JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
RUE DU JARDINET, N° 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Ancien Elève de l'École Polytechnique, professeur d'Analyse à cette École.

TOME TROISIÈME.

ANNÉE 1838.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1838

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les deux derniers cahiers du Journal de M. Crelle;

Par Joseph LIOUVILLE.

Ces deux cahiers renferment deux mémoires de M. Jacobi, écrits en allemand, et relatifs au calcul des variations et à la théorie des équations différentielles. L'importance du sujet et le nom de l'auteur nous ont engagés à faire traduire les mémoires de M. Jacobi, pour les insérer dans les prochains cahiers de notre Journal. Nous aurions bien voulu y trouver place aussi pour un mémoire de M. Plana, sur l'intégrale eulérienne de première espèce, et surtout pour deux articles très intéressants de M. Lejeune-Dirichlet. Mais cette satisfaction nous est refusée. Les lecteurs français seront donc obligés de recourir au journal même de M. Crelle pour prendre connaissance des recherches du géomètre de Berlin. Ils verront que l'auteur parle leur langue avec élégance et précision. Son premier mémoire a pour objet la démonstration de la convergence de la série $Y_0 + Y_1 +$ etc., dont les géomètres font usage dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes.

Dans le second il s'occupe des séries

$$s = \sum_{i=0}^{i=p-1} \cos \frac{2i^2\pi}{p}, \quad t = \sum_{i=0}^{i=q-1} \sin \frac{2i^2\pi}{q},$$

où p est un nombre premier $4m+1$, et q un nombre premier $4m+3$. On démontre aisément les équations $s = \pm \sqrt{p}$, $t = \pm \sqrt{q}$; mais pour prouver que c'est le signe supérieur qui doit toujours avoir lieu, il faut recourir à des considérations très délicates, comme on le voit dans le mémoire de M. Gauss intitulé *Summatio quarumdam serierum singularium*. La méthode de M. Gauss consiste à transformer les sommes précédentes, ou plutôt les expressions générales, qui s'en déduisent en y remplaçant les nombres premiers p et q par un entier quelconque n, en produits de sinus d'arcs équidifférents, produits qui sont très faciles à évaluer et qui ne présentent plus aucune ambiguité de signe. M. Dirichlet s'est proposé d'obtenir d'une autre manière les valeurs exactes de s et t.

« Je suis parvenu, dit-il, au théorème suivant, qui comprend les » sommations précédentes :

» La somme de la série finie ou infinie

$$» \quad F(\alpha) = c_0 + c_1 \cos \alpha + c_2 \cos 2\alpha + \ldots,$$

» étant connue, on peut toujours exprimer au moyen de la fonc- » tion $F(\alpha)$, les nouvelles séries

$$» \quad c_0 + c_1 \cos 1^2 . \frac{2\pi}{n} + c_2 \cos 2^2 . \frac{2\pi}{n} + \ldots,$$

$$» \quad c_1 \sin 1^2 . \frac{2\pi}{n} + c_2 \sin 2^2 . \frac{2\pi}{n} + \ldots,$$

» qui ont les mêmes coefficients que la précédente.

» Je me flatte que cette nouvelle manière de parvenir aux résultats
» si remarquables de M. Gauss pourra avoir quelque intérêt, l'histoire
» de la théorie des nombres nous montrant par de nombreux exem-
» ples, que c'est surtout dans cette partie de la science qu'il y a de
» l'avantage à envisager la même question sous des points de vue très
» différents. La méthode de M. Gauss était jusqu'à présent le seul
» moyen de vaincre la difficulté indiquée et qui consiste dans l'ambi-
» guité du signe. Celle que M. Libri a donnée, quoique très ingénieuse,
» ne paraît pas propre à résoudre cette difficulté, puisqu'elle fait dé-
» pendre les sommes cherchées d'une équation du second degré. Pour
» faire disparaître l'ambiguité que cette circonstance fait naître (*),
» le savant auteur a recours à l'expression transformée en produit,
» sans indiquer aucun moyen de parvenir à cette transformée. Mais ce
» passage de la somme au produit est à lui seul la question tout
» entière, puisqu'une fois effectué, il dispense de toute autre analyse,
» l'expression en produit étant du nombre de ceux qu'Euler a déter-
» minés depuis long-temps par les considérations les plus simples. »

(*) Voyez le *Journal de M. Crelle*, tome IX, page 187.

NOTE

Sur les limites de la série de Taylor ;

Par M. POISSON.

Soit fx une fonction donnée de la variable x. Si l'on suppose qu'aucune des n fonctions fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, $\ldots \frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}}$, ne devient infinie pour la valeur qu'on attribuera à x, et si cette variable se change en $x+y$, on pourra développer $f(x+y)$, par la série de Taylor prolongée jusqu'au n^{ieme} terme inclusivement, de sorte qu'en désignant par R la somme de tous les termes suivants, on aura

$$\left.\begin{aligned} f(x+y) = fx + y\frac{dfx}{dx} + \frac{y^2}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{y^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3fx}{dx^3} + \ldots \\ + \frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}\,\frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}} + \mathrm{R}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Je supposerai que l'accroissement y de x, soit compris entre zéro et une quantité donnée h; le reste R sera une fonction inconnue de x et y ; et il s'agira d'en trouver deux limites, c'est-à-dire, deux quantités dont l'une soit plus grande et l'autre plus petite que R, pour la valeur qui sera donnée à x, et pour toutes les valeurs de y, depuis $y = 0$ jusqu'à $y = h$.

Pour cela, je fais

$$x + y = c, \quad x = c - y, \quad \frac{d^nfx}{dx^n} = \mathrm{F}x = \mathrm{F}(c - y);$$

je suppose qu'on donne à c une valeur constante, que l'on fasse croître y depuis zéro jusqu'à h, et que l'on désigne par a la valeur de y pour laquelle celle de $\mathrm{F}(c - y)$ sera la plus grande; de sorte qu'on ait

$$F(c-y)-F(c-a)<0,$$

pour toutes les autres valeurs de y. Cela étant, je mets $\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}F(c-a)$ à la place de R dans l'équation (1); puis je représente par Q l'excès de son premier membre sur le second, ou autrement dit, je fais

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y)-fx-y\frac{dfx}{dx}-\frac{y^2}{1.2}\cdot\frac{d^2fx}{dx^2}-\frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}\cdots\cdots \\ -\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}\frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}}-\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}F(c-a)=Q. \end{array}\right\} \quad (2)$$

A cause de $x=c-y$, la quantité Q sera une fonction de la seule variable y. Elle sera nulle pour $y=0$, et une quantité finie, depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$, ou depuis $x=c$ jusqu'à $x=c-h$, du moins si l'on suppose qu'aucune des $n+1$ fonctions fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, ... $\frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^nfx}{dx^n}$, ne devienne infinie entre ces limites. En supposant aussi, pour fixer les idées, que h soit une quantité positive, je dis, de plus, que la fonction Q sera constamment négative entre ces mêmes limites.

En effet, si l'on différentie l'équation (2) par rapport à x et à y, mais en considérant la somme $x+y$ comme une constante, ou en faisant $dx=-dy$, et sans faire varier non plus la quantité a, qui est une valeur déterminée de y, on trouvera, toutes réductions faites,

$$\frac{dQ}{dy}=\frac{y^{n-1}}{1.2.3.n-1}[F(c-y)-F(c-a)]; \quad (3)$$

quantité négative, à raison de l'inégalité précédente, et parce que la variable y, comprise entre zéro et h, est supposée positive. Or, on démontre sans difficulté, que toute fonction Q de y, qui s'évanouit avec la variable, dont le coefficient différentiel $\frac{dQ}{dy}$ conserve toujours le même signe depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$, et qui ne passe pas par l'infini entre ces limites, est du même signe que $\frac{dQ}{dy}$ entre ces mêmes limites (*); par conséquent la fonction Q que nous considérons, est négative depuis $y = 0$ jusqu'à $y = h$; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Maintenant, on tire des équations (1) et (2),

$$R = \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(c-a) + Q; \qquad (4)$$

la quantité Q étant négative, on aura donc

$$R < \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(c-a).$$

Si l'on eût supposé négative, la limite h des valeurs de y, il y aurait eu deux cas à distinguer dans l'équation (3): selon que n serait un nombre pair ou impair, $\frac{dQ}{dy}$ aurait une valeur positive ou négative, et, par suite, il en serait de même à l'égard de Q; l'inégalité qu'on vient d'écrire, ne changerait donc pas dans le cas de n impair, et elle se changerait en celle-ci :

$$R > \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(c-a),$$

dans le cas de n un nombre pair.

En désignant par b la valeur de y, qui répond à la plus petite valeur de $F(c-y)$, quand on y fait croître y depuis zéro jusqu'à h, sans faire varier c, on trouvera, par un raisonnement semblable au précédent,

$$R > \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(c-b),$$

quand h sera une quantité positive, ou bien quand n sera un nombre impair, et, au contraire,

---

(*) Cette proposition est un cas particulier du théorème fondamental des intégrales définies, d'après lequel une intégrale $\int_a^b Xdx$ exprime la somme de toutes les valeurs de la différentielle Xdx, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, en supposant que X soit une fonction de x, qui ne devient point infinie entre ces limites.

$$R < \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(c-b),$$

lorsque ce nombre n sera pair, et h une quantité négative.

Pour donner à ces limites de R les formes sous lesquelles on a coutume de les présenter, je considère la fonction $F(x+y)$: je suppose que, sans faire varier x, on y fasse croître y depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$, et je désigne par α et β, les valeurs de y correspondantes à la plus grande et à la plus petite de celles que prendra $F(x+y)$, de manière qu'on ait

$$F(x+\alpha) > F(x+y), \quad F(x+\beta) < F(x+y),$$

pour toutes les autres valeurs de y. D'après ce qu'on a représenté plus haut par a et b, on aura identiquement

$$F(c-a) = F(x+\alpha), \quad F(c-b) = F(x+\beta);$$

d'où il résultera les formules ordinaires

$$R < \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(x+\alpha), \quad R > \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(x+\beta),$$

quand n sera impair et quel que soit le signe de h, et au contraire

$$R > \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(x+\alpha), \quad R < \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(x+\beta),$$

dans le cas où n est un nombre pair et h ou y une quantité négative. Les quantités $F(x+\alpha)$ et $F(x+\beta)$ pourront être positives ou négatives, et c'est en ayant égard à leurs signes et à celui de y^n, que ces inégalités auront lieu, de sorte qu'elles signifient que l'excès de la limite supérieure de R sur R, et l'excès de R sur sa limite inférieure, sont des quantités positives.

Les hypothèses que l'on a faites pour parvenir à ces résultats, consistent à supposer qu'aucune des $n+1$ fonctions $f(x+y)$, $\frac{df(x+y)}{dx}$, $\frac{d^2f(x+y)}{dx^2}$, ... $\frac{d^{n-1}f(x+y)}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^nf(x+y)}{dx^n}$, ne devient infinie pour la valeur qu'on donne à x, et pour l'une des valeurs de y

comprises depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$. Mais, par la théorie relative aux cas où la série de Taylor est en défaut, on sait que si l'un des coefficients différentiels d'une fonction devient infini pour une valeur particulière de la variable, chacun des coefficients suivants le deviendra également; pour que la condition précédente soit remplie, il sera donc nécessaire et il suffira que la plus grande et la plus petite valeur $F(x+\alpha)$ et $F(x+6)$ du dernier coefficient $\frac{d^n f(x+y)}{dx^n}$, ou de $F(x+y)$, soient des quantités finies. Quand l'une ou l'autre de ces deux quantités, aura une valeur infinie, positive ou négative, les limites précédentes de R ne seront plus applicables, et pour en découvrir d'autres, il faudra recourir à des considérations relatives à la fonction particulière fx, dont il s'agira.

Si l'on veut exprimer par une intégrale la valeur exacte du reste R, on tirera d'abord, de l'équation (3),

$$Q=\frac{1}{1.2.3\ldots n-1}\int y^{n-1}F(c-y)\,dy-\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}F(c-a),$$

et ensuite, de l'équation (4),

$$R=\frac{1}{1.2.3\ldots n-1}\int y^{n-1}F(c-y)\,dy;$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse avec y, et en considérant c comme une constante que l'on remplacera par $x+y$ après l'intégration.

Pour vérifier ce résultat, j'observe que l'on a

$$F(c-y)=(\mp 1)^n\,\frac{d^n f(c-y)}{dy^n};$$

en intégrant par partie, on aura donc

$$\int y^{n-1}F(c-y)\,dy=(\mp 1)^n y^{n-1}\frac{d^{n-1}f(c-y)}{dy^{n-1}}$$
$$-(\mp 1)^n(n-1)\int y^{n-2}\frac{d^{n-1}f(c-y)}{dy^{n-1}}\,dy;$$

on aura de même

$$\int y^{n-2}\frac{d^{n-1}f(c-y)}{dy^{n-1}}dy=y^{n-2}\frac{d^{n-2}f(c-y)}{dy^{n-2}}-(n-2)\int y^{n-3}\frac{d^{n-2}f(c-y)}{dy^{n-2}}dy;$$

et en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé l'exposant de y, on parviendra à une dernière équation

$$\int \frac{df(c-y)}{dy} dy = f(c-y) - fc:$$

Or, en faisant $c = x + y$, hors des signes $\int$, dans toutes ces équations successives, et observant qu'il en résultera, pour un nombre m quelconque,

$$\frac{d^m f(c-y)}{dy^m} = (\mp 1)^m \frac{d^m fx}{dx^m},$$

on en conclura une valeur de $\int y^{n-1} \mathrm{F}(c-y)\, dy$, au moyen de laquelle la valeur précédente de R coïncidera avec celle que l'on déduit de l'équation (1); ce qu'il s'agissait de vérifier.

Cette note n'ajoute rien à ce qui était connu; mais elle pourra être utile aux élèves qui commencent l'étude du calcul différentiel.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

De la Formule intégrale

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\nu^2-\varrho^2)\,d\nu.d\varrho}{\sqrt{(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\varrho^2)(c^2-\varrho^2)}} = \frac{1}{2}\pi\,;$$

Par M. CHASLES.

M. Lamé, dans son *Mémoire sur les surfaces isothermes*, inséré dans le deuxième volume de ce Journal (livraisons d'avril et de mai), est parvenu à cette formule, en la transformant, par des considérations géométriques, en une autre où les variables sont différentes et où les deux intégrations se font sans difficulté. M. Poisson l'a démontrée directement, par la seule théorie des *transcendantes elliptiques*, dans une Note placée à la suite du Mémoire de M. Lamé.

Cette manière est purement analytique; l'autre est mixte, puisqu'on y fait usage de considérations géométriques pour transformer la formule, et ensuite des règles du calcul intégral pour effectuer deux intégrations.

J'ai trouvé qu'on peut éviter ces deux intégrations, et parvenir ainsi à la formule, d'une troisième manière entièrement géométrique.

Pour cela, rappelons d'abord la signification géométrique sous laquelle la formule s'est présentée dans le mémoire sur les surfaces isothermes.

Que l'on conçoive un ellipsoïde dont les trois demi-diamètres principaux soient égaux à μ, $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{\mu^2-c^2}$.

Que l'on fasse croître le demi-diamètre μ d'une quantité $d\mu$, de manière à produire un second ellipsoïde infiniment peu différent du premier, et qui aura les mêmes excentricités pour ses sections principales, puisque b et c sont des constantes. Qu'on prenne, en chaque point m de la surface du premier ellipsoïde, l'épaisseur ds de la couche comprise entre cette surface et celle du second ellipsoïde ; qu'on fasse le rapport $\frac{d\mu}{ds}$, et le produit de ce rapport par l'élément superficiel $d\omega$ du premier ellipsoïde : c'est la somme de tous ces produits, étendue à la surface entière de l'ellipsoïde, c'est-à-dire $\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega$, que M. Lamé a eu à calculer. (*V.* tome II, p. 163 de ce Journal.)

En prenant pour variables les demi-diamètres majeurs ν, ϱ des deux hyperboloïdes qu'on peut faire passer par le point m, de manière que leurs sections principales aient les mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde, M. Lamé trouve que

$$\frac{d\mu}{ds} d\omega = \sqrt{\mu^2 - b^2}\ \sqrt{\mu^2 - c^2} \cdot \frac{(\nu^2 - \varrho^2) . d\nu . d\varrho}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \varrho^2)(c^2 - \varrho^2)}}.$$

De sorte que l'intégrale, étendue à la surface entière de l'ellipsoïde, est

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 8 . \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} . \int_0^b \int_b^c \frac{(\nu^2 - \varrho^2) . d\nu . d\varrho}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \varrho^2)(c^2 - \varrho^2)}}.$$

Et en prenant pour variables les coordonnées x, y du point m, rapportées aux axes principaux de l'ellipsoïde pris pour axes coordonnés, M. Lamé trouve

$$\frac{d\mu}{ds} d\omega = \frac{\sqrt{\mu^2 - c^2}}{\mu} \cdot \frac{dxdy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{\mu^2 - b^2}}}.$$

Cette seconde expression, intégrée successivement par rapport à y et à x, conduit à

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 4\pi . \sqrt{\mu^2 - b^2}\ \sqrt{\mu^2 - c^2},$$

d'où l'on conclut, à cause de la première expression de l'intégrale, la formule en question.

C'est ce calcul, et la double intégration qu'il comprend, que l'on

2..

peut éviter et remplacer par des considérations géométriques, ainsi que je vais le faire voir.

Il s'agit donc de démontrer que

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 4\pi . \sqrt{\mu^2 - b^2} . \sqrt{\mu^2 - c^2}.$$

Pour cela, remarquons qu'en exprimant $\frac{d\mu}{ds}$ en coordonnées x, y, z, on trouve

$$\mu . \frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)^2}}}.$$ (T. II, p. 163 de ce Journal.)

On reconnaît aisément que le second membre est l'expression de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'ellipsoïde au point m (x, y, z). Soit p cette perpendiculaire; on aura donc

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{p}{\mu},$$

et, par conséquent,

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = \Sigma \frac{p}{\mu} d\omega = \frac{1}{\mu} \Sigma p d\omega.$$

Soit Π l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde, compris dans le plan diamétral parallèle au plan tangent en m; le produit $p\Pi$ sera le volume du rhomboïde construit sur ces deux demi-diamètres et sur un troisième qui aboutit au point m. Ce troisième est conjugué aux deux premiers; le volume du rhomboïde est donc constant, et égal au produit des trois demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde. Ainsi l'on a

$$p . \Pi = \mu \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2}.$$

Soit Π' l'aire de la section de l'ellipsoïde par le plan diamétral qui contient le parallélogramme Π; on aura

$$\Pi' = \pi \Pi,$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre ; donc

$$p.\Pi' = \pi.\sqrt{\mu^2 - b^2}.\sqrt{\mu^2 - c^2},$$

et, par suite,

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = \pi.\sqrt{\mu^2 - b^2}\ \sqrt{\mu^2 - c^2}.\Sigma \frac{d\omega}{\Pi'}.$$

Ainsi l'intégrale cherchée est la somme des éléments superficiels de l'ellipsoïde divisés par les aires des sections faites dans l'ellipsoïde par des plans diamétraux parallèles à ces éléments; cette somme étant multipliée par le produit $\pi.\sqrt{\mu^2 - b^2}.\sqrt{\mu^2 - c^2}$.

Or j'ai démontré par de simples considérations géométriques, dans mes applications du *Principe d'Homographie* (*), que la somme des éléments superficiels d'un ellipsoïde, divisés par les aires des sections diamétrales parallèles aux plans de ces éléments, est égale à 4; on a donc

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 4\pi.\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}.$$

C. Q. F. D.

Ainsi la formule en question est démontrée géométriquement et sans aucune intégration.

Je vais profiter de cet article pour faire quelques remarques sur deux autres passages du mémoire de M. Lamé.

La perpendiculaire p, que nous avons introduite dans l'intégrale qu'il fallait calculer, peut être employée encore utilement dans une autre expression, pour en donner la signification géométrique.

On trouve (p. 166, tome II, de ce *Journal*), que la quantité de chaleur qui traverse, pendant l'unité de temps, un élément $d\omega$ d'une surface isotherme ellipsoïdale, est proportionnelle à

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \rho^2}}.$$

(*) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne; suivi d'un Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la Science, la Dualité et l'Homographie;* in-4°, 1837. Bachelier; *voir* p. 819.

M. Lamé en conclut que *les flux de chaleur, aux extrémités des axes de l'ellipsoïde, ont des intensités respectivement proportionnelles à ces axes.*

La formule est susceptible d'une signification géométrique semblable, pour tous les points de la surface de l'ellipsoïde.

En effet, on trouve (p. 177) l'équation

$$\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}=\frac{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\varrho^2)}{\mu^2(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}.$$

La valeur de la perpendiculaire p, dont nous nous sommes servi ci-dessus, se change donc en celle-ci

$$p=\mu\,.\,\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}}{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\,\sqrt{\mu^2-\varrho^2}}.$$

L'expression de la quantité de chaleur qui s'écoule par l'élément $d\omega$ de la surface de l'ellipsoïde devient donc

$$\frac{d\omega.p.}{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}}.$$

Le dénominateur est constant pour tous les points d'un même ellipsoïde. On conclut donc de cette expression que

Les flux de chaleur, en différents points d'une même surface isotherme, ont des intensités proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du centre de la surface sur les plans tangents en ces points.

Cette loi générale donne en particulier l'énoncé ci-dessus pour les points situés aux extrémités des diamètres principaux de la surface.

M. Lamé, en étendant aux surfaces coniques les beaux résultats trouvés pour les surfaces isothermes ellipsoïdales et hyperboliques, qui sont des séries d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, a été conduit à deux séries de surfaces coniques du second degré qu'il définit par cette propriété géométrique, d'être *les cônes asymptotes des hyperboloïdes isothermes à une et à deux nappes* (p. 172).

M. Lamé conclut de là que chaque cône d'une série coupe à angles droits chaque cône de l'autre série (p. 173).

Ces deux séries de surfaces coniques trajectoires orthogonales peuvent être définies par une propriété caractéristique qui leur est propre, et qui est indépendante de la considération étrangère des hyperboloïdes auxquels les cônes sont asymptotes ; cette propriété consiste en ce que *tous ces cônes ont les mêmes lignes focales*.

On appelle lignes *focales* d'un cône du second degré, deux droites qui jouent le même rôle dans le cône, que les foyers dans les sections coniques. Par exemple, *la somme des angles que chaque arête du cône fait avec les deux lignes focales est constante*.

La théorie des lignes focales comprend beaucoup d'autres propositions analogues à celles de la Géométrie plane. J'en ai démontré un assez grand nombre dans mon *Mémoire sur les Propriétés générales des cônes du second degré* (in-4°, 1830). On y trouve la proposition citée ci-dessus du Mémoire de M. Lamé, savoir, que *les cônes qui ont les mêmes lignes focales et qui se coupent, se coupent à angles droits*.

Ces cônes complètent la théorie des surfaces du second degré trajectoires orthogonales.

A toutes les propriétés des lignes focales, correspondent, dans un cône du second degré, d'autres propositions concernant les plans de ses sections circulaires. Ainsi par exemple, au théorème énoncé ci-dessus, concernant les angles que chaque arête d'un cône fait avec les deux lignes focales, correspond celui-ci : *La somme des angles que chaque plan tangent à un cône du second degré fait avec les plans de deux sections sous-contraires, est constante.*

Cette matière, encore très peu cultivée, est extrêmement abondante. Mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler plus longuement.

La propriété remarquée par M. Lamé, savoir, que les cônes asymptotes de deux séries d'hyperboloïdes décrits des mêmes foyers, se coupent à angles droits, n'est qu'un cas particulier d'une propriété générale des surfaces du second degré décrites des mêmes foyers, savoir que : *tous les cônes circonscrits à ces surfaces, qui ont pour sommet commun un point quelconque de l'espace, ont les mêmes axes principaux et les mêmes lignes focales* (*). D'où il suit que tous ces

---

(*) J'ai donné ce théorème dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences* de Bruxelles, tome I, page 216.

cônes se coupent à angle droit. De sorte que les contours apparents de ces surfaces, pour un lieu quelconque du spectateur, semblent se couper deux à deux à angles droits.

Les surfaces du second degré dont les sections principales ont les mêmes foyers jouissent d'un très grand nombre d'autres propriétés géométriques. (Voir *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, *etc.*, p. 384 — 399.)

Ces surfaces se sont déjà présentées dans plusieurs questions, et particulièrement dans des questions de Physique et de Mécanique. Mais les systèmes de cônes qui sont de la même famille, et que M. Lamé a considérés dans son Mémoire sur les surfaces isothermes, ne s'étaient pas encore présentés, je crois, dans de pareilles questions. On peut en introduire la considération dans quelques phénomènes de la polarisation ; car les deux axes du cristal sont les lignes focales de certains cônes du second degré. Les plans de polarisation, pour différentes directions du rayon de lumière, sont tangents à ces cônes ; et leur orthogonalité résulte de ce que deux cônes se coupent à angles droits.

Si l'analogie qui a lieu entre les propriétés géométriques des lignes focales des cônes et celles des foyers des sections coniques, pouvait être étendue aux propriétés attractives dont ces points jouissent dans le système du monde où ils sont les centres où résident les forces qui sollicitent les corps célestes, on serait porté à penser que les lignes focales des cônes sont aussi les centres des forces polarisantes, dans les phénomènes de la lumière.

Sur les lignes conjointes dans les coniques ;

PAR M. TERQUEM.

1. J'appelle *lignes conjointes* deux droites telles qu'en les prenant pour axes des coordonnées les coefficients des deux carrés dans l'équation de la courbe deviennent égaux.

2. Il est évident que deux droites conjointes coupent la conique, généralement parlant, en quatre points, situés sur un même cercle, que je désignerai sous le nom de *cercle conjoint ;* et réciproquement quatre points d'une conique étant sur un cercle, en les joignant deux à deux, on obtient deux lignes conjointes.

3. Deux diamètres égaux sont deux lignes conjointes ; il en est de même des asymptotes de l'hyperbole ; un diamètre principal se confond avec son conjoint.

4. PROBLÈME. *Étant donnée l'équation d'une conique, et celle d'une droite tracée dans son plan, trouver* 1°. *l'équation de la droite conjointe, passant par l'origine ;* 2°. *l'équation du cercle correspondant ?*

Solution. Soit

$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$	(1),	équat. de la conique ; γ = angle des axes.
$ay+bx+c=0$	(2),	.... de la droite donnée.
$a'y+b'x=0$	(3),	.... de la droite conjointe cherchée.
$(ay+bx+c)(a'y+b'x)=0$	(4),	... système des deux droites.

Ajoutant les équations (1) et (4), il vient

$$\left.\begin{aligned}(A+aa')y^2+xy(B+ab'+a'b)+x^2(C+bb')+y(D+ca')\\ +x(E+cb')+F=0.\end{aligned}\right\}\ (5)$$

Pour que cette équation représente un cercle, l'on doit avoir

$$\begin{aligned}A+aa' &= C+bb'\\ B+ab'+a'b &= 2\cos\gamma(A+aa');\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{a(C-A)+b(2A\cos\gamma-B)}{d},\\ b' &= \frac{b(A-C)+a(2C\cos\gamma-B)}{d},\\ d^2 &= a^2-2ab\cos\gamma+b^2. \end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Substituant les valeurs (6) dans l'équation (5), elle devient

$$\left.\begin{aligned} &A'y^2+2A'\cos\gamma\, x^2+A'x^2+y[Dd+ca(C-A)+cb(2A\cos\gamma-B)]\\ &\quad+x[Ed+cb(A-C)+ca(2C\cos\gamma-B)]+Fd=0,\\ &A'=Ab^2-Bab+Ca^2 \end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Cette équation (7) est celle du cercle conjoint.

Ainsi la recherche de l'intersection d'une droite et d'une conique est ramenée à l'intersection de cette droite et du cercle (7) que l'on peut toujours facilement construire.

5. Si la droite (2) passe par l'origine, alors $c=0$; désignant par α, β, R les coordonnées du centre et le rayon du cercle conjoint, on aura

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{d}{2A'\sin^2\gamma}(D\cos\gamma-E),\\ \beta &= \frac{d}{2A'\sin^2\gamma}(E\cos\gamma-D),\\ R^2 &= \frac{d}{4A'^2\sin^2\gamma}(E^2d-2DEd\cos\gamma+D^2d-4A'F\sin^2\gamma); \end{aligned}\right\}\quad(8)$$

d'où l'on tire

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{E\cos\gamma-D}{D\cos\gamma-E}.$$

Ainsi tous les cercles conjoints qui correspondent à un même point, ont leurs centres situés sur une droite passant par ce point, perpendiculairement à la polaire de ce point; et cette droite est une normale, lorsque le point est situé sur la conique.

On peut donc, à l'aide de deux droites conjointes, mener une normale à la conique par un point donné sur cette courbe, et par conséquent aussi une tangente.

6. Si l'on fait

$$\frac{b'}{a'}=\frac{b}{a},$$

alors les droites conjointes sont parallèles aux axes principaux ; et il vient en ayant égard aux équations (6),

$$b^2(2A\cos\gamma - B) + 2ab(C - A) + a^2(B - 2C\cos\gamma) = 0, \quad (9)$$

équation qui donne les directions des axes principaux.

7. Soient x', y' les coordonnées d'un point de la conique ; en y transportant l'origine sans rien changer aux directions des axes, l'équation (1) prend la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + D'y + E'x = 0, \quad (10)$$
$$D' = 2Ay' + Bx' + D,$$
$$E' = 2Cx' + By' + E:$$

l'équation de la tangente à l'origine est

$$D'y + E'x = 0:$$

l'équation (7) devient alors celle du cercle osculateur, en y faisant

$$a = D', \quad b = E', \quad c = 0:$$

elle se réduit à

$$L(y^2 + x^2 + 2xy\cos\gamma) + M^2(D'y + E'x) = 0. \quad (11)$$

où

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC), \quad M^2 = D'^2 - 2D'E'\cos\gamma + E'^2,$$
$$\alpha = \frac{M^2}{2L\sin^2\gamma}.(D'\cos\gamma - E'),$$
$$\beta = \frac{M^2}{2L\sin^2\gamma}.(E'\cos\gamma - D'),$$
$$R = \frac{M^3}{2L\sin\gamma};$$

α, β et R, sont les coordonnées du centre de courbure, et le rayon de courbure; la construction de ces lignes ne souffre aucune difficulté et il est inutile d'entrer dans la discussion des divers cas particuliers.

On voit aussi que lorsque la conique est tracée, on peut, à l'aide des lignes conjointes, et avec le compas *seul*, trouver des normales, des tangentes, etc.

Les mêmes considérations peuvent servir à déterminer les normales, les plans tangents, les deux lignes, centres et rayons de courbure, dans les surfaces du second degré.

NOUVELLES RECHERCHES

Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique;

PAR J. LIOUVILLE (*).

On nomme fonction algébrique d'une variable indépendante x toute fonction y qui peut être regardée comme la racine d'une équation de la forme

$$(1) \qquad y^\mu - Ly^{\mu-1} - \ldots - My - N = 0,$$

L, ... M, N étant des polynomes entiers ou des fractions rationnelles en x. Cette équation est *irréductible* quand son premier membre n'est divisible par aucun polynome de même forme que ce premier membre, mais de degré inférieur à μ par rapport à y. Dire qu'une fonction algébrique est donnée, c'est dire que l'on possède l'équation irréductible (1) qui la détermine, ou du moins un ensemble de formules d'où l'on pourra, s'il est nécessaire, conclure cette équation par des calculs plus ou moins longs.

