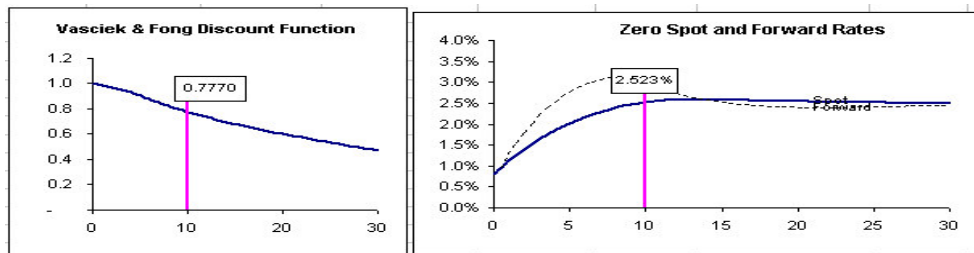
接下來我們可以看下列配適出的殖利率曲線形狀，McCulloch 模型殖利率曲線形狀顯然與另外兩種模型不同，同時與大樣本配適出之殖利率曲線形狀上也有相當大的差異，顯示 McCulloch 模型在小樣本下無法適當的展現殖利率曲線，但反觀 Vasicek and Fong 模型與 Steeley Cubic Basis Spline 模型所配適出的殖利率曲線與大樣本配適出者形狀相似，僅小樣本的殖利率曲線相對較為平滑而大樣本的殖利率曲線形狀較多彎曲，但可觀察到 Vasicek and Fong 模型的短期殖利率曲線較為合理，而 Steeley Cubic Basis Spline 模型在極短期即期利率出現負數並不合理，故 Vasicek and Fong 模型配適出之殖利率曲線形狀最為合理，也直接反映在公債評價效果較好上。

### 三種模型小樣本配適殖利率曲線圖

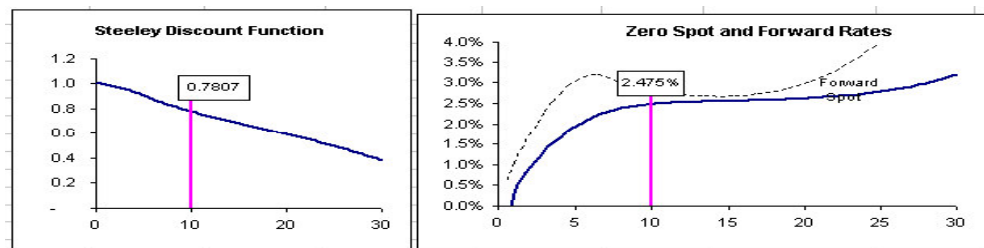
#### McCulloch 模型



#### Vasicek and Fong 模型



#### Steeley Cubic Basis Spline 模型



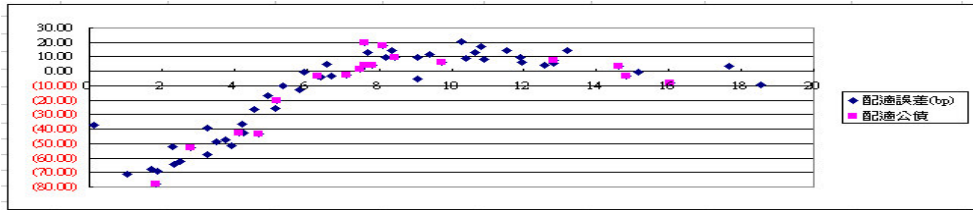
註：以上三種模型皆為 2005/3/16 資料進行配適

接下來我們再來看看三種模型在小樣本下的估計殘差分配圖，由下列的圖形可觀察到幾個現象：

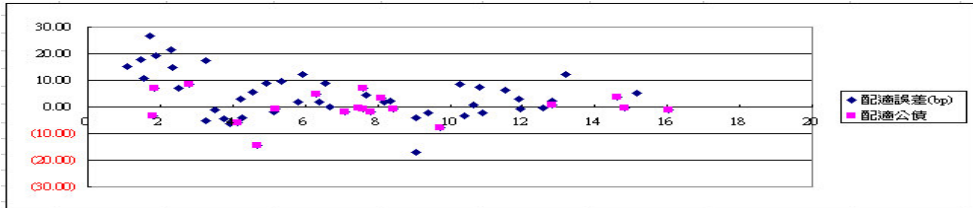
1. McCulloch 模型與 Steeley Cubic Basis Spline 模型的殘差皆出現系統性的誤差，McCulloch 模型對於短期殖利率有相當明顯高估現象，而 Steeley Cubic Basis Spline 模型則相對有相當明顯低估的現象。
2. 與大樣本存在一樣的問題，皆存在短期公債殖利率估計的誤差皆比較大，短期配適效果較差的問題依然沒有得到解決。
3. Vasicek and Fong 模型小樣本配適效果較大樣本來的好，從殘差圖來看可以看出小樣本在中短期（4~6 年）的配適誤差明顯較大樣本縮小。

三種模型小樣本殘差分配圖如下

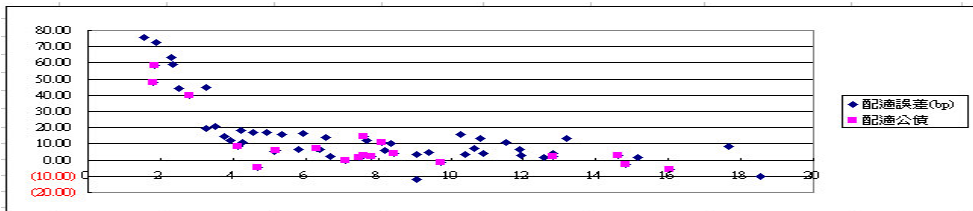
McCulloch 模型



Vasicek and Fong 模型



Steeley Cubic Basis Spline 模型

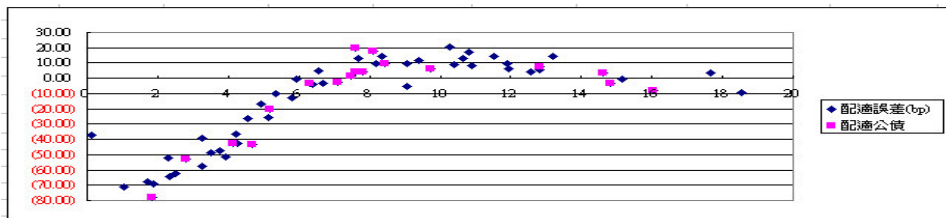


註：1. 以上三種模型皆為 2005/3/16 資料配適誤差

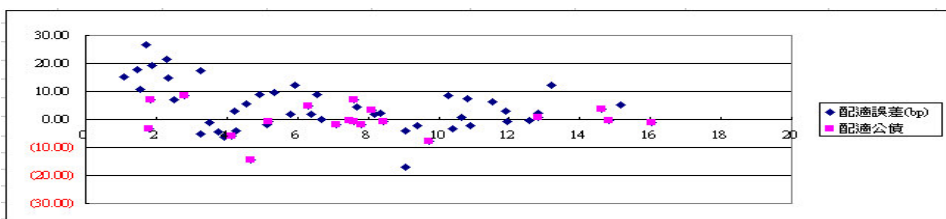
- 2. 以上殘差皆以誤差點數 (b. p) 表達，縱軸原點為配適出的殖利率，原點以上為真實殖利率較配適出殖利率為高者（債券價格較理論價格為低），原點以下為真實殖利率較配適出殖利率為低者（債券價格較理論價格為高）

三種模型小樣本殘差分配圖如下

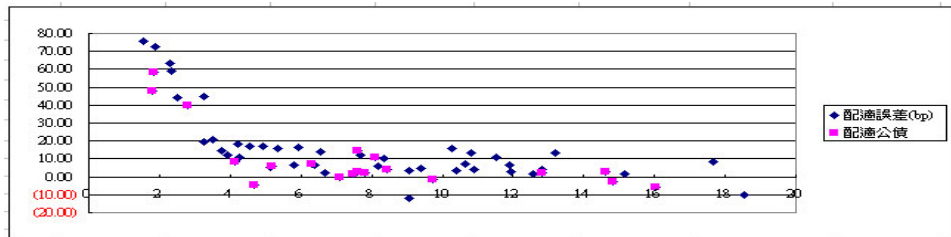
McCulloch 模型



Vasicek and Fong 模型



## Steeley Cubic Basis Spline 模型



- 註：1. 以上三種模型皆為 2005/3/16 資料配適誤差  
2. 以上殘差皆以誤差點數 (b.p) 表達，縱軸原點為配適出的殖利率，原點以上為真實殖利率較配適出殖利率為高者（債券價格較理論價格為低），原點以下為真實殖利率較配適出殖利率為低者（債券價格較理論價格為高）

由上列的實證研究中，不論是大樣本或是小樣本的殖利率配適，由殘差分配圖皆可以輕易發現，短期公債的配適誤差在所有的配適模型當中皆產生比較大的配適誤差，歸納其原因可能有下列兩種因素：

在線性迴歸的最小平方法 (OLS 法) 中，其追求的是最小的價格誤差平方和，即

$$\text{Min} \left( \sum_{i=1}^n (\hat{P}_i - P_i)^2 \right)$$

但在相同的價格誤差下，短期公債的殖利率誤差點數將會比長期公債的誤差點數來的大，因此採用 OLS 法來尋求最佳解相當容易對於長期公債有過度配適的現象。

另外一個原因為目前配適殖利率曲線的資料來源為公債指數每日的報價資訊，因此所有的公債皆是距到期一年以上的公債，而一年以下的價格資訊則完全缺乏，這也可能是造成短期公債配適效果較差的原因之一。