Je désignerai par z l'intégrale $\int ydx$ de la fonction algébrique y. Comme cette intégrale est, suivant les cas, algébrique ou transcendante, il était bon d'avoir une méthode certaine pour décider si la quantité z est exprimable ou non en termes algébriques, et pour en trouver la valeur lorsque la dernière hypothèse a lieu. Cette méthode, que je crois avoir donnée le premier, est consignée dans mes deux mémoires sur *la détermination des intégrales de valeur algébrique*.

(*) Quelques personnes m'ont engagé à reproduire ici cet article qui a déjà paru dans le *Compte rendu de l'Académie des Sciences* (séance du 28 août 1837).

dont l'Académie, sur le rapport de M. Poisson, a bien voulu ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savans étrangers* (*).

Elle se compose de deux parties distinctes. Je considère, en premier lieu, les intégrales rationnelles d'un système d'équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque, à coefficients rationnels; et je fais voir comment on peut trouver ces intégrales quand elles existent, ou du moins démontrer qu'elles n'existent pas. En second lieu, je prouve que la valeur de z, si elle est algébrique, se ramènera toujours à la forme

$$z = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{\mu - 1},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ étant des fonctions rationnelles de x, liées à cette variable par un nombre égal d'équations différentielles linéaires. Tout se réduit donc à chercher, par le procédé dont on a parlé plus haut, les intégrales rationnelles de ces équations linéaires : s'il n'existe pas de telles intégrales, la quantité z ne sera exprimable par aucune fonction algébrique de x, et, dans le cas contraire, pour obtenir z, il suffira de déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$.

La méthode que je viens de rappeler en peu de mots ne laisse rien à désirer sous le rapport de la rigueur; mais, dans la pratique, elle est susceptible de quelques simplifications que je me propose d'exposer ici, sans sortir néanmoins du cercle des généralités.

1°. D'abord, il existe un moyen très simple de former les μ équations différentielles linéaires qui déterminent les μ inconnues $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$, en fonction de x. Toutes ces équations se déduisent en effet de la formule

$$\begin{aligned}S_{m+1} = {} & S_m \frac{d\alpha}{dx} + S_{m+1} \frac{d\beta}{dx} + S_{m+2} \frac{d\gamma}{dx} + \ldots + S_{m+\mu-1} \frac{d\lambda}{dx} \\ & + \frac{\beta}{m+1} \cdot \frac{dS_{m+1}}{dx} + \frac{2\gamma}{m+2} \cdot \frac{dS_{m+2}}{dx} + \ldots + \frac{(\mu-1)\lambda}{m+\mu-1} \cdot \frac{dS_{m+\mu-1}}{dx},\end{aligned}$$

(*) *Voyez* aussi le XXII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et le tome X du *Journal de M. Crelle*.

dans laquelle S_m désigne la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation (1), S_{m+1} la somme de leurs puissances $(m+1)^{\text{èmes}}$, etc. En faisant successivement $m=0$, $m=1, \ldots$ $m=\mu-1$, on obtiendra les μ équations demandées, savoir :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} S_1 = S_0 \dfrac{d\alpha}{dx} + \text{etc.}, \\ S_2 = S_1 \dfrac{d\alpha}{dx} + \text{etc}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_\mu = S_{\mu-1} \dfrac{d\alpha}{dx} + \text{etc.}, \end{array}\right.$$

dont la première (en observant que $S_1 = L$) donne immédiatement

$$\int L dx = \alpha S_0 + \beta S_1 + \ldots + \lambda S_{\mu-1}.$$

2°. Supposons que les coefficients L, ... M, N soient entiers par rapport à x ; et nommons Δ le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation (1) : si l'on pose

$$\alpha = \frac{t}{\Delta}, \quad \beta = \frac{u}{\Delta}, \ldots \lambda = \frac{w}{\Delta},$$

les inconnues nouvelles $t, u, \ldots w$, que l'on substituera ainsi aux inconnues $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, ne pourront avoir que des valeurs entières, en sorte qu'il sera extrêmement facile de les déterminer à l'aide des équations (2) ou d'en prouver l'impossibilité par le secours de ces mêmes équations.

3°. Il sera plus commode encore d'opérer de la manière suivante. On désignera par $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\mu$ de nouvelles inconnues liées aux anciennes par les relations

$$\begin{array}{l} \rho_1 = \alpha S_0 \quad + \beta S_1 + \ldots + \lambda S_{\mu-1}, \\ \rho_2 = \alpha S_1 \quad + \beta S_2 + \ldots + \lambda S_\mu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_\mu = \alpha S_{\mu-1} + \beta S_\mu + \ldots + \lambda S_{2(\mu-1)}. \end{array}$$

Les valeurs de $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\mu$ seront nécessairement entières si l'intégrale $\int ydx$ est exprimable en termes algébriques, et la première d'entre elles, savoir ρ_1, sera égale à $\int \mathrm{L}dx$. C'est dans cette substitution d'inconnues nouvelles, dont les valeurs ne peuvent être qu'entières, aux inconnues anciennes, dont les valeurs pouvaient être fractionnaires, que réside le caractère principal de la méthode que je propose aujourd'hui. Cette méthode, comme on voit, n'exige plus que l'on sache trouver dans tous les cas les intégrales rationnelles d'un système d'équations différentielles linéaires. La nature particulière des équations (2) donne lieu à des simplifications que la méthode générale ne comporte pas, et permet de former *à priori* les dénominateurs des inconnues $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, ou de remplacer $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ par d'autres inconnues $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\mu$, qui n'ont pas de dénominateurs.

4°. On aurait encore à déterminer des inconnues *entières* $\sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_\mu$ si l'on posait

$$\sigma = \alpha \frac{dS_1}{dx} + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{dS_2}{dx} + \frac{\gamma}{3} \cdot \frac{dS_3}{dx} + \ldots + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{dS_\mu}{dx},$$

$$\sigma_3 = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{dS_2}{dx} + \frac{\beta}{3} \cdot \frac{dS_3}{dx} + \frac{\gamma}{4} \cdot \frac{dS_4}{dx} + \ldots + \frac{\lambda}{\mu+1} \cdot \frac{dS_{\mu-1}}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_\mu = \frac{\alpha}{\mu-1} \cdot \frac{dS_{\mu-1}}{dx} + \frac{\beta}{\mu} \cdot \frac{dS_\mu}{dx} + \frac{\gamma}{\mu+1} \cdot \frac{dS_{\mu+1}}{dx} + \ldots + \frac{\lambda}{2(\mu-1)} \cdot \frac{dS_{2(\mu+1)}}{dx},$$

équations auxquelles se joindra l'équation donnée plus haut,

$$\int \mathrm{L}dx = \alpha S_0 + \beta S_1 + \ldots + \lambda S_{\mu-1}.$$

On sera même ainsi conduit à des calculs généralement plus simples que les précédents, parce que la dérivée $\frac{dS_n}{dx}$ est un polynome dont le degré est inférieur d'une unité au degré de S_n.

5°. Si les coefficients de l'équation (1) sont fractionnaires, on les rendra entiers en remplaçant y par $\frac{y}{\mathrm{T}}$, T étant un polynome convenablement choisi; et il s'agira de trouver l'intégrale $\int \frac{ydx}{\mathrm{T}}$. Cette intégrale sera encore de la forme

$$\int \frac{ydx}{T} = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{\mu-1},$$

et pour remplacer les inconnues α, β, $\gamma, \ldots \lambda$, dont les valeurs sont fractionnaires, par d'autres inconnues ρ_1, $\rho_2 \ldots$, ρ_μ, dont les valeurs seront entières, il suffira de poser

$$\frac{\rho_1}{U} = \alpha S_0 + \beta S_1 + \ldots + \lambda S_{\mu-1},$$

$$\frac{\rho_2}{U} = \alpha S_1 + \beta S_2 + \ldots + \lambda S_\mu,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\rho_\mu}{U} = \alpha S_{\mu-1} + \beta S_\mu + \ldots + \lambda S_{2\mu-1}:$$

S_m désigne, comme ci-dessus, la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation (1); U est le plus grand commun diviseur des deux polynomes T, $\frac{dT}{dx}$.

Tels sont les théorèmes à l'aide desquels on peut trouver l'intégrale $\int ydx$ ou reconnaître l'impossibilité de cette intégrale, sous forme algébrique. Ils sont dignes, ce me semble, par leur élégance de fixer un moment l'attention des géomètres; peut être même serait-il bon de les introduire dans les traités élémentaires de calcul intégral.

SOLUTION D'UNE QUESTION

Relative à la Probabilité des Jugements rendus à une majorité quelconque ;

Par M. Ad. GUIBERT,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

« Une affaire sera soumise à un tribunal de première instance, » puis à une cour d'appel de $2n+1$ juges, ou de $2n$ juges, déci- » dant en dernier ressort et à une majorité quelconque ; dans le cas » de $2n$ juges, s'il y a partage égal, la cour adoptera l'opinion du » tribunal de première instance. Quelle est la plus grande des proba- » bilités de la bonté des arrêts prononcés par ces deux sortes de cours » d'appel? Les juges qui les forment sont supposés avoir la même » chance de ne point se tromper. »

Après avoir donné la solution de cette question, j'en traiterai une du même genre, à laquelle celle-ci donne lieu, quand on introduit des conditions nouvelles; j'aurai occasion, en terminant, d'établir une formule qui montre avec évidence comment augmente, avec le nombre des juges d'un tribunal, la probabilité du jugement qu'ils doivent prononcer à une majorité quelconque, et en supposant qu'ils aient tous la même chance de ne pas se tromper.

Soient

p la probabilité qu'un juge de cour d'appel ne se trompe point,
P la probabilité que le jugement du tribunal de première instance sera bon,

$\left.\begin{matrix} P_{2n+1} \\ P_{2n} \end{matrix}\right\}$ les probabilités que les arrêts des cours d'appel de $2n+1$ et $2n$ juges seront conformes au bon droit.

Il s'agit de comparer entre elles les quantités P_{2n+1} et P_{2n}.

D'après les principes fondamentaux du calcul des probabilités, on aura d'abord

$$P_{2n+1} = p^{2n+1} + (2n+1)(1-p)p^{2n} + \ldots + \frac{(2n+1)\ldots(n+2)}{1\ldots n}(1-p)^n p^{n+1},$$

$$P_{2n} = p^{2n} + 2n(1-p)p^{2n-1} + \ldots + \mathrm{P}\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(1-p)^n p^n;$$

en multipliant le second membre de cette dernière égalité par $p+1-p$, on lui donnera aisément cette forme

$$P_{2n} = p^{2n+1} + (2n+1)(1-p)p^{2n} + \ldots + \frac{(2n+1)\ldots(n+2)}{1\ldots n}(1-p)^n p^{n+1} + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(\mathrm{P}-p)(1-p)^n p^n;$$

donc

$$P_{2n} = P_{2n+1} + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(\mathrm{P}-p)(1-p)^n p^n. \qquad \text{(A)}$$

Le problème est résolu par cette formule; elle fait voir en effet, que selon que l'on aura

$$\mathrm{P} > p, \quad \mathrm{P} = p, \quad \mathrm{P} < p,$$

on aura respectivement

$$P_{2n} > P_{2n+1}, \quad P_{2n} = P_{2n+1}, \quad P_{2n} < P_{2n+1}.$$

J'admettrai, ce qui est vrai dans les temps ordinaires, que p soit $> \frac{1}{2}$; alors, si la probabilité qu'un juge du tribunal de première instance ne se trompe point est supposée constante et aussi égale à p, on aura toujours $\mathrm{P} > p$, et par conséquent $P_{2n} > P_{2n+1}$, à moins que le tribunal de première instance ne soit formé que d'un juge, auquel cas $\mathrm{P} = p$ et $P_{2n} = P_{2n+1}$. L'inégalité $\mathrm{P} > p$ est fondée sur l'augmentation avec le nombre des juges de la probabilité de la bonté de leur jugement; or, ce fait qui est évident sera d'ailleurs démontré par une des formules subséquentes, ainsi que je l'ai déjà annoncé.

Je suppose maintenant que chaque arrêt considéré soit rendu, et qu'il soit successivement conforme et contraire au jugement de première instance, dont les juges ont la même chance de ne pas se tromper que ceux de la cour d'appel, et je me propose de voir si à la cour de $2n$ juges correspondent encore des probabilités plus grandes que celles qui se rapportent à la cour d'appel renfermant un juge de plus.

Soient P'_{2n+1}, P''_{2n+1} ces probabilités, dans le cas de $2n+1$ juges, et suivant que l'arrêt rendu est ou n'est pas conforme au jugement du tribunal de première instance. Soient P'_{2n}, P''_{2n} les probabilités analogues et qui se rapportent à la cour de $2n$ juges. Le principe de la probabilité des hypothèses donnera les égalités

$$\mathrm{P}_{2n+1} = \frac{\mathrm{P}\mathrm{P}_{2n+1}}{\mathrm{P}\mathrm{P}_{2n+1} + (1-\mathrm{P})(1-\mathrm{P}_{2n+1})},$$

$$\mathrm{P}''_{2n+1} = \frac{(1-\mathrm{P})\mathrm{P}_{2n+1}}{(1-\mathrm{P})\mathrm{P}_{2n+1} + \mathrm{P}(1-\mathrm{P}_{2n+1})},$$

$$\mathrm{P}'_{2n} = \frac{\mathrm{P}\left[p^{2n} + 2n(1-p)p^{2n-1} + \ldots + \frac{2n\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}(1-p)^n p^n\right]}{\mathrm{P}\left[p^{2n}+\ldots+\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(1-p)^n p^n\right] + (1-\mathrm{P})\left[(1-p)^{2n}+\ldots+\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(1-p)^n p^n\right]},$$

$$\mathrm{P}''_{2n} = \frac{(1-\mathrm{P})\left[p^{2n} + 2n(1-p)p^{2n-1} + \ldots + \frac{2n\ldots n}{1\ldots(n-1)}(1-p)^{n-1}p^{n+1}\right]}{(1-\mathrm{P})\left[p^{2n}+\ldots+\frac{2n\ldots n}{1\ldots(n-1)}(1-p)^{n-1}p^{n+1}\right] + \mathrm{P}\left[(1-p)^{2n}+\ldots+\frac{2n\ldots n}{1\ldots(n-1)}(1-p)^{n+1}p^{n-1}\right]},$$

les événements observés étant ici l'accord ou le désaccord du jugement et des arrêts.

La somme des numérateurs de P'_{2n+1}, P''_{2n+1} est P_{2n+1}, c'est-à-dire, la probabilité de la bonté de l'arrêt quel que soit le jugement de première instance; la somme des dénominateurs est l'unité, et ces deux résultats confirment l'exactitude de ces valeurs. Des vérifications semblables s'observent à l'égard des deux formules suivantes.

Pour faciliter les comparaisons dont il s'agit, je remplace dans ces dernières égalités, P_{n} par sa valeur donnée par l'équation (A), et j'obtiens ainsi

$$P' = \frac{PP_{2n+1} + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n} P(1-p)^{n+1}p^{n}}{PP_{2n+1} + (1-P)(1-P_{2n+1}) + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(P+p-2Pp)(1-p^{n})p^{n}},$$

$$P''_{n} = \frac{(1-P)P_{2n+1} - \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(1-P)(1-p)^{n}p^{n+1}}{(1-P)P_{2n+1} + P(1-P_{2n+1}) - \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(P+p-2Pp)(1-p)^{n}p^{n}};$$

or, si l'on calcule les numérateurs des différences

$$P'_{2n+1} - P'_{2n}, \quad P_{2n+1} - P''_{2n},$$

on pourra aisément les mettre sous ces formes respectives

$$\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n} P(1-P)\left(\frac{P_{2n+1}}{1-p} - 1\right)(1-p), \quad \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n} P(1-P)(p - P_{2n+1}),$$

ce qui prouve que la première différence est positive, et la seconde négative, ou que l'on a

$$P'_{2n+1} > P'_{2n}, \quad P''_{n+1} < P'';$$

ainsi la probabilité de la bonté de l'arrêt de la cour de $2n$ juges, est plus petite ou plus grande que celle de même nature, relative à la cour de $2n+1$ juges, selon que le jugement et l'arrêt s'accordent ou ne s'accordent pas.

Je passe à la démonstration d'une formule dont il a été question.

Si dans l'équation

$$P_{2n+1} = p^{2n+1} + (2n+1)(1-p)p^{2n} + \ldots + \frac{(2n+1)\ldots(n+2)}{1\ldots n}(1-p)^{n}p^{n+1},$$

on fait croître n, il n'en résulte pas très clairement que P_{2n+1} augmente en même temps; cependant il est évident, sans le secours d'aucune formule, qu'il en doit être ainsi; pour en trouver une qui rende cela manifeste, je change n en $n-1$, et cette équation devient

$$P_{2n-1} = p^{2n-1} + (2n-1)(1-p)p^{2n-2} + \ldots + \frac{(2n-1)\ldots(n+1)}{1\ldots(n-1)}(1-p)^{n-1}p^{n},$$

puis je multiplie ce second membre par $p+1-p$, et le résultat permet de poser, en ajoutant et retranchant la quantité......
$\frac{2n\ldots(n-1)}{1\ldots n}P(1-p)^n p^n$,

$$P_{2n-1} = p^{2n} + 2n(1-p)p^{2n-1} + \ldots + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}P(1-p)^n p^n$$
$$+ \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(\tfrac{1}{2}P)(1-p)^n p^n,$$

ou

$$P_{2n-1} = P_{2n} + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(\tfrac{1}{2}-P)(1-p)^n p^n;$$

à cette équation j'ajoute membre à membre l'équation (A), et il vient

$$P_{2n+1} = P_{2n-1} + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)^n p^n.$$

Au second membre le second terme étant toujours positif, il s'ensuit que P_{2n+1} augmente quand n augmente. Si n était supposé infini, P_{2n+1} atteindrait sa plus grande valeur qui est l'unité, et que l'on peut obtenir en transformant d'abord de nouveau la valeur de P_{2n+1}, de la manière suivante.

On remplace successivement n, dans cette formule, par $n-1$, $n-2, \ldots 3, 4$, et l'on a

$$P_{2n-1} = P_{2n-3} + \frac{(2n-2)\ldots n}{1\ldots(n-1)}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)^{n-1}p^{n-1},$$
$$P_{2n-3} = P_{2n-5} + \frac{(2n-4)\ldots(n-1)}{1\ldots(n-2)}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)^{n-2}p^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_5 = P_3 + \frac{4.3}{1.2}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)^2p^2,$$
$$P_3 = p + \tfrac{2}{1}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)p;$$

de ces expressions on déduit facilement que

$$P_{2n+1} = p + (p - \tfrac{1}{2})\left[\frac{4}{1}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \frac{4.5.6}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{(n+1)\ldots 2n}{1\ldots n}x^n\right],$$

en posant $(1 - p)p = x$: soit maintenant n infini, on aura à évaluer la série

$$\frac{2}{1}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \frac{4.5.6}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{(n'+1)\ldots 2n'}{1\ldots n'} + \text{etc.},$$

en désignant par n' le rang du terme général. Les parties composant cette suite, qui est convergente, puisque x a pour maximum $\frac{1}{4}$, sont les termes successifs du milieu, dans les développements de toutes les puissances de degré pair du binome $1 + x$; si l'on remplace $4x$ par y, le terme général se transforme évidemment en

$$\frac{1.3.5\ldots(2n'-1)}{2^{n'}} \times \frac{1}{2.3\ldots n'}y^{n'},$$

ce qui montre qu'il n'est autre que le terme général du développement de $(1 - y)^{-\frac{1}{2}} - 1$; donc, n étant infini, on aura

$$P_{2n+1} = p + (p - \tfrac{1}{2})\left[(1 - 4x) - 1\right] = p + \tfrac{1}{2}(2p - 1)\left(\frac{1}{2p - 1} - 1\right),$$

ou, en réduisant,

$$P_{2n+1} = 1.$$

Sur l'Intégration d'une classe d'Équations différentielles ;

PAR J. LIOUVILLE.

Dans un élégant Mémoire imprimé, tome II, page 457, de ce Journal, M. Binet obtient entre autres résultats, le théorème suivant : *On peut toujours intégrer l'équation* $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{rdr} u$, *où* r *dépend de* t *selon la formule* $t = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2 R + A^2}}$, R *étant une fonction quelconque de* r. Cette intégrale d'une équation différentielle linéaire du second ordre présente beaucoup d'analogie avec celles que M. Jacobi vient de trouver pour les équations différentielles qui servent à distinguer les *maxima* et les *minima* dans le calcul des variations. Elle excitera sans aucun doute l'attention des géomètres. Voici une méthode très simple pour parvenir à plusieurs intégrales du même genre. Soit

$$(1) \qquad f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

une équation différentielle de l'ordre n; $y', \ldots y^{(n)}$, étant les dérivées successives de y. L'intégrale complète de cette équation contiendra n constantes arbitraires a, $b, \ldots$ c et sera de la forme...... $y = F(x, a, b, \ldots c)$ ou plutôt $\Pi(x, y, a, b, \ldots c) = 0$. Maintenant différencions par rapport à a les deux membres de l'équation (1), et représentons par u la dérivée $\frac{dy}{da}$. Il nous viendra

$$(2) \qquad \frac{df}{dy} \cdot u + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{du}{dx} + \ldots + \frac{df}{dy^{(n)}} \cdot \frac{d^n u}{dx^n} = 0.$$

On aurait eu la même équation si, au lieu de poser $\frac{dy}{da} = u$, on avait posé $\frac{dy}{db} = u$ ou $\frac{dy}{dc} = u$. Donc les dérivées de y prises par rapport aux n constantes a, $b, \ldots$ c représentent autant d'intégrales particulières de l'équation linéaire (2), en sorte que

$$u = \alpha \frac{dy}{da} + \beta \frac{dy}{db} + \ldots + \gamma \frac{dy}{dc}$$

en est l'intégrale complète, α, $\beta, \ldots \gamma$, étant des constantes arbitraires.

Si l'on avait seulement une intégrale particulière de l'équation (1), avec m constantes arbitraires, on trouverait, par la même méthode, m intégrales particulières de l'équation (2). Par les méthodes connues, on réduirait donc l'intégration de cette équation (2) à celle d'une autre équation de l'ordre $(n - m)$.

Il est bon de rappeler aussi qu'à l'aide de chaque intégrale particulière de l'équation (2), on abaisse d'une unité l'ordre de l'équation

$$(3) \qquad \frac{df}{dy} v - \frac{d\left(\frac{df}{dy'} v\right)}{dx} + \ldots \pm \frac{d^n \left(\frac{df}{dy^{(n)}} v\right)}{dx^n} = 0,$$

comme Lagrange l'a fait voir dans les premières pages du mémoire intitulé : *Solution de différents problèmes de calcul intégral.*

Outre le mémoire de M. Jacobi dont j'ai parlé plus haut, il en existe un autre très considérable sur les équations différentielles de la dynamique. Tous les deux, je l'espère, paraîtront dans mon Journal. Mais je n'ai pas encore lu le second que l'on traduit actuellement. Il est fort possible que les mémoires de M. Jacobi renferment les divers résultats que je viens d'indiquer en peu de mots. Mais quand même cela serait, il y aurait toujours quelque avantage à les avoir détachés de longues théories, comme je le fais dans cet article. Ils deviennent en effet si simples qu'on ne pourra manquer de les introduire désormais dans les éléments. Je me propose de développer, dans un autre article, quelques-unes de leurs nombreuses conséquences. En attendant le lecteur peut en faire l'application au cas particulier où la fonction f se réduit à $y'' - \varphi(y)$, l'équation (1) étant alors immédiatement intégrable.

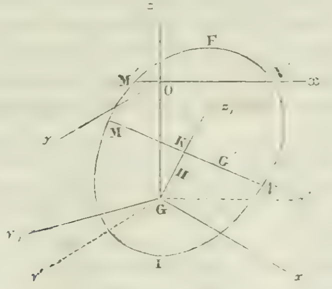
EXTRAIT

D'une Thèse sur le mouvement des Corps flottants de forme quelconque ;

PAR M. MOLINS,

Professeur au Collége d'Orléans.

Dans les traités de Mécanique, le problème du mouvement des corps flottants ne se trouve résolu que dans quelques cas particuliers fort simples qui supposent le corps symétrique par rapport à une section verticale; nous nous proposons de traiter le cas général où le corps est de forme quelconque, pour en déduire ensuite les cas particuliers déjà connus. Nous admettrons que le mouvement est très petit ou que le mobile ne s'écarte jamais beaucoup de sa position initiale.



Supposons qu'un corps flotte en équilibre à la surface d'un liquide, et qu'après l'avoir écarté très peu de cette position on lui imprime une faible impulsion : le problème à résoudre consiste à déterminer la nature du mouvement qu'il prendra en vertu de cette impulsion initiale, de son poids et de la pression verticale du liquide. La position du corps à un instant quelconque serait déterminée si l'on pouvait connaître celles du centre de gravité et d'une certaine section du corps passant par ce point et primitivement désignée; parmi les diverses sections que l'on peut prendre, on choisira de préférence une de celles qui contiennent deux des axes principaux relatifs au centre de gravité. Les équations par lesquelles on déterminera la position du corps seront celles du mouvement d'un corps entièrement libre sollicité par la pesanteur et la pression du liquide; remarquons d'ailleurs que les forces accélératrices étant verticales, il n'y a lieu à considérer, pour le centre de gravité, que son mouvement dans le sens vertical.

Cela posé, G étant la position du centre de gravité du corps à une époque quelconque du mouvement, soient $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, les axes principaux relatifs à ce point, MN la section du corps par la surface du liquide quand il était en équilibre, M'N' le plan actuel de flottaison, H le centre de gravité du volume MIN primitivement déplacé, G' celui de la section MN. La position du corps sera rapportée à trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, dont les deux premiers sont situés dans le plan horizontal du niveau du liquide et dont le troisième est vertical. Puisque MN était le plan de flottaison à l'époque de l'équilibre, la droite GH qui joint les centres de gravité du corps et du volume plongé, doit être perpendiculaire à ce plan; nous allons supposer en premier lieu que l'axe principal $Gz_{,}$ soit aussi perpendiculaire à ce plan; nous traiterons ensuite le cas où cette condition n'est point remplie; ce sera le cas général du mouvement des corps flottants.

Nous désignerons par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les cosinus des angles que font les axes mobiles $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, avec chacun des axes Ox, Oy, Oz ou avec leurs parallèles Gx', Gy', Gz' menées par le point G, et par h le z du point G. On sait que l'on peut faire dépendre la détermination de ces neuf cosinus de celle de trois angles qu'on désigne par θ, ψ, φ, et qui sont : l'angle que le plan $x_{,}Gy_{,}$, fait avec le plan $x'Gy'$; l'angle que fait avec Gx' la trace du premier plan sur le second, et l'angle que $Gx_{,}$ fait avec cette même trace. Les quatre quantités h, θ, ψ, φ déterminent la position du corps à un instant quelconque et sont les inconnues du problème qu'il faut tâcher d'exprimer en fonction du temps en fonction du temps que nous désignerons par τ.

Maintenant désignons par M la masse du corps flottant et déterminons le mouvement de son centre de gravité en exprimant que la quantité $M\frac{d^2h}{d\tau^2}$ est égale à la résultante des forces qui sollicitent le corps. Ces forces sont le poids du corps et la résultante des pressions du liquide qui agit en sens inverse de la pesanteur et qui se décompose en deux parties, dont l'une est égale et contraire au poids du corps, et dont l'autre est égale au poids d'un volume de liquide égal à celui de la nouvelle partie plongée. Nous allons calculer cette nouvelle force, et pour cela nous formerons l'expression du volume compris entre les sections MN, M'N'. Nous appellerons V le volume primitivement plongé à l'époque de l'équilibre, ρ la densité du liquide, σ la surface de la section MN, s, t, u les coordonnées du point G' par rapport aux axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, et enfin U le z du même point relatif aux axes fixes. On pourra remplacer M par ρV, et l'on aura visiblement

$$U = a''s + b''t + c''u + h.$$

Quant au volume MNM'N', pour l'obtenir, on le décomposera en une infinité de cylindres verticaux dont un quelconque aura pour expression $zd\lambda\cos\theta$, en désignant par $d\lambda$ un élément infiniment petit de la surface MN et par z sa distance au plan M'N'. Ce volume est donc égal à

$$\cos\theta \int zd\lambda = -\sigma U\cos\theta = -\sigma\cos\theta\,(a''s + b''t + c''u + h),$$

et l'on aura le poids de ce volume de liquide en multipliant cette expression par ρg, g étant la gravité. Il suit de là que l'équation du mouvement du centre de gravité est

$$(1)\qquad V\frac{d^2h}{d\tau^2} = -g\sigma\cos\theta(a''s + b''t + c''u + h),$$

ce qui donne une première relation entre la quantité h et les angles θ, ψ, φ, par la substitution des valeurs de a'', b'', c'' en fonction de ces derniers angles. On remarquera que dans la détermination du volume MNM′N′, on le considère comme un cylindre tronqué, dont les bases sont la section MN et sa projection sur le plan M′N′, supposition qui approche d'autant plus de l'exactitude que les quantités h, θ sont plus petites; il est facile de voir que l'erreur est du second ordre, par rapport à ces quantités.

Les quatre quantités h, θ, ψ, φ, sont liées entre elles par trois nouvelles relations qui exprimeront le mouvement de rotation autour du centre de gravité. Pour y arriver, désignons comme on le fait ordinairement par p, q, r, les composantes de la vitesse de rotation, suivant les axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$; ce sont des fonctions connues de θ, ψ, φ. Nous représenterons la distance GH par n qui sera une quantité positive ou négative, selon que le point H sera au-dessus ou au-dessous du point G; on aura pour les composantes parallèles aux axes principaux de la force ρgV qui exprime le poids du volume du liquide MIN :

$$\rho g V a'', \quad \rho g V b'', \quad \rho g V c'',$$

et les moments de cette force par rapport aux mêmes axes sont : $-\rho g V b'' n$ par rapport à $Gx_{,}$, $\rho g V a'' n$ par rapport à $Gy_{,}$, et zéro par rapport à $Gz_{,}$. En second lieu désignons par V′ le volume MNM′N′, et par $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, les coordonnées du centre de gravité de ce volume, par rapport aux axes principaux; les composantes de la force $\rho g V'$, seront

$$\rho g V' a'', \ \rho g V' b'', \ \rho g V' c'',$$

et les moments par rapport aux mêmes axes

$$\rho g V'(c'' Y_{,} - b'' Z_{,}), \ \rho g V'(a'' Z_{,} - c'' X_{,}), \ \rho g V'(b'' X_{,} - a'' Y_{,}).$$

Nous désignerons enfin par A, B, C, les trois moments d'inertie principaux.

Si maintenant on se sert des formules générales du mouvement de rotation autour d'un point, on trouvera pour les équations du mouvement de rotation autour du centre de gravité,

$$C\frac{dr}{d\tau} + (B - A)pq = \rho g V'(b''X_{,} - a''Y_{,}),$$

$$B\frac{dq}{d\tau} + (A - C)rp = \rho g V a'' n + \rho g V'(a''Z_{,} - c''X_{,}),$$

$$A\frac{dp}{d\tau} + (C - B)qr = -\rho g V b'' n + \rho g V'(c''Y_{,} - b''Z_{,}).$$

Il y entre trois quantités $V'X_{,}$, $V'Y_{,}$, $V'Z_{,}$, qui expriment les moments du volume MNM'N', par rapport aux plans des axes principaux. Pour les déterminer, on exprimera que ces moments sont égaux aux sommes des moments des éléments qui composent le volume V', ce qui donne

$$V'X_{,} = \iiint x_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,},\quad V'Y_{,} = \iiint y_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,},\quad V'Z_{,} = \iiint z_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,}.$$

La quantité u étant le $z_{,}$ du point G', ou bien la distance GK, l'équation du plan de la section MN rapportée aux axes principaux, sera $z_{,} = u$, tandis que celle du plan M'N', par rapport aux axes Gx', Gy', Gz', sera $z = -h$; mais en appelant $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées d'un point quelconque du plan M'N' par rapport aux axes principaux, on aura $z = a''x_{,} + b''y_{,} + c''z_{,}$, et l'équation de ce plan deviendra $a''x_{,} + b''y_{,} + c''z_{,} = -h$. Maintenant pour étendre les intégrales précédentes à tout le volume V', on intégrera d'abord par rapport à $z_{,}$ depuis le z de la section MN jusqu'à celui de la section M'N', ou bien depuis $z_{,} = u$ jusqu'à $z_{,} = -\frac{h}{c''} - \frac{a''}{c''}x - \frac{b''}{c''}y_{,}$. Les deux premières intégrales deviendront

$$V'X_{,} = -\left(\frac{h}{c''} + u\right)\iint x_{,}dx_{,}dy_{,} - \frac{a''}{c''}\iint x_{,}^2dx_{,}dy_{,} - \frac{b''}{c''}\iint x_{,}y_{,}dx_{,}dy_{,},$$

$$V'Y_{,} = -\left(\frac{h}{c''} + u\right)\iint y_{,}dx_{,}dy_{,} - \frac{a''}{c''}\iint x_{,}y_{,}dx_{,}dy_{,} - \frac{b''}{c''}\iint y_{,}^2dx_{,}dy_{,},$$

ou bien en observant que l'on peut remplacer $\iint x_{,}dx_{,}dy_{,}$ par σs et $\iint y_{,}dx_{,}dy_{,}$ par σt, et désignant les trois intégrales $\iint x_{,}^2dx_{,}dy_{,}$, $\iint x_{,}y_{,}dx_{,}dy_{,}$, $\iint y_{,}^2dx_{,}dy_{,}$, par A', B', C',

$$V'X_{,} = -\frac{1}{c''}[\sigma s(h + c''u) + a''A' + b''B'],$$

$$V'Y_{,} = -\frac{1}{c''}[\sigma t(h + c''u) + a''B' + b''C].$$

Ces quantités A′, B′, C′, sont censées connues, elles dépendent de la nature et de l'étendue de la section MN, et de la direction des axes principaux. On trouvera aussi pour la quantité $V'Z_{,}$

$$V'Z_{,}=\iiint z_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,}=\frac{1}{2}\iint\left[\left(\frac{h}{c''}+\frac{a''}{c''}x_{,}+\frac{b''}{c''}y_{,}\right)^2-u^2\right]dx_{,}dy_{,}$$
$$=\frac{1}{2c''^2}\left[(h^2-c''^2u^2)\sigma+a''^2A'+b''^2C'+2a''b''B'+2h\sigma(a''s+b''t)\right].$$

Enfin par la substitution des valeurs précédentes de $V'X_{,}$, $V'Y_{,}$, $V'Z_{,}$ les équations du mouvement de rotation deviendront

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&C\frac{dr}{d\tau}+(B-A)pq=-\frac{\varrho g b''}{c''}\left[\sigma s(h+c''u)+a''A'+b''B'\right]+\frac{\varrho g a''}{c''}\left[\sigma t(h+c''u)+a''B'+b''C'\right],\\
&B\frac{dq}{d\tau}+(A-C)rp=\varrho gVa''n+\frac{\varrho g a''}{2c''^2}\left[\sigma(h^2-c''^2u^2)+a''^2A'+b''^2C'+2a''b''B'\right.\\
&\qquad\qquad\left.+2h\sigma(a''s+b''t)\right]+\varrho g\left[\sigma s(h+c''u)+a''A'+b''B'\right],\\
&A\frac{dp}{d\tau}+(C-B)rq=-\varrho gVb''n-\frac{\varrho g b''}{2c''^2}\left[\sigma(h^2-c''^2u^2)+a''^2A'+b''^2C'+2a''b''B'\right.\\
&\qquad\qquad\left.+2h\sigma(a''s+b''t)\right]-\varrho g\left[\sigma t(h+c''u)+a''B'+b''C'\right].
\end{aligned}\right.$$

Passons au cas général du mouvement des corps flottants. Dans ce qui précède, on a supposé que l'un des axes principaux $Gz_{,}$, était perpendiculaire au plan de la section MN, maintenant nous ne supposerons pas que cela ait lieu, et nous emploierons un nouveau système d'axes rectangulaires Gx'', Gy'', Gz'' dont l'un Gz'' sera perpendiculaire au plan MN. Ces nouveaux axes sont fixes dans l'intérieur du corps, et leur position par rapport aux axes principaux est connue; nous désignerons par a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, les cosinus des angles que font respectivement les nouveaux axes avec les axes principaux. L'équation du plan MN, par rapport aux nouveaux axes, sera $z''=u'$, en appelant s', t', u', les coordonnées du point G′ par rapport à ces axes, et celle du plan M′N′ par rapport aux axes principaux $a''x_{,}+b''y_{,}+c''z_{,}=-h$. Pour avoir l'équation de ce dernier plan, par rapport aux nouveaux axes, nous désignerons les nouvelles coordonnées par x'', y'', z'', et nous aurons les formules suivantes qu'il faudra porter dans l'équation du plan M′N′,

$$x_{,} = a_1 x'' + a_2 y'' + a_3 z'',$$
$$y_{,} = b_1 x'' + b_2 y'' + b_3 z'',$$
$$z_{,} = c_1 x'' + c_2 y'' + c_3 z''.$$

L'équation du plan devient par cette substitution,

$$-h = x''(a''a_1 + b''b_1 + c''c_1) + y''(a''a_2 + b''b_2 + c''c_2) + z''(a''a_3 + b''b_3 + c''c_3),$$

ou bien

$$-h = \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'',$$

en désignant par α, β, γ, les coefficients de x'', y'', z''. Connaissant les équations des plans des sections MN, M'N', par rapport aux axes Gx'', Gy'', Gz'', on déterminera comme nous l'avons vu tout à l'heure, les moments du volume de liquide MNM'N' par rapport à ces mêmes axes. En désignant par X''Y''Z'', les coordonnées relatives aux nouveaux axes du centre de gravité de ce volume, on aura

$$\mathrm{V'X''} = -\frac{1}{\gamma}[\sigma s'(h + \gamma u') + \alpha\mathrm{A''} + \beta\mathrm{B''}] = \mathrm{T},$$

$$\mathrm{V'Y''} = -\frac{1}{\gamma}[\sigma t'(h + \gamma u') + \alpha\mathrm{B''} + \beta\mathrm{C''}] = \mathrm{T'},$$

$$\mathrm{V'Z''} = \frac{1}{2\gamma^2}[(h^2 - \gamma^2 u'^2)\sigma + \alpha^2\mathrm{A''} + \beta^2\mathrm{C''} + 2\alpha\beta\mathrm{B''} + 2h\sigma(\alpha s' + \beta t')] = \mathrm{T''};$$

A'', B'', C'', sont les valeurs des intégrales $\iint x''^2 dx'' dy''$, $\iint x''y'' dx'' dy''$, $\iint y''^2 dx'' dy''$. Quant aux moments du volume V', relatifs aux axes principaux, ils seront donnés par les formules suivantes :

$$\mathrm{V'X_{,}} = \mathrm{V'X''}a_1 + \mathrm{V'Y''}a_2 + \mathrm{V'Z''}a_3 = \mathrm{T}a_1 + \mathrm{T'}a_2 + \mathrm{T''}a_3,$$
$$\mathrm{V'Y_{,}} = \mathrm{V'X''}b_1 + \mathrm{V'Y''}b_2 + \mathrm{V'Z''}b_3 = \mathrm{T}b_1 + \mathrm{T'}b_2 + \mathrm{T''}b_3,$$
$$\mathrm{V'Z_{,}} = \mathrm{V'X''}c_1 + \mathrm{V'Y''}c_2 + \mathrm{V'Z''}c_3 = \mathrm{T}c_1 + \mathrm{T'}c_2 + \mathrm{T''}c_3,$$

dans lesquelles $\mathrm{X_{,}}$, $\mathrm{Y_{,}}$, $\mathrm{Z_{,}}$ expriment comme tout à l'heure, les coordonnées du centre de gravité du volume V' par rapport aux axes principaux. Il ne reste qu'à substituer ces expressions dans les équations du mouvement de rotation qui deviennent

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&C\frac{dr}{d\tau}+(B-A)pq=\rho g V n(a_3b''-b_3a'')\\
&\qquad+\rho g[T(a_1b''-b_1a'')+T'(a_2b''-b_2a'')+T''(a_3b''-b_3a'')],\\
&B\frac{dq}{d\tau}+(A-C)rp=\rho g V n(c_3a''-a_3c'')\\
&\qquad+\rho g[T(c_1a''-a_1c'')+T'(c_2a''-a_2c'')+T''(c_3a''-a_3c''),\\
&A\frac{dp}{d\tau}+(C-B)rq=\rho g V n(b_3c''-c_3b'')\\
&\qquad+\rho g[T(b_1c''-c_1b'')+T'(b_2c''-c_2b'')+T''(b_3c''-c_3b'').
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les équations générales du mouvement de rotation. Quant au mouvement de translation on verra, comme plus haut, qu'il est déterminé par l'équation

$$M\frac{d^2h}{d\tau^2}=-\rho g\cos\theta'(a''s+b''t+c''u+h),$$

θ' étant l'angle formé par les axes Gz, Gz'', dont l'un est vertical et l'autre perpendiculaire au plan de la section MN. Comme on a $\cos\theta'=a''a_3+b''b_3+c''c_3$, l'équation précédente devient

$$(4)\qquad M\frac{d^2h}{d\tau^2}=-\rho g(a''a_3+b''b_3+c''c_3)(a''s+b''t+c''u+h).$$

Il est important de bien sentir la nécessité d'employer les nouveaux axes Gx'', Gy'', Gz'', dont l'un Gz'' est perpendiculaire au plan de la section MN; c'est afin de pouvoir évaluer les moments de la partie MNM'N' par rapport aux axes principaux. En effet, l'évaluation de ces moments, suppose que le volume MNM'N' peut être regardé comme un cylindre tronqué, dont les génératrices seraient parallèles à l'axe Gz''; or cette supposition ne serait point permise si l'axe Gz'' n'était point perpendiculaire au plan MN.

Si dans les quatre équations auxquelles nous venons de parvenir, on substituait à la place de p, q, r, a'', b'', c'', leurs valeurs en fonction de θ, ψ, φ, on aurait quatre équations différentielles du second ordre entre les quantités h, θ, ψ, φ, dont la connaissance suffit pour déterminer la position du mobile. Ces équations ne sont intégrables que dans des cas particuliers; l'intégration amènerait huit constantes que l'on déterminerait d'après la position primitive et le mouvement initial du mobile.

Examinons maintenant quelques cas particuliers. Nous supposerons que le corps est symétrique par rapport à un plan vertical FMIN, qui est aussi celui dans lequel a eu lieu l'impulsion initiale: toutes les forces accélératrices étant verticales, il est clair que ce plan restera vertical pendant tout le mouvement, de sorte que le corps tournera autour du point G comme autour d'un axe perpendiculaire au plan de la section FMIN. Remarquons d'ailleurs que cet axe sera un des axes principaux du corps qui passent par le centre de gravité, à cause de la symétrie du corps par rapport au plan dont il s'agit; par suite les deux autres axes principaux seront situés dans ce plan. Nous supposerons que $Gy_{\prime}$ soit l'axe principal perpendiculaire au plan FMIN: si l'on a eu soin de prendre les axes Gx', Gz' dans ce plan, les axes $Gy_{\prime}$, Gy' se confondront. On aura alors

$$\begin{array}{lll} a = \cos\theta, & b = 0, & c = \sin\theta, \\ a' = 0, & b' = 1, & c' = 0, \\ a'' = -\sin\theta, & b'' = 0, & c'' = \cos\theta, \\ s = k\sin\alpha, & t = 0, & u = k\cos\alpha, \end{array}$$

en désignant par k la droite GG′ et par α l'angle G′GK. L'équation (1) deviendra

$$V\frac{d^2h}{d\tau^2} = -g\sigma\cos\theta(k\cos\alpha\cos\theta - k\sin\alpha\sin\theta + h),$$

ou bien en remplaçant h par $-\zeta - k\cos(\theta + \alpha)$, ζ étant la distance du point G′ au plan M′N′,

$$(5) \qquad V\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} - Vk\sin\alpha\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + g\sigma\zeta = 0.$$

Pour voir ce que deviennent les équations (2), remarquons que les angles φ, ψ, étant ici égaux à 90°, rendent nulles les expressions de p et r, et donnent $qd\tau = d\theta$; en outre la quantité $B' = \int\int x_{\prime}y_{\prime}dx_{\prime}dy_{\prime}$ est nulle, à cause que la trace du plan FMIN sur la section MN divise celle-ci en deux parties symétriques. Il en résulte que les seconds membres de la première et de la troisième des équations (2) sont nuls, et comme p et r le sont aussi, ces équations deviennent $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{dp}{d\tau}=0$, ce qui n'apprend rien de nouveau. Mais la deuxième des équations (2) devient, en négligeant les termes du second ordre en θ et ζ,

$$B\frac{dq}{d\tau}=-\rho g V n\theta-\tfrac{1}{2}\rho g\theta\sigma(h^2-u^2)+\rho g[(h+u)\sigma k\sin\alpha-A'\theta],$$

ou bien, en rejetant le second terme du second membre parce qu'il est du second ordre en θ, ζ,

$$(6)\qquad B\frac{d^2\theta}{d\tau^2}=-\rho g[\theta(Vn+A')+\sigma k\zeta\sin\alpha].$$

On intègre sans peine les équations (5) et (6) qui sont deux équations linéaires simultanées du second ordre : nous ne nous arrêterons donc pas à ces détails de calcul. Nous ajouterons seulement que l'on déduit des formules auxquelles on arrive, la condition de la stabilité de l'équilibre du corps flottant; ainsi l'on trouve que les valeurs de ζ et θ doivent nécessairement rester très petites pendant toute la durée du mouvement, lorsque la quantité n est positive, c'est-à-dire lorsque le centre de gravité du corps est situé au-dessous du centre de gravité du volume primitivement plongé.

Les équations (5) et (6) montrent que les mouvements de rotation et de translation ne sont pas indépendants l'un de l'autre; ils sont intimement liés entre eux. Mais veut-on les rendre indépendants, on n'a qu'à supposer $\alpha=0$, c'est-à-dire que la droite GH passe en G' : les équations deviennent

$$(7)\qquad \frac{d^2\zeta}{d\tau^2}+\frac{g\sigma\zeta}{V}=0,$$
$$(8)\qquad \frac{d^2\theta}{d\tau^2}+\frac{\rho g\theta(Vn+A')}{B}=0.$$

Il est facile d'arriver directement aux équations (5) et (6), de même qu'aux équations (7) et (8). Dans ce dernier cas il faut supposer le corps symétrique par rapport à la section FMIN qui contient la droite GH, et par rapport à la section passant par la même droite, et perpendiculaire à la première, ce qui revient à supposer que $Gz_{,}$ est un des axes principaux qui passent au point G, ainsi que la perpendiculaire $Gy_{,}$ au plan FMIN. Comme ces nouveaux calculs n'offriraient maintenant aucun intérêt, nous n'insisterons pas davantage à ce sujet: nous nous bornerons à tirer quelques conséquences des équations (7) et (8). Leur intégration donne

$$\zeta = \chi \cos \tau \sqrt{\frac{g\sigma}{V}}, \quad \theta = \omega \cos \tau \sqrt{\frac{\varrho g\,(Vn + A')}{B}},$$

χ et ω étant les valeurs initiales de ζ et θ. La première de ces formules montre que le centre de gravité du corps, dont la distance au plan M'N' est exprimée par $\zeta + u$, se meut verticalement comme un pendule simple dont la longueur serait $\frac{V}{\sigma}$. La seconde montre que la droite $Gz_{,}$ qui fait avec la verticale Gz' l'angle désigné par θ, exécute des oscillations de part et d'autre de cette verticale, à la manière d'un pendule simple dont la longueur serait $\frac{B}{\varrho\,(Vn + A')}$; l'inspection de cette même formule, montre encore que l'équilibre sera stable, lorsque n sera positif ou lorsque le centre de gravité du corps est plus bas que celui du volume de liquide déplacé.

Sur le Calcul des Variations et sur la Théorie des Équations différentielles ;

PAR M. JACOBI (*).

(Extrait d'une lettre du 29 novembre 1836, adressée à M. le professeur ENKE, secrétaire de la classe des Sciences mathématiques de l'Académie de Berlin.)

J'ai réussi à remplir une grande lacune que présentait le calcul des variations. Dans les problèmes de *maxima* et *minima*, qui dépendent de ce calcul, on ne connaissait aucune règle générale pour décider si une solution répond réellement à un maximum ou à un minimum, ou ne donne ni l'un ni l'autre. On avait reconnu à la vérité qu'il suffit de savoir si les intégrales d'un certain système d'équations différentielles restent finies entre les limites de l'intégrale qui doit devenir un maximum ou un minimum. Mais on ne pouvait ni intégrer ces équations, ni trouver d'une autre manière dans quels cas leurs intégrales conservent une valeur finie entre les limites données. J'ai remarqué que ces intégrales s'obtiennent immédiatement si l'on a intégré les équations différentielles du problème, c'est-à-dire les équations différentielles qui doivent être satisfaites pour que la variation première disparaisse. Si, par l'intégration de ces équations différentielles, on a obtenu l'expression des fonctions cherchées, renfermant un certain nombre de

---

(*) Ce Mémoire fait partie d'un des derniers cahiers du *Journal de M. Crelle*. En imprimant ici la traduction suivante qu'un de mes amis a bien voulu me communiquer, je crois rendre service aux lecteurs français, et aussi donner à M. Jacobi un témoignage public de l'estime profonde que j'ai pour son talent. On pourra joindre à cet article celui que M. Jacobi lui-même a fait insérer dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences de Paris* (tome V, page 61). J. LIOUVILLE.

constantes arbitraires, leurs différentielles partielles par rapport à ces constantes donneront les intégrales des équations différentielles qu'il faut intégrer pour déterminer les caractères distincts des *maxima* ou *minima*.

Soit, pour considérer le cas le plus simple, l'intégrale

$$\int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx ;$$

y est déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{df}{dy} - d. \frac{\frac{df}{dy'}}{dx} = 0,$$

où y' représente $\frac{dy}{dx}$. L'expression de y donnée par l'intégration de cette équation renferme deux constantes arbitraires que je désigne par a et b. La variation seconde sera, en posant $w = \delta y$, $w' = \frac{dw}{dx}$,

$$\int \left(\frac{d^2 f}{dy^2} w^2 + 2 \frac{d^2 f}{dy dy'} ww' + \frac{d^2 f}{dy'^2} w'^2\right) dx,$$

dans laquelle $\frac{d^2 f}{dy'^2}$ doit conserver le même signe pour qu'il y ait maximum ou minimum. Mais pour avoir tous les caractères du maximum et du minimum, il faut connaître l'expression complète d'une fonction v qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{dy'^2}\left(\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{d^2 f}{dy dy'} + v\right)^2,$$

comme on peut le voir dans la théorie des fonctions de Lagrange (*), ou dans le calcul des variations de Dirksen. (Le calcul des variations de Ohm ne donne pas cette théorie avec précision.) Cette expression complète de v se trouve comme il suit: soit $u = \alpha \frac{dy}{da} + \beta \frac{dy}{db}$, où $\frac{dy}{da}$ et $\frac{dy}{db}$ représentent les différentielles partielles de y prises par rapport aux constantes arbitraires a et b que renferme y, α et β étant deux nouvelles constantes arbitraires ; l'expression demandée sera

---

(*) *Théorie des fonctions analytiques*, p. 208, n° 176.

$$v = -\left(\frac{d^2 f}{dy\,dy'} + \frac{1}{u}\,\frac{d^2 f}{dy'^2}\,\frac{du}{dx}\right),$$

qui contient la constante arbitraire $\frac{6}{\alpha}$.

Le cas où il se trouve sous le signe d'intégration des différentielles d'un ordre supérieur au premier est plus difficile. Soit l'intégrale $\int f(x, y, y', y'')\,dx$, qu'il faut rendre un maximum ou un minimum, y' et y'' désignant toujours $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$; y devra être l'intégrale de l'équation

$$\frac{df}{dy} - d\,.\,\frac{\frac{df}{dy'}}{dx} + d^2\,.\,\frac{\frac{df}{dy''}}{dx^2} = 0,$$

et renfermera quatre constantes arbitraires a, a_1, a_2, a_3. Si $w = \delta y$, $w' = \delta y'$, $w'' = \delta y''$, la variation seconde sera

$$\int\left(\frac{d^2 f}{dy^2}w^2 + 2\frac{d^2 f}{dy\,dy'}ww' + 2\frac{d^2 f}{dy\,dy''}ww'' + 2\frac{d^2 f}{dy'\,dy''}w'w'' + \frac{d^2 f}{dy'^2}w'^2 + \frac{d^2 f}{dy''^2}w''^2\right)dx.$$

Pour le maximum ou le minimum, il faut que $\frac{d^2 f}{dy''^2}$ conserve toujours le même signe. Pour avoir tous les caractères de maxima et de minima, on doit intégrer le système des équations différentielles suivantes, comme on peut le voir dans la théorie des fonctions de Lagrange,

$$\left(\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d^2 f}{dy'^2} + \frac{dv_2}{dx} + 2v_1\right) = \left(\frac{d^2 f}{dy\,dy'} + v + \frac{dv_1}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^2 f}{dy''^2}\left(\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{d^2 f}{dy\,dy''} + v_1\right)^2,$$

$$\frac{d^2 f}{dy''^2}\left(\frac{d^2 f}{dy'^2} + \frac{dv_2}{dx} + 2v_1\right) = \left(\frac{d^2 f}{dy'\,dy''} + v_2\right)^2.$$

Au moyen de ces équations différentielles du premier ordre, qui présentent un aspect assez compliqué, il faut déterminer les fonctions v, v_1 et v_2, dont l'expression complète renferme trois constantes arbitraires. J'en ai trouvé l'intégrale comme il suit : soit

$$u = \alpha\,\frac{dy}{da} + \alpha_1\,\frac{dy}{da_1} + \alpha_2\,\frac{dy}{da_2} + \alpha_3\,\frac{dy}{da_3},$$

et

$$u_1 = 6\,\frac{dy}{da} + 6_1\,\frac{dy}{da_1} + 6_2\,\frac{dy}{da_2} + 6_3\,\frac{dy}{da_3},$$

en sorte que u et u_1 sont des expressions linéaires des différentielles partielles de y, par rapport aux constantes arbitraires que cette fonction renferme. Les huit constantes α, α_1, α_2, α_3, β, β_1, β_2, β_3, ne sont pas entièrement arbitraires; mais entre les six quantités qui s'en déduisent, $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$, $\alpha\beta_2-\alpha_2\beta$, $\alpha\beta_3-\alpha_3\beta$, $\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2$, $\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3$ et $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$, il doit exister une certaine condition que je ne développerai pas ici. Cela posé, j'ai trouvé pour v, v_1, v_2, les expressions générales qui suivent :

$$v_2 = -\frac{d^2f}{dy'dy''} - \frac{d^2f}{dy''^2}\cdot\frac{u\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - u_1\dfrac{d^2u}{dx^2}}{u\dfrac{du_1}{dx} - u_1\dfrac{du}{dx}},$$

$$v_1 = -\frac{d^2f}{dydy''} + \frac{d^2f}{dy''^2}\cdot\frac{\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - \dfrac{du_1}{dx}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}}{u\dfrac{du_1}{dx} - u_1\dfrac{du}{dx}},$$

$$v = -\frac{dv_1}{dx} - \frac{d^2f}{dydy'} - \frac{d^2f}{dy''^2}\cdot\frac{\left(u\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - u_1\dfrac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - \dfrac{du_1}{dx}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}\right)}{\left(u\dfrac{du_1}{dx} - u_1\dfrac{du}{dx}\right)^2}.$$

Les six quantités $\alpha\beta_1-\beta\alpha_1$, etc., sont liées par une équation identique, outre la condition à laquelle elles sont assujéties, et les expressions de v, v_1, v_2, renferment seulement leurs rapports, en sorte qu'elles tiennent lieu des trois constantes arbitraires qu'on doit avoir.

La théorie générale, quand les différentielles de y s'élèvent à un ordre quelconque sous le signe d'intégration, se déduit sans difficulté d'une propriété remarquable de certaines équations différentielles linéaires. Ces équations différentielles de l'ordre $2n$ ont la forme

$$0 = \mathrm{A}y + \frac{d.\mathrm{A}_1y'}{dx} + \frac{d^2.\mathrm{A}_2y''}{dx^2} + \frac{d^3.\mathrm{A}_3y'''}{dx^3} + \ldots + \frac{d^n.\mathrm{A}_ny^{(n)}}{dx^n} = \mathrm{Y}.$$

où $y^{(m)} = \frac{d^my}{dx^m}$; et où A, A_1,...etc., sont des fonctions données de x.

Si y est une intégrale quelconque de l'équation $\mathrm{Y}=0$, et si l'on pose $u=ty$, l'expression suivante, où $u^{(m)}$ désigne $\frac{d^mu}{dx^m}$,

$$y\left(\mathrm{A}u + \frac{d.\mathrm{A}_1u'}{dx} + \frac{d^2.\mathrm{A}_2u''}{dx^2} + \ldots + \frac{d^n.\mathrm{A}_nu^{(n)}}{dx^n}\right) = y\mathrm{U},$$

sera intégrable, c'est-à-dire qu'on peut trouver son intégrale sans connaître t; et cette intégrale aura la même forme que Y : seulement n sera diminué d'une unité; ainsi l'on a

$$\int y\mathrm{U}dx = \mathrm{B}t' + \frac{d.\mathrm{B}_1 t''}{dx} + \frac{d^2.\mathrm{B}_2 t'''}{dx^2} + \ldots + \frac{d^{n-1}\mathrm{B}_{n-1} t^{(n)}}{dx^{n-1}},$$

en faisant $t^{(m)} = \frac{d^m t}{dx^m}$; les fonctions B peuvent s'exprimer généralement au moyen de y, des fonctions A, et de leurs différentielles. La démonstration de ce principe n'offre aucune difficulté. J'ai trouvé l'expression générale des fonctions B; toutefois il suffit, pour la question proposée, de prouver seulement qu'en général l'intégrale $\int y\mathrm{U}dx$ a la forme indiquée ci-dessus, sans qu'il soit nécessaire de connaître les fonctions B elles-mêmes.

La métaphysique des résultats obtenus, pour me servir d'une expression française, repose à peu près sur les considérations suivantes : on peut donner à la variation première la forme $\int \mathrm{V}\delta y dx$, $\mathrm{V} = 0$ étant l'équation à intégrer; la variation seconde prend alors la forme $\int \delta\mathrm{V}\delta y dx$. Si la variation seconde ne doit pas changer de signe, elle ne devra pas non plus pouvoir s'évanouir, en sorte que l'équation $\delta\mathrm{V}=0$, qui est linéaire en δy, ne donnera par l'intégration aucune valeur de δy qui remplisse les conditions auxquelles cette fonction est assujétie d'après la nature du problème. Ainsi l'équation $\delta\mathrm{V} = 0$ joue un rôle important dans cette recherche, et l'on aperçoit de suite sa connexion avec les équations différentielles dont les intégrales donnent les caractères des *maxima* et *minima*. D'ailleurs on voit facilement que chaque différentielle partielle de y, prise par rapport à l'une des constantes arbitraires que cette fonction renferme comme intégrale de l'équation $\mathrm{V} = 0$, est une valeur de δy qui satisfait à l'équation différentielle $\delta\mathrm{V} = 0$; on obtient donc l'intégrale générale de cette équation en composant une expression linéaire de toutes ces différentielles partielles (*).

(*) Si l'on remplace V par une fonction quelconque $f(x, y, y', \ldots y^{(n)})$ et si l'on pose $\delta y = u$, cette remarque donne le théorème dont j'ai parlé à la page 31 du cahier précédent. Mais, comme je l'ai fait observer, il est bon d'avoir détaché ce théorème des longues théories afin de l'introduire dans les éléments. Il s'étend à un nombre quelconque d'équations différentielles simultanées, et peut servir

L'équation $\delta V = o$, dont on trouve ainsi l'intégrale complète, peut se mettre sous la forme que prend l'équation ci-dessus $Y = o$, en y remplaçant y par δy : au moyen des propriétés reconnues aux équations de ce genre, et à l'aide d'une intégration par parties plusieurs fois répétée, on arrive à transformer la variation seconde $\int \delta V \delta y dx$, en une autre expression qui contient un carré parfait sous le signe d'intégration ; or, c'est là précisément la transformation qu'on voulait effectuer. Si l'on reprend, par exemple, l'intégrale $\int f(x, y, y', y'')dx$, et si l'on conserve les valeurs de u et u_1 indiquées pour ce cas, δV pourra se mettre sous la forme

$$\delta V = A\delta y + \frac{d.A_1\delta y'}{dx} + \frac{d^2.A_2\delta y''}{dx^2},$$

et l'on aura $\delta V = o$ pour $\delta y = u$. Soit $\delta y = u\delta' y$; il viendra, d'après le théorème général exposé ci-dessus,

$$\int \delta V \delta y dx = \int u\delta V \delta' y dx = \left(B\delta' y' + \frac{d.B_1\delta' y''}{dx}\right)\delta' y - \int\left(B\delta' y' + \frac{d.B_1\delta' y''}{dx}\right)\delta' y' dx\ ;$$

si l'on désigne maintenant la dernière intégrale par $\int V_1 \delta' y' dx$, l'équation $\delta V_1 = o$ sera satisfaite en posant $\delta' y = \frac{u_1}{u}$, d'où $\delta' y' = \frac{uu'_1 - u_1 u'}{u^2}$. On peut continuer d'après la même méthode, en faisant..... $\delta' y' = \frac{uu_1 - u_1 u'}{u^2}\delta'' y$, et il viendra, d'après le même théorème :

$$\int V_1 \delta' y' dx = \int V_1 \left(\frac{uu'_1 - u_1 u'}{u^2}\right)\delta'' y dx = C\delta'' y' . \delta'' y - \int C(\delta'' y')^2 dx.$$

C'est la dernière transformation dans laquelle la variation arbitraire entre seulement au carré sous le signe d'intégration. On voit du reste facilement que $B_1 = u^2 A_2$, $C = \left(\frac{uu'_1 - u_1 u'}{u^2}\right)^2 B_1$, et par suite $C = \left(\frac{uu'_1 - u_1 u'}{u^2}\right)^2 A_2$.

---

dans certains cas à les intégrer par approximation. Pour passer de l'intégrale de $f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = o$, à celle de $f(x, y, y', y^{(n)}) = Q$, où Q reste toujours un très petit nombre, il suffit en effet d'augmenter y d'un terme u très petit, déterminé par l'équation (2) de la page 31, à laquelle on donnera Q pour second membre. (J. LIOUVILLE.)