為解決以上第一項因素的可能影響，本研究採用加拿大中央銀行配適殖利率曲線採用的 Bliss(1991) 所提出的加權方法，來解決對於長期公債過度配適的問題，其將追求最小化的標的方程式由 OLS 模型的最小的價格誤差平方和，改為

$$\text{Min} \left( \sum_{i=1}^n w_i \cdot (\hat{P}_i - P_i)^2 \right) \quad (\text{式一})$$

其中

$$w_i = \frac{1/D_j}{\sum_{j=1}^n 1/D_j}$$

$D_j$  為第  $j$  期公債的存續期間 (MacCauley Duration)

但由於最小化的目標方程式已改變，因此無法再以 OLS 線性迴歸計算，必須改採規劃求解的非線性估計技巧，以下的實證研究便是將先前所作的 McCulloch 模型、Vasicek and Fong 模型及 Steeley Cubic Basis Spline 模型的大樣本及小樣本實證，改以（式一）為最小化的標的方程式，利用規劃求解的非線性估計技巧，來驗證上列第一項因素的假設是否正確，同時看看是否能尋求到最佳的殖利率曲線配適方法。

### 規劃求解法——大樣本

此部份研究首先採用大樣本進行配適，而針對 McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley Cubic Basis Spline 等三個模型皆以非線性規劃求解方法進行配適，至於配適時的節點選取以及配適的資料日期等，皆與線性迴歸模型完全相同，以比較採用 Bliss 的加權方法，是否能夠有效改善長期公債過度配適而短期公債配適效果不佳的問題。

配適結果可以詳見表六，表中可以明顯看出 Steeley Cubic Basis Spline 模型的陰影區域最大，表示此模型在規劃求解法中為最佳的配適模型，此與線性迴歸求解法中 McCulloch 模型較佳的情況並不相同，在規劃求解法中 McCulloch 模型反而成為表現最差的模型，且由陰影面積來看 Steeley Cubic Basis Spline 模型幾乎可說相較其餘兩模型已取得相當優勢，與線性迴歸求解法中三模型配適優勢差異不大意不相同。

表六：McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley Cubic Basis Spline 模型大樣本配適效果比較表<sup>+</sup>

日期 <sup>+</sup>	McCulloch <sup>+</sup>			Vasicek & Fong <sup>+</sup>			Steeley <sup>+</sup>		
	平均絕對 誤差點數	平均絕對 值誤差 <sup>+</sup>	誤差 變異數 <sup>+</sup>	平均絕對 誤差點數	平均絕對 值誤差 <sup>+</sup>	誤差 變異數 <sup>+</sup>	平均絕對 誤差點數	平均絕對 值誤差 <sup>+</sup>	誤差 變異數 <sup>+</sup>
2005/1/12	7.63	0.3672%	2.53E-05	7.14	0.3742%	2.53E-05	6.77	0.3451%	2.08E-05
2005/1/26	10.06	0.5947%	1.12E-05	10.82	0.4959%	4.77E-05	10.63	0.4886%	4.63E-05
2005/2/16	10.34	0.6331%	1.17E-04	9.07	0.5764%	1.07E-04	8.99	0.5676%	9.94E-05
2005/3/16	5.72	0.3501%	2.48E-05	5.12	0.3089%	1.74E-05	4.55	0.3045%	1.99E-05
2005/3/30	6.34	0.3676%	2.46E-05	5.69	0.3106%	2.13E-05	5.21	0.3170%	1.81E-05
2005/4/13	6.59	0.3631%	2.72E-05	4.97	0.2996%	1.84E-05	9.75	0.6292%	7.69E-05
2005/4/27	5.78	0.3648%	3.12E-05	4.82	0.3384%	2.76E-05	5.00	0.3374%	2.70E-05

表註：1. 誤差點數是將價格的誤差轉換為誤差的殖利率點數(b, p)<sup>+</sup>

2. 表中陰影的部分為該天期各項指標中表現最佳者<sup>+</sup>

3. 2005/1/12、2005/1/26、2005/2/16 的樣本數為 62 期公債<sup>+</sup>

2005/3/16、2005/3/30、2005/4/13 的樣本數為 64 期公債<sup>+</sup>

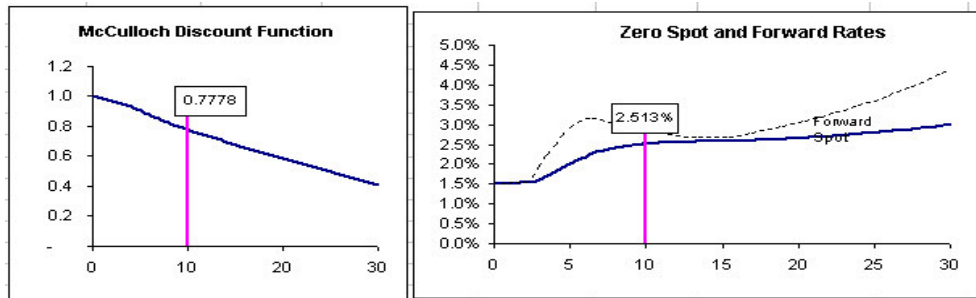
2005/4/27 的樣本數為 63 期公債<sup>+</sup>

另外可比較表三及表六中的數據，可明顯發現使用規劃求解法時無論是用哪一個模型配適，其配適效果皆較使用線性迴歸法為佳，就平均絕對誤差點數、平

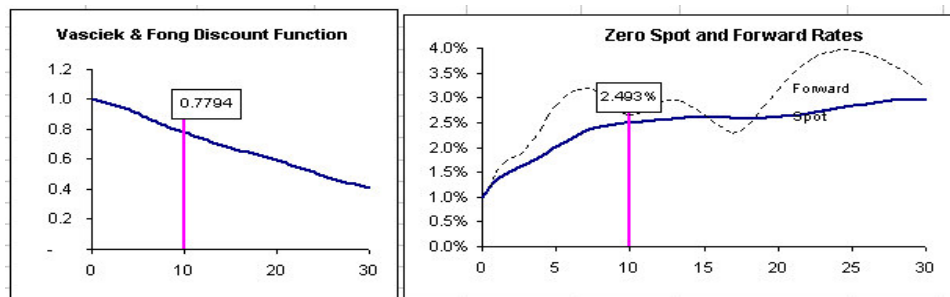
均絕對值誤差及誤差變異數三項指標皆呈現轉好現象，其中 Vasicek and Fong 及 Steeley Cubic Basis Spline 兩模型的配適效果改善幅度相當大，而 McCulloch 模型配適效果改善幅度則較小，由表中數據來看採用規劃求解配合 Bliss 的方法可有效改善整體殖利率曲線的配適準確性，但是否能夠達成當初欲降低短期公債的配適誤差的效果，則還需要透過殘差圖來進行分析。

### 三種模型大樣本規劃求解配適殖利率曲線圖

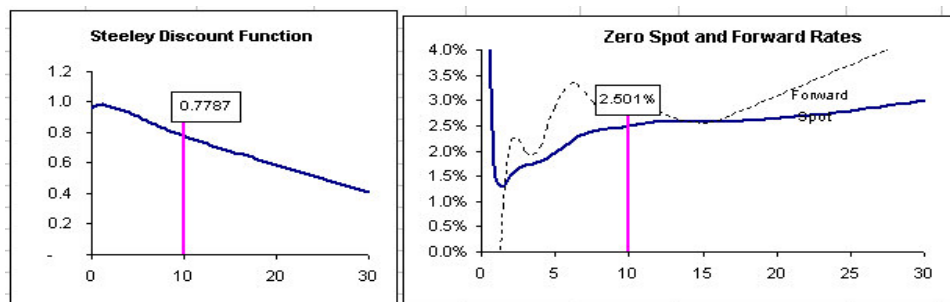
#### McCulloch 模型



#### Vasicek and Fong 模型



#### Steeley Cubic Basis Spline 模型



註：以上三種模型皆為 2005/3/16 資料進行配適

除了看表六的配適效果指標外，一樣的我們將三種模型配適出的殖利率曲線拿來作比較，詳請見上頁圖形，可觀察到下列現象：

### 1. 殖利率曲線形狀

以圖中的三模型 10 年期即期利率相差皆在 2 個基本點以內來看，三種模型配適出的殖利率曲線在 2 至 3 年後其實差距皆相當小，三模型在配適差異較大的部分為短期的部分，尤其極短期的差距可說相當的大，這部分應該也是決定配適效果好壞的關鍵決定因素，但大致上來說三種模型配適出之殖利率曲線形狀是相同的，結論與線性迴歸配適完全相同。