De plus $A_2 = \frac{d^2 f}{dy''^2}$, en sorte que C a le même signe que $\frac{d^2 f}{dy''^2}$, qui doit être toujours positif pour le minimum et toujours négatif pour le maximum. Il faut encore chercher si $\delta'' y'$ peut devenir infini entre les limites de l'intégration, ce que l'on fera à l'aide des fonctions u et u_1, qui sont connues dès que l'on a obtenu y ou l'intégrale complète de l'équation $V = 0$.

Quoique cette analyse indiquée sommairement exige une assez profonde connaissance du calcul intégral, les caractères qu'on en déduit pour reconnaître si une solution donne en général un maximum ou un minimum sont fort simples. Considérons le cas où y entre sous le signe d'intégration avec ses différentielles jusqu'au $n^{ième}$ ordre, et supposons que les valeurs de $y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ aux limites et les limites elles-mêmes soient données. Si l'on met ces valeurs dans les $2n$ équations intégrales, les $2n$ constantes arbitraires seront déterminées ; mais puisqu'il faut alors résoudre des équations, on trouve en général plusieurs systèmes de valeurs, et par suite on obtient plusieurs courbes qui satisfont aux mêmes conditions et aux mêmes équations différentielles. Quand on en a choisi une, on regarde le premier point limite comme fixe et de celui-ci on s'avance vers les points suivants de la courbe ; si l'on prend l'un de ces points comme seconde limite, il pourra arriver, d'après la remarque qu'on vient de faire, qu'entre ce point et le premier il passe une autre courbe pour laquelle $y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ aient les mêmes valeurs aux deux limites, et qui satisfasse à la même équation différentielle. Ainsi, dès qu'en s'avançant sur la courbe on arrive à un point pour lequel une de ces autres courbes vient se confondre avec elle, ou, si l'on veut, s'en rapprocher infiniment, l'intégrale qui doit donner lieu à un maximum ou à un minimum ne peut s'étendre jusqu'à ce point, ni au-delà de ce point ; mais si l'intégrale ne s'étend pas jusqu'à cette limite, il y aura un maximum ou un minimum, pourvu que $\frac{d^2 f}{dy^{(n)2}}$ conserve toujours le même signe.

Pour éclaircir ceci par un exemple, considérons le principe de la moindre action dans le mouvement elliptique des planètes.

L'intégrale à considérer dans le principe de la moindre action ne peut jamais devenir un maximum, comme Lagrange l'a cru; cependant elle n'est pas toujours un minimum : il faut pour cela que certaines conditions aux limites, données par la règle précédente, soient remplies, sans quoi elle ne sera ni un maximum ni un minimum. Supposons que la planète commence à se mouvoir à partir du point a situé entre le périhélie et l'aphélie; soient b l'autre limite, $2A$ le grand axe et f le Soleil: on obtient, comme on sait, l'autre foyer par l'intersection de deux circonférences décrites des points a et b comme centres avec les rayons $2A - af$ et $2A - bf$.

Les deux points d'intersection des circonférences donnent deux solutions du problème qui ne peuvent se confondre que quand les deux circonférences se touchent, c'est-à-dire lorsque ab passe par l'autre foyer. Si l'on tire la corde aa' par le point a et le foyer f' de l'ellipse, il faudra, d'après la règle indiquée, que la seconde limite b soit située entre les points a et a' pour que l'intégrale du principe de la moindre action soit véritablement un minimum. Si le point b tombe en a', alors la variation seconde ne peut pas à la vérité devenir négative, mais elle devient nulle, en sorte que la variation de l'intégrale est du troisième ordre et peut devenir tantôt positive et tantôt négative. Si b tombe au-delà de a', la variation seconde peut aussi elle-même devenir négative. Si le point de départ a est situé entre l'aphélie et le périhélie, le point opposé a' est déterminé par la corde de l'ellipse qui passe par le point a et le Soleil f. Car si a et a' sont les points limites, on obtient une infinité de solutions par la rotation de l'ellipse autour de aa'. Si dans ce dernier cas le second point tombe au-delà de a', il y aura une courbe à double courbure entre les deux limites données, pour laquelle l'intégrale $\int v ds$ sera plus petite que pour l'ellipse.

Je dirai à cette occasion deux mots sur la variation des intégrales doubles, dont la théorie est susceptible d'une plus grande élégance même après les travaux de M. Gauss et de M. Poisson. Afin de donner un exemple de la manière qui me semble la plus directe pour exprimer la variation d'une intégrale double, je prendrai le cas le plus simple où l'on considère $\delta\int\int f(x, y, z, p, q)\,dxdy$, dans laquelle $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$.

Soit w la variation de z, on aura

$$\delta\int\int f(x, y, z, p, q)\,dydx = \int\int dxdy\left(\frac{df}{dz}w + \frac{df}{dp}\frac{dw}{dx} + \frac{df}{dq}\frac{dw}{dy}\right).$$

La méthode employée pour les intégrales simples consiste à partager les expressions sous le signe d'intégration en deux parties, dont la première est multipliée par w et dont l'autre est l'élément d'une intégrale. La première doit être égalée à zéro sous le signe d'intégration; la seconde peut être intégrée, et l'on fait disparaître son intégrale. Par analogie, je partage l'expression sous le double signe en une partie multipliée par w et en une autre qui est l'élément d'une intégrale double, c'est-à-dire que je pose en faisant $u = aw$,

$$\frac{df}{dz}w + \frac{df}{dp}\frac{dw}{dx} + \frac{df}{dq}\frac{dw}{dy} = \mathrm{A}w + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dv}{dx}\frac{du}{dy};$$

si l'on égale les termes en w, en $\frac{dw}{dx}$ et en $\frac{dw}{dy}$, on obtient

$$\frac{df}{dz} = \mathrm{A} + \frac{da}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{dv}{dx}, \quad \frac{df}{dp} = a\frac{dv}{dy}, \quad \frac{df}{dq} = -a\frac{dv}{dx},$$

d'où

$$\mathrm{A} = \frac{df}{dz} - d\,.\,\frac{\frac{df}{dp}}{dx} - d\,.\,\frac{\frac{df}{dq}}{dy}.$$

En égalant cette valeur de A à zéro, on trouve l'équation différentielle connue, qui est ainsi obtenue d'une manière parfaitement symétrique. La fonction v doit satisfaire à l'équation $\frac{df}{dp}\frac{dv}{dx} + \frac{df}{dq}\frac{dv}{dy} = 0$. Si l'on pose $\mathrm{A} = 0$, on a

$$\delta\int\int f(x, y, z, p, q)\,dxdy = \int\int dxdy\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dv}{dx}\frac{du}{dy}\right) = \int\int dvdu,$$

qui, prise aux limites données, doit disparaître. Si z est donnée aux limites, w et par suite $u = aw$ sera nul aux mêmes limites, et l'on aura $\int\int dudv = 0$. Si les valeurs de z aux limites sont entièrement arbitraires, v doit s'évanouir, et l'équation $v=0$ représentera la courbe limite; alors il faudra que les fonctions arbitraires provenant de l'intégrale de l'équation $A = 0$ soient déterminées de manière que $\frac{df}{dp}\frac{dv}{dx} + \frac{df}{dq}\frac{dv}{dy} = 0$, etc.

Pour en revenir au maximum et au minimum, la confusion qui règne dans l'emploi de ces mots donne lieu à de graves inconvénients. Quelquefois, par exemple, on dit qu'une expression est un maximum ou un minimum, quand il serait vrai seulement de dire que sa variation est égale à zéro. Quelquefois aussi, on dit qu'une grandeur est un maximum au lieu de dire qu'elle n'est pas un minimum. C'est ainsi que M. Poisson dit dans sa Mécanique, que la distance entre deux points donnés sur une surface fermée peut devenir un maximum, tandis qu'il est évident qu'à l'aide d'inflexions infiniment petites, la longueur de toute ligne tracée entre ces deux points peut encore être augmentée. En réalité, la ligne que fournit le calcul des variations appliqué à ce problème est un minimum sur la surface, si la condition dérivée de la règle générale établie ci-dessus est remplie, savoir qu'entre les deux points extrêmes, il n'y en ait pas deux autres entre lesquelles on puisse mener une nouvelle ligne infiniment rapprochée de la première et plus courte. Mais dans tout autre cas on n'a ni maximum ni minimum. Au reste, quand il s'agit de surfaces ayant en chaque point des courbures opposées, j'ai démontré que le minimum existe toujours réellement.

Les recherches indiquées plus haut sur les caractères des *maxima* et *minima* dans les problèmes isopérimètres remplissent une véritable lacune dans une des plus belles parties des Mathématiques; elles sont d'ailleurs remarquables par les artifices d'intégration que l'on y a employés. Mais les recherches suivantes engrènent plus profondément dans toute l'étendue de la science : je vais en donner une courte indication.

M. Hamilton a montré que les problèmes de mécanique auxquels s'applique le principe des forces vives peuvent se ramener à l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre

Sa méthode exige bien l'intégration de deux équations de ce genre; mais on peut montrer facilement qu'il suffit de connaître une intégrale complète de l'une d'elles. On étend aussi avec facilité ses résultats au cas où les fonctions de forces, c'est-à-dire les fonctions dont les différentielles partielles donnent les forces, renferment le temps explicitement, auquel cas le principe des forces vives ne s'applique pas, mais le principe de la moindre action a encore lieu. Il semble qu'on devrait gagner peu de chose à cette transformation d'équations différentielles, puisque, d'après la méthode de Pfaff, consignée dans les Mémoires de votre Académie (et pour plus de trois variables on ne connaissait jusqu'ici rien de plus sur les équations différentielles partielles du premier ordre), l'intégration de l'équation aux différentielles partielles à laquelle se trouve ramené le problème de dynamique, est beaucoup plus difficile que celle du système des équations différentielles du mouvement données immédiatement. Dans le fait, si l'on étend les recherches de M. Hamilton à toutes les équations aux différentielles partielles du premier ordre, ce qui se fait sans difficulté, il en résulte au contraire cette découverte importante dans la théorie des équations aux différentielles partielles du premier ordre qu'elles peuvent toujours être ramenées à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires, qui n'était pas suffisante d'après la méthode de Pfaff; mais cette remarque ne peut être utile pour l'intégration des équations différentielles de la mécanique qu'autant que l'on fait voir que les systèmes d'équations différentielles ordinaires auxquels se ramènent les équations aux différentielles partielles du premier ordre sont susceptibles d'être traitées d'une manière particulière qui les distingue des autres équations différentielles. M. Hamilton, quoiqu'il ait cherché à faire plusieurs applications de sa *nouvelle méthode*, comme il l'appelle, n'a rien dit à ce sujet; aussi n'a-t-il tiré aucune utilité réelle de ses théorèmes remarquables. Cependant Lagrange, relativement aux équations aux différentielles partielles du premier ordre et à trois variables auxquelles il s'est borné, et dont l'intégration constitue une de ses plus belles et de ses plus célèbres découvertes, avait déjà remarqué que, si l'on connaît une intégrale du système des trois équations aux différentielles ordinaires du premier ordre entre quatre variables, auquel il ramène le problème on n'a plus à intégrer que deux équations différentielles du premier ordre, chacune entre deux variables. Mais dans le cas général, il y aurait à intégrer une équation différentielle du second ordre entre deux variables, que l'on peut donc toujours ramener à celle du premier ordre, pour ce système particulier d'équations différentielles ordinaires. Si l'équation aux différentielles partielles du premier ordre entre trois variables ne renferme pas la fonction inconnue elle-même, mais seulement ses deux coefficients différentiels, alors il n'y a plus à intégrer que deux équations différentielles du premier ordre entre trois variables; et, si l'on connaît une intégrale de ces équations, la question est ramenée à deux quadratures par la méthode de Lagrange, tandis qu'en général il resterait à intégrer une équation différentielle du premier ordre. Ce dernier cas se présente dans la mécanique, c'est-à-dire que les équations aux différentielles partielles du premier ordre, auxquelles se ramènent les problèmes de dynamique, ne renferment jamais la fonction inconnue elle-même. D'après cela, on peut tirer du procédé de Lagrange pour trois variables des conséquences très importantes pour la mécanique. Ainsi il en résulte que généralement si un problème quelconque de mécanique, pour lequel le principe des forces vives a lieu, dépend d'une équation différentielle du second ordre, et si l'on en connaît une intégrale, outre celle donnée par ce principe, ce qui ramène le problème à l'intégration d'une équation aux différentielles ordinaires du premier ordre à deux variables, on peut toujours intégrer cette équation ou du moins on peut trouver par une règle précise et générale le facteur qui la rend intégrable. Le mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, dans un plan, fournit un exemple d'un problème de ce genre. Euler a trouvé facilement une intégrale, outre celle du principe des forces vives; il arrive par là à une équation différentielle du premier ordre, mais qui est véritablement si compliquée, qu'il fallait toute l'intrépidité de ce grand géomètre pour en entreprendre l'intégration, et le succès de ses efforts est un de ses plus beaux chefs-d'œuvre; mais cette intégration pourrait être effectuée sans employer tant d'artifices à l'aide de la règle générale ci-dessus mentionnée. Il y a environ six mois, j'ai communiqué à l'Académie de Paris des formules relatives au mouvement d'un point libre dans un plan, qui ramènent le problème aux quadratures dès qu'on connaît une intégrale outre celle du principe de forces vives. Ces formules peuvent s'étendre au mouvement d'un point sur une surface.

Pour que ces considérations puissent s'appliquer à des problèmes de mécanique plus compliqués, il est nécessaire d'étendre à un nombre quelconque de variables la méthode de Lagrange pour l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables. Pfaff, qui regarda la difficulté comme insurmontable, s'est vu forcé par ce motif d'abandonner entièrement cette méthode. Il considéra la question comme un cas particulier d'un problème beaucoup plus général, dont la solution heureuse est une des acquisitions les plus importantes du calcul intégral. Mais le problème de l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre présente des facilités qui, ne se trouvant pas dans le problème général considéré par Pfaff, lui ont échappé, et il ne pouvait pas les rencontrer sur la route qu'il a suivie. J'ai réussi à lever les difficultés qui s'opposaient à la généralisation de la méthode de Lagrange et à fonder par là une nouvelle théorie des équations aux différentielles partielles du premier ordre pour un nombre quelconque de variables ; cette théorie offre des avantages réels pour leur intégration, et trouve immédiatement son application dans les problèmes de mécanique. Je me contenterai de donner ici les indications suivantes :

Les équations aux différentielles partielles et les problèmes d'isopérimètres dans lesquels les différentielles partielles des fonctions inconnues ne s'élèvent qu'au premier ordre, dépendent de la même analyse, en sorte que tout problème d'isopérimètres peut être conçu comme l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre. On peut comprendre parmi ces problèmes d'isopérimètres ceux pour lesquels l'expression, qui doit devenir un maximum ou un minimum, ou plus généralement, dont la variation doit s'évanouir, n'est point donnée immédiatement par une intégrale, mais par une équation différentielle du premier ordre. Réciproquement on peut concevoir l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre, comme la solution d'un problème d'isopérimètres. En vertu du principe de la moindre action, on peut considérer comme un problème d'isopérimètres de ce genre le mouvement d'un système de corps qui s'attirent mutuellement, et qui peuvent d'ailleurs être sollicités par des forces parallèles ou dirigées vers des centres fixes ou même vers des centres mobiles, pourvu que les corps du système ne réagissent pas sur ces derniers centres dont le mouvement doit être déterminé d'avance. Un tel problème de mécanique peut donc aussi être conçu comme l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre. Cette intégration dépend d'un système d'équations différentielles ordinaires qui s'accordent avec les équations connues de la mécanique, mais qui, par leur relation avec une équation aux différentielles partielles du premier ordre, présentent des facilités particulières. Ainsi, au moyen d'un procédé particulier et par un certain choix de grandeurs qu'on prend pour variables, on peut faire en sorte que chaque intégrale obtenue tienne lieu de deux intégrations. Pour m'exprimer plus clairement je dirai qu'un système d'équations différentielles est du $n^{\text{ième}}$ ordre, quand on peut, par l'élimination des autres variables, l'amener à une équation différentielle ordinaire du $n^{\text{ième}}$ ordre entre deux variables. Mais pour les équations aux différentielles partielles du premier ordre qui ne contiennent pas la fonction inconnue elle-même, mais seulement ses coefficients différentiels, comme aussi pour les problèmes d'isopérimètres, et par suite pour les problèmes de mécanique désignés ci-dessus, dans lesquels l'expression dont la variation doit s'évanouir est donnée par une intégrale, voici la marche à suivre dans les opérations et les avantages qu'on en retire. L'équation aux différentielles ordinaires, dont dépend le problème, étant supposée de l'ordre $2n$, si l'on en connaît une intégrale, on pourra, par un certain choix des quantités prises pour variables, ramener le problème à un système d'équations différentielles de l'ordre $2n - 2$. Si l'on connaît encore une intégrale de ce système, on pourra le réduire de la même manière à un système de l'ordre $2n - 4$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on n'ait plus d'équations différentielles à intégrer. D'ailleurs toutes les opérations à effectuer reposent uniquement sur les quadratures. J'ajouterai, pour plus de clarté, que j'appelle intégrale d'un système d'équations différentielles ordinaires, une équation $\mathrm{U} = a$ dans laquelle a est une constante arbitraire qui ne se trouve pas dans U, et U une expression telle que sa différentielle $d\mathrm{U}$ est identiquement nulle.

Comme exemple de la méthode générale, je prends un problème de mécanique, dont j'ai déjà eu l'honneur d'entretenir l'Académie, dans mon dernier mémoire. Il y a certains cas dans le mouvement des corps célestes, comme par exemple celui de la Lune ou d'une comète qui s'approche beaucoup de Jupiter, pour lesquels le mouvement elliptique est si peu approché que l'on ne peut fonder aucun procédé d'approximation qui ait une valeur scientifique sur l'intégration des équations différentielles de ce mouvement. Il est alors de la plus grande importance de trouver un autre mouvement qu'on puisse traiter facilement et qui se rapproche davantage du cas de la nature. On pourrait ici chercher à choisir le mouvement d'un point matériel attiré par deux corps qui se meuvent simultanément et avec la même vitesse angulaire autour de leur centre de gravité commun. Relativement à la Lune on peut supposer, dans le problème d'approximation, que les trois corps se meuvent dans un même plan; on a alors deux équations différentielles du second ordre, dans lesquelles les forces renferment le temps explicitement, en sorte que ni le principe des aires, ni le principe des forces vives ne peuvent s'appliquer; et le système équivaut à une équation différentielle du quatrième ordre à deux variables. Quoique le principe des aires et des forces vives n'ait pas lieu, j'ai fait voir cependant qu'on pouvait appliquer une certaine combinaison de ces deux principes. Cette intégrale que j'ai trouvée ne ramène pas seulement le problème au troisième ordre, mais l'application de la méthode générale à ce cas montre que, par un choix convenable de variables, le problème peut être ramené à une équation différentielle du second ordre à deux variables dont il faudrait seulement connaître une seule intégrale, en appliquant le même procédé. Ainsi au moyen de cette méthode et à l'aide de l'intégrale trouvée par moi, on peut ramener l'intégration de l'équation différentielle du quatrième ordre à la recherche d'une intégrale particulière d'une équation différentielle du second ordre, et tout le reste ne suppose que des quadratures.

Toute la marche de l'opération dépend chaque fois de l'intégrale qu'on a trouvée; le choix des variables dépend aussi de la même intégrale, et exige en outre l'intégration d'équations différentielles; mais toujours de telle manière qu'au moyen de l'intégrale trouvée, le système des équations est ramené à un autre dont l'ordre est de deux unités moindre, et même il arrive dans beaucoup de cas, que ces équations différentielles nécessaires pour la détermination du choix des variables sont faciles à intégrer. Si on ne laisse pas échapper les intégrales simples qui se présentent, on peut en suivant la marche indiquée être sûr de réduire le problème à des quadratures, ou du moins de la simplifier autant que sa nature le permet. Lors même que les équations différentielles auxquelles on arrive ne peuvent pas s'intégrer, on leur reconnaîtra des propriétés remarquables qui seront très utiles. Ainsi dans le problème cité, quoiqu'on ne sache pas intégrer l'équation différentielle du second ordre à laquelle on le ramène, toutefois on sait que ses deux intégrales se déduisent l'une de l'autre par des quadratures.

Vous voyez, Monsieur et très honoré professeur, que les résultats énoncés dans cette esquisse, enrichissent la *Mécanique analytique* d'un chapitre nouveau et important; ils montrent les avantages que la *forme* des équations différentielles de la mécanique, offre pour leur intégration. Cette forme est due à Lagrange; mais Lagrange et les géomètres ses successeurs ne s'en sont servis que pour obtenir plus promptement, et avec plus d'ensemble, les transformations analytiques, et donner aux lois de la mécanique toute l'extension dont elles sont susceptibles. Aujourd'hui, cette *forme* acquiert une importance bien plus grande; car, ce sont précisément là les équations différentielles susceptibles d'être traitées d'une manière particulière, qui diminue notablement les difficultés de l'intégration.

29 novembre 1836.

Sur la Réduction de l'intégration des Équations différentielles partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires ;

Par M. JACOBI (*).

I.

M. Hamilton a trouvé (*Transactions Philosophiques*, 1834, p. II, et 1835 p. I), ce résultat remarquable, que dans les cas de la mécanique où la loi des forces vives a lieu, les équations intégrales du mouvement, de même que les équations différentielles sous la forme que Lagrange leur a donnée, se laissent toutes exprimer par les coefficients différentiels partiels d'une seule fonction.

Voici à peu près la marche qu'il a suivie : soient

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i} + \lambda \frac{dF}{dx_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dx_i} + \ldots$$
$$m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i} + \lambda \frac{dF}{dy_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dy_i} + \ldots$$
$$m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i} + \lambda \frac{dF}{dz_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dz} + \ldots$$

les équations différentielles du mouvement d'un système de n points matériels qui satisfont aux conditions $F = 0$, $F_1 = 0, \ldots$.

Dans ces équations l'indice i prend successivement les valeurs 1, 2, ... n; et m_i signifie la masse d'un point dont les coordonnées rectangulaires sont x_i, y_i, z_i. C'est la forme que Lagrange a donnée aux équations différentielles, et qui peut toujours leur être donnée dans les cas où la loi des forces vives a lieu, c'est-à-dire quand

$$\frac{1}{2}\Sigma m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] = U + h,$$

(*). Ce Mémoire est tiré, comme le précédent, du Journal de M. Crelle. (J. Liouville.)

h étant une constante. Les quantités λ, $\lambda_{,}$,... sont des facteurs introduits pour la symétrie, et qui doivent être éliminés à l'aide des équations de condition. J'appelle la fonction U, dont la différentiation partielle donne les forces employées, la *fonction des forces*.

Quand on aura complétement intégré les équations différentielles données, on connaîtra les $3n$ coordonnées en fonctions du temps et des constantes arbitraires. Substituons ces valeurs dans la fonction des forces U, et dans sa différentielle partielle prise par rapport à une des constantes que j'appellerai α : nous aurons

$$\frac{dU}{d\alpha} = \Sigma\left(\frac{dU}{dx_i}\cdot\frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dU}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dU}{dz_i}\cdot\frac{dz_i}{d\alpha}\right),$$
$$= \Sigma m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{d^2y_i}{dt^2}\,\frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{d^2z_i}{dt^2}\,\frac{dz_i}{d\alpha}\right),$$

car les facteurs de λ, $\lambda_{,}$,... s'évanouissent à cause des équations de conditions.

On peut donner à la dernière équation la forme :

$$\frac{dU}{d\alpha} = \frac{d\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\,\frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dy_i}{dt}\,\frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dz_i}{dt}\,\frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{dt}$$
$$- \Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{d^2x_i}{d\alpha dt} + \frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{d^2y_i}{d\alpha dt} + \frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{d^2z_i}{d\alpha dt}\right).$$

La dernière partie du second membre peut aussi se mettre sous la forme d'une différentielle partielle prise par rapport à α, savoir

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d\Sigma m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]}{d\alpha},$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\frac{d\left\{U + \frac{1}{2}\Sigma m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}}{d\alpha},$$
$$= \frac{d\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dz_i}{dt}\,\frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{dt}.$$

Cette équation remarquable n'a pas échappé aux analystes qui se sont occupés de la variation des constantes dans les problèmes de mécanique. Il s'ensuit facilement un des théorèmes les plus importants de cette théorie. En effet, si l'on pose

$$\frac{dx}{dt} = x', \ \frac{dy}{dt} = y', \ \frac{dz}{dt} = z',$$

de manière que l'équation précédente devienne

$$\frac{d\left[\mathrm{U} + \frac{1}{2}\Sigma m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)\right]}{d\alpha} = \frac{d\Sigma m_i\left(x'_i \frac{dx_i}{d\alpha} + y'_i \frac{dy_i}{d\alpha} + z'_i \frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{dt},$$

et si l'on désigne par β une autre constante arbitraire quelconque, on voit que les deux expressions

$$\frac{d\Sigma m_i\left(x'_i \frac{dx_i}{d\alpha} + y'_i \frac{dy_i}{d\alpha} + z'_i \frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{dt},$$

et

$$\frac{d\Sigma m_i\left(x'_i \frac{dx_i}{d\beta} + y'_i \frac{dy_i}{d\beta} + z'_i \frac{dz_i}{d\beta}\right)}{dt},$$

sont les coefficients différentiels partiels de la même expression, savoir

$$\mathrm{U} + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i),$$

pris respectivement par rapport à α et par rapport à β. Donc la différentielle par rapport à β du premier coefficient différentiel, est égale à la différentielle par rapport à α du second; ce qui donne après les simplifications nécessaires,

$$\frac{d\Sigma m_i\left(\frac{dx'_i}{d\beta}\cdot\frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dy'_i}{d\beta}\cdot\frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dz'_i}{d\beta}\cdot\frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{dt}$$
$$-\frac{d\Sigma m_i\left(\frac{dx'_i}{d\alpha}\cdot\frac{dx_i}{d\beta} + \frac{dy'_i}{d\alpha}\cdot\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{dz'_i}{d\alpha}\cdot\frac{dz_i}{d\beta}\right)}{dt} = 0.$$

Cette équation fait voir que la quantité

$$\Sigma m \left(\frac{dx'_i}{d\beta} \cdot \frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dy'_i}{d\beta} \cdot \frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dz'_i}{d\beta} \cdot \frac{dz_i}{d\alpha}\right)$$
$$- \Sigma m_i \left(\frac{dx'_i}{d\alpha} \cdot \frac{dx_i}{d\beta} + \frac{dy'_i}{d\alpha} \cdot \frac{dy_i}{d\beta} + \frac{dz'_i}{d\alpha} \cdot \frac{dz_i}{d\beta}\right),$$

est indépendante de t, c'est-à-dire qu'elle est une constante, ce qui est le célèbre théorème dû à Lagrange. On démontre aussi facilement qu'en appelant cette expression (α, β), et désignant par γ une troisième constante arbitraire, on aura les équations

$$(\alpha, \alpha) = 0, \ (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) = 0, \ \frac{d(\beta, \gamma)}{d\alpha} + \frac{d(\gamma, \alpha)}{d\beta} + \frac{d(\beta, \alpha)}{d\gamma} = 0.$$

Mais M. Hamilton tire de l'équation que nous avons trouvée, savoir,

$$\frac{d[\mathrm{U} + \frac{1}{2}\Sigma m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)]}{d\alpha} = \frac{d\Sigma m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{d\alpha} + y'_i \frac{dy_i}{d\alpha} + z'_i \frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{dt},$$

de nouveaux avantages par le procédé suivant, qui est très remarquable en lui-même et par les résultats auxquels il conduit.

En effet, si l'on pose

$$\mathrm{S} = \int_0^t [\mathrm{U} + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)]dt,$$

on aura

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha} = \int_0^t \frac{d[\mathrm{U} + \frac{1}{2}\Sigma m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)]}{d\alpha} dt,$$

ou, par suite de l'équation précédente,

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha} = \int_0^t \frac{d\Sigma m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{d\alpha} + y'_i \frac{dy_i}{d\alpha} + z'_i \frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{dt} dt.$$

Si a, b, c, représentent les valeurs initiales de x, y, z, et a', b', c', celles de x', y', z', cette équation donnera

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha} = \Sigma m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{d\alpha} + y'_i \frac{dy_i}{d\alpha} + z'_i \frac{dz_i}{d\alpha}\right) - \Sigma m_i \left(a'_i \frac{da_i}{d\alpha} + b'_i \frac{db_i}{d\alpha} + c'_i \frac{dc_i}{d\alpha}\right).$$

S est fonction de t et des constantes arbitraires. Elle est définie par cela même que sa différentielle prise par rapport à t est égale à la fonction des forces plus la moitié de la force vive. La dernière équation donne le moyen de trouver aussi la différentielle de S en ne faisant varier que les constantes arbitraires. En effet, si l'on désigne par d' la différentielle que l'on obtient en faisant varier simultanément toutes les constantes arbitraires, mais en laissant t invariable, l'équation précédente après avoir été multipliée par $d\alpha$ et après qu'on aura pris la somme de toutes les équations analogues, deviendra

$$d'S = \Sigma m_i(x_i' d'x_i + y_i' d'y_i + z_i' d'z_i) - \Sigma m_i(a_i' d'a_i + b_i' d'b_i + c_i' d'c_i);$$

c'est la différentielle complète de S en laissant t constant, et considérant S comme fonction des constantes arbitraires.

Quand le système est tout-à-fait libre, on a un nombre $6n$ de constantes arbitraires, dont S et les $6n$ quantités x, y, z, a, b, c, sont regardées comme fonctions. On pourra donc, en se servant des équations intégrales, exprimer les $3n$ quantités a, b, c par ces $6n$ constantes, et les $3n$ quantités x, y, z par ces constantes et le temps t. On peut donc regarder les $6n$ constantes arbitraires comme fonctions du temps et des $6n$ quantités x, y, z, a, b, c, ce qui rendra S fonction du temps t, et des $6n$ quantités x, y, z, a, b, c. Si l'on prend dans ce sens les coefficients différentiels partiels de S, la dernière équation donnera immédiatement les différentielles partielles de S prises par rapport aux quantités x, y, z, a, b, c; savoir :

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dx_i} &= m_i x_i', & \frac{dS}{da_i} &= -m_i a_i', \\
\frac{dS}{dy_i} &= m_i y_i', & \frac{dS}{db_i} &= -m_i b_i', \\
\frac{dS}{dz_i} &= m_i z_i', & \frac{dS}{dc_i} &= -m_i c_i'.
\end{aligned}$$

Ces $6n$ équations peuvent être regardées comme les équations intégrales complètes du problème proposé. Les $3n$ équations à gauche sont les $3n$ intégrales du premier ordre (que M. Hamilton appelle intégrales intermédiaires), et les équations à droite sont les $3n$ intégrales finies elles-mêmes.

Si le système n'est pas libre, et que l'on ait les k conditions

$$\mathrm{F} = 0, \qquad \mathrm{F}_1 = 0, \qquad \ldots \mathrm{F}_{k-1} = 0,$$

auxquelles tous ses points doivent satisfaire, on pourra réduire les $3n$ fonctions cherchées x, y, z, à un nombre $3n-k$, et les $3n$ équations différentielles du second ordre se réduiront aussi à $3n-k$. On n'a donc que $6n-2k$ constantes arbitraires, au lieu desquelles on pourra introduire dans l'expression de S les $3n-k$ quantités auxquelles on a réduit les $3n$ quantités x, y, z; et leurs valeurs initiales auxquelles les $3n$ quantités a, b, c se laissent ramener par les mêmes équations de condition. L'équation par laquelle, en supposant t constant, nous avons exprimé la différentielle complète de S, prise dans le sens précédemment indiqué, peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma\left(\frac{d\mathrm{S}}{dx_i} - m_i x_i'\right)dx_i + \Sigma\left(\frac{d\mathrm{S}}{da_i} + m_i a_i'\right)da_i \\ + \Sigma\left(\frac{d\mathrm{S}}{dy_i} - m_i y_i'\right)dy_i + \Sigma\left(\frac{d\mathrm{S}}{db_i} + m_i b_i'\right)db_i \\ + \Sigma\left(\frac{d\mathrm{S}}{dz_i} - m_i z_i'\right)dz_i + \Sigma\left(\frac{d\mathrm{S}}{dc_i} + m_i c_i'\right)dc_i. \end{aligned}$$

Éliminons-en, au moyen des équations de condition, un nombre k des $3n$ différentielles, dx, dy, dz; et un même nombre des $3n$ différentielles, da, db, dc : cette opération étant effectuée, le facteur de chacune des autres différentielles indépendantes doit être égal à o. Soit $\mathrm{F}^{(0)}$ ce que devient la valeur de F, en y substituant au lieu de x, y, z, les valeurs initiales a, b, c: on opérera l'élimination dont il s'agit, en multipliant par un facteur indéterminé et ajoutant à l'équation précédente chacune des k équations

$$\Sigma\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx_i}dx_i + \frac{d\mathrm{F}}{dy_i}dy_i + \frac{d\mathrm{F}}{dz_i}dz_i\right) = d\mathrm{F} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et chacune des k équations

$$\Sigma\left(\frac{d\mathrm{F}^{(0)}}{da_i}da_i + \frac{d\mathrm{F}^{(0)}}{db_i}db_i + \frac{d\mathrm{F}^{(0)}}{dc_i}dc_i\right) = d\mathrm{F}^{(0)} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

puis déterminant les facteurs de manière que les coefficients des k différentielles dx, da, etc., que l'on désire éliminer s'évanouissent. Et puisque les facteurs des autres différentielles indépendantes doivent s'évanouir ensuite, on aura, en désignant les facteurs introduits par $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots - \lambda^{(0)}, - \lambda_1^{(0)}, \ldots$ le système des $6n$ équations

$$\begin{aligned}
m_i x_i' &= \frac{dS}{dx_i} + \lambda \frac{dF}{dx_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dx_i} + \ldots \\
m_i y_i' &= \frac{dS}{dy_i} + \lambda \frac{dF}{dy_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dy_i} + \ldots \\
m_i z_i' &= \frac{dS}{dz_i} + \lambda \frac{dF}{dz_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dz_i} + \ldots \\
m_i a_i' &= -\frac{dS}{da_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF}{da_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF_1}{da_i} + \ldots \\
m_i b_i' &= -\frac{dS}{db_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF}{db_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF_1}{db_i} + \ldots \\
m_i c_i' &= -\frac{dS}{dc_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF}{dc_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF_1}{dc_i} + \ldots,
\end{aligned}$$

que nous devons regarder comme les équations intégrales complètes après y avoir ajouté les équations de condition

$$F = 0,\ F_1 = 0,\ \ldots\ F^{(0)} = 0,\ F_1^{(0)} = 0,\ \ldots$$

Les facteurs $\lambda, \lambda_1, \ldots - \lambda^{(0)} - \lambda_1^{(0)}, \ldots$ se trouvent par la résolution d'un nombre égal d'équations linéaires que l'on obtient en substituant les valeurs précédentes de x'_i, a'_i, etc.; dans les équations produites par la différentiation des équations de condition, savoir

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \Sigma \left(\frac{dF}{dx} x_i' + \frac{dF}{dy_i} y_i' + \frac{dF}{dz_i} z_i' \right) = 0, \\
\frac{dF_1}{dt} &= \Sigma \left(\frac{dF_1}{dx_i} x_i' + \frac{dF_1}{dy_i} y_i' + \frac{dF_1}{dz_i} z_i' \right) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et dans les équations que l'on déduit de celles-ci en y faisant $t = 0$, savoir

$$\Sigma\left(\frac{dF^{(0)}}{da_i}a_i' + \frac{dF^{(0)}}{db_i}b_i' + \frac{dF^{(0)}}{dc_i}c_i'\right) = 0,$$
$$\Sigma\left(\frac{dF_1^{(0)}}{da_i}a_i' + \frac{dF_1^{(0)}}{db_i}b_i' + \frac{dF_1^{(0)}}{dc_i}c_i'\right) = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous voyons donc comment, dans le cas d'un système qui n'est pas libre, les équations intégrales prennent une forme tout-à-fait analogue à celle à laquelle Lagrange a ramené les équations différentielles de la mécanique.

Quand la loi des forces vives a lieu, on peut exprimer la fonction S de cette manière :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t \left[U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\right] dt \\ &= \int_0^t \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\, dt - ht \\ &= 2\int_0^t U dt + ht, \end{aligned}$$

où h est une constante arbitraire. Je ne me suis pas servi dans ce qui précède de la loi des forces vives, parce que ces résultats peuvent être étendus à un cas où cette loi n'a pas lieu, ce que M. Hamilton n'a pas remarqué ; savoir au cas où la fonction des forces contient non-seulement les coordonnées mais le temps explicitement, comme, par exemple, quand un point sans masse est attiré par des centres mobiles dont le mouvement est connu et donné. Je donnerai toujours cette extension des formules là où elle sera possible, puisque le cas signalé de la mécanique a réellement des applications.

II.

La définition que nous avons donnée de la fonction S suppose l'intégration complète des équations différentielles du problème de mécanique déjà accomplie. Le seul résultat des calculs précédents serait alors de ramener à une forme remarquable le système des équations intégrales. Mais on peut définir la fonction S d'une manière différente et beaucoup plus générale. Je limiterai mes recherches au cas d'un système parfaitement libre; quant au cas où des connexions et des conditions quelconques existent entre les points m_1, m_2, etc., j'y reviendrai plus tard dans un mémoire dont j'ai déjà indiqué ailleurs les principaux résultats.

Nous considérons encore S comme fonction du temps, des coordonnées des points et de leurs valeurs initiales. Si nous prenons la différentielle complète de S (savoir dS) par rapport au temps, en regardant les coordonnées comme fonctions du temps, nous aurons, d'après la définition de S,

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}t}=\frac{dS}{dt}+\Sigma\left(\frac{dS}{dx_i}x_i'+\frac{dS}{dy_i}y_i'+\frac{dS}{dz_i}z_i'\right)=\mathrm{U}+\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2).$$

Comme on a

$$x_i'=\frac{1}{m_i}\frac{dS}{dx_i},\ y_i'=\frac{1}{m_i}\frac{dS}{dy_i},\ z_i'=\frac{1}{m_i}\frac{dS}{dz_i},$$

il suit de l'équation précédente que l'expression de la différentielle partielle de S prise par rapport à t est

$$\frac{dS}{dt}=\mathrm{U}-\frac{1}{2}\Sigma m_i\,(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2),$$

laquelle expression, quand U ne contient pas t explicitement, et par conséquent quand la loi des forces vives a lieu, se réduit à l'expression plus simple

$$\frac{dS}{dt}=-h$$

où h est une constante arbitraire.

On déduit aussi de l'expression de $\frac{dS}{dt}$ l'équation suivante

$$\frac{dS}{dt}+\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy_i}\right)+\left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right]=\mathrm{U}:$$

c'est une équation différentielle partielle du premier ordre à laquelle la fonction S doit satisfaire. La fonction S, comme elle a été définie plus haut, en fournit une solution complète : en effet outre la constante que l'on peut évidemment y ajouter (puisque la fonction même ne paraît pas dans l'équation, mais seulement ses coefficients différentiels) elle contient $3n$ autres constantes arbitraires, savoir les valeurs initiales des coordonnées; et d'un autre côté le nombre des variables indépendantes est aussi $3n + 1$.

Je m'arrêterai ici un instant pour expliquer la nature des solutions différentes d'une équation différentielle partielle du premier ordre.

Nous appelons, d'après Lagrange, solution *complète* d'une équation différentielle partielle non linéaire du premier ordre, une solution qui contient un nombre de constantes arbitraires égal à celui des variables indépendantes, parce que, en se servant des coefficients différentiels partiels de la fonction cherchée, pris par rapport à ces variables, on peut éliminer un nombre égal de constantes arbitraires, et, en général, on n'en peut pas éliminer davantage. Si l'on connaît *une* solution complète, on pourra en déduire *toutes les autres* solutions dont l'équation différentielle partielle est susceptible, et qui ont un caractère très différent. Pour y parvenir on suppose un certain nombre de relations arbitraires entre les constantes arbitraires, ou, ce qui revient au même, on regarde quelques-unes de ces constantes arbitraires comme fonctions arbitraires des autres; on différentie la solution complète par rapport à ces autres constantes arbitraires considérées comme indépendantes, et l'on égale à zéro chacun des coefficients différentiels partiels formés de cette manière. Si alors, en se servant de ces équations, on élimine les constantes arbitraires de la solution complète, on aura la nouvelle solution que l'on peut nommer, d'après Lagrange, une solution *générale*, parce qu'elle contient des fonctions arbitraires. Mais ces solutions générales ont un caractère tout-à-fait différent, suivant le nombre de relations arbitraires que l'on suppose exister entre les constantes arbitraires. Si m est le nombre des variables indépendantes par conséquent le nombre des constantes arbitraires, on aura $m - 1$ classes de solutions générales suivant que l'on prend $1, 2, \ldots$ ou $m - 1$ relations entre les m constantes. La solution la plus générale est celle où il n'y a qu'une relation entre les constantes, c'est-à-dire où l'une d'elles seulement est regardée comme fonction des autres. Le degré de généralité diminue avec le nombre des constantes arbitraires que l'on remplace par des fonctions arbitraires des autres.

Ainsi en supposant une seule constante arbitraire fonction arbitraire des $m-1$ autres, comme dans la solution la plus générale, on laisse aux formules une étendue, une indétermination plus grande que si l'on supposait deux constantes arbitraires fonctions arbitraires des $m-2$ autres, comme dans la seconde classe de solutions générales. En effet, si l'on se représente une fonction arbitraire de $m-1$ quantités, ordonnée suivant les puissances d'une d'entre elles, les coefficients seront des fonctions arbitraires de $m-2$ quantités; de sorte qu'une fonction arbitraire de $m-1$ quantités contient un nombre infini de fonctions de $m-2$ quantités. On a comme limite de ces classes de solutions générales le cas où l'on suppose m relations entre nos m quantités, c'est-à-dire où on les regarde comme des constantes : c'est le cas de la solution *complète*.

Les différentes espèces de solutions, que j'ai appelées solutions générales, contenant des fonctions arbitraires, on peut les particulariser de manière qu'elles contiennent un nombre donné quelconque de constantes arbitraires; car on peut introduire dans chaque fonction arbitraire autant de constantes arbitraires que l'on veut. Si l'on donne aux fonctions arbitraires m constantes arbitraires en tout, m étant le nombre des variables indépendantes dans l'équation différentielle partielle, chaque solution générale ainsi particularisée avec m constantes arbitraires, deviendra une solution complète; et de cette dernière, comme de la solution complète dont on est parti, on pourra déduire toutes les solutions dont l'équation différentielle partielle donnée est susceptible.

On peut de même particulariser chaque solution générale, de manière qu'il en résulte une solution appartenant à une classe moins générale. Si l'on a par exemple une solution dans laquelle k quantités se trouvent fonctions arbitraires des $m-k$ autres, et si l est un nombre compris entre k et m, on peut particulariser ces k fonctions arbitraires des $m-k$ quantités, de manière qu'autant de fonctions arbitraires que l'on veut de $m-l$ quantités y soient contenues, et si l'on prend pour ces k fonctions arbitraires des formes particulières qui contiennent l fonctions arbitraires de $m-l$ quantités, on peut regarder cette solution comme une solution qui appartient à une classe moins générale et que l'on peut déduire de la solution complète, en y considérant l constantes arbitraires comme fonctions arbitraires des autres, et en mettant pour celles-ci de telles fonctions que les coefficients différentiels partiels de la solution complète, pris par rapport à elles, s'évanouissent.

III.

Après avoir rappelé ces considérations connues, je reviens à l'équation différentielle partielle qui nous occupe ici, savoir :

$$\frac{dS}{dt}+\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2+\left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right]=\mathrm{U}.$$

La fonction S, comme elle a été définie plus haut, quand on y ajoute une constante arbitraire, en est une solution complète. Mais puisqu'il y a un nombre infini de solutions complètes, des formes les plus différentes, de la même équation différentielle partielle, il est clair que la fonction S n'est pas encore déterminée par l'équation différentielle partielle à laquelle elle satisfait. Cependant le système des $3n$ équations différentielles ordinaires du mouvement est complétement remplacé par cette seule équation différentielle partielle; car on peut facilement démontrer qu'une quelconque de ses solutions complètes, suffit pour en déduire toutes les équations intégrales du mouvement.

En effet, soit S une solution complète quelconque de l'équation différentielle partielle

$$\frac{dS}{dt}+\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2+\left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right]=\mathrm{U}.$$

Puisque le nombre des variables indépendantes est ici $3n+1$, ces variables étant le temps t et les $3n$ coordonnées, la solution complète doit contenir $3n+1$ constantes arbitraires; et l'on peut toujours supposer une de ces constantes combinée avec S par simple addition. Soient α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$, les $3n$ autres, et β_1, $\beta_2, \ldots \beta_{3n}$, d'autres constantes arbitraires. Je vais démontrer que les $3n$ équations finies suivantes, entre les $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i, et le temps t, savoir

$$\frac{dS}{d\alpha_1} = \beta_1,\ \frac{dS}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots\ \frac{dS}{d\alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

satisfont toujours au système donné d'équations différentielles ordinaires, savoir

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i},\ m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i},\ m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i}.$$

En effet, si l'on différentie les équations finies données, les constantes arbitraires β_1, β_2, ... β_{3n}, disparaîtront immédiatement, et l'on aura les $3n$ équations

$$o = \frac{d\,.\,\frac{dS}{d\alpha_1}}{dt} = \frac{d^2S}{d\alpha_1 dt} + \Sigma\left(\frac{d^2S}{d\alpha_1 dx_i}x'_i + \frac{d^2S}{d\alpha_1 dy_i}y'_i + \frac{d^2S}{d\alpha_1 dz_i}z'_i\right),$$

$$o = \frac{d\,.\,\frac{dS}{d\alpha_2}}{dt} = \frac{d^2S}{d\alpha_2 dt} + \Sigma\left(\frac{d^2S}{d\alpha_2 dx_i}x'_i + \frac{d^2S}{d\alpha_2 dy_i}y'_i + \frac{d^2S}{d\alpha_2 dz_i}z'_i\right),$$

$$o = \frac{d\,.\,\frac{dS}{d\alpha_{3n}}}{dt} = \frac{d\,S}{d\alpha_{3n} dt} + \Sigma\left(\frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dx_i}x'_i + \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dy_i}y'_i + \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dz_i}z'_i\right),$$

au moyen desquelles on déterminera les valeurs de x'_i, y'_i, z'_i. Mais si l'on compare ces $3n$ équations avec les $3n$ équations identiques suivantes, qui se déduisent de l'équation donnée

$$U = \frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right],$$

par la différentiation partielle par rapport à α_1, α_2, ... α_{3n}, savoir

$$o = \frac{d^2S}{d\alpha_1 dt} + \Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{d^2S}{d\alpha_1 dx_i}\cdot\frac{dS}{dx_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_1 dy_i}\cdot\frac{dS}{dy_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_1 dz_i}\cdot\frac{dS}{dz_i}\right),$$

$$o = \frac{d^2S}{d\alpha_2 dt} + \Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{d^2S}{d\alpha_2 dx_i}\cdot\frac{dS}{dx_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_2 dy_i}\cdot\frac{dS}{dy_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_2 dz_i}\cdot\frac{dS}{dz_i}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$o = \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dt} + \Sigma\frac{1}{m_i}\left(\frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dx_i}\cdot\frac{dS}{dx_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dy_i}\cdot\frac{dS}{dy_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dz_i}\cdot\frac{dS}{dz_i}\right),$$

on voit immédiatement que les valeurs cherchées de x'_i, y'_i, z'_i, qui doivent satisfaire aux équations précédentes, sont

$$x'_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_i}\,\frac{dS}{dx_i},\quad y'_i = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_i}\,\frac{dS}{dy_i},\quad z'_i = \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_i}\,\frac{dS}{dz_i}.$$

En différentiant encore une fois ces expressions, on aura

$$\begin{aligned}
m_i\,\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\left(\frac{d^2S}{dx_idx_k}\,x'_k + \frac{d^2S}{dx_idy_k}\,y'_k + \frac{d^2S}{dx_idz_k}\,z'_k\right) + \frac{d^2S}{dx_idt},\\
m_i\,\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\left(\frac{d^2S}{dy_idx_k}\,x'_k + \frac{d^2S}{dy_idy_k}\,y'_k + \frac{d^2S}{dy_idz_k}\,z'_k\right) + \frac{d^2S}{dy_idt},\\
m_i\,\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\left(\frac{d^2S}{dz_idx_k}\,x'_k + \frac{d^2S}{dz_idy_k}\,y'_k + \frac{d^2S}{dz_idz_k}\,z'_k\right) + \frac{d^2S}{dz_idt},
\end{aligned}$$

où l'on doit substituer pour k les valeurs $1, 2, \ldots n$, dans les sommes des seconds membres, tandis que i demeure invariable. Si l'on met dans ces équations pour x'_k, y'_k, z'_k, les valeurs trouvées ci-dessus, elles se changent dans les suivantes :

$$\begin{aligned}
m_i\,\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\,\frac{1}{m_k}\left(\frac{d^2S}{dx_idx_k}\,\frac{dS}{dx_k} + \frac{d^2S}{dx_idy_k}\,\frac{dS}{dy_k} + \frac{d^2S}{dx_idz_k}\cdot\frac{dS}{dz_k}\right) + \frac{d^2S}{dx_idt},\\
m_i\,\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\,\frac{1}{m_k}\left(\frac{d^2S}{dy_idx_k}\,\frac{dS}{dx_k} + \frac{d^2S}{dy_idy_k}\,\frac{dS}{dy_k} + \frac{d^2S}{dy_idz_k}\cdot\frac{dS}{dz_k}\right) + \frac{d^2S}{dy_idt},\\
m_i\,\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\,\frac{1}{m_k}\left(\frac{d^2S}{dz_idx_k}\,\frac{dS}{dx_k} + \frac{d^2S}{dz_idy_k}\,\frac{dS}{dy_k} + \frac{d^2S}{dz_idz_k}\cdot\frac{dS}{dz_k}\right) + \frac{d^2S}{dz_idt}.
\end{aligned}$$

Mais les seconds membres sont les coefficients différentiels partiels de l'expression

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{1}{m_k}\left[\left(\frac{dS}{dx_k}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_k}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_k}\right)^2\right] + \frac{dS}{dt},$$

pris par rapport à x_i, y_i, z_i. Par suite il vient

$$m_i\,\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dx_i},\quad m_i\,\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dy_i},\quad m_i\,\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dz_i},$$

ce qui est précisément le système donné des équations différentielles ordinaires. On a donc le théorème suivant :

Théorème.

Soient les $3n$ équations différentielles du second ordre

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i},$$

les équations différentielles du mouvement d'un système libre de n points matériels; où U est une fonction donnée des $3n$ coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n$ et du temps t, et où i doit prendre successivement toutes les valeurs $1, 2, \ldots n$. Soit S une intégrale complète quelconque de l'équation différentielle partielle,

$$U = \frac{dS}{dt} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2 \right],$$

laquelle intégrale contiendra d'abord une constante arbitraire combinée avec S par la seule addition, et puis encore $3n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$: alors les intégrales complètes et finies des $3n$ équations différentielles ordinaires du second ordre, avec $6n$ constantes arbitraires, sont

$$\frac{dS}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dS}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \frac{dS}{d\alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

où les quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n}$, sont $3n$ nouvelles constantes arbitraires : et les composantes des vitesses suivant les axes des coordonnées sont

$$x_i' = \frac{1}{m_i} \frac{dS}{dx_i}, \quad y_i' = \frac{1}{m_i} \frac{dS}{dy_i}, \quad z_i' = \frac{1}{m_i} \frac{dS}{dz_i}.$$

IV.

La fonction S telle qu'elle a été définie au commencement, est une des solutions complètes de l'équation différentielle partielle considérée dans ce qui précède; et de plus c'est une fonction où les $3n$ constantes arbitraires que contient S sont précisément les valeurs initiales des $3n$ quantités x_i, y_i, z_i, que nous avons désignées par a_i, b_i, c_i.

M. Hamilton donne, pour le cas le plus fréquent, qui est le seul qu'il ait considéré, savoir celui où la fonction des forces ne contient pas le temps explicitement, une autre équation différentielle partielle du premier ordre à laquelle cette fonction S doit satisfaire. La loi des forces vives a lieu dans ce cas; on peut la représenter par l'équation

$$\mathrm{U} - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \mathrm{U}_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2),$$

où a_i', b_i', c_i', sont les valeurs initiales de x_i', y_i', z_i', et où U_0 désigne la valeur de U en y mettant au lieu de x_i, y_i, z_i, leurs valeurs initiales a_i, b_i, c_i. Mais

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = \mathrm{U} - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Il viendra donc, si la loi des forces vives a lieu,

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = \mathrm{U}_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2).$$

Or on a, pour la forme que M. Hamilton a supposée à la fonction S, les équations

$$m_i a_i' = -\frac{d\mathrm{S}}{da_i}, \quad m_i b_i' = -\frac{d\mathrm{S}}{db_i}, \quad m_i c_i' = -\frac{d\mathrm{S}}{dc_i},$$

en vertu desquelles l'équation précédente se change en celle-ci

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = \mathrm{U}_0 - \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{d\mathrm{S}}{da_i}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{S}}{db_i}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{S}}{dc_i}\right)^2\right].$$

C'est la seconde équation différentielle partielle à laquelle la fonction S de M. Hamilton satisfait, et par laquelle elle se distingue de toutes les autres solutions complètes de la première. Mais nous avons vu que chaque solution complète de cette première est tout-à-fait suffisante pour trouver toutes les intégrales complètes des équations différentielles données du mouvement.

Je ne conçois donc pas pourquoi M. Hamilton, pour pouvoir donner les intégrales complètes des équations différentielles proposées, croit nécessaire de pouvoir trouver une fonction S de $6n + 1$

variables, savoir des quantités x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, et du temps t, qui satisfasse en même temps aux deux équations différentielles partielles du premier ordre,

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right] = \mathrm{U},$$
$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{da_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{db_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dc_i}\right)^2\right] = \mathrm{U}_\circ,$$

tandis qu'il suffit, comme nous l'avons vu, de connaître une fonction quelconque des $3n + 1$ quantités t, x_i, y_i, z_i, qui satisfasse à la seule équation

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right] = \mathrm{U},$$

et contienne une constante arbitraire combinée avec elle par addition, et $3n$ autres constantes arbitraires. M. Hamilton me paraît par cela même avoir présenté sa belle découverte sous un faux jour, ce qui la complique et la limite inutilement. Sa théorie, telle qu'il l'a énoncée, a aussi l'inconvénient d'être obscure quand on n'en a pas la démonstration sous les yeux; car on ne peut définir une fonction par deux équations différentielles partielles, sans d'abord démontrer qu'une telle fonction est réellement possible. Par le choix qu'il a fait de la fonction particulière S, les constantes arbitraires deviennent les valeurs initiales des coordonnées et des composantes des vitesses, suivant les axes des coordonnées; mais cela n'est pas un avantage, puisque l'introduction de ces constantes rend ordinairement les équations intégrales plus compliquées, et puisqu'on peut ramener à cette forme les équations intégrales de toute autre forme. C'est peut-être pour avoir toujours considéré à la fois deux équations différentielles partielles, que M. Hamilton n'a pas appliqué à son théorème les règles générales que Lagrange donne dans ses leçons sur le calcul des fonctions pour l'intégration d'une équation différentielle partielle non linéaire du premier ordre entre trois variables; et par cette raison, comme je le montrerai dans un autre mémoire, des résultats du plus grand intérêt pour la mécanique lui ont échappé.

Enfin la condition que la fonction S, après avoir satisfait à la première équation différentielle partielle, satisfasse encore à la seconde, amène une restriction en ce qu'elle exclut le cas où la fonction des forces U contient aussi le temps explicitement : pour ce cas, en effet, la seconde équation différentielle partielle n'a plus lieu.

V.

On peut donner des formes différentes à l'équation différentielle partielle du premier ordre par laquelle on a remplacé les équations différentielles du mouvement, en prenant d'une part une autre fonction, au lieu de celle que l'on doit chercher, et d'autre part en changeant les variables. M. Hamilton en a donné plusieurs exemples: je n'en développerai qu'un seul, les autres paraissant ne pas présenter un intérêt aussi grand.

Soit

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \mathrm{U} = \mathrm{H}.$$

Quand U ne contient pas t explicitement, c'est-à-dire quand la loi des forces vives a lieu, on a

$$\mathrm{H} = h,$$

où h est une constante. Supposons que la fonction S soit déterminée d'après la définition donnée par M. Hamilton, et qu'on ajoute $\frac{d\mathrm{S}}{dt}\,dt$, à la valeur précédemment trouvée de $d'\mathrm{S}$, afin de former la différentielle complète de S prise en donnant à toutes les $6n+1$ quantités qu'elle contient, des incréments infiniment petits et indépendants entre eux. Puisque nous avons trouvé

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = -\mathrm{H},$$

on aura pour la variation complète de S,

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{S} = -\mathrm{H}\delta t &+ \Sigma m_i(x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i)\\ &- \Sigma m_i(a_i'\delta a + b_i'\delta b + c_i'\delta c).\end{aligned}$$

En posant $V = S + Ht$, il viendra

$$\begin{aligned}\delta V = t\delta H + \Sigma m_i (x'_i \delta x_i + y'_i \delta y_i + z'_i \delta z_i)\\ - \Sigma m_i (a'_i \delta a + b'_i \delta b + c'_i \delta c).\end{aligned}$$

Si l'on élimine t de la quantité S au moyen de l'équation

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right] - U = H,$$

S et par conséquent V deviendra une fonction de H, et des $6n$ quantités x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i; et l'équation précédente donnera la valeur de δV exprimée par les variations de ces $6n + 1$ quantités. Donc, si l'on considère V comme fonction de H, des coordonnées x_i, y_i, z_i, et de leurs valeurs initiales a_i, b_i, c_i, les coefficients différentiels partiels par rapport à ces quantités, seront

$$\frac{dV}{dH} = t,$$

$$\frac{dV}{dx_i} = m_i x'_i, \quad \frac{dV}{da_i} = - m_i a'_i,$$

$$\frac{dV}{dy_i} = m_i y'_i, \quad \frac{dV}{b} = - m_i b'_i,$$

$$\frac{dV}{dz_i} = m_i z'_i, \quad \frac{dV}{dc_i} = - m_i c'.$$

Ces valeurs donnent l'équation différentielle partielle

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2\right] = U + H,$$

où l'on doit mettre dans la quantité U, au lieu de t, la différentielle partielle $\frac{dV}{dH}$, si U contient t explicitement. Mais quand U ne contient pas t explicitement, ce qui est le cas ordinaire, et qu'elle n'est qu'une fonction des coordonnées, l'équation différentielle partielle ne contient point la différentielle partielle de V par rapport à H; c'est pourquoi dans l'intégration H est regardée comme une constante.

Quand U ne contient pas t explicitement, et par conséquent quand H est une constante, on aura, en prenant pour S la même fonction que M. Hamilton a prise,

$$V = S + Ht = \int_0^t [H + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) + U]\,dt:$$

puisque $H = \frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - U$, cela fournit

$$V = \int_0^t \Sigma m_i(x'^2 + y'^2 + z_i'^2)\,dt = 2Ht + 2\int_0^t U dt.$$

Dans le même cas, où H est une constante, on a aussi pour $t = 0$,

$$\frac{1}{2}\,\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2) = U_0 + H,$$

ou

$$\frac{1}{2}\Sigma\,\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dV}{da_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{db_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dc_i}\right)^2\right] = U_0 + H;$$

c'est une seconde équation différentielle partielle, à laquelle la fonction U doit satisfaire.

M. Hamilton définit la fonction V par ces deux équations différentielles partielles; mais pour trouver les intégrales complètes des équations différentielles du mouvement, il est tout-à-fait suffisant de connaître une intégrale complète V de la première équation différentielle partielle.

En effet, si U contient la quantité t explicitement, considérons une solution complète quelconque de l'équation différentielle partielle

$$\frac{1}{2}\Sigma\,\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2\right] = U + H,$$

où l'on doit mettre dans U, au lieu de t, sa valeur $\frac{dV}{dH}$.

Une telle solution contiendra une constante combinée avec V par addition, et $3n$ autres constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$, puisqu'il y a ici $3n + 1$ variables indépendantes. Les $3n$ intégrales complètes et finies du système des $3n$ équations différentielles ordinaires du second ordre

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i},$$

avec $6n$ constantes arbitraires, deviennent alors

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \quad \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n}$, sont les $3n$ nouvelles constantes arbitraires. Les $3n$ intégrales intermédiaires, avec $3n$ constantes arbitraires, deviendront

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx_i} = m_i x'_i, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dy_i} = m_i y'_i, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dz} = m_i z'_i.$$

On peut remplacer la quantité H dans ces équations par t, en vertu de l'équation

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{H}} = t.$$

La démonstration est la même que pour la fonction S.

Mais quand la fonction U ne contient pas t explicitement, l'équation différentielle partielle contient une variable indépendante de moins, parce que H devient dans ce cas une constante h. Les constantes arbitraires, dans une solution complète, se composent alors d'une constante combinée avec V par addition, et de $3n - 1$, autres que nous désignerons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}$. Les $3n$ équations intégrales complètes et finies du mouvement sont, dans ce cas,

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \quad \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1},$$

auxquelles on doit encore ajouter l'équation

$$\frac{d\mathrm{V}}{dh} = t + \tau:$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n-1}, \tau$, sont $3n$ nouvelles constantes arbitraires, de manière qu'on trouve encore ici $6n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n-1}, h, \tau$; enfin les $3n$ équations intermédiaires conservent la forme

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx_i} = m_i x'_i, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dy_i} = m_i y'_i, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dz_i} = m_i z'_i.$$

La démonstration, qui a dû être un peu modifiée ici, est la suivante.