### 2. 殖利率曲線平滑度

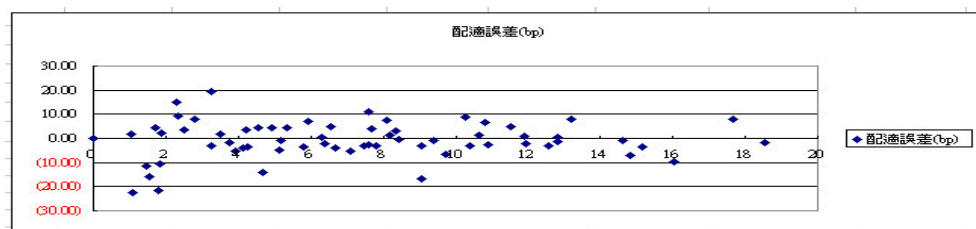
要了解殖利率曲線的平滑程度，一樣的我們看遠期利率曲線的平滑程度，與線性迴歸配適相同 McCulloch 模型在平滑性的表現上相對來的較另外兩模型來的優異，但 Vasicek and Fong 模型及 Steeley Cubic Basis Spline 模型的遠期利率曲線雖然依然出現多重又大幅度的跳動，但其跳動幅度相對於線性迴歸配適結果相比已縮小許多，由圖形上來看利用規劃求解配適的殖利率曲線，無論使用何種模型皆可獲得較線性迴歸配適更平滑的殖利率曲線。

### 3. 曲線最外端遠期利率是否穩定

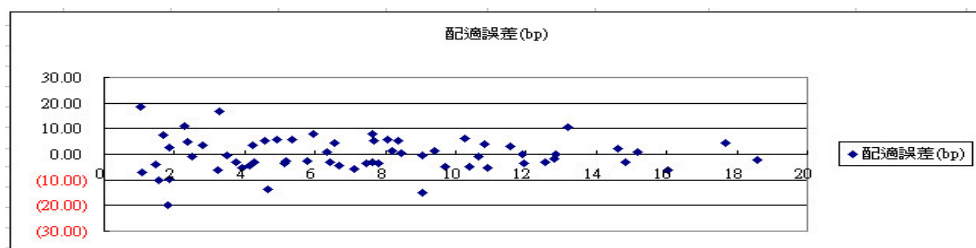
與線性迴歸配適相似的，在遠期殖利率曲線最外端仍然是以 McCulloch 模型最為穩定，而 Vasicek and Fong 模型在極短期部分呈現相當平滑的樣態，較線性迴歸配適在極短期遠期利率大幅震盪改善許多，而在極遠期端的部分，遠期利率的擺盪幅度亦有小幅度的縮小，另就 Steeley Cubic Basis Spline 模型來看，其極短期的遠期利率依然出現極不合理的大幅震盪，但在極遠期端的部分，大幅擺盪的現象則獲得相當的改善。

三種模型大樣本規劃求解配適殘差分配圖如下

#### McCulloch 模型

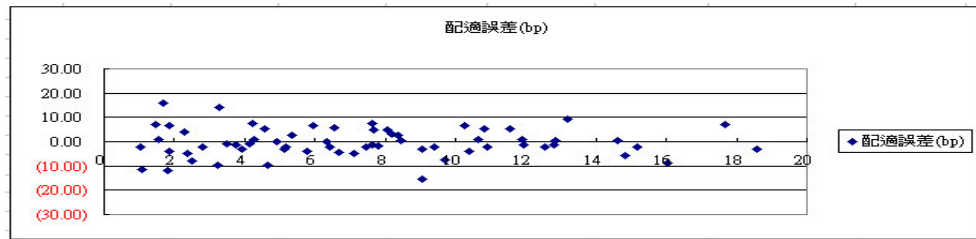


#### Vasicek and Fong 模型





## Steeley Cubic Basis Spline 模型



- 註：1. 以上三種模型皆為 2005/3/16 資料配適誤差  
2. 以上殘差皆以誤差點數 (b.p) 表達，縱軸原點為配適出的殖利率，原點以上為真實殖利率較配適出殖利率為高者（債券價格較理論價格為低），原點以下為真實殖利率較配適出殖利率為低者（債券價格較理論價格為高）

接下來我們再來看看三種模型的估計殘差分配圖，由上頁的圖形可觀察到幾個現象：

1. 比較線性迴歸配適及規劃求解配適之殘差分配，可以觀察到規劃求解配適的長期公債誤差有微幅增加的現象，但相對的短期公債的配適誤差亦有明顯的縮小，顯示採用 Bliss 的方法對於減小短期公債的配適誤差具有一定功效。
2. 線性迴歸配適出的殖利率曲線推出的債券理論價格有較為偏高的現象，但以規劃求解配適的殖利率曲線推出的債券理論價格，高估與低估則幾乎居半。
3. 雖然短期公債配適誤差相較於線性迴歸配適已有明顯的縮小，但整體來看，短期公債的配適誤差仍然有較其他期間微幅較大的現象。

### 規劃求解法——小樣本

在規劃求解的大樣本實證中，可以發現短期公債配適效果變佳，同時整體配適效果也明顯的較線性迴歸配適好，相同的本研究亦以相同的規劃求解配適法進行小樣本配適，看看是否會有相同的效果。

表七：McCulloch、Vasicek and Fong 及 Steeley Cubic Basis Spline 模型小樣本配適效果比較表<sup>①</sup>

日期 <sup>②</sup>	McCulloch <sup>③</sup>				Vasicek & Fong <sup>③</sup>				Steeley <sup>③</sup>			
	小樣本 <sup>④</sup>		全樣本 <sup>④</sup>		小樣本 <sup>④</sup>		全樣本 <sup>④</sup>		小樣本 <sup>④</sup>		全樣本 <sup>④</sup>	
	平均絕對誤差點數 <sup>⑤</sup>	平均絕對值誤差 <sup>⑤</sup>	平均絕對誤差點數 <sup>⑤</sup>	平均絕對值誤差 <sup>⑤</sup>	平均絕對誤差點數 <sup>⑤</sup>	平均絕對值誤差 <sup>⑤</sup>	平均絕對誤差點數 <sup>⑤</sup>	平均絕對值誤差 <sup>⑤</sup>	平均絕對誤差點數 <sup>⑤</sup>	平均絕對值誤差 <sup>⑤</sup>	平均絕對誤差點數 <sup>⑤</sup>	平均絕對值誤差 <sup>⑤</sup>
2005/1/12	23.44	1.1754%	25.91	1.1887%	7.42	0.2979%	9.02	0.6686%	7.09	0.3072%	8.91	0.4845%
2005/1/26	25.38	1.5463%	28.31	1.4944%	15.50	0.5447%	21.32	1.1353%	13.77	0.4640%	22.90	0.8867%
2005/2/16	22.65	1.3278%	26.19	1.3999%	5.78	0.3668%	10.85	0.7609%	6.07	0.3631%	10.50	0.7316%
2005/3/16	22.04	1.2700%	24.76	1.0897%	3.82	0.2333%	7.52	0.6495%	3.78	0.2278%	6.49	0.4861%
2005/3/30	21.96	1.2622%	24.78	0.9813%	4.29	0.2658%	7.47	0.5161%	4.31	0.2662%	7.62	0.4957%
2005/4/13	21.39	1.1996%	24.66	0.9953%	3.66	0.2666%	6.77	0.5199%	3.91	0.2675%	9.38	0.7022%
2005/4/27	21.83	1.2459%	25.15	1.1256%	2.94	0.2279%	7.99	0.7362%	3.03	0.2317%	7.83	0.7335%

表註：1. 誤差點數是將價格的誤差轉換為誤差的殖利率點數(b.p)<sup>⑥</sup>

2. 表中陰影的部分為該天期各項指標中表現最佳者<sup>⑥</sup>

3. 七個營業日樣本數皆為 19 個<sup>⑥</sup>

配適的結果詳請表七，與線性迴歸配適的結果表五相比，可觀察到下列幾個現象：

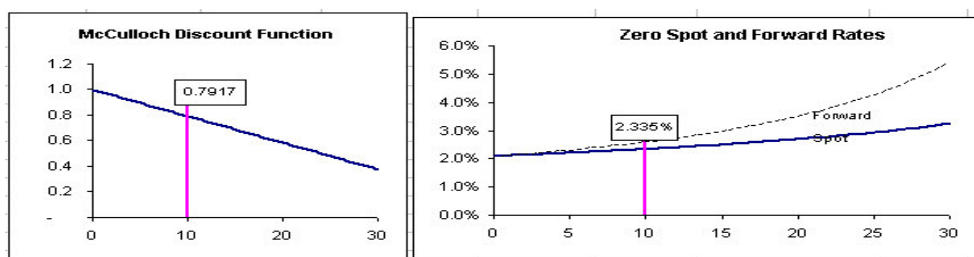
1. 在 McCulloch 模型與 Vasicek and Fong 模型中，規劃求解配適並無法有效的增進配適的效果，但 Steeley Cubic Basis Spline 模型使用規劃求解配適則出現明顯配適效果變好的現象。
2. 在小樣本線性迴歸配適中 Vasicek and Fong 模型為最佳配適模型，但在規劃求解配適中 Steeley Cubic Basis Spline 模型則轉變為配適效果最佳模型，因此就配適的準確度來看，Steeley Cubic Basis Spline 模型在規劃求解大樣本或小樣本配適中，皆是最佳模型。
3. 在線性迴歸配適中 Vasicek and Fong 模型出現小樣本配適效果反而較大樣本配適效果為佳的現象，但在規劃求解配適中則無此現象，三種模型皆是大樣本配適能得到較好的配適效果。