La différentiation des équations

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dV}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \quad \frac{dV}{d\alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1},$$

donne les $3n - 1$ équations suivantes

$$\Sigma \left(\frac{d^2V}{d\alpha_1 dx_i} x_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_1 dy_i} y_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_1 dz_i} z_i'\right) = 0,$$
$$\Sigma \left(\frac{d^2V}{d\alpha_2 dx_i} x_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_2 dy_i} y_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_2 dz_i} z_i'\right) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma \left(\frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dx_i} x_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dy_i} y_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dz_i} z_i'\right) = 0,$$

qui déterminent les rapports des $3n$ quantités x_i', y_i', z_i', puisqu'elles ne contiennent point de terme qui ne soit multiplié par une de ces quantités. Si l'on différentie l'équation différentielle partielle donnée, savoir

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2\right] = U + h,$$

par rapport à α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}$, on aura les $3n - 1$ équations

$$\Sigma \frac{1}{m} \left(\frac{d^2V}{d\alpha_1 dx_i} \cdot \frac{dV}{dx_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_1 dy_i} \cdot \frac{dV}{dy_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_1 dz_i} \cdot \frac{dV}{dz_i}\right) = 0,$$
$$\Sigma \frac{1}{m_i} \left(\frac{d^2V}{d\alpha_2 dx_i} \cdot \frac{dV}{dx_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_2 dy_i} \cdot \frac{dV}{dy_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_2 dz_i} \cdot \frac{dV}{dz_i}\right) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma \frac{1}{m_i} \left(\frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dx_i} \cdot \frac{dV}{dx_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dy_i} \cdot \frac{dV}{dy_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dz_i} \cdot \frac{dV}{dz_i}\right) = 0.$$

En comparant ces $3n - 1$ équations avec les $3n - 1$ équations précédentes, on voit d'abord que les $3n$ quantités x_i', y_i', z_i', sont entre elles comme $\frac{dV}{m_i dx_i}$, $\frac{dV}{m_i dy_i}$, $\frac{dV}{m_i dz_i}$. Si de plus on différentie l'équation

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau,$$

on aura

$$\Sigma\left(\frac{d^2V}{dhdx_i}x'_i+\frac{d^2V}{dhdy_i}y'_i+\frac{d^2V}{dhdz_i}z'_i\right)=1;$$

et en différentiant par rapport à h seulement l'équation différentielle partielle donnée, on trouve

$$\Sigma\,\frac{1}{m_i}\left(\frac{d^2V}{dhdx_i}\,\frac{dV}{dx_i}+\frac{d^2V}{dhdy_i}\,\frac{dV}{dy_i}+\frac{d^2V}{dhdz_i}\,\frac{dV}{dz_i}\right)=1.$$

Si l'on compare ces deux équations ensemble, et qu'on se rappelle que les quantités x'_i, y'_i, z'_i, sont respectivement proportionnelles à $\frac{1}{m_i}\frac{dV}{dx_i}$, $\frac{1}{m_i}\frac{dV}{dy_i}$, $\frac{1}{m_i}\frac{dV}{dz_i}$, on voit qu'elles leur sont respectivement égales, ce qui donne les $3n$ équations

$$x'_i=\frac{1}{m_i}\,\frac{dV}{dx_i},\quad y'_i=\frac{1}{m_i}\,\frac{dV}{dy_i},\quad z'_i=\frac{1}{m_i}\,\frac{dV}{dz_i}.$$

En différentiant de nouveau, et substituant dans les différentielles pour x'_i, y'_i, z'_i, ces valeurs, il vient

$$m_i\,\frac{d^2x_i}{dt^2}=\Sigma\,\frac{1}{m_k}\left(\frac{d^2V}{dx_idx_k}\,\frac{dV}{dx_k}+\frac{d^2V}{dx_idy_k}\,\frac{dV}{dy_k}+\frac{d^2V}{dx_idz_k}\cdot\frac{dV}{dz_k}\right),$$
$$m_i\,\frac{d^2y_i}{dt^2}=\Sigma\,\frac{1}{m_k}\left(\frac{d^2V}{dy_idx_k}\,\frac{dV}{dx_k}+\frac{d^2V}{dy_idy_k}\,\frac{dV}{dy_k}+\frac{d^2V}{dy_idz_k}\cdot\frac{dV}{dz_k}\right),$$
$$m_i\,\frac{d^2z_i}{dt^2}=\Sigma\,\frac{1}{m_k}\left(\frac{d^2V}{dz_idx_k}\,\frac{dV}{dx_k}+\frac{d^2V}{dz_idy_k}\,\frac{dV}{dy_k}+\frac{d^2V}{dz_idz_k}\cdot\frac{dV}{dz_k}\right),$$

où i reste invariable tandis que k prend les valeurs $1, 2, \ldots n$. Les seconds membres sont ici les coefficients différentiels partiels de l'expression

$$\Sigma\,\frac{1}{m_k}\left[\left(\frac{dV}{dx_k}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy_k}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz_k}\right)^2\right]=U+h,$$

pris par rapport à x_i, y_i, z_i. On a donc

$$m_i\,\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{dU}{dx_i},\quad m_i\,\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{dU}{dy_i},\quad m_i\,\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{dU}{dz_i};$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Dans les applications, la fonction S paraît être principalement utile quand la fonction des forces U contient t explicitement. Au contraire la fonction V et l'introduction de la quantité H au lieu du temps t sont d'un grand avantage dans le cas plus fréquent où U est fonction des coordonnées seules : car puisque H est une constante dans ce dernier cas, en vertu de la loi des forces vives, l'équation différentielle partielle contient une variable et la solution complète que l'on cherche une constante arbitraire de moins. La fonction V dont M. Hamilton fait usage, pour trouver les équations intégrales complètes du mouvement, et qui doit satisfaire en même temps à deux équations différentielles partielles du premier ordre, a donc le grave inconvénient de contenir une quantité de plus qu'il n'est nécessaire : elle dépend en effet de h, des $3n$ coordonnées et de leurs $3n$ valeurs initiales, tandis qu'il suffit d'avoir une solution d'une seule équation différentielle partielle qui contienne h, les $3n$ coordonnées, et $3n-1$ constantes arbitraires.

VI.

Si la fonction des forces ne contient pas explicitement le temps t, on peut facilement chasser la quantité t des équations différentielles du mouvement, en les remplaçant par un système de $6n-1$ équations différentielles du premier ordre, entre les $6n$ variables $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$. En effet, si l'on désigne par $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$, les coordonnées des n points et par $q'_1, q'_2, \ldots q'_{3n}$, les produits respectifs de leurs masses par les projections de leurs vitesses sur les axes des coordonnées, on pourra représenter les équations différentielles du mouvement, savoir

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i},$$

par la proportion

$$dq_1 : dq_2 \ldots dq_{3n} : dq'_1 : dq'_2 \ldots dq'_{3n} =$$
$$\frac{1}{\mu_1} q'_1 : \frac{1}{\mu_2} q'_2 \ldots \frac{1}{\mu_{3n}} q'_{3n} : \frac{dU}{dq_1} : \frac{dU}{dq_2} \ldots : \frac{dU}{dq_{3n}}.$$

Les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{3n}$, se divisent en n groupes de trois quantités chacun, et dans un groupe quelconque, chaque quantité μ est égale à la masse du point auquel le groupe répond. Cette proportion remplace $6n - 1$ équations; mais le nombre de ces équations, comme celui des variables, peut être diminué d'une unité en éliminant une des variables par l'équation des forces vives, qui a lieu dans le cas présent et qui peut être écrite ainsi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} q_1'^2 + \frac{1}{\mu_2} q_2'^2 + \ldots + \frac{1}{\mu_{3n}} q_{3n}'^2\right) = \mathrm{U} + h.$$

Si l'on a complétement intégré ces équations, et qu'on ait de cette manière exprimé les $6n$ variables $q_1, q_2, \ldots q_{3n}, q_1', q_2', \ldots q_{3n}'$, en fonction d'une d'entre elles, de q_1 par exemple, on aura le temps par une quadrature au moyen de l'équation

$$dt = \mu_1 \frac{dq_1}{q'_1}, \quad t = \mu_1 \int \frac{dq_1}{q'_1}.$$

Pour trouver la fonction V donnée par M. Hamilton, il n'est pas nécessaire d'effectuer cette quadrature, mais on l'obtient immédiatement par une quadrature sans connaître t, si l'on a exprimé les $6n$ variables $q_1, q_2, q_{3n}, q'_1, q'_2, \ldots q'_{3n}$, en fonction d'une d'entre elles. En effet, on peut exprimer la fonction

$$\mathrm{V} = \int_0^t \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) dt = \int_0^t \left(\frac{1}{\mu_1} q_1'^2 + \frac{1}{\mu_2} q_2'^2 + \ldots + \frac{1}{\mu_{3n}} q_3'^2\right) dt,$$

par l'équation

$$\mathrm{V} = \int (q'_1 dq_1 + q'_2 dq_2 + \ldots + q'_{3n} dq_{3n}),$$

de laquelle t est entièrement sorti.

Si $q_1^{(0)}$ désigne la valeur de q_1 pour $t = 0$, de sorte que.... $t = \int_{q_1^{(0)}}^{q} \mu_1 \frac{dq_1}{q_1'}$, il faudra que l'intégrale V s'évanouisse pour... $q_1 = q_1^{(0)}$.

L'intégrale qui exprime la valeur de t est la différentielle partielle prise par rapport à h de l'intégrale qui exprime la valeur de V, comme on le voit par l'équation $\frac{d\mathrm{V}}{dh} = t$. On arrive ordinairement à une intégrale nouvelle en différentiant ainsi une intégrale par rapport à une constante. Mais il y a un cas très remarquable qui se présente dans l'astronomie physique, où les deux intégrales t et V peuvent être ramenées immédiatement l'une à l'autre.

C'est le cas où la fonction des forces est une fonction *homogène* des coordonnées.

Supposons que la fonction des forces U soit une fonction homogène du degré ε des $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i: alors on aura

$$\Sigma\left(x_i \frac{dU}{dx_i} + y_i \frac{dU}{dy_i} + z_i \frac{dU}{dz_i}\right) = \varepsilon U.$$

Donc, à cause des équations différentielles du mouvement,

$$\Sigma m_i \left(x_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + y_i \frac{d^2y_i}{dt^2} + z_i \frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = \varepsilon U.$$

Le premier membre devient une différentielle exacte en y ajoutant la force vive

$$\Sigma m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_i}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \cdot \frac{dz_i}{dt}\right) = 2U + 2h.$$

En intégrant ensuite par rapport à t et à partir de $t = 0$, il vient

$$\Sigma m_i (x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') - \Sigma m_i (a_i a_i' + b_i b_i' + c_i c_i') = (2 + \varepsilon) \int_0^t U dt + 2ht.$$

Mais on a aussi

$$V = \int_0^t \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\, dt = 2\int_0^t U dt + 2ht:$$

donc

$$\Sigma m_i (x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') - \Sigma m_i (a_i a_i' + b_i b_i' + c_i c_i') = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) V - \varepsilon ht.$$

C'est l'équation qui lie entre elles les fonctions V et t. Puisque le premier membre de cette équation est une différentielle exacte, on pourra trouver l'intégrale $\int V dt$.

Si l'on pose

$$R = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \quad R' = \frac{dR}{dt},$$

et que l'on appelle R_o, R'_o, les valeurs initiales de R, R', on peut écrire l'équation précédente de cette manière

$$R' - R_o' = (2 + \varepsilon) V - 2\varepsilon ht:$$

et l'on en tire en intégrant

$$R - R_o - R_o' t = (2 + \varepsilon) \int_0^t V dt - \varepsilon h t^2.$$

Dans le cas du système du monde, la fonction des forces U est du degré -1, et par conséquent $\varepsilon = -1$. On a donc alors

$$R' - R_o' = V + 2ht.$$

Quand la fonction des forces est du degré -2, c'est-à-dire quand $\varepsilon = -2$, on ne peut plus se servir des formules précédentes pour ramener la fonction V à la fonction t, parce que le terme multiplié par V s'évanouit. Mais dans ce cas on a deux nouvelles intégrales des équations différentielles du mouvement, savoir

$$R' - R_o' = 4ht, \quad R - R_o - R_o' t = 2ht^2,$$

qui contiennent deux constantes arbitraires R_o, R_o'. C'est le cas d'un système de points matériels assujétis à des attractions mutuelles qui s'exercent en raison inverse du cube des distances.

Si l'on met pour t sa valeur

$$t = \frac{dV}{dh},$$

on aura d'après les formules précédentes

$$R' - R_o' = (2 + \varepsilon) V - 2\varepsilon h \frac{dV}{dh} :$$

De là on déduit, en intégrant par rapport à h,

$$\int h^{-\frac{2+3\varepsilon}{2\varepsilon}}(\mathrm{R}'-\mathrm{R}_0')\,dh = -2\varepsilon h^{-\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}}\mathrm{V}+k,$$

équation où k est une quantité indépendante de h.

Si donc on connaît V pour une valeur particulière de h, par exemple pour $h=0$, on pourra trouver V en intégrant par rapport à h. Pour $\varepsilon = -1$, la formule précédente deviendra

$$\int(\mathrm{R}'-\mathrm{R}_0')\frac{h}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{h}.\mathrm{V}+k;$$

$\mathrm{R}'-\mathrm{R}_0'$ doit être exprimée en fonction de h et des valeurs initiales et finales des coordonnées, mais en intégrant on doit regarder h comme seule variable.

Je ferai encore à cette occasion les remarques suivantes. On déduit des formules précédentes la différentielle du second ordre de R par rapport au temps, exprimée par la fonction des forces, au moyen de l'équation

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{R}}{dt^2} = (2+\varepsilon)\,\mathrm{U}+2h.$$

Pour $\varepsilon = -1$, cette équation se réduit à

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{R}}{dt^2} = \mathrm{U}+2h.$$

Maintenant si M désigne la somme des masses, et X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité, c'est-à-dire si

$$\mathrm{MX} = \Sigma m_i x_i,\quad \mathrm{MY} = \Sigma m_i y_i,\quad \mathrm{MZ} = \Sigma m_i z_i,$$

on pourra, d'après une transformation algébrique connue, et souvent employée par Lagrange, exprimer la quantité MR de la manière suivante :

$$\mathrm{MR} = \Sigma m_i \Sigma m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$
$$= \Sigma m_i m_k[(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2]+\mathrm{M}^2(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2),$$

c'est-à-dire (en nommant $r_{i,k}$ la distance des masses m_i, m_k)

$$\mathrm{MR} = \Sigma m_i m_k r_{i,k}^2 + \mathrm{M}^2(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2),$$

où l'on doit étendre la somme Σ à tous les groupes de deux points dans le système. Le centre de gravité d'un système de corps assujétis seulement à leurs attractions mutuelles se meut en ligne droite d'une manière uniforme, en sorte que l'on a

$$X = \alpha t + \beta, \quad Y = \alpha' t + \beta', \quad Z = \alpha'' t + \beta''.$$

Au moyen de la transformation donnée de mR et en faisant

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2,$$

on trouve donc pour le cas de $\varepsilon = -1$,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma\, m_i m_k r_{i,k}^2}{dt^2} = \text{MU} + 2 \qquad - \text{M}^2\gamma^2,$$

où γ est la vitesse du centre de gravité. Si l'on substitue l'expression de la fonction des forces U qui a lieu dans la loi d'attraction de Newton, il viendra

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{\text{M}dt^2} = \Sigma\,\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} + 2h - \text{M}\gamma^2.$$

Mais, par la loi des forces vives,

$$\Sigma m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - 2\Sigma\,\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} = 2h:$$

on a donc l'équation

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{\text{M}dt^2} = \Sigma\, m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \text{M}\gamma^2 - \Sigma\,\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}.$$

L'expression

$$\frac{1}{\text{M}}\,\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2 = \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \text{M}(\text{X}^2 + \text{Y}^2 + \text{Z}^2)$$

est égale à la somme des masses du système multipliées respectivement par les carrés de leurs distances au centre de gravité. On le prouve par l'équation même que nous venons d'écrire, en y prenant le centre de gravité pour origine des coordonnées, ce qui fait $\text{X} = \text{Y} = \text{Z} = 0$. On prouve semblablement que

$$\Sigma m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \text{M}\gamma^2$$

est la force vive relative au centre de gravité, c'est-à-dire la somme des masses du système multipliées respectivement par les carrés de leurs vitesses autour de son centre de gravité. Si le système est stable, l'expression

$$\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2$$

ne doit devenir ni l'infini ni o, lorsque t croît indéfiniment. D'où il suit facilement que sa différentielle du second ordre ne doit jamais conserver constamment le même signe à partir d'un temps quelconque. Les deux équations

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{Mdt^2} = \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} + 2h - M\gamma^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{Mdt^2} = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2 - \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

montrent donc que, pour que le mouvement autour du centre de gravité du système soit stable: 1° la constante $2h - M\gamma^2$ doit être négative; à cause de l'équation

$$2h - M\gamma^2 = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2 - 2\,\Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

cela revient à dire que la force vive relative au centre de gravité doit toujours rester plus petite que le double de la fonction des forces; 2° la force vive relative au centre de gravité doit être alternativement plus grande et plus petite que la fonction des forces; 3° la fonction des forces, de même que la force vive relative, doit être alternativement plus grande et plus petite que la constante $M\gamma^2 - 2h$.

Développons la force vive et la fonction des forces en séries de cosinus et sinus d'angles proportionnels au temps: si le système est stable, la quantité $M\gamma^2 - 2h$ doit être la vraie valeur du terme constant dans chaque série, car une valeur différente du terme constant donnerait dans l'expression de

$$\Sigma\, m_i m_k\, r_{i,k}^2$$

des termes multipliés par le carré du temps, et qui, par conséquent, croîtraient indéfiniment avec le temps.

VII.

Pour expliquer ce qui précède par un exemple, je donnerai la fonction V pour un cas très simple, le mouvement elliptique d'une planète. Puisqu'on connaît par le théorème de Lambert l'expression du temps écoulé t en fonction des valeurs initiales et finales des coordonnées, on pourra, par ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, trouver immédiatement la valeur de V sans une nouvelle intégration. Soit r le rayon vecteur, $r' = \frac{dr}{dt}$, E l'anomalie excentrique, r_0, r_0', E_0 les valeurs initiales de r, r', E; soit de plus k^2 la force attractive pour l'unité d'espace, e l'excentricité, a le demi grand axe. Si l'on prend comme M. Gauss (*Theoria motus*, page 120),

$$\frac{E - E_0}{2} = g, \quad \frac{E + E_0}{2} = G,$$

et qu'on introduise un angle auxiliaire h au moyen de l'équation

$$e \cos G = \cos h,$$

puis que l'on fasse

$$h + g = \varepsilon, \quad h - g = \varepsilon',$$

on aura pour l'expression du temps écoulé

$$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} t = \varepsilon - \sin \varepsilon - (\varepsilon' - \sin \varepsilon').$$

La loi des forces vives donne

$$\frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) = k^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right),$$

de sorte que la constante h est ici $-\frac{k^2}{2a}$, et la fonction des forces U est ici $\frac{k^2}{r}$. Donc si l'on met dans la formule du paragraphe précédent

$$R' - R'_0 = V + 2ht$$

pour R et h leurs valeurs, savoir,

$$R = r^2, \quad h = -\frac{k^2}{2a},$$

on aura

$$V = 2\,(rr' - r_0 r_0') + \frac{k^2}{a}\,t.$$

J'ai négligé ici dans les expressions de V, R, h, la masse de la planète attirée, parce qu'elle est facteur de ces trois quantités, et par conséquent disparaît du calcul.

Les formules connues du mouvement elliptique donnent

$$rz' = k\sqrt{a}.\ e \sin E,$$

donc

$$rr' - r_0 r_0' = k\sqrt{a}.\ e\,(\sin E - \sin E_0)$$

$$= Rk\sqrt{a}.\, e \sin g \cos G = 2k\sqrt{a} \sin g \cos h = k\sqrt{a}\,(\sin\varepsilon - \sin\varepsilon').$$

En se servant de cette expression et de l'expression du temps t donnée par Lambert, on aura pour V une expression semblable à celle de t, savoir

$$V = k\sqrt{a}\,[\varepsilon + \sin\varepsilon - (\varepsilon' + \sin\varepsilon')],$$

qui ne diffère de $\frac{k^2}{a}\,t$ que par le signe des sinus. Si l'on désigne par ρ la corde de l'arc qui unit les points initial et final, on aura, d'après les formules données par M. Gauss à l'endroit cité,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r + r_0 + \rho}{4a},\ \sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r + r_0 - \rho}{4a},$$

ou

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$
$$\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Au moyen de ces formules, V aussi bien que t est exprimé par les coordonnées des points initial et final, et par le grand axe. L'expression donnée ici pour V coïncide avec celle trouvée par M. Hamilton par un autre procédé.

Si l'on fait varier dans l'expression donnée de V toutes les quantités à l'exception de k et a, on aura

$$\delta V = 2k\sqrt{a}\,\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon - \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon'\delta\varepsilon'\right).$$

Mais l'on a

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon = \frac{\delta r + \delta r_0 + \delta\rho}{4a},\ \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon'.\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon' = \frac{\delta r + \delta r_0 - \delta\rho}{4a}.$$

Donc en considérant les équations

$$\text{cotang}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon - \text{cotang}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon' = -\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon'} = -\frac{\sin g}{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon'},$$

$$\text{cotang}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon + \text{cotang}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon'} = \frac{\sin h}{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon'},$$

on aura

$$\delta V = \frac{k\,[\sin h\delta\rho - \sin g\,(\delta r + \delta r_0)]}{2\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon'}.$$

On peut, en vertu des formules précédentes, mettre le dénominateur sous la forme

$$2\sqrt{a}.\,\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon' = \frac{\sqrt{[(r+r_0)^2-\rho^2]}}{2\sqrt{a}}.$$

Si l'on introduit dans cette formule l'angle formé par les rayons vecteurs r et r_0, que nous appellerons avec M. Gauss $2f$, on aura

$$r^2 + r_0^2 - \rho^2 = 2rr_0\cos 2f,$$

d'où
$$2\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon' = \frac{\cos f}{\sqrt{a}}\sqrt{rr_0}\,;$$

Donc on a, pour la variation de V, l'équation

$$\delta.V = \frac{k\sqrt{a}\,[\sin h\delta\rho - \sin g(\delta\rho + \delta\rho_0)]}{\cos f\sqrt{rr_0}},$$

dans laquelle on peut remplacer un des angles g, h, par l'autre au moyen de l'équation

$$\rho = 2a\sin g\sin h,$$

qui se déduit facilement des formules précédentes. L'expression de la variation de V donne immédiatement les projections sur les axes des coordonnées des vitesses des points initial et final. En effet, si l'on exprime ρ, r, r_0, par les coordonnées, on trouve :

$$x' = \frac{dV}{dx} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{x-x_0}{\rho}\sin h - \frac{x}{r}\sin g\right),$$

$$y' = \frac{dV}{dy} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{y-y_0}{\rho}\sin h - \frac{y}{r}\sin g\right),$$

$$z' = \frac{dV}{dz} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{z - z_0}{\rho}\sin h - \frac{z}{r}\sin g\right),$$

$$x_0' = -\frac{dV}{dx_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{x - x_0}{\rho}\sin h + \frac{x_0}{r_0}\sin g\right),$$

$$y_0' = -\frac{dV}{dy_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{y - y_0}{\rho}\sin h + \frac{y_0}{r_0}\sin g\right),$$

$$z_0' = -\frac{dV}{dz_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{z - z_0}{\rho}\sin h + \frac{z_0}{r_0}\sin g\right).$$

Si l'on appelle b le demi-petit axe, en se rappelant l'équation donnée par M. Gauss,

$$b \sin g = \sin f\ \sqrt{rr_0},$$

et que l'on fasse le demi-paramètre $\frac{b^2}{a} = p$, on déduira facilement de ces formules les suivantes :

$$x' - x_0' = -\frac{k \tang f}{\sqrt{p}}\left(\frac{x}{r} + \frac{x_0}{r_0}\right),$$

$$y' - y_0' = -\frac{k \tang f}{\sqrt{p}}\left(\frac{y}{r} + \frac{y_0}{r_0}\right),$$

$$z' - z_0' = -\frac{k \tang f}{\sqrt{p}}\left(\frac{z}{r} + \frac{z_0}{r_0}\right);$$

d'où après quelques réductions,

$$\sqrt{\left[(x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 (z' - z_0')^2\right]} = \frac{2k \sin f}{\sqrt{p}}.$$

J'ai ajouté ces formules à cause de leur simplicité. J'observe encore que les quantités $\frac{x}{r} + \frac{x_0}{r_0}$, $\frac{y}{r} + \frac{y_0}{r_0}$, $\frac{z}{r} + \frac{z_0}{r_0}$ sont égales à la quantité $2 \cos f$ multipliée par les cosinus des angles que la ligne qui divise en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs fait avec les axes des coordonnées.

On peut vérifier l'expression trouvée de V au moyen de l'équation

$$t = \frac{dV}{dh} = -\frac{dV}{d \cdot \frac{k^2}{2a}} = \frac{2a^2}{k^2} \cdot \frac{dV}{da}.$$

Si l'on prend la différentielle partielle, par rapport à a de l'expression

$$V = k\sqrt{a}\,[2 + \sin \varepsilon - (\varepsilon' + \sin \varepsilon')],$$

on aura l'équation

$$\frac{dV}{da} = 2k\sqrt{a}\left(\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{d\varepsilon}{da} - \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{da}\right) + \frac{1}{2a}V.$$

Mais on tire des équations

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r+r_0+\varrho}{4a}, \quad \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r+r_0+\varrho}{4a},$$

celles-ci :

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{d\varepsilon}{da} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{a}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon' d\varepsilon' = -\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}{a}.$$

L'équation précédente devient donc

$$\frac{dV}{da} = -\frac{k}{\sqrt{a}}(\sin\varepsilon - \sin\varepsilon') + \frac{V}{2a} = \frac{k}{2\sqrt{a}}[\varepsilon - \varepsilon' - (\sin\varepsilon - \sin\varepsilon')] = \frac{k^2}{2a}t,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

L'équation différentielle partielle, à l'intégration complète de laquelle on peut ramener le mouvement d'un système de points qui s'attirent mutuellement, et qui sont attirés vers des centres fixes, était

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2\right] = U + h.$$

Il s'ensuit que pour notre exemple, l'équation différentielle partielle sur l'intégration de laquelle on ramène le mouvement d'une planète autour du soleil est

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] = k^2\left[\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} - \frac{1}{2a}\right] = k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right).$$

Je vais maintenant démontrer que l'expression donnée de V satisfait réellement à cette équation différentielle partielle. Car si l'on se rappelle les valeurs trouvées précédemment pour $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, et que l'on tienne compte des équations

$$x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0) = r_0 - rr_0\cos 2f, \quad \sin g\sin h = \frac{\varrho}{2a},$$

on aura

$$\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] = \frac{k^2u}{\cos^2 f\,.\,rr_0}\left(\sin^2 h + \sin^2 g - \frac{r - r_0\cos 2f}{a}\right).$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\sin^2 h + \sin^2 g &= 2\left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\varepsilon'}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &= 2\left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\right) - 4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin^2\frac{\varepsilon'}{2},\end{aligned}$$

ou d'après les formules précédemment données,

$$\sin^2 h + \sin^2 g = \frac{r + r_0}{a} - \frac{\cos^2 f . rr_0}{a^2}.$$

Donc

$$a(\sin^2 h + \sin^2 g) - (r - r_0 \cos 2f) = r_0 \cos^2 f \left(2 - \frac{r}{a}\right),$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] = k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right),$$

ce qui est l'équation cherchée. Nous voyons en même temps de cette manière que les valeurs données de x', y', z' satisfont à l'équation de la force vive.

Dans le mouvement parabolique, la constante, qui dans la loi de la conservation de la force vive, est ajoutée à la fonction des forces, disparaît, ou a devient ∞. Les angles ε, ε', h, g, deviennent des infiniment petits de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{a}}$. On déduit donc pour ce cas, des formules précédentes celles-ci

$$\sqrt{a}.\varepsilon = \sqrt{(r + r_0 + \rho)}, \quad \sqrt{a}.\varepsilon' = \sqrt{(r + r_0 - \rho)};$$

puis

$$\sqrt{a^3}.(\varepsilon - \sin\varepsilon) = \frac{1}{5}\sqrt{a^3}.\varepsilon^3 = \frac{1}{6}(r + r_0 + \rho)^{\frac{3}{2}},$$

$$\sqrt{a^3}.(\varepsilon' - \sin\varepsilon') = \frac{1}{6}\sqrt{a^3}.\varepsilon'^3 = \frac{1}{6}(r + r_0 - \rho)^{\frac{3}{2}},$$

au moyen desquelles les expressions données de V et t prennent la forme

$$V = 2k[\sqrt{(r + r_0 + \rho)} - \sqrt{(r + r_0 - \rho)}],$$
$$t = \frac{1}{6k}\left[(r + r_0 + \rho)^{\frac{3}{2}} - (r + r_0 - \rho)^{\frac{3}{2}}\right],$$

dont la dernière est l'expression connue du temps, dans le mouvement parabolique d'une comète. Si l'on pose pour abréger,

$$\frac{1}{\sqrt{(r + r_0 - \rho)}} + \frac{1}{\sqrt{(r + r_0 + \rho)}} = A, \quad \frac{1}{\sqrt{(r + r_0 - \rho)}} - \frac{1}{\sqrt{(r + r_0 + \rho)}} = B,$$

on en tirera

$$x' = \frac{dV}{dx} = k\left(\frac{x - x_0}{\rho} A - \frac{x}{r} B\right),\quad x_0' = -\frac{dV}{dx_0} = k\left(\frac{x - x_0}{\rho} A + \frac{x_0}{r_0} B\right),$$
$$y' = \frac{dV}{dy} = k\left(\frac{y - y_0}{\rho} A - \frac{y}{r} B\right),\quad y_0' = -\frac{dV}{dy_0} = k\left(\frac{y - y_0}{\rho} A + \frac{y_0}{r_0} B\right),$$
$$z' = \frac{dV}{dz} = k\left(\frac{z - z_0}{\rho} A - \frac{z}{r} B\right),\quad z_0' = -\frac{dV}{dz_0} = k\left(\frac{z - z_0}{\rho} A + \frac{z_0}{r_0} B\right).$$

M. Hamilton donne aux expressions de t et V une forme particulière que je vais indiquer.

En effet, puisqu'on déduit ε' de ε en écrivant $-\rho$ au lieu de ρ, on peut écrire la valeur de V de cette manière

$$V = k\sqrt{a}\int_{-\rho}^{+\rho} (1 + \cos\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{d\rho}\,d\rho.$$

en considérant a, r, r_0 comme constantes, et ρ comme seule variable pendant l'intégration.

Mais puisque

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r + r_0 + \rho}{4a},$$

on a

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{d\varepsilon}{d\rho} = \frac{1}{4a},$$

donc

$$(1 + \cos\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{d\rho} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{d\varepsilon}{d\rho} = \frac{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{2a\sin\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{1}{2a}\sqrt{\left(\frac{4a}{r + r_0 + \rho} - 1\right)},$$

et par conséquent

$$V = k\int_{-\rho}^{+\rho}\left(\frac{1}{r + r_0 + \rho} - \frac{1}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} d\rho.$$
$$t = \frac{2a^2}{k^2}\,\frac{dV}{da} - \frac{1}{4}k\int_{-\rho}^{+\rho}\left(\frac{1}{r + r_0 + \rho} - \frac{1}{4a}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho:$$

ce sont les expressions données par M. Hamilton. Si l'on y fait $a = \infty$, ou a négative, on a les formules pour le mouvement parabolique et hyperbolique.

(La suite à un autre cahier.)

Notes historiques, 1°. sur la locution : diviser une droite en moyenne et extrême raison ; 2°. sur la méthode des polygones réguliers isopérimètres. Et observations sur quelques théorèmes de M. Chasles ;

Par M. O. TERQUEM.