而就規劃求解小樣本配適出的殖利率曲線形狀及殘差圖形分析，以及與線性迴歸小樣本配適結果比較如下：

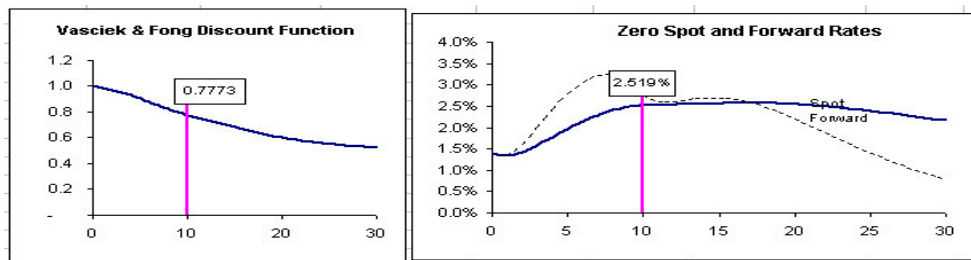
1. 與線性迴歸配適相似的，三模型中僅 McCulloch 模型配適出的殖利率曲線與其他兩模型較不相同，因此也造成 McCulloch 模型在小樣本下配適誤差較大的問題。
2. 相較於線性迴歸配適，利用規劃求解配適出的遠期利率曲線有波動幅度較大的現象。
3. McCulloch 模型的殘差圖顯示，與線性迴歸配適相同的對於短期殖利率有明顯高估現象，但對於 Steeley Cubic Basis Spline 模型而言，在線性迴歸配適中短期公債殖利率有明顯低估的現象，但規劃求解配適中則已消失。
4. 在規劃求解大樣本中，殘差的分布幾乎是零以上及以下各半，但在小樣本配適中，可看出殘差大多分布於零以上，顯示以小樣本配適出的公債殖利率曲線代表著是一條流通性較高的公債零息殖利率曲線，因此以此殖利率曲線反推公債殖利率，容易造成流通性不佳的公債價格被高估。
5. 相較於大樣本配適，小樣本配適的短期公債殖利率的配適誤差依然較大，但與線性迴歸小樣本配適比較，依然有相當幅度的改善。

### 三種模型小樣本規劃求解配適殖利率曲線圖

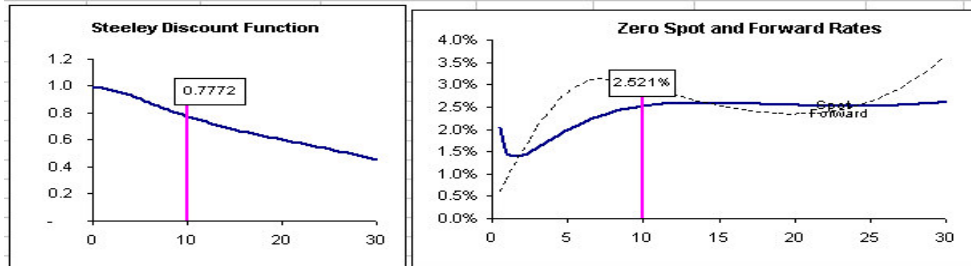
#### McCulloch 模型



### Vasicek and Fong 模型



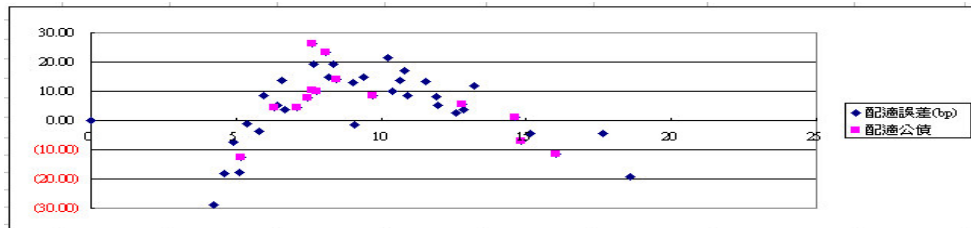
### Steeley Cubic Basis Spline 模型



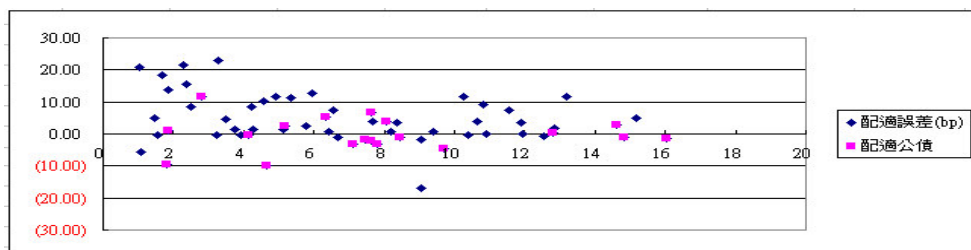
註：以上三種模型皆為 2005/3/16 資料進行配適

三種模型小樣本規劃求解配適殘差分配圖如下

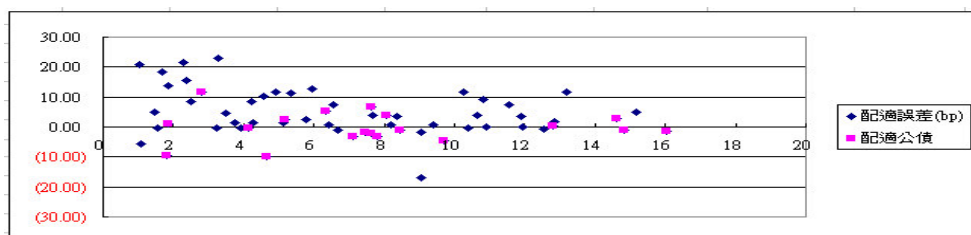
### McCulloch 模型



### Vasicek and Fong 模型



### Steeley Cubic Basis Spline 模型



- 註：1. 以上三種模型皆為 2005/3/16 資料配適誤差
2. 以上殘差皆以誤差點數 (b.p) 表達，縱軸原點為配適出的殖利率，原點以上為真實殖利率較配適出殖利率為高者（債券價格較理論價格為低），原點以下為真實殖利率較配適出殖利率為低者（債券價格較理論價格為高）

單存就配適的結果來看，規劃求解的配適方法似乎較線性迴歸求解為佳，但其實在實際作業上使用規劃求解配適會面臨下列問題：

1. 規劃求解配適必須比線性迴歸配適多花費相當多的時間，以目前的電腦計算速度來看，若採用線性迴歸法配適在計算時間上幾乎可以忽略，計算時間相當的短，但若採用規劃求解配適在時間的花費上就會增加許多。
2. 即使相同是採用規劃求解配適，三種模型因估計參數的數量不同，所需花費的時間差異也相當大，例如在大樣本配適中 McCulloch 模型需 6 個估計參數，但 Vasicek and Fong 模型及 Steeley Cubic Basis Spline 模型皆須 10 個估計參數，在實際的估計時間上 McCulloch 模型與另兩者的估計時間就可相差 6~8 倍的時間。（以 2005/1/12 的資料進行配適，McCulloch 模型僅需花費 35 秒，但 Vasicek and Fong 模型卻需花費 275 秒的時間）
3. 規劃求解配適在尋求最佳解時相當容易出現所謂區域最佳 (Local minimum) 解的問題，也就是說其實這類問題提供不同的規劃求解初始值，即可能收斂至不同的解甚至出現發散的狀況，並不像線性迴歸配適具有唯一的最適解。

雖然大致來說，使用 Bliss 的方法基本上算是有效的解決短期公債配適不佳的問題，但是在先前探討為何短期公債配適誤差較差時，也提到可能是因為在一年期以下皆無任何資訊被用來配適殖利率曲線，因此造成短期公債估計誤差較大，因此本實證也參酌英國央行於其 1999 年 11 月的 Quarterly Bulletin 中對於短期利率的處理，將 Repo 交易的利率引入進行配適，英國央行也認為最適宜的短期利率應該是國庫券交易利率，但由於國庫券交易較不活絡同時參予者身分也受到限制，據此認為國庫券交易利率反而失去代表性，所以英國央行便嘗試以流通性高的公債的附買回交易 (Repo) 利率，來作為短期利率指標。

本部分實證，採用 Steeley Cubic Basis Spline 模型來作為實證模型，選擇此模型的最主要原因為，此模型為以規劃求解配適效果最佳的模型，但同時在極短期的殖利率曲線上，極容易出現較不合理的大幅度波動現象，因此極適合拿來作為驗證加入短期的 RP 利率，對於極短期殖利率曲線的配適，是否能達到改善的效果。

而在 RP 資料的選取上，由於櫃買中心資料的限制（櫃買中心提供的 RP 利率並無區分進行附買回交易的標的債券為公司債或是公債），無法如同英國央行僅

以公債的 RP 交易利率來進行配適，此外，國內 RP 交易的期間統計是以區間統計，而成交利率為該區間所有 RP 交易利利率的交易量加權平均，在採用該些成交資訊時期間將以整斷區間的中間值作為該利率的期間，雖然此方法可能將會產生相當程度上的誤差，但是本實證僅在於嘗試改善極短期殖利率曲線配適不穩定的現象，任何可能的解決方式其實都還是值得進行嘗試的。

依據櫃買中心 RP 的每日成交資訊，以期間來區分可分為隔夜、2-10 天、11-20 天、21-30 天、31-60 天、61-90 天、91-180 天及 180 天以上，因此在配適殖利率曲線資料選取上，便可增加隔夜、6 天、15 天、25 天、45 天、75 天及 135 天等 7 個資料點，其餘的配適方法皆與上述規劃求解配適方法相同，以 2005/03/16 的資料進行配適，其配適的結果如下：

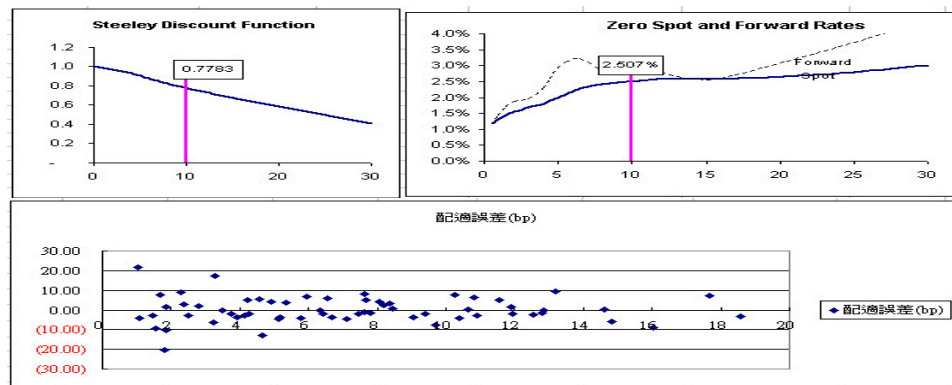
表八：加入 RP 利率配適效果表

配適樣本		平均誤差點數	平均絕對值誤差	誤差變異數
大樣本		4.77	0.3255%	2.03E-05
小樣本	小樣本	3.76	0.2316%	N/A
	全樣本	6.42	0.4306%	

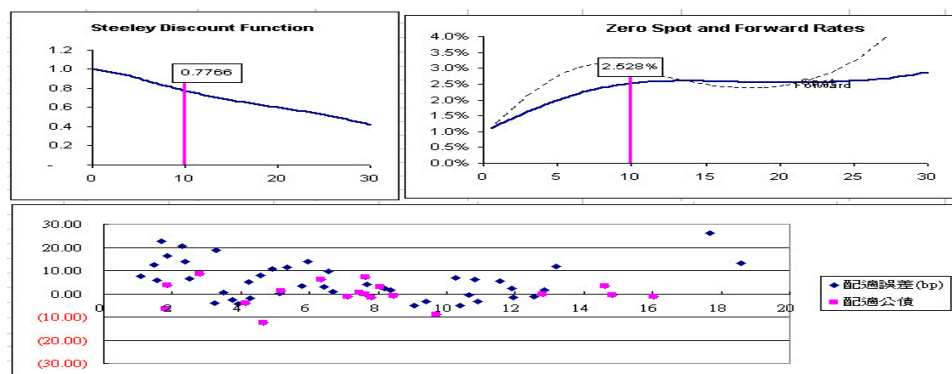
而配適出的殖利率曲線及配適誤差，詳請見下列：

加入 RP 利率大樣本及小樣本配適殖利率曲線及殘差圖

大樣本



小樣本



當初加入 RP 利率來進行配適，是希望能夠強化短期殖利率曲線的配適效果，是否能夠達到預期目的，可由下面幾點來看：

1. 就配適出的殖利率曲線形狀來看，加入 RP 利率配適後使用 Steeley Cubic Basis Spline 模型配適，其極短期的殖利率曲線已經不會出現不合理波動的現象，在殖利率曲線形狀不合理的改善上有相當大的成效。
2. 就整體的配適效果而言，大樣本的配適反而些微降低了配適效果，但降低的幅度有限，以 2005/03/16 的資料配適結果而言，雖然配適效果稍微降低，但仍較配適效果排名第二的 Vasicek and Fong 模型配適效果佳。而就小樣本配適而言，無論是被拿來配適的公債，或是配適後的殖利率曲線回推全部公債價格，其配適的效果都是些微的轉佳。
3. 就短期公債配適的誤差而言，短期公債的配適誤差依然有些微較大的現象，與未加入 RP 利率配適結果相當，因此加入 RP 利率對於增進短期公債的配適效果並沒有太大的成效，但可有效降低極短期利率不合理擺盪現象。

## 二、計量估計模型實證研究

### 非分段配適——大樣本

非分段配適的研究首先採用大樣本進行配適，而針對 Nelson and Siegel 模型、Extend Nelson-Siegel 模型及 Svensson 模型皆以規劃求解法進行配適。由於在分段配適實證中採用 Bliss 的存續期間加權法可有效的改善配適效果，因此在非分段的模型中，進行規劃求解配適時也皆採用 Bliss 的加權方式來進行配適。

表九：三種非分段配適模型估計比較表

模型	Nelson & Siegel	Extend N&S	Svensson
配適分割段數	1 段 無分段配適	1 段 無分段配適	1 段 無分段配適
估計參數個數	4 個	5 個	6 個

由下頁表十的配適結果可以歸納出下列幾個現象：

1. 非常明顯的在大樣本的配適下，Svensson 模型的配適效果是最佳的，顯然最多的估計參數可有效的增進配適的效果，而相反的估計參數最少的 Nelson and Siegel 模型的配適效果相對最差。
2. 與表六的分段配適模型配適結果比較，非分段配適的準確度顯然是較差的，即使以非分段配適效果最好的 Svensson 模型配適，其平均配適誤差仍然高於前述任一種分段配適模型的配適誤差。

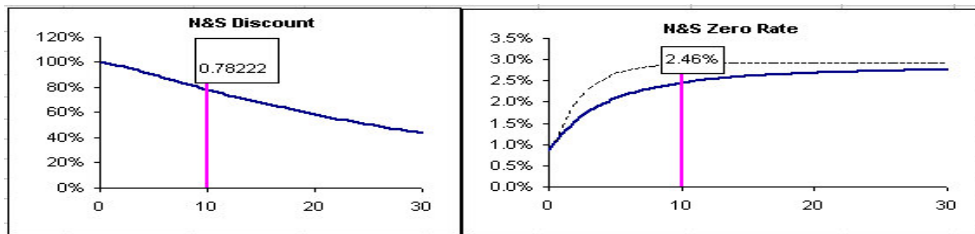
表十：Nelson and Siegel、Extend Nelson-Siegel 及 Svensson 模型大樣本配適效果比較表<sup>4</sup>

日期 <sup>4</sup>	Nelson & Siegel <sup>4</sup>			Extend Nelson & Siegel <sup>4</sup>			Svensson <sup>4</sup>		
	平均絕對 誤差點數	平均絕對 值誤差 <sup>4</sup>	誤差 變異數 <sup>4</sup>	平均絕對 誤差點數	平均絕對 值誤差 <sup>4</sup>	誤差 變異數 <sup>4</sup>	平均絕對 誤差點數	平均絕對 值誤差 <sup>4</sup>	誤差 變異數 <sup>4</sup>
2005/1/12	9.05	0.4573%	4.44E-05	9.61	0.4768%	4.14E-04	9.13	0.4325%	2.90E-05
2005/1/26	13.12	0.5403%	6.03E-05	13.12	0.5403%	6.03E-05	9.21	0.4541%	4.47E-05
2005/2/16	13.44	0.6203%	7.95E-05	12.17	0.5631%	6.32E-04	11.50	0.5166%	4.99E-05
2005/3/16	12.09	0.5315%	5.72E-04	8.49	0.4016%	3.16E-05	7.53	0.3862%	2.84E-05
2005/3/30	12.33	0.5783%	7.61E-05	7.91	0.4063%	3.07E-05	7.24	0.3793%	2.87E-05
2005/4/13	11.81	0.5723%	6.86E-05	8.36	0.4316%	3.32E-05	7.50	0.3940%	3.03E-05
2005/4/27	11.92	0.5058%	5.90E-05	11.62	0.5482%	5.78E-05	7.48	0.4048%	3.73E-05

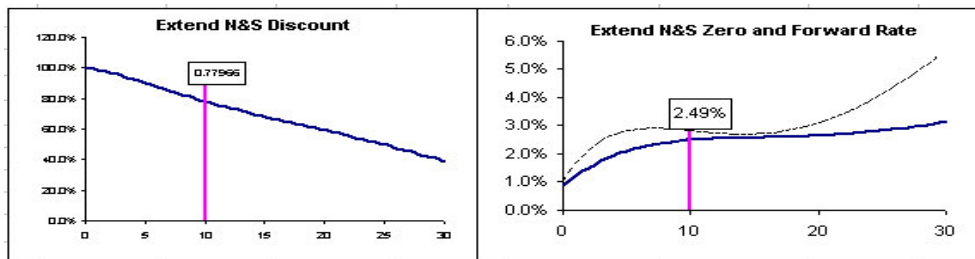
表註：1. 誤差點數是將價格的誤差轉換為誤差的殖利率點數(b, p)<sup>4</sup>  
 2. 表中陰影的部分為該天期各項指標中表現最佳者<sup>4</sup>  
 3. 2005/1/12、2005/1/26、2005/2/16 的樣本數為 62 期公債<sup>4</sup>  
 2005/3/16、2005/3/30、2005/4/13 的樣本數為 64 期公債<sup>4</sup>  
 2005/4/27 的樣本數為 63 期公債<sup>4</sup>