I. Euclide, au livre II, prop. 1, prob. 2, propose et résout le problème suivant, en ces termes. « Partager une droite de sorte que le carré du grand segment soit équivalent au rectangle du petit segment et de la ligne entière » ; ce qui est fort clair. Mais au livre VII on trouve cette définition ; c'est la troisième : ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὔθεια τεθμῆσθαι λέγεται ὅταν ῆ ὡς ἡ ὅλον πρὸς τὸ μεῖζον τμήμα, οὗτω το μεῖζον πρὸς τὸν ἔλασσον ; mot à mot : une droite est dite être divisée en extrême et moyenne raison, lorsque la (droite) entière est au plus grand segment, comme ce plus grand segment est au plus petit. Dans le même livre, Euclide résout de nouveau le problème cité (prop. 30, prob. 10), mais en se servant des termes employés dans la définition. Il est évident que notre locution française est une traduction *littérale* de la locution grecque ; mais est-ce une traduction *fidèle ?* Il est permis d'en douter, puisqu'elle ne présente aucun sens intelligible, même en omettant, comme fait M. Vincent, le mot *raison*. Zamberti le Vénitien, dans son interprétation latine d'Euclide (réimprimée avec l'ouvrage d'Orontius Finaeus, en 1544), donne cette explication : *per extremam et mediam rationem, hoc est, per extremos et medios* terminos, *rationum similitudinem constituentes*, ce qui est déjà plus clair. Mais le vrai sens me paraît avoir été donné par Lorentz, qui a publié, en 1781, une excellente traduction allemande d'Euclide. Voici comment il traduit la troisième définition du VI^e^ livre : *Eine gerade linie ist nach stetiger proportion geschnitten, wenn die ganze linie*, etc. ; c'est-à-dire une droite est divisée en *pro-*

portion continue, lorsque la ligne entière est au grand segment, etc. Cette version rend *fidèlement* l'idée du géomètre grec, et c'est ainsi que le problème devrait être énoncé dans nos traités élémentaires. Comme le principal emploi de ce problème consiste à trouver le côté du décagone régulier ayant un rayon donné, on pourrait aussi se servir de cette expression : *diviser une droite décagonalement ;* ce qui présente un avantage mnémonique. Cette façon de parler est même admissible pour tous les polygones réguliers.

II. J. Schwab, mort à Nancy en 1813, a publié dans la même année et dans la même ville, des éléments de géométrie avec un *nouveau* moyen d'approcher plus promptement du rapport de la circonférence au diamètre. Ce moyen est fort ingénieux, et repose sur le théorème suivant très facile à démontrer. R et r étant le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, R' et r' les mêmes lignes dans le polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, on a ces deux relations

$$2r' = R + r, \quad R'^2 = Rr';$$

pour avoir r' et R', il suffit donc de prendre une moyenne arithmétique et une moyenne géométrique; cette dernière opération revient sensiblement à la première, lorsque les deux quantités diffèrent peu. On a donc ici le moyen d'obtenir des polygones isopérimètres, dont les rayons et les apothèmes s'appprochent indéfiniment du rayon de la circonférence isopérimètre. Mais en 1813, ce moyen n'était plus *nouveau ;* car il appartient à Descartes, ainsi qu'on peut s'en assurer en consultant un mémoire d'Euler, inséré dans les *Novi comm. Petrop.*, tom. VIII, p. 157. Ce mémoire débute ainsi :

« In excerptis ex manuscriptis Cartesii paucis quidem verbis refertur constructio quædam geometrica promptissime ad circuli veram dimensionem appropinquans, sed quæ sive Cartesius ipse eam invenerit, sive ab alio habuerit communicatam, accutissimum inventoris ingenium, illo præsertim tempore, luculenta declarat. Qui deinceps hoc idem argumentum pertractarunt, quantum quidem memini, nullam hujus eximiæ constructionis mentionem faciunt, ut periculum sit ne tandem penitus oblivione obruatur. » (*V.* aussi les *OEuvres de Descartes* publ. par Vict. Cousin, t. XI, p. 442).

Malgré cet avertissement d'Euler, donné en 1763, la *belle* construction a été si complétement oubliée que Schwab a dû la retrouver en 1813. Le moyen de Descartes consiste précisément à calculer les apothèmes d'une suite de polygones réguliers isopérimètres, et dont le nombre de côtés croît en raison double. La démonstration n'est pas jointe à la construction ; mais Euler y supplée facilement, et, selon sa manière, il déduit analytiquement de cette construction des séries trigonométriques qui n'ont plus un grand intérêt. Le mémoire est terminé par cet ingénieux scolie. Si l'on porte sur une même droite les longueurs AB, AC, AD, AE, etc , apothèmes de polygones réguliers isopérimètres de 4, 8, 16, 32 côtés, etc.... et qu'en B, C, D, E... on élève des perpendiculaires Bb, Cc, Dd, Ee .. égales aux demi-côtés de ces polygones, les points b, c, d, e... appartiennent à une même quadratrice dont l'intersection avec la ligne des apothèmes détermine le rayon d'une circonférence égale au périmètre donné. On sait que les anciens se sont servis de la quadratrice pour carrer le cercle et par conséquent aussi pour rectifier la circonférence.

III. La jolie démonstration géométrique que M. Chasles donne d'une intégrale définie, dans le n° de janvier 1838 de ce Journal, paraît susceptible d'une abréviation, à partir de cette équation

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = \Sigma \frac{p}{\mu} d\omega = \frac{1}{\mu} \Sigma p d\omega \text{ (page 12).}$$

Il est évident que $\Sigma p d\omega$ est le triple du volume de l'ellipsoïde; on a donc de suite

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 4\pi \sqrt{\mu^2 - b^2} . \sqrt{\mu^2 - c^2}.$$

L'auteur parvient à la même conclusion (page 13).

En considérant sur une sphère le lieu géométrique du point dont la somme ou la différence des distances à deux foyers pris sur la sphère soit constante, les distances étant mesurées par des arcs de grand cercle, on obtient une courbe elliptico-sphérique, ou hyperbolico-sphérique, et il est évident que si les deux courbes sont confocales, elles se coupent orthogonalement. (*Fuss. novi comm. Petrop.* t. XII, ann. 1774, page 196.) Les rayons de la sphère, qui passent par les foyers, sont les lignes focales des cônes du second degré dont parle M. Chasles à la page 15 du n° cité.

Les courbes sphériques jouissent de propriétés remarquables. Soit une corde inscrite dans une surface du second degré, et O un point fixe pris sur cette corde et qui la divise en deux segments additifs ou soustractifs. Soit m^2 le produit des deux segments: par le point O passent une infinité de cordes, pour lesquelles m est une quantité constante. Le système de ces cordes forme un cône du second degré, rencontrant la surface suivant une courbe sphérique. Le centre de la sphère et le point O sont sur une droite perpendiculaire au plan polaire du point O. Si par un point I pris sur la surface, on mène un cône parallèle au précédent, il coupera la surface aussi suivant une courbe sphérique, dont le centre est sur la normale au point I. Menons un plan *conjugué* au point I, c'est-à-dire, un plan parallèle à celui qui est tangent en I; ce plan conjugué coupera la surface suivant une conique; prenons le point fixe O sur un axe principal de cette conique et pour m^2 le rectangle des segments de cet axe; alors le cône y relatif, devient évidemment tangent au plan conjugué, et si par le point I on conçoit un cône parallèle, il aura même plan tangent que la surface, qu'il rencontre suivant une courbe sphérique dont le centre est le centre de courbure de la surface au point I. Comme la conique dont il a été question a deux axes principaux, on aura aussi au point I deux centres de courbures. Les parallèles à ces axes principaux menées par le point I donnent les directions des deux lignes de courbures, comme l'a déjà fait voir M. Dupin dans ses excellents Développements de Géométrie auxquels on doit tant de découvertes qui ont été faites depuis, dans la science de l'espace en général, et dans celle des surfaces du second degré en particulier.

IV. M. Chasles, qui cultive avec tant de succès cette dernière partie, vient d'introduire dans la théorie des coniques la considération des *axes conjugués relatifs à un point fixe* (oct. 1837, tome II, p. 390). Il déduit cette théorie, de celle de la perspective; ce qui la rend *intuitive*, but principal de l'auteur; toutefois, il est facile d'établir cette théorie sur des principes purement analytiques. En effet, soit l'équation générale à six termes d'une conique à axes quelconques:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0:$$

$y = px$, $y = qx$ étant les équations des deux droites passant par l'origine, pour que ces droites soient conjuguées relativement à cette origine, on doit avoir la relation

$$lpq + n(p+q) + l' = 0; \quad \text{où} \quad \begin{aligned} l &= D^2 - 4AF, \\ l' &= E^2 - 4CF, \\ n &= DE - 2BF. \end{aligned}$$

Si les axes des coordonnées sont conjugués relativement à l'origine, on a $n = 0$ *et vice versa*. Si l'on a $l = l'$ et $n = l\cos\gamma$, γ étant l'angle des axes, alors l'origine est un foyer; et la relation ci-dessus montre que dans ce cas tous les axes conjugués au foyer sont rectangulaires, propriété connue; pour que deux diamètres soient conjugués relativement au centre, l'on doit avoir $D = E = 0$ et $n = 0$, donc $B = 0$; par conséquent, les diamètres sont conjugués aussi dans le sens ordinaire de ce mot. Ainsi les diamètres conjugués ordinaires sont un cas particulier des axes conjugués en général. Il est facile de transformer et de généraliser analytiquement les propriétés connues du cas ordinaire pour les adapter au cas général. Je supprime cette généralisation, dans la crainte de dépasser l'espace que l'on peut m'accorder dans ce Journal.

Nouvelle manière d'étudier les coniques dans le cône oblique. — Propriétés générales du cône et des coniques planes et sphériques;

Par M. CHASLES.

Les Anciens ont considéré les coniques dans le cône oblique à base circulaire; mais ils n'ont eu à faire usage des propriétés du cercle qui sert de base au cône, que pour démontrer une propriété principale de ces courbes, de laquelle ils ont déduit ensuite, par de simples considérations de Géométrie plane, toutes les autres propositions de la théorie des coniques, qui nous ont été transmises dans le grand ouvrage d'Apollonius. Les Modernes, jusqu'à ce que la Géométrie de Descartes se fût emparée de cette théorie et en eût fait une question d'analyse, ont aussi étudié ces courbes dans le cône, mais par une autre méthode que celle des Anciens, et en appliquant à ces courbes les propriétés mêmes du cercle. C'est à Verner, géomètre du XV^e siècle, qu'on doit l'idée heureuse et les premiers essais de cette manière qui a été suivie avec succès, un siècle après, par le savant Maurolycus de Messine, et plus tard par Desargues, Pascal et de la Hire. Mais on voit que ces deux méthodes, des Anciens et des Modernes, bien que fondées l'une et l'autre sur la considération du cône, ne faisaient aucun usage des propriétés de cette figure. Aussi ces propriétés restèrent-elles ignorées.

Il y avait une troisième manière d'étudier les coniques; c'était de tirer leurs propriétés directement de celles du cône. Cette méthode eût été facile, satisfaisante, et briève surtout; chaque propriété du cône s'appliquant en même temps, et par une seule démonstration, aux trois sections coniques, ellipse, hyperbole, parabole, que les Anciens et les Modernes eux-mêmes traitaient séparément.

Quant aux propriétés du cône, on les aurait tirées de celles du cercle qui lui sert de base. Cela n'offre pas de difficulté. Je crois en avoir donné la preuve dans mon *Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré*, où je suis parvenu à un grand nombre de propositions nouvelles, sans aucun autre secours que la connaissance des propriétés du cercle. Mais il est vrai que, dans cet écrit, je n'ai eu en vue que deux classes spéciales des propriétés du cône ; celles qui se rattachent à ses *lignes focales* et aux plans de ses *sections circulaires*. On pourrait donc se demander si la marche que j'ai suivie s'appliquera avec la même facilité à des propositions d'un autre genre ; c'est-à-dire si, d'une part, il sera toujours facile de tirer les propriétés du cône de celles du cercle, et ensuite de s'en servir pour démontrer celles des coniques.

Il n'y a point de doute que, quand la Géométrie aura été suffisamment cultivée, quand elle se sera créé les ressources et les méthodes qui lui manquent, elle pourra, par la considération seule du cercle qui sert de base au cône, démontrer toutes les propriétés de cette figure; car elles participent de celles du cercle, qui en sont la seule et vraie origine. On conçoit qu'ensuite le transport de ces propriétés aux coniques n'offrira pas de difficultés.

Je vais présenter un nouvel exemple de cette méthode, qui pourra en montrer l'efficacité et la portée. Je choisis la fameuse proposition *ad quatuor lineas*, que Descartes a prise pour premier essai de sa méthode de *Géométrie analytique*, et qu'il appelle *Problème de Pappus*, parce que c'est dans le 7ᵉ livre des *Collections mathématiques*, qu'il en est fait mention. La question est celle-ci :

Étant données quatre droites dans un plan, on demande le lieu géométrique d'un point tel que si l'on abaisse de ce point des obliques, sous des angles donnés, sur ces droites, le produit des deux premières soit dans un rapport constant avec le produit des deux autres.

Le lieu demandé est une section conique, ainsi que l'ont trouvé les Anciens. Mais cette proposition leur avait offert de grandes difficultés. Euclide ne l'avait pas démontrée complétement, comme nous l'apprend Apollonius ; parce qu'on ignorait alors, dit-il, plusieurs belles propriétés des coniques, nécessaires pour sa démonstration. Ces propriétés font partie du troisième livre de son grand ouvrage ; mais la proposition elle-même ne s'y trouve pas ; elle était comprise sans doute dans quelque autre des nombreux traités d'Apollonius qui ne nous sont pas parvenus.

Les démonstrations que les Modernes ont données de cette proposition sont plus ou moins compliquées, de sorte qu'on a cessé de la comprendre dans les traités des sections coniques, quoiqu'elle soit l'une des propriétés de ces courbes les plus générales et les plus fécondes. La méthode pour l'étude des coniques, que nous venons d'indiquer, en fournit une démonstration très facile, tirée entièrement des propriétés du cercle, et qui n'exige la connaissance d'aucune propriété de ces courbes. Ce mode de démonstration offre encore l'avantage de conduire, en même temps, à plusieurs autres propositions non moins importantes. Cela provient de ce que toutes les propriétés du cône du second degré sont doubles, c'est-à-dire qu'à chacune d'elles en correspond toujours une autre. Cette dualité provient de ce que le cône *supplémentaire* d'un cône du second degré est lui-même un cône du second degré.

Démonstration du théorème ad quatuor lineas.

Il nous faut, suivant la méthode dont il vient d'être question, démontrer d'abord le théorème dans le cercle, pour en conclure ensuite son analogue dans le cône, puis dans les coniques.

Soit donc un cercle et un quadrilatère ABCD qui lui soit inscrit ; que d'un point m de la circonférence du cercle on abaisse des perpendiculaires ma, mb, mc, md sur les côtés AB, BC, CD, DA du quadrilatère (*) ; les deux angles mAB, mCB sont suppléments l'un de l'autre ; par conséquent les deux triangles rectangles mAa, mCb sont semblables, et l'on a $\frac{ma}{mb}=\frac{m\mathrm{A}}{m\mathrm{C}}$. On a pareillement $\frac{mc}{d}=\frac{m\mathrm{C}}{m\mathrm{A}}$. Donc

$$ma.mc=mb.md\,;$$

ce qui exprime cette propriété du cercle :

(*) *Voir* figure 1, planche I.

Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, le produit des distances de chaque point de la circonférence du cercle, à deux côtés opposés du quadrilatère, est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés.

Maintenant prenons le cercle pour la base d'un cône, dont le sommet S soit un point quelconque de l'espace; et regardons les côtés du quadrilatère comme les traces des faces d'un angle solide quadrangulaire inscrit dans le cône.

Que du point m on abaisse des perpendiculaires ma', mb', mc', md' sur les quatre plans SAB, SBC, SCD, SDA, de l'angle solide. Soient α, β, γ, δ les angles que ces plans font avec le plan du cercle; on aura

$$ma' = ma \sin\alpha,\quad mb' = mb \sin\beta,\quad mc' = mc \sin\gamma,\quad md' = md \sin\delta.$$

D'où, à cause du théorème précédent;

$$\frac{ma'.mc'}{mb'.md'} = \frac{\sin\alpha.\sin\gamma}{\sin\beta.\sin\delta}.$$

Mais les perpendiculaires ma', mb', etc., sont entre elles comme les sinus des angles que l'arète Sm fait avec les plans SAB, SBC, etc., respectivement; on a donc, en appelant A, B, C, D ces angles,

$$\frac{\sin A.\sin C}{\sin B.\sin D} = \frac{\sin\alpha.\sin\gamma}{\sin\beta.\sin\delta}.$$

Le second membre est constant, quelle que soit la position de l'arète Sm. On a donc cette propriété générale des cônes du second degré,

Quand un angle solide quadrangulaire est inscrit dans un cône du second degré, le produit des sinus des angles qu'une arète quelconque du cône fait avec deux faces opposées de cet angle, est au produit des sinus des angles que la même arète fait avec les deux autres faces, dans un rapport constant;

Ce rapport est égal au produit des sinus des angles que les deux premières faces font avec le plan d'une des sections circulaires du *cône divisé par le produit des sinus des angles que les deux autres faces font avec le même plan.*

Telle est la propriété des cônes du second degré que nous voulions démontrer. Elle correspond, comme on voit, au théorème *ad quatuor lineas* de la Géométrie plane. Pour en déduire celui-ci, coupons le cône suivant une conique quelconque. Soit m un point de cette courbe. Les sinus des angles que l'arète Sm fait avec les faces de l'angle solide sont proportionnels aux perpendiculaires abaissées du point m sur ces faces; et ces perpendiculaires sont égales, respectivement, à celles abaissées du même point sur les traces des faces de l'angle solide sur le plan coupant, multipliées respectivement par les sinus des angles que ces faces font avec le plan coupant. On conclut donc du théorème précédent, que, le produit des perpendiculaires abaissées du point m sur deux faces opposées est au produit des perpendiculaires abaissées sur les deux autres faces, dans un rapport constant. C'est-à-dire que

Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique, le produit des distances de chaque point de la courbe à deux côtés opposés du quadrilatère, est au produit des distances du même point aux deux autres côtés, dans un rapport constant.

Telle est la propriété des coniques qu'il s'agissait de démontrer. On voit qu'elle n'a nécessité la connaissance d'aucune autre propriété de ces courbes.

On peut, sans autre démonstration, parvenir à de nouvelles propriétés du cône et des coniques, aussi générales que les précédentes.

Pour cela reprenons le théorème ci-dessus, relatif au cône. Formons le cône *supplémentaire;* ses lignes *focales* correspondront aux plans *cycliques* du premier; il s'ensuivra ce théorème:

Quand un angle solide quadrangulaire est circonscrit à un cône du second degré, chaque plan tangent au cône fait avec deux arètes opposées de l'angle solide des angles dont le produit des sinus est au produit des sinus des angles que le même plan tangent fait avec les deux autres arètes, dans une raison constante;

Cette raison est égale au rapport des produits des sinus des angles qu'une ligne focale du cône fait avec les arètes opposées de l'angle solide.

Pour passer au théorème correspondant dans les coniques, menons un plan transversal; il coupera le cône suivant une conique, et l'angle solide suivant un quadrilatère circonscrit à cette courbe : les sinus des angles que les arètes de l'angle solide font avec un plan tangent sont égaux aux perpendiculaires abaissées des sommets du quadrilatère sur le plan tangent, divisées respectivement par les arètes qui aboutissent à ces sommets; ces perpendiculaires sont proportionnelles à celles abaissées des mêmes sommets sur la trace du plan tangent sur le plan transversal. On conclut donc de la première partie du théorème précédent, cette propriété générale des coniques :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, une tangente quelconque à la courbe a le produit de ses distances à deux sommets opposés du quadrilatère dans un rapport constant avec le produit de ses distances aux deux autres sommets.

J'ai déjà démontré ce théorème, que j'ai déduit de la propriété du quadrilatère inscrit, par la *transformation parabolique* (*). La démonstration précédente, outre l'avantage d'être directe, et de ne supposer connue aucune propriété des coniques, a encore celui de pouvoir compléter, en quelque sorte, le théorème, en donnant une expression assez remarquable du rapport dont il y est question.

Pour cela, supposons que le plan transversal soit perpendiculaire à une ligne focale du cône, de manière que la conique ait un de ses foyers situé au point où le plan transversal rencontre cette ligne focale. Soient A, B, C, D les sommets du quadrilatère; Aa, Bb, Cc, Dd les perpendiculaires abaissées de ces points sur une tangente à la conique; les rapports $\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{SA}}$, $\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{SB}}$, etc. seront proportionnels aux sinus des angles qne les arètes SA, SB, etc. font avec le plan tangent au cône; on aura donc d'après la première partie du théorème relatif au cône,

$$\frac{\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{SA}} \cdot \frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{SC}}}{\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{SB}} \cdot \frac{\mathrm{D}d}{\mathrm{SD}}} = \text{const.} = \mu.$$

(*) Voir *Correspondance mathématique* de M. Quetclet, t. V, année 1829, p. 289.

Soit F le foyer de la conique situé sur la ligne focale du cône à laquelle le plan coupant est perpendiculaire ; les sinus des angles que cette ligne focale fait avec les arètes SA, SB, etc, sont égaux aux rapports $\frac{FA}{SA}$, $\frac{FB}{SB}$, etc. ; on a donc pour la valeur de la constante μ, d'après la seconde partie du théorème sur le cône,

$$\mu = \frac{\frac{FA}{SA} \cdot \frac{FC}{SC}}{\frac{FB}{SB} \cdot \frac{FD}{SD}}.$$

De cette équation et de la précédente, on conclut

$$\frac{Aa \, . \, Cc}{Bb \, . \, Dd} = \frac{FA . FC}{FB . FD}.$$

Ce qui prouve que

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, le produit des distances d'une tangente quelconque, à deux sommets opposés, est au produit des distances de la même tangente aux deux autres sommets, dans un rapport constant ;

Et ce rapport est égal au produit des distances d'un foyer de la courbe, aux deux premiers sommets du quadrilatère, divisé par le produit des distances du même foyer aux deux autres sommets.

Ainsi l'on voit que le foyer joue, en quelque sorte, le même rôle, par rapport aux quatre sommets du quadrilatère, que chacune des tangentes à la conique. Cette relation est assez singulière.

Ce que nous disons d'un foyer a également lieu pour le second ; il en résulte cette autre propriété des coniques :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les produits des distances de deux sommets opposés, à chaque foyer, sont entre eux dans le même rapport que les produits des distances des deux autres sommets à ces foyers (*).

(*) Ce théorème trouvera une application utile dans la théorie des courbes du troisième degré.

Quand la conique est une parabole, un de ses foyers est à l'infini ; ses distances aux quatre sommets du quadrilatère sont infinies, et leurs rapports sont égaux à l'unité, parce qu'elles sont infinies et comptées sur des droites parallèles entre elles. On en conclut ce théorème :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer à deux sommets opposés du quadrilatère est égal au produit des distances du même point aux deux autres sommets.

Si l'on suppose, dans ces deux théorèmes, que deux sommets opposés des quadrilatères s'approchent indéfiniment de la courbe et viennent enfin se placer sur elle, les deux autres côtés se confondront, et l'on aura deux théorèmes sur l'angle circonscrit aux coniques; nous énoncerons le second, relatif à la parabole :

Quand un angle est circonscrit à une parabole, le carré du rayon vecteur mené du foyer au sommet de l'angle, est égal au produit des rayons vecteurs menés aux deux points de contact de ses côtés.

Cette propriété de la parabole est une de celles dont Lambert s'est servi dans son Traité *de Insignioribus orbitœ cometarum proprietatibus*.

Des deux propriétés générales des cônes du second degré que nous avons démontrées dans cette note, on conclut immédiatement deux théorèmes sur les *coniques sphériques*, qui correspondent à ceux des coniques planes. En voici les énoncés :

1°. *Quand un quadrilatère, formé par des arcs de grands cercles, est inscrit dans une conique sphérique, le produit des sinus des distances de chaque point de la courbe, à deux côtés opposés du quadrilatère, est dans une raison constante avec le produit des sinus des distances du même point aux deux autres côtés;*

Cette raison est égale au produit des sinus des angles qu'un arc cyclique de la conique fait avec les deux premiers côtés du quadrilatère, divisé par le produit des sinus des angles que le même arc fait avec les deux autres côtés.

On conclut de là que

Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique sphérique, les *produits des sinus des angles que les deux arcs cycliques font avec deux côtés opposés du quadrilatère, sont entre eux comme les produits des sinus des angles que ces deux arcs cycliques font avec les deux autres côtés.*

2°. *Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique sphérique, tout arc de grand cercle tangent à cette courbe jouit de la propriété que le produit des sinus de ses distances à deux sommets opposés du quadrilatère est au produit des sinus de ses distances aux deux autres sommets, dans un rapport constant;*

Ce rapport constant est égal au produit des sinus des distances d'un foyer de la conique aux deux premiers sommets du quadrilatère, divisé par le produit de ses distances aux deux autres sommets.

On conclut de là que

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique sphérique, les produits des sinus des arcs vecteurs menés de chaque foyer à deux sommets opposés du quadrilatère sont entre eux comme les produits des sinus des arcs vecteurs menés de ces deux foyers aux deux autres sommets.

Note sur un Problème de Combinaisons ;

Par E. CATALAN.

M. Brianchon vient d'insérer, dans le XXV[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, un Mémoire assez étendu sur *la détermination du nombre des termes de la puissance m d'un polynome de nom n.*

La formule à laquelle il arrive, et qui n'est pas, je crois, nouvelle, peut se démontrer de la manière suivante.

Le terme général du développement de $(a+b+c+\ldots+t)^m$ est, comme on sait,

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots1.2\ldots\theta}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots t^\theta, \qquad (1)$$

en posant

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\theta=m. \qquad (2)$$

Le nombre des termes de ce développement est celui des solutions, en nombres entiers non négatifs, de l'équation (2), qui renferme n inconnues, n désignant le nombre des termes du polynome proposé; ou le nombre de manières dont il est possible de former une somme m, avec n nombres entiers positifs ou nuls; ou enfin, le nombre de combinaisons que l'on peut effectuer avec n lettres différentes, en les prenant m à m, et en supposant que chaque lettre peut entrer 0, 1, 2,... fois dans chaque terme. C'est sous ce dernier point de vue que je considère la question; et je désigne par N le nombre cherché.

Pour trouver ce nombre, j'observe que, pour former toutes les combinaisons dont il s'agit, on pourrait employer le moyen suivant:

a, b, c, étant pour fixer les idées, trois lettres qu'il s'agit d'arranger 7 à 7 :

1°. Prenons la quantité $a'b'c'd'e'f'g'$, qui renferme sept lettres accentuées, écrites en ordre alphabétique;

2°. Dans un terme quelconque égal à celui-là, effaçons 1, 2 ou 3 lettres (et en général, n lettres au plus, si n est $< m$, m lettres au plus, si n est $> m$); puis remplaçons chaque lettre effacée par l'une des lettres a, b, c (et en général, par l'une des n lettres $a, b, c, \ldots t$), en ayant soin que, dans chaque terme ainsi formé, les lettres sans accent n'offrent pas d'inversion alphabétique; qu'aucune ne se trouve répétée; et qu'une suite de lettres accentuées soit toujours précédée d'une lettre sans accent (ce qui exige que l'on efface toujours la lettre a').

Nous obtiendrons ainsi une suite de termes tels que

$$ab'c'be'f'g',\quad abc'd'e'cg',\quad bb'c'd'cf'g',\ \text{etc.} \qquad \text{(A)}$$

3°. Enfin, dans chacun des termes de la suite (A), remplaçons chaque lettre accentuée par la lettre sans accent qui la précède. Nous aurons la nouvelle suite :

$$aaabbbb,\quad abbbbcc,\quad bbbbccc,\ \text{etc.} \qquad \text{(B)}$$

Si l'on a effectué sur la quantité $a'b'c'd'e'f'g'$ les opérations indiquées, de toutes les manières possibles, la suite (B) renfermera toutes les combinaisons demandées, sans qu'il y en ait d'omises, ni de répétées : nous supprimerons la démonstration, qui est fort simple.

Or, la suite (A), qui contient autant de termes que la suite (B), renferme toutes les combinaisons des 6 lettres b', c', d', f', g', et des 3 lettres a, b, c, prises 7 à 7. Donc en général, $N = C_{n+m-1,m}$; savoir

$$N = \frac{n+m-1}{1}\cdot\frac{n+m-2}{2}\ \cdots\ \frac{n+1}{m-1}\cdot\frac{n}{m}, \qquad (3)$$

ou

$$N = \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\ \cdots\ \frac{m+n-1}{n-1}. \qquad (4)$$

Les formules (3) ou (4), donnent le nombre des termes du développement dont (1) est le terme général.

RECHERCHES

SUR LES NOMBRES;

Par M. LEBESGUE,

Professeur-suppléant à la Faculté des Sciences de Grenoble (*).

§ II. *Sur la résolution de l'équation $x^p = 1$, en supposant p premier.*

I.

Calcul de l'équation dont les racines sont les sommes $y_0, y_1, \ldots y_{m-1}$.
(§ 1, page 288 du volume précédent.)

On a rappelé dans le § 1 (page 288) la distribution des $p-1=mh$ racines imaginaires de l'équation $x^p = 1$, en m groupes de h racines chacun, et en représentant par $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ la somme des racines de chaque groupe, l'on a indiqué la méthode de M. Libri, pour trouver l'équation du m^e degré ayant ces sommes pour racines; cette équation étant représentée par

$$(43) \qquad y^m - A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} \ldots \pm A_m = 0.$$

Cette méthode consiste à déterminer les sommes des puissances des racines de l'équation (43). Or, si l'on représente ces sommes par f_1, f_2, $f_3 \ldots f_m$, la formule (40) qui revient à

$$(44)\, pN_k = p^k + f_1 + k.mf_2 + \frac{k.k-1}{1.2} m^2 f_3 + \ldots + km^{k-1} f_k + m^k f_{k+1}$$

(*) Le § I^er de ces *Recherches sur les Nombres* a été imprimé dans le volume précédent, *voyez* page 253.

donne, en posant successivement $k = 1, 2, 3 \ldots m-1$, l'équation

$$(45) \qquad f_{k+1} = \frac{p\left[N_k - k\,.\,N_{k-1} + \frac{k\,.\,k-1}{1\,.\,2} N_{k-2} \ldots \pm k N_1\right] - (p-1)^k}{m^k}.$$

Cette formule qui renferme la solution du problème, quand on a déterminé les valeurs de $N_1\, N_2 \ldots N_{m-1}$, prend une forme beaucoup plus simple, et préférable dans le cas où le calcul des nombres N se fait par la substitution effective des valeurs de $x_1\, x_2 \ldots x_k$ dans la congruence $1 + x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m \equiv 0$ (mod. p), ce qui est praticable pour de petites valeurs de p.

Cette simplification est fondée sur les propositions suivantes, qui d'ailleurs sont d'une utilité directe dans la théorie des résidus.

Si l'on représente par n_k ce que devient N_k quand on exclut des solutions de la congruence $1 + x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m \equiv 0$ (ou plus généralement de $x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m \equiv \rho^a$ (mod. p)) celles où des inconnues sont nulles, on pourra déterminer N_k en fonction de n_k, ou réciproquement, au moyen du théorème suivant.