非分段三種模型大樣本規劃求解配適殖利率曲線圖

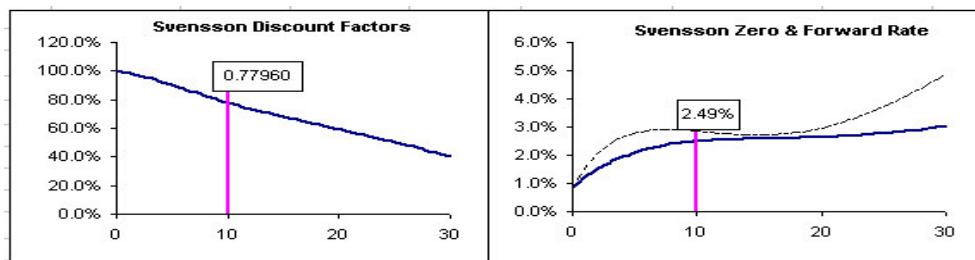
Nelson and Siegel 模型



Extend Nelson-Siegel 模型



Svensson 模型

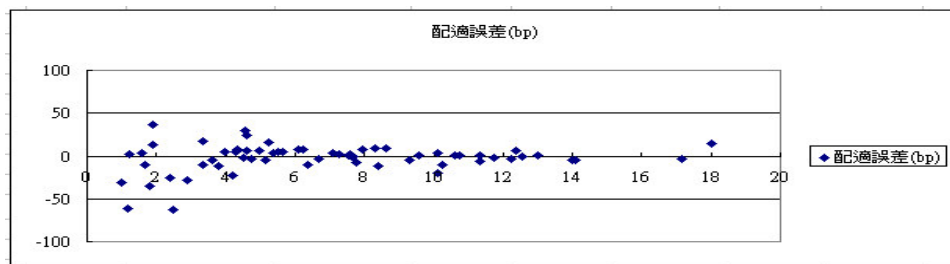


註：以上三種模型皆以 2005/03/16 資料進行配適

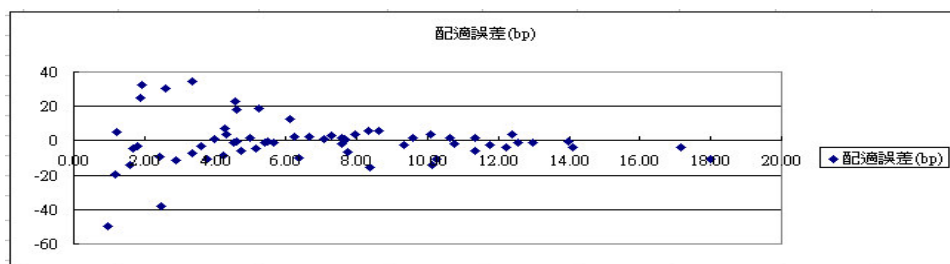
## 公債零息殖利率曲線技術手冊

非分段三種模型大樣本規劃求解配適殘差分配圖如下

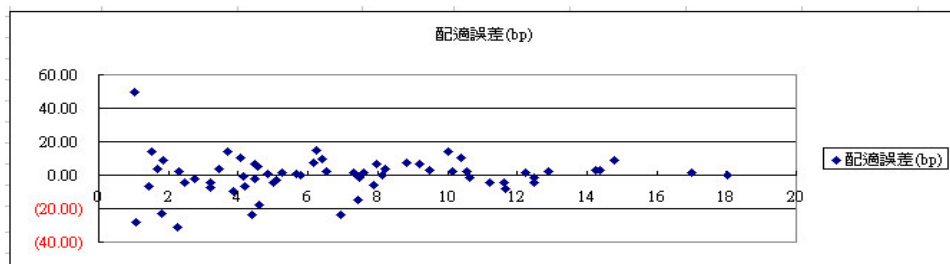
### Nelson and Siegel 模型



### Extend Nelson-Siegel 模型



### Svensson 模型



註：1. 以上三種模型皆為 2005/3/16 資料配適誤差

2. 以上殘差皆以誤差點數 (b.p) 表達，縱軸原點為配適出的殖利率，原點以上為真實殖利率較配適出殖利率為高者（債券價格較理論價格為低，原點以下為真實殖利率較配適出殖利率為低者（債券價格較理論價格為高）

由配適出的殖利率曲線圖及殘差圖，可觀察到下列幾個現象：

1. 較分段配適與非分段配適的殖利率曲線，以 Extend Nelson & Siegel 模型及 Svensson 模型所配適出之殖利率形狀，與分段配適出之殖利率曲線形狀較相似，故推論需要較多的轉折點(Extend Nelson & Siegel 模型及 Svensson 模型皆具有兩個轉折點，而 Nelson & Siegel 模型僅具有一個轉折點) 比較能夠表現國內殖利率曲線的真正型態。
2. 非分段模型與分段模型相同，一樣有短期公債配適誤差較大的現象，但相較之下非分段配適模型的此種短期配適誤差的肥尾現象是更為明顯。而單就非分段模型來看，Svensson 模型的短期配適誤差肥尾的現象，是三個模型當



中最輕微的。

3. 使用非分段模型配適出的殖利率曲線相較於分段模型配適出的殖利率曲線是較為平滑的，因此雖然在配適的準確度上不如分段模型，但在殖利率曲線的平滑度的表現上，非分段模型具有絕對的優勢。

### 非分段配適---小樣本

在非分段模型的殖利率曲線的小樣本配適上，亦完全採用與分段配適模型完全相同的資料進行配適，以方便進行兩類模型配適效果的比對，由於非分段殖利率配適模型皆採用一段配適，因此樣本的個數並不影響估計參數的個數，與分段配適模型小樣本配適估計參數較少的情況不同，此部份實證估計參數依然與表九中列示的完全相同，另外，在誤差平方項的加權方式依然採用 Bliss 的加權方法。

表十一：Nelson and Siegel、Extend Nelson-Siegel 及 Svensson 模型大樣本配適效果比較表<sup>4</sup>

日期 <sup>4</sup>	Nelson & Siegel <sup>4</sup>				Extend Nelson & Siegel <sup>4</sup>				Svensson <sup>4</sup>			
	小樣本 <sup>4</sup>		全樣本 <sup>4</sup>		小樣本 <sup>4</sup>		全樣本 <sup>4</sup>		小樣本 <sup>4</sup>		全樣本 <sup>4</sup>	
	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4</sup>	平均絕對 對誤差 點數 <sup>4</sup>	平均絕對 值誤差 <sup>4</sup>
2005/1/12	9.80	0.3971%	9.55	0.4738%	9.81	0.3976%	9.53	0.4753%	9.21	0.2789%	9.35	0.4215%
2005/1/26	10.24	0.4047%	12.53	0.5647%	10.26	0.4026%	12.54	0.6134%	11.14	0.3601%	12.18	0.5632%
2005/2/16	11.35	0.4621%	13.56	0.6724%	11.35	0.4621%	13.56	0.6725%	14.25	0.4753%	12.39	0.5813%
2005/3/16	9.24	0.3249%	12.32	0.5740%	9.39	0.3304%	10.66	0.4789%	8.48	0.3300%	9.75	0.4785%
2005/3/30	9.66	0.3880%	12.90	0.6247%	9.31	0.3919%	11.44	0.5507%	9.76	0.4138%	8.53	0.4312%
2005/4/13	10.77	0.4249%	11.81	0.5762%	10.40	0.4316%	10.66	0.5240%	10.58	0.4472%	7.85	0.4067%
2005/4/27	8.16	0.3058%	10.72	0.5894%	8.23	0.3068%	10.25	0.5036%	7.69	0.3434%	8.91	0.5369%

表註：1. 誤差點數是將價格的誤差轉換為誤差的殖利率點數(b.p)<sup>4</sup>

2. 表中陰影的部分為該天期各項指標中表現最佳者<sup>4</sup>

3. 七個營業日樣本數皆為 19 個

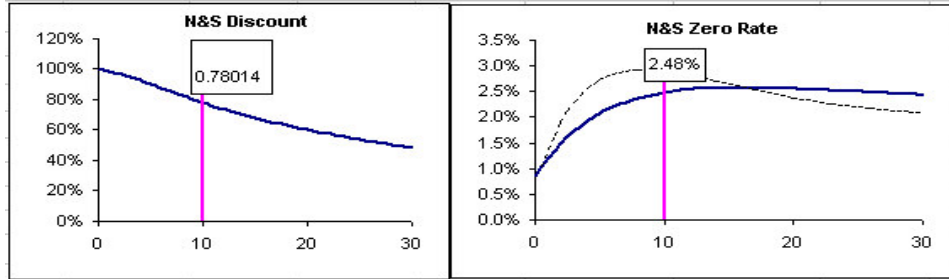
三種非分段模型小樣本配適結果請見表十一，觀察表十一及與表七及表十做相互比較，以及觀察小樣本配適出的殖利率曲線，可歸納出下列幾點現象：

1. 對於配適的樣本（小樣本）而言，Nelson & Siegel 模型與 Svensson 模型配適準確度相當，但利用配出來的殖利率曲線，反推出所有公債的價格時，Svensson 模型在配適準確性上即佔絕對的優勢，因此就整體而言在小樣本配適上與大樣本配適相同，仍以 Svensson 模型在準確性表現上較佳。
2. 以非分段模型小樣本的配適準確度與 Vasiek and Fong 模型與 Steeley Cubic Basis Spline 模型相比，仍然相對是較差的。
3. 使用非分段配適模型，大樣本及小樣本配適出來的殖利率曲線在平滑度表現上是相當的，但以配適準確度而言，仍然是以大樣本配適表現的較佳，因此在資料來源許可下，非分段模型較適宜以大樣本資料進行配適。
4. 在小樣本配適平滑度的表現上，若分段配模型能夠配合上 Repo 短期利率加

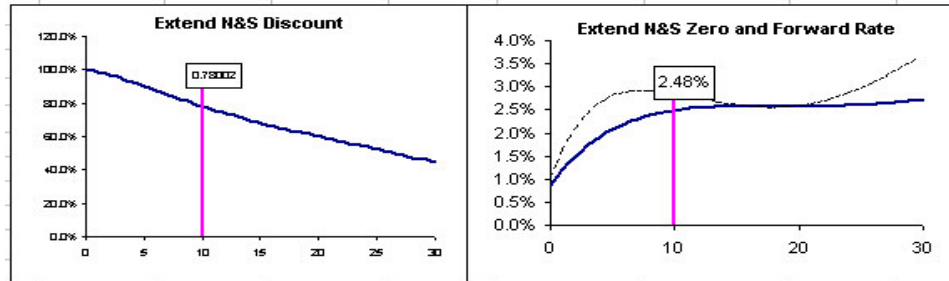
入進行配適，與非分段配適模型在平滑度的表現應該相當。

非分段三種模型小樣本規劃求解配適殖利率曲線圖

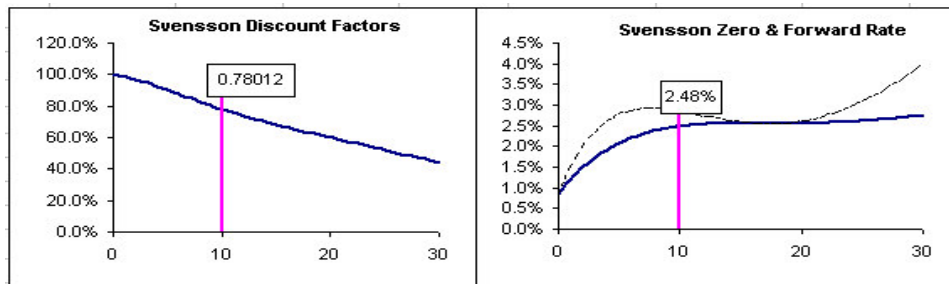
Nelson and Siegel 模型



Extend Nelson-Siegel 模型



Svensson 模型



註：以上三種模型皆以 2005/03/16 資料進行配適

另外，在實際配適作業上筆者發現一個現象，那就是非分段配適模型在進行規劃求解時，對於估計參數初始值的設定是相當敏感的，也就是說給予不同的初始值，最後找到的收斂解也就容易有相當大的差異（Local minimum 的問題），這種現象對於找尋最適的殖利率曲線會產生相當的困擾，在各種文獻上也看到為解決此種現象的解決方案，大致上解決的方法都是採用多重的初始值來進行配適工作。以 Svensson 模型來說，總計有 6 個估計參數，若每個估計參數採用 5 個初始值，則總計共會產生  $5^6 = 15,625$  種初始值組合，若每一種初始值組合進行一次規劃求解，共要進行 15,625 次規劃求解的工作，這將會是非常漫長的運算工作，在計算的效率上是相當差的。當然在運算的效率上，部分文獻亦提出較一些替代方案以增加配適效率，例如加拿大央行使用 Svensson 模型估計時的 partial

estimation 技巧，所謂的「partial estimation」即是固定部分的估計參數（例如固定  $\tau_i$ ，僅變動估計參數  $\beta_i$ ），先選出最佳的幾個配適結果的參數，拿來作為全部參數規劃求解的初始值，如此可以大量減少進行規劃求解的次數增加計算的效率，但此技巧只能減少計算次數，整體來說還是必須進行相當大數量的運算。其實在分段配適模型規劃求解的部分，跟非分段模型一樣也有 Local minimum 的問題存在，但就在實證的過程中發現，分段配適模型對於初始值的敏感性並不高，也就是說用不同的初始值配出來的結果差異並非很大，因此較無進行多次規劃求解運算的需要。

### 三、Smoothing Spline 模型與綜合比較

#### Smoothing Spline 模型---大樣本

完成以上分段及非分段的殖利率曲線配適工作後，可以大致歸納出兩類型模型的特色。分段模型的配適準確度較高，但相對的在平滑度的表現上相對就較差，相反的非分段配適模型的配適準確度較低，但在平滑度的表上又優於分段配適模型，因此 Smoothing Spline 模型的提出，即希望能夠在配適準確度及殖利率曲線的平滑度上可做一個權衡，因此接下來我們也進行 Smoothing Spline 模型的實證，來驗證此模型能否真正的兼顧準確性及平滑性。

本研究 Smoothing Spline 採用在分段配適模型中準確度表現最佳的 Steeley Cubic Basis Spline 模型，同時加入 Repo 交易利率，再採用 Fisher, Nychka, Zervos 於 1994 年發表論文中的間斷時間(discrete time)的不平滑罰責(penalty of roughness)，其定義如下：

$$\lambda \sum_{t=1}^{T-2} [(x_{t+2} - x_{t+1}) - (x_{t+1} - x_t)]^2$$

其中  $\{x_t\}$  為 Smoothed component，由於本實證皆採配適折現函數，因此將  $\{x_t\}$  設定為折現函數。

另外，本實證僅引入不平滑罰責的概念，但其中  $\lambda$  參數及估計參數數量仍然為本實證預先設定，而非採用 General Cross Validation (GCV) 來推算最適的  $\lambda$  及估計參數個數。表十二即表示在各種不同  $\lambda$  設定下的配適結果，配適資料採 2005/03/16 的大樣本資料，再加上 Repo 成交資訊。

由表十二中的實證結果可以容易觀察到，當  $\lambda$  越大時殖利率曲線的平滑度表現相對就越佳，但相對的就必須以犧牲殖利率曲線的準確度來作為交換，但以  $\lambda = 10^4$  為例來看，配適出來的殖利率曲線已經相當的平滑，但其配適的準確度卻仍然可以比使用 Svensson 模型來的更好，所以使用不平滑罰責對於殖利率曲

線配適在準確度及平滑度之間調控有絕佳的功效，同時可透過調整 $\lambda$ 係數自由的調整準確度及平滑度，因此 Smoothing Spline 模型能夠因應各種不同的殖利率曲線需求（例如欲以殖利率曲線作為總體經濟狀況的判斷，可能傾向使用較平滑的殖利率曲線，但如果殖利率曲線是要拿來作為金融商品評價，可能即會要求一條較精確的殖利率曲線，而 Smoothing Spline 模型提供殖利率曲線使用者自行去決定其準確度及平滑度的機制）。

表十二：Smoothing Spline 配適結果表

$\lambda$	平均誤差 點數	平均絕對 值誤差	誤差變異 數	殖利率曲線
0	4.77	0.3255%	$2.03^{-5}$	
$10^2$	4.82	0.3269%	$2.21^{-5}$	
$10^3$	4.98	0.3336%	$2.27^{-5}$	
$10^4$	5.94	0.3744%	$2.59^{-5}$	
$10^5$	14.43	0.6859%	$6.30^{-5}$	

下兩頁表格將本章中所有實證研究結論作一個簡單的整理。



模型		分段配適模型			非分段配適模型			Smoothing Spline
		McCulloch	V & F	Steeley	N & S	Extend NS	Svensson	
線性迴歸	大樣本	特色： 1. 計算速度相當迅速，估計參數多寡對計算時間幾乎無影響 2. McCulloch 為較佳的配適模型 3. 其配適結果在準確度上與非分段模型相當 4. 其配適結果在平滑度上表現不佳，容易出現遠期利率過度波動的現象 5. 大樣本配適容易出現過度配適現象，配適效果反而不如 Vasicek & Fong 模型的小樣本配適 6. 可採用線性迴歸求解，配適效率佳			N/A			N/A
	小樣本	特色： 1. 計算速度相當迅速，估計參數多寡對計算時間幾乎無影響 2. Vasicek & Fong 為最佳模型 3. Vasicek & Fong 模型配適在準確度上，較所有模型大樣本配適佳 4. 小樣本配適在平滑度的表現上較大樣本配適佳 5. Vasicek & Fong 模型小樣本配適在準確度及平滑度表現皆相當佳，為線性迴歸分段配適最佳配適方法 6. 可採用線性迴歸求解，配適效率佳			N/A			N/A

模型		分段配適模型			非分段配適模型			Smoothing Spline
		McCulloch	V & F	Steeley	N & S	Extend NS	Svensson	
規劃求解	大樣本	<p>特色：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 配適準確度相對於線性迴歸求解，有大幅度的改善</li> <li>2. 在殖利率的平滑度上，相對於線性迴歸求解有相當幅度的改善</li> <li>3. Steeley 為準確性最高的模型</li> <li>4. 使用規劃求解估計參數越多則求解的速度越慢</li> <li>5. 相對於非分段配適模型，分段配適模型對於規劃求解的初始值設定並不敏感</li> <li>6. 加入 Repo 交易利率，對於短期債券評價誤差改善並非相當顯著，但可有效降低極短期利率不合理擺盪現象</li> </ol>			<p>特色：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 在殖利率的平滑度表現上，相較於分段配適模型表現較佳，但相對的犧牲了準確度</li> <li>2. Svensson 為準確性最高的模型</li> <li>3. 非分段配適模型對於規劃求解的初始值設定相當敏感，因此需要大量次數的求解過程</li> <li>4. 估計參數具有其經濟意義</li> </ol>			<p>特色：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 可在準確度及平滑度之間尋求均衡</li> <li>2. 使用分段配適模型，但有效解決一般分段配適模型平滑度不佳的問題</li> <li>3. 最能夠兼具準確性及平滑性的配適模型</li> </ol>
	小樣本	<p>特色：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 相較規劃求解小樣本配適，僅 Steeley 模型在準確度上有較大幅度改進</li> <li>2. Vasicek &amp; Fong 模型及 Steeley 模型為準確性較高的模型</li> <li>3. 若採用 Vasicek &amp; Fong 模型，在準確度提升效果有限下，卻必須多花費相當長的時間進行求解，仍以線性迴歸求解為較佳選擇</li> <li>4. 小樣本配適在平滑度的表現上較大樣本配適佳，入加上 Repo 交易利率配適，在平滑度表現上與非分段配適無異</li> </ol>			<p>特色：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 相較規劃求解分段配適，其在準確度上相對較差</li> <li>2. Svensson 為準確性較高的模型</li> <li>3. 非分段配適模型對於規劃求解的初始值設定相當敏感，因此需要大量次數的求解過程</li> <li>4. 估計參數具有其經濟意義</li> </ol>			

#### 四、模型穩定性分析

本節我們在分段配適模型與非分段配適模型中，各選取一個較佳的模型，進行較長時間的每日殖利率曲線配適工作，以驗證該模型是否在長期運作下，皆能夠保持相近的效果，模型不會因為資料的變化而造成配適效果相當大的差異。

此部份的實證研究，分段配適模型選定 Steeley 模型，非分段模型則採用 Svensson 模型，實證研究期間為 2005/07/14 至 2005/10/14 共三個月，每日以公債指數的報價資訊分別就兩種模型進行殖利率曲現配適，表十四整理出在實證期間 62 個營業日中，就平均誤差點數及平均絕對質誤差兩個衡量指標，來比較兩模型的配適效果及模型穩定性。

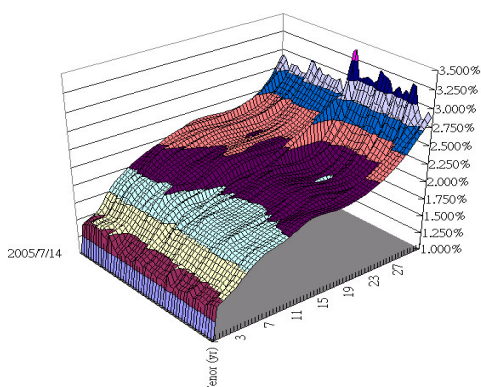
表十四：模型穩定性比較表

模型	Steeley		Svensson	
	平均絕對誤差點數	平均絕對質誤差	平均絕對誤差點數	平均絕對質誤差
最大	9.260	0.547%	19.970	0.778%
最小	4.400	0.277%	12.870	0.552%
平均	6.146	0.409%	16.849	0.660%

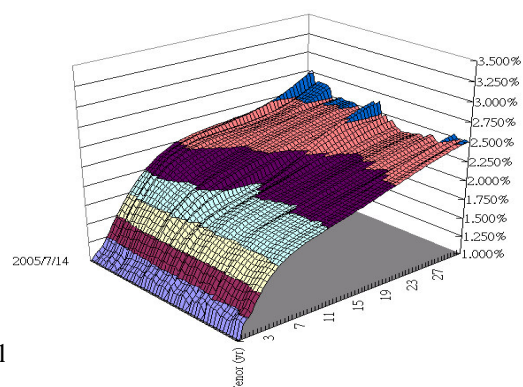
由表十四及每日配適的經驗，歸納出下列幾點結論：

1. 以較長期間的資料來進行配適，依然可明顯發現以分段配適的 Steeley 模型進行配適，遠較採用非分段配適的 Svensson 模型，在配適準確度上高上許多，Steeley 模型最差的狀況仍較 Svensson 模型最佳狀況好。
2. Steeley 模型較易受資料的影響，殖利率曲現配適準確度好與壞差異較大，而 Svensson 模型在此方面，好壞差異性就相對來的小很多。
3. 以 Steeley 模型配適殖利率曲線，容易出現每日殖利率曲現變化較大的情況，也就是殖利率曲現波動是較大的，但相對的以 Svensson 模型配適出來的殖利率曲線，每日的變化不多波動度較小，詳可見下列兩個殖利率曲線變化圖。

Steeley B-Spline 模型殖利率曲線變化圖



Svensson 模型殖利率曲線變化圖



總結來說，Steeley 模型配適準確度高，但為能夠充分表達資料的狀況，因此殖利率曲線較不平滑，且市場價格波動對於殖利率曲線形狀變化影響較大。而 Svensson 模型在殖利率曲線平滑度表現上較佳，在顧及平滑度下準確度就相對被犧牲，由於準確度相對較低，因此市場價格波動對於殖利率曲線形狀變化影響也較小。

### 肆、結論

本文實證研究中，將模型區分為樣條函數模型及計量估計模型，其中樣條函數模型的特性為，該類模型通常有較佳的模型準確度，但在殖利率曲線的平滑度上相對就表現的較差。而計量估計模型的特性為，該類模型通常在準確度的表現上較差，但在殖利率的平滑度及合理性上卻相對較高，兩類模型各有特色並無一定好壞，應該要視殖利率曲線的使用目的，來決定該選用何種類型模型。

在大樣本及小樣本的實證上，發現大樣本配適出的殖利率曲線，大致上呈現整體公債市場的平均殖利率，而小樣本（流通性佳樣本）配適出的殖利率曲線則會較較大樣本殖利率曲線來的低，其中的差距應可由流動性的差異來解釋（流動性風險溢酬），一般來說求取殖利率曲線若非有特殊目的，以小樣本配適即能夠得到相當好的殖利率曲線配適效果。

基本上，若殖利率曲線是要拿來作為金融商品的評價用途，此時模型的準確性就相對很重要，而模型的平滑度要求可能相對就不高，因此應該選用樣條函數模型來求算殖利率曲線。但若殖利率曲線是為了作為總體經濟情勢觀察，此時殖利率曲線的形態表達可能勝於其準確性，選用計量估計模型可能是不錯的選擇。而本文以台灣的資料（證券櫃檯買賣中心台灣公債指數價格資訊）進行實證顯示，樣條函數模型以 Steeley Cubic Basis Spline 模型的表現最佳，而計量估計模型則以 Svensson 模型表現最佳（不論大樣本配適或小樣本配適結論相同），其結果與國外諸多文獻所記載者相似。

另外，本研究也簡單的對於 Smoothing Spline 模型進行實證研究，其結果顯示透過對於不平滑罰責（penalty of roughness）的調整，可使殖利率曲線在準確度及平滑度間進行任意的調整，因此，此模型可隨使用者的需求及進行配適資料的特性，來調整模型的不平滑罰責，求取使用者所需求的殖利率曲線，此模型給予使用者最大的使用彈性。

本中心零息殖利率曲線一為提供公債公平價格評價，採 Steeley B-Spline 模型殖利率曲線可獲得最佳之配適度，提供最貼近市場之價格；另為提供市場利



率期間結構樣態參考，採 Svensson 模型配適出平滑之殖利率曲線。兩模型配適出之殖利率曲線每日於本中心網站定期公告。

## 參考文獻

### 中文部分

1. 李桐豪，2001，「債券市場發展對貨幣政策之影響」，中央銀行季刊，23 卷 1 期，頁 23-45。
2. 周建新、于鴻福、張千雲，2003，「利率期間結構估計模型之實證研究」，管理學報，20 卷 4 期，頁 767-796。
3. 單家禎，2000，「利率期限結構之平滑函數估計」，國立台灣大學經濟研究所碩士論文。
4. 謝承熹，2000，「以分段三次方指數函數配適台灣公債市場之利率期限結構：線性最適化與非線性最適化之比較」，中國財務學刊，8 卷 2 期，頁 25-47。

### 英文部分

1. Bliss, R.R., 1996, "Testing Term Structure Estimation Methods", Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 96-12a.
2. Bolder, D., Streliski, D., 1999, "Yield Curve Modeling at the Bank of Canada", Bank of Canada Technical Report No.84.
3. Bank of International Settlement, 1999, "Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation".
4. Choudhry, M., 2004, "Analysing & Interpreting the Yield Curve", John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd.
5. Daniel F. W., 1997, "Spline Methods for Extracting Rate Curves from Coupon Bond Prices", Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 97-10.
6. Fisher, M., Nychka, D., and Zervos, D., 1995, "Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines", Working Paper 95-1, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board.
7. McCulloch, J. H., 1971, "Measure the Term Structure of Interest Rates", Journal of Business, p19-31.
8. McCulloch, J. H., 1975, "The Tax-Adjusted Yield Curve", Journal of Finance, Vol. 31, p881-830.
9. Nelson, C. R., Siegel, A. F., 1987, "Parsimonious Modeling of Yield Curves", Journal of Business, Vol. 60, p473-489.
10. Steeley, J. M., 1991, "Estimating the Gilt-Edged Term Structure Basis Spline and Confidence", Journal of Business Finance and Accounting, Vol.18, p513-529.
11. Subramanian, K. V., 2001, "Term Structure Estimation In Illiquid Markets", Journal of Fixed Income, Vol.11, No.1, p77-86.
12. Svensson, L. E. O., 1994, "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates:

- Sweden 1992-1994”, NBER Working Paper Series 4871.
13. Vasicek, O., 1977, “An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, p177-188.
  14. Vasicek, O., Fong, G., 1982, “Term Structure Estimation Using Exponential Splines”, *Journal of Finance*, Vol.38, p339-348.
  15. United Kingdom Debt Management Office, 2000, “The DMO’s Yield Curve Model”.
  16. Yu, I.W., Fung, L., 2002, “Estimation of Zero-Coupon Yield Curve Based on Exchange Fund Bills and Notes in Hong Kong”, Hong Kong Monetary Authority.