« Théorème. On a entre les quantités N_k et n_k, les relations suivantes :

» (46) $\qquad N_k = n_k + k\,.\,n_{k-1} + \frac{k\,.\,k-1}{1\,.\,2}\, n_{k-2} + \ldots + k n_1,$

» (47) $\qquad n_k = N_k - k N_{k-1} + \frac{k\,.\,k-1}{1\,.\,2}\, N_{k-2} - \ldots \pm k N_1.$

Démonstration. La formule (46) s'obtient en distribuant par groupes les solutions de la congruence $x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m \equiv \rho^a$ (mod. p). Savoir : 1° celui où aucune des inconnues n'est nulle, il renferme n_k solutions; 2° celui où une inconnue seulement est nulle, il renferme k fois n_{k-1} solutions, puisqu'on peut égaler successivement à zéro chacune des k inconnues; 3° celui où deux inconnues seulement sont nulles, il renferme $\frac{k\,.\,k-1}{1\,.\,2}$ fois n_{k-2} solutions, puisqu'il y a $\frac{k\,.\,k-1}{1\,.\,2}$ manières de choisir les deux inconnues qu'on égale à zéro, et ainsi de suite, d'où la formule (46).

Il faut remarquer d'abord qu'on a omis l'accent de N et de n qui doit être le même, et que si le second membre de la congruence était zéro au lieu d'être ρ^a, il faudrait augmenter le 2^e membre de l'équation (46) de $N_0 = 1$.

Par de simples éliminations, la formule (46) donne la formule (47), dont le second membre devra aussi être augmenté de $\pm n_0 = \pm 1$; pour le cas de la congruence $x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m \equiv 0$. .... (mod. $p = hm + 1$).

« Théorème. Le nombre de solutions de la congruence..... » $r_1 + r_2 + \ldots + r_k \equiv \rho^a$ (mod. p), où $r_1, r_2 \ldots r_k$ sont des résidus » de m^e puissance, étant représenté par $R_k^{(a)}$, on aura,

$$(48) \qquad m^k . R_k^{(a)} = n_k^{(a)}.$$

Démonstration. Cela suit immédiatement de ce qu'il y a m valeurs de x_1 donnant $x_1^m \equiv r_1$ (mod. p), autant donnant $x_2^m \equiv r_2$ mod. p) et ainsi de suite, de sorte qu'une seule solution de la congruence $r_1 + r_2 + \ldots + r_k \equiv \rho^a$ (mod. p), en donne, par la combinaison des valeurs de $x_1, x_2 \ldots x_k$, un nombre égal à m^k pour la congruence $x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m \equiv \rho^a$ (mod. p).

Si l'on remarque maintenant que le nombre de solutions de la congruence

$$x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m + 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p = hm + 1),$$

que M. Libri représente par N_k, est représenté par le même symbole, d'après les conventions du § 1, si h est pair, ou -1 résidu de m^e puissance, et par celui-ci $N_k^{\left(\frac{m}{2}\right)}$, si h est impair ou -1 non résidu de $\left(\frac{m}{2}\right)^e$ classe, on aura dans le premier cas

$$N_k - k . N_{k-1} + \frac{k \; k-1}{1.2} N_{k-2} \ldots \pm k N_1 = m^k R_k,$$

et dans le second (en conservant la notation de M. Libri),

$$N_k - k . N_{k-1} + \frac{k . k-1}{1.2} N_{k-2} \ldots \pm k N_1 = m^k R_k^{\left(\frac{m}{2}\right)},$$

15..

de sorte que, si, pour n'avoir qu'un seul cas à considérer, on représente par S_k le nombre de solutions de la congruence

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

on aura toujours

$$N_k - k.N_{k-1} + \frac{k.k-1}{1.2} N_{k-2} - \ldots \pm kN_1 = m^k S_k,$$

ce qui réduit la formule (45) à celle-ci :

$$(49) \qquad \int_{k+1} = pS_k - h^k.$$

De là se tire la règle suivante, pour le calcul de l'équation (43).

« Cherchez les résidus de m^e puissance où les restes différents des » puissances 1^m, 2^m, $3^m \ldots (p-1)^m$ et faites toutes les permutations » possibles de ces h restes $r_1, r_2, \ldots r_h$, sans exclure la répétition d'un » même résidu. Représentez par S_k combien il y a de ces permutations » où la somme des termes augmentée de 1 soit multiple de p, et la » somme des n^{es} puissances des racines de l'équation (43) sera égale à » $pS_{n-1} - h^{n-1}$. »

Ces sommes ainsi trouvées, les équations

$$(50) \qquad \begin{array}{l} \int_1 - A_1 \quad = 0, \\ \int_2 - A_1\int_1 + 2A_2 = 0, \\ \int_3 - A_1\int_2 + A_2\int_1 - 3A_3 = 0, \\ \int_4 - A_1\int_3 + A_2\int_2 - A_3\int_1 + 4A_4 = 0, \\ \vdots \end{array}$$

qui conduisent aux suivantes :

$$(51) \qquad \begin{array}{r} A_1 = \int_1, \\ 2A_2 = \int_1^2 - \int_2, \\ 2.3A_3 = \int_1^3 - 3\int_1\int_2 + 2\int_3, \\ 2.3.4A_4 = \int_1^4 - 6\int_1^2\int_2 + 8\int_1\int_3 + 3\int_2^2 - 6\int_4 \\ \vdots \end{array}$$

donnent les valeurs des coefficients A_1, A_2, A_3, A_4, etc.

Voici les résultats pour $p = 2h + 1$, $p = 3h + 1$ et $p = 4h + 1$. Ils serviront pour la suite de ces recherches.

« Pour $m = 2$ ou $p = 2h + 1$, l'équation en y est

» (52) $$y^2 + y + \frac{1 \mp p}{4} = 0.$$

» selon que p est de forme $4q + 1$ ou $4q - 1$. »

Cela résulte de ce que l'on a $S_1 = 1$ pour le premier cas, et $S_1 = 0$ pour le second.

« L'équation en y, pour le cas de $m = 3$ ou de $p = 3h + 1$, est en
» posant $4p = L^2 + 27M^2$, et en déterminant le signe de L de sorte
» qu'on ait $L = 1 + 3l$,

» (53) $$y^3 + y^2 + \left(\frac{1-p}{3}\right) y + \frac{1}{27}(1 - 3p - pL) = 0,$$

» ou bien en posant $y + \frac{1}{3} = \frac{z}{3}$,

(54) $$z^3 - 3pz - pL = 0. »$$

Cela résulte de ce que l'on a pour ce cas

$$S_1 = 1,\ S_2 = \frac{n_2}{9} = \frac{N_2 - 2N_1}{9},\ N_1 = 3 \text{ et } N_2 = A = C' - 3 = p + 1 + L - 3$$

(*Voy.* § I, page 279 du volume précédent.)

Les valeurs de $f_1 = -1$, $f_2 = pS_1 - h$, $f_3 = pS_2 - h^2$ substituées dans les formules (51) donnent l'équation (53), qui devient (54) en y faisant $y + \frac{1}{3} = \frac{z}{3}$.

« L'équation en y pour $m = 4$ ou $p = 4h + 1$, est en posant
» $p = (1 + 4u)^2 + 4v^2$ et $h = 2h' + r$ (r étant 0 ou 1),

(55) $$y^4 + y^3 + \frac{1}{2}(pr - 3h)y^2 + \frac{1}{4}(2pu + pr - h)y + \frac{1}{16}[(pr-h)^2 - 4pu^2] = 0,$$

» qui se décompose en deux facteurs, ainsi qu'il suit :

(56) $$\left[y^2 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{p})y + \frac{1}{4}(pr - h + 2u\sqrt{p})\right]\left[y^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{p})y + \frac{1}{4}(pr - h - 2u\sqrt{p})\right] = 0.$$

La valeur de N_3 (notation de M. Libri) calculée, tome II de ce Journal, page 284, pour le cas de $r=0$ ou $h=2h'$, et tome II, page 286, pour le cas de $r=1$, ou $h=2h'+1$, et celle de N_2 qui, pour le premier cas, n'est autre que A, et pour le second que C'', conduiront à l'équation (55), et par suite à l'équation (56).

N. B. La valeur de N_3, donnée à la page 286, au lieu d'être $p^2-7p+10+56u+64u^2$, doit être $p^2-7p+6u+4u^2$, comme le montre la substitution indiquée ; et c'est seulement par le changement de u en $1+4u$, qu'elle devient $p^2-7p+10+56u+64u^2$, valeur qu'il faut employer ici, afin d'avoir dans les deux cas l'équation $p=(1+4n)^2+4v^2$.

II.

Calcul direct de l'équation en y.

Dans ses Recherches arithmétiques, M. Gauss a donné l'équation en y pour les cas généraux de $p=2h+1$, et $p=3h+1$. La solution pour ce second cas, introduit dans le calcul les symboles (KK), (KK'), (KK''), etc., qui ne sont autres que les nombres de solutions de certaines congruences; le n° 358 qui renferme cette solution, finit par ces mots « quoique le problème que nous venons de résoudre soit assez » compliqué, nous n'avons pas voulu le supprimer, tant à cause de l'é» légance de la solution, que parce que les artifices qu'il nous a » donné occasion d'employer, peuvent être d'une très grande utilité » dans d'autres problèmes. »

On donnera donc ici le calcul direct des coefficients de l'équation en y, d'où résultera la règle suivante pour le cas général de $p=mh+1$.

« Soient $r_1, r_2, r_3, \ldots r_h$ la série des résidus de m^e puissance

$$\text{et}\quad \left.\begin{matrix} r'_1, & r'_2, & r'_3, & \ldots & r'_h \\ r''_1, & r''_2, & r''_3, & \ldots & r''_h \\ \vdots & & & & \\ r_1^{(n-1)}, & r_2^{(n-1)}, & & \ldots & r_h^{(n-1)} \end{matrix}\right\}\ \text{les } n-1 \text{ séries de non-résidus de } m^e \text{ puissance } (*).$$

(*) Comme l'ordre des classes de non-résidus est ici indifférent, si l'on n'a

» Combinez de toutes les manières possibles ces nombres 1 à 1, 2 à 2,
» 3 à 3... k à k en ayant soin de ne jamais prendre deux nombres
» dans une même série, et représentez par σ_1, σ_2, $\sigma_3 \ldots \sigma_k$, le nombre
» des combinaisons où la somme des termes est divisible par p; alors
» l'équation en y, multipliée par $p-1$, prendra la forme

» (57) $p(y^m - \sigma_1 y^{m-1} + \sigma_2 y^{m-2} - \sigma_3 y^{m-3} + \ldots \pm \sigma_m) - (y-h)^m = 0$

» d'où la congruence

» (58) $(y-h)^m \equiv 0 \pmod{p = hm + 1}$.

» déjà démontrée par M. Poinsot (*Mémoire sur l'application de l'Al-*
» *gèbre à la théorie des nombres*).»

Pour démontrer le théorème, d'où dérive la règle précédente, on emploiera les notations suivantes.

Le nombre de solutions de la congruence

$$\rho^a x_1^m + \rho^b x_2^m + \ldots + \rho^g x_k^m \equiv 0, \text{ ou } \equiv \rho^i \pmod{p},$$

où les nombres ρ^a, $\rho^b \ldots \rho^g$ sont de classes différentes, ce qui suppose ρ racine primitive, et $a, b, \ldots g$ incongrus suivant le module m, sera représenté par $n_k^0(a, b, \ldots g)$ si le 2e membre de la congruence est 0, et par $n_k^{(i)}(a, b, \ldots g)$, si le 2e membre de la congruence est ρ^i, ces nombres de solutions s'obtenant, non par la substitution des nombres $1, 2, \ldots p-1$ au lieu de $x_1, x_2, \ldots x_m$, mais par la substitution des résidus $r_1, r_2, \ldots r_n$, au lieu de $x_1^m, x_2^m, \ldots x_k^m$.

Comme les nombres $a, b, \ldots g$ sont inégaux, on pourra, quand il n'en résultera pas d'ambiguité, remplacer $n_k^0(a, b, \ldots g)$ par $n^0(k)$,

---

point de racine primitive, on pourra les former de la manière suivante, comme le fait M. Libri dans une Recherche analogue. 1°. Cherchez les restes des puissances $1^m, 2^m, \ldots\ldots (p-1)^m$, vous aurez les résidus. 2°. Prenez dans la série $1, 2 \ldots p-1$ un non-résidu, multipliez-le successivement par les résidus, et les restes des produits divisés par p, composeront une classe de non-résidus. 3°. Au moyen d'un non-résidu qui n'appartienne pas à cette classe vous formerez semblablement une seconde classe de non-résidus, et ainsi de suite.

et la somme σ_k de la règle précédente ne sera autre que $\Sigma n^\circ(k)$, somme qui s'étend à toutes les combinaisons k à k des nombres $0, 1, 2, \ldots m-1$.

Pour faciliter le calcul des coefficients de l'équation en y, on pourra distribuer les combinaisons k à k, des m nombres différents $0, 1, 2\ldots m-1$ par périodes de la manière suivante.

Soit $a, b, \ldots g$ une combinaison déterminée : si l'on augmente chacun des nombres $a, b, \ldots g$ qui la forment de $1, 2, 3\ldots m-1$ unités, on aura une période qui se reproduirait, si l'on continuait à augmenter également les nombres $a, b, \ldots g$; car on convient de retrancher m des sommes surpassant ce nombre. De cette convention résultent les deux théorèmes qui suivent :

« Théorème. Les combinaisons k à k des m nombres $0, 1, 2\ldots m-1$, » et généralement de m nombres différents, peuvent se distribuer en » périodes, dont le nombre des termes est m, ou un diviseur de m. »

Démonstration. Cela suit de ce que l'ensemble des combinaisons $a, b\ldots g$; $a+1, b+1, \ldots g+1$; $\ldots a+m-1, b+m-1, \ldots g+m-1$; se reproduit périodiquement, et doit être conséquemment formé de plusieurs périodes, dont le nombre des termes ne peut être qu'un diviseur de m, qui peut être l'unité ou m lui-même.

» Théorème. Si m et k sont premiers entre eux, toutes les périodes » formées avec les combinaisons k à k des nombres $0, 1, 2\ldots m-1$, » auront m termes. Mais si m et k ont pour plus grand commun divi- » seur δ, et qu'on ait $m = m'\delta$, $k = i\delta$, le nombre de termes des pé- » riodes sera m' ou un multiple de m'. »

Démonstration. Soit $a_1, a_2, \ldots a_g, a_{g+1}, \ldots a_{g+l} = a_k$ la combinaison initiale de la période, et telle qu'on ait $a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_k$. Soit de plus n le nombre des termes de la période, de sorte que la combinaison suivante

$$a_1 + n,\ a_2 + n, \ldots\ a_g + n,\ a_{g+1} + n, \ldots\ a_{g+l} + n$$

revienne à la première quand on aura soustrait m des sommes qui surpassent ce nombre, comme par suite de l'hypothèse $a_1 < a_2 < a_3 \ldots$ les sommes $a_1 + n, a_2 + n, \ldots$ vont en croissant, si $a_{g+1} + n$ est la première qui surpasse m, il en sera de même des suivantes, et les sommes $a_{g+1} + n - m$, $a_{g+2} + n - m \ldots a_{g+l} + n - m$ toutes plus petites que m iront en croissant. D'ailleurs on a $a_{g+1} + n - m$ ou

$a_k + n - m < a_1 + n$, puisque cette inégalité revient à $a_k < a_1 + m$; donc si l'on range les termes de la combinaison $a_1 + n$, $a_2 + n$, $a_3 + n \ldots\ldots$ par ordre de grandeur, on aura $a_{g+1} + n - m$, $a_{g+2} + n - m \ldots a_k + n - m$, $a_1 + n$, $a_2 + n \ldots a_g + n$, qui devra coïncider avec a_1, $a_2 \ldots a_g$, $a_{g+1} \ldots a_k$. Si donc on égale les sommes des termes de ces deux combinaisons, on aura $kn - im = 0$, qui peut s'écrire $\frac{k}{i} = \frac{m}{n}$ ou $\frac{n}{i} = \frac{m}{k}$. Comme n est diviseur de m, on pourra donc poser $m = n\mathrm{D}$, $k = i\mathrm{D}$: or D est un diviseur de δ ; n sera donc un multiple de m'. L'équation $\frac{n}{i} = \frac{m}{k}$ montre d'ailleurs que si m et k sont premiers entre eux, on doit avoir nécessairement $n = m$, puisque n ne peut surpasser m.

Les k équations qu'on obtiendra en égalant terme à terme les deux combinaisons seront

$$a_1 + n = a_{i+1},\ a_2 + n = a_{i+2} \ldots\ldots\ a_{g+1} + n = a_{i+g} = a_k$$
$$a_{g+1} + n - m = a_1,\ a_{g+2} + n - m = a_2 \ldots\ a_{g+i} + n - m = a_i;$$

celles de la première ligne se réduiront à

$$\begin{array}{l|l|r}
a_{i+1} = a_1 + n & a_{2i+1} = a_1 + 2n & \ldots a_{(\mathrm{D}-1)i+1} = a_1 + (\mathrm{D}-1)n \\
a_{i+2} = a_2 + n & a_{2i+2} = a_2 + 2n & a_{(\mathrm{D}-1)i+2} = a_2 + (\mathrm{D}-1)n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{2i} = a_i + n & a_{3i} = a_i + 2n & a_{\mathrm{D}i} = a_k = a_i + (\mathrm{D}-1)n
\end{array}$$

en posant $g + i = k = i\mathrm{D}$, d'où $g = (\mathrm{D}-1)i$.

Quant aux équations de la seconde ligne, elles rentrent dans celles de la première, puisque l'on a $m - n = (\mathrm{D}-1)n$.

Une conséquence des équations précédentes, c'est qu'on doit avoir $a_1, a_2, \ldots a_i$ tous plus petits que n, ce qui est toujours possible, puisque l'équation $\frac{n}{i} = \frac{m}{k}$ montre que i ne surpasse jamais n : il suffira donc de combiner i à i les nombres $0, 1, 2, \ldots n - 1$, et par le moyen de ces combinaisons prises pour $a_1, a_2, \ldots a_i$, on obtiendra les combinaisons

$$a_1, a_2, \ldots a_i,\ a_1 + n \ldots a_i + n,\ a_1 + 2n, \ldots, a_i + 2n \ldots a_1 + (\mathrm{D}-1)n \ldots a_i + (\mathrm{D}-1)n$$

donnant naissance à des périodes de n termes.

Voici quelques exemples :

1°. m impair et $k=2$. Ici les périodes seront de m termes, puisque m et k sont premiers entre eux. Ainsi, pour $m=7$, il y a $\frac{7.6}{1.2}=7.3$ combinaisons formant les 3 périodes suivantes : 0,1 : 1,2 : 2,3 : 3,4 : 4,5 : 5,6 : 6,0 — 0,2 : 1,3 : 2,4 : 3,5 : 4,6 : 5,0 : 6,1 — 0,3 : 1,4 : 2,5 : 3,6 : 4,0 : 5,1 : 6,2.

2°. m pair et $k=2$. Ici, on peut faire $D=2$, $i=1$: il y a donc outre les périodes de m termes, une période de $\frac{m}{2}$ termes, savoir pour $m=8$, par exemple, 0,4 : 1,5 : 2,6 : 3,7. De plus, il y a 3 périodes de 8 termes qui ont pour combinaisons initiales 0, 1 ; 0, 2 ; 0, 3 ; ce qui forme le nombre total des combinaisons $\frac{8.7}{1.2}=28=24+4$.

Au moyen de tout ce qui précède l'équation en y pourra se déterminer par le théorème suivant :

» Théorème. Si l'on pose pour abréger $\Sigma n^{\circ}(k)=\sigma_k$ et.......

» $\frac{m.m-1.m-2\ldots m-k+1}{1.2.3\ldots k}=(mCk)$, on aura

$$\text{» (59)} \qquad mhA_k=p\sigma_k-(mCk)h^k,$$

» et par suite, l'équation (57) et la congruence (58) posées plus » haut. »

Démonstration. L'équation en y n'étant autre que le produit

$$\left[y-(R^{x_1^m}+R^{x_2^m}+\ldots+R^{x_h^m})\right]\left[y-(R^{\rho x_1^m}+R^{\rho x_2^m}+\ldots R^{\rho x_h^m})\right]\ldots\left[y-(R^{\rho^{m-1}x_1^m}+\ldots+R^{\rho^{m-1}x_h^m})\right],$$

où x_1^m, x_2^m,... x_h^m, doivent être remplacés par les résidus, ρx_1^m, ρx_2^m,... ρx_h^m, par les non-résidus de première classe ; $\rho^2 x_1^m$, $\rho^2 x_2^m$,... $\rho^2 x_h^m$; par les non-résidus de deuxième classe, et ainsi des autres, on aura

1°. $A_1=R^1+R^2+R^3\ldots+R^{p-1}=-1$; d'où $mhA_1=-m.h^1$ $=p\sigma_1-(mC1)h'$, car $\sigma_1=0$;

2°. $A_2=\Sigma R^{\rho^a x_1^m+\rho^b x_2^m}$, où il faudra mettre d'abord pour a et b, toutes les combinaisons 2 à 2 des nombres 0, 1,... $m-1$ et ensuite pour x_1^m et x_2^m, tous les résidus de même puissance. Or, pour une combinaison déterminée a, b l'exposant $\rho^a x_1^m+\rho^b x_2^m$ prend $n_2^{\circ}(a, b)$

valeurs congrues à o (mod. p), qui restent en même nombre pour toutes les combinaisons formant la période de a, b puisque la congruence $\rho^a x_1^m + \rho^b x_2^m \equiv 0$, garde évidemment le même nombre de solutions, quand on multiplie son premier membre ρ^i, quel que soit d'ailleurs i. Le même exposant prenant

$$n_2'(a, b),\ n_2''(a, b),\ n_2'''(a, b) \ldots\ n_2^{(m-1)}(a, b),\ n_2(a, b),$$

valeurs congrues à ρ, ρ^2, $\rho, \ldots$ ρ^{m-1}, ρ^m, et pareillement à ρ^{m+1}, $\rho^{m+2}, \ldots$ ρ^{2m-1}, ρ^{2m} ; et généralement à ρ^{fm+1}, $\rho^{fm+2}, \ldots$ ρ^{fm+m-1}, ρ^{fm+m}; la partie du coefficient A_2 relative à la combinaison a, b sera

$$n_2^0(a,b) + y_0 n_2(a,b) + y_1 n_2'(a,b) + y_2 n_2''(a,b) + \ldots + y_{m-1} n_2^{(m-1)}(a,b) :$$

pour la partie de A_2 relative à la combinaison $a+1$, $b+1$, il faudra comme on l'a dit poser $n_2^0(a+1, b+1) = n_2^0(a, b)$ et $n_2^i(a+1, b+1) = n_2^{(i-1)}(a, b)$, puisque la congruence $\rho^a x_1^m + \rho^b x_2^m \equiv \rho^{i-1}$ (mod. p) revient à $\rho^{a+1} x_1^m + \rho^{b+1} x_2^m \equiv \rho^i$; cette partie de A_2 deviendra donc

$$n_2^0(a, b) + y_1 n_2(a, b) + y_2 n'_2(a, b) + \ldots + y_{m-1} n_2^{(m-2)}(a, b) + y_0 n_2^{(m-1)}(a, b) :$$

calculant de même les parties de A_2 relatives aux autres termes de la période de la combinaison a, b, on trouvera pour toute la période

$$\begin{array}{l}
n_2^0(a, b) + y_0\ n_2(a, b) + y_1 n_2'(a, b) + \ldots + y_{m-1} n_2^{(m-1)}(a, b),\\
n_2^0(a, b) + y_1\ n_2(a, b) + y_2 n_2'(a, b) + \qquad + y_0\ n_2^{(m-1)}(a, b),\\
n_2^0(a, b) + y_2\ n_2(a, b) + y_3 n_2'(a, b) + \qquad + y_1\ n_2^{(m-1)}(a, b),\\
\vdots\\
n_2^0(a, b) + y_{m-1} n_2(a, b) + y_0 n_2'(a, b) + \qquad + y_{m-2} n_2^{(m-1)}(a, b),
\end{array}$$

dont la somme est égale à

$$m : n_2^0(a, b) + (y_0 + y_1 + \ldots + y_{m-1})[n_2'(a, b) + n_2''(a, b) + \ldots + n_2^{(m-1)}(a, b)];$$

or, on voit de suite que l'on a

$$h^2 = n_2^0(a, b) + h[n_2'(a, b) + n_2(a, b) + \ldots + n_2^{(m-1)}(a, b)],$$

ce qui se démontre comme la formule (12) du § 1 (t. II, page 269). D'ailleurs $y_0 + y_1 + \ldots + y_{m-1} = -1$. Si donc, on multiplie la somme précédente par mh, elle se réduira à

$$m^2h . n_2^0(a, b) - m[h^2 - n_2^0(a, b)] = p . mn_2^0(a, b) - mh^2 = p[n_2^0(a, b) + n_2^0(a+1, b+1) + n_2^0(a+2, b+2) + \ldots + n_2^0(a+m-1, b+m-1)] - mh^2.$$

On suppose ici que la période de a, b ait m termes; mais si elle en avait seulement $m' = \frac{m}{m''}$ il faudrait diviser la quantité précédente par m'', ce qui la réduirait à

$$p[n_2^0(a, b) + n_2^0(a+1, b+1) + \ldots + n_2^0(a+m'-1, b+m'-1)] - m'h^2.$$

Maintenant si l'on pose $\frac{m . m-1}{1.2} = gm + g'm' + g''m'' + \ldots$ en supposant qu'il y ait g périodes de m termes, g' de m' termes, g'' de m'' termes, etc., on trouvera en réunissant toutes les parties de mhA_2 l'équation

$$mhA_2 = p\Sigma n_2^0(a, b) - gmh^2 - g'm'h'^2 - g''m''h''^2 - \ldots \text{ ou}$$
$$mhA_2 = p\sigma_2 - (mC2)h^2.$$

3°. Par un calcul tout-à-fait semblable, on trouvera

$$mhA_k = p\sigma_k - (mCk)h^k,$$

au moyen de la relation

$$h^k = n_k^0(\ ) + h[n_k'(\ ) + n_k''(\ ) + n_k'''(\ ) + \ldots n_k(\ )],$$

où les parenthèses ( ) doivent renfermer la même combinaison $a, b, \ldots g$.

Voici quelques remarques pour faciliter le calcul des coefficients A.

1°. L'on a $\Sigma n_2^0(1) = 0$, d'où $A_1 = -1$;
2°. L'on a $n_2^0(a, b) = 0$, si h est pair.

Mais si h est impair, l'on a $n_2^0(a, b) = h$ ou 0, selon que l'on a

$b = a + \frac{m}{2}$, ou que l'on n'a pas $b = a + \frac{m}{2}$; d'où il suit qu'en posant $h = 2h' + r$ (r étant o ou 1), on aura $\Sigma n_2^\circ(a,b) = \frac{rmh}{2}$, d'où $A_2 = \frac{pr - (m-1)h}{2}$.

3°. Pour l'avant-dernier terme, toutes les combinaisons $m-1$ à $m-1$ forment une seule période de m termes, ainsi l'on aura $\Sigma n^\circ(m-1) = mn^\circ(0, 1, 2, \ldots m-2)$.

4°. Pour le dernier terme il n'y a qu'une seule combinaison, et l'on aura $\Sigma n^\circ(m) = n^\circ(0, 1, 2, \ldots m-1)$.

Au moyen de ces remarques, on trouverait aussi facilement que plus haut, les équations relatives aux cas de $p = 2h+1$, $p = 3h+1$, $p = 4h+1$.

L'équation $y^m - A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} \ldots \pm A_m = 0$ étant multipliée par $mh = p-1$, prendra la forme

$$(p-1)y^m - [p\sigma_1 - (mC1)h]y^{m-1} + [p\sigma_2 - (mC2)h^2]y^{m-2} - \ldots = 0,$$

ou bien encore

$$p(y^m - \sigma_1 y^{m-1} + \sigma_2 y^{m-2} - \ldots) - [y^m - (mC1)hy^m + (mC2)hy^{2m-2} - \ldots] = 0.$$

ou enfin

$$p(y^m - \sigma_1 y^{m-1} + \sigma_2 y^{m-2} \ldots \pm \sigma_m) - (y-h)^m = 0;$$

d'où l'on tire en négligeant le multiple de p,

$$(y-h)^m \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

On a donc les résultats (57) et (58) énoncés dans la règle qui commence cet article II.

On n'ajoutera rien de plus ici, sur les équations donnant les sommes des racines composant les périodes dans lesquelles on a divisé et subdivisé la suite des racines imaginaires R, R^1, $R^2, \ldots R^{p-1}$, de l'équation $x^p = 1$, et l'on finira ce paragraphe par la formation de l'équation qui donne les différents termes d'une période.

III.

Sur l'équation donnant les termes qui composent une des racines de l'équation en y.

Ce qui paraît le plus simple dans le calcul de cette équation, c'est de former les sommes des puissances des racines, et d'en déduire les coefficients de l'équation. On peut cependant obtenir ces coefficients par le moyen des nombres de solutions de congruences telles que

$$x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m \equiv 0 \text{ ou } \rho^s \pmod{p},$$

en supposant d'abord que ces solutions se comptent en remplaçant x_1^m, x_2^m, x_k^m par les résidus de $m^{ième}$ puissance $r_1, r_2, \ldots r_h$, ensuite que l'on a évité de répéter un même résidu et rejeté les solutions qui ne diffèrent que par l'ordre des termes d'autres solutions déjà obtenues.

Cela posé, l'on représentera les nombres de solutions ainsi définis par

N_k^0 si le second membre de la congruence est o,
N_k' si c'est un non-résidu de première classe,
N_k'' si c'est un non-résidu de deuxième classe,

et ainsi de suite jusqu'à

$N_k^{(m-1)}$ si le deuxième membre est un non-résidu de $m-1$ classe, et N_k si c'est un résidu.

On reconnaît de suite entre les quantités N des relations analogues à celles trouvées entre les N dans le § 1. Ainsi pour $m=2$ on a

$$(60) \qquad N_k^0 + h(N_k + N_k') = \frac{h \cdot h-1 \ldots h-k+1}{1 \cdot 2 \ldots k} = (hCk),$$

qui se démontre comme la formule (9).

On a encore, pour $m=2$, les relations

$$(61)\qquad N^{\circ}_{k} = N^{\circ}_{h-k} \quad \text{quel que soit} \quad p = 2h + 1,$$

$$(62)\qquad \left.\begin{cases} N_k = N_{h-k} \\ N'_k = N'_{h-k} \\ N_k - N'_k = N_{h-k} - N'_{h-k} \end{cases}\right\} \text{pour } p = 4g + 1,$$

$$(63)\qquad \left.\begin{cases} N_k = N'_{h-k} \\ N'_k = N_{h-k} \\ N_k - N'_k = -(N_{h-k} - N'_{h-k}) \end{cases}\right\} \text{pour } p = 4g - 1,$$

$$(64)\qquad N_k + N'_k = N_{h-k} + N_{h-k} \quad \text{quel que soit } p,$$

qui résultent de ce que la somme des carrés $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ et par suite des résidus quadratiques, est multiple de p, sauf le cas de $p = 3$. Ainsi pour $p = 2h + 1$, si la somme d'une partie des résidus quadratiques r_1, r_2, $r_3, \ldots$ r_h, est divisible par p, la somme des autres résidus le sera aussi; et de même, si la somme d'une partie des résidus est congrue à a, la somme des autres résidus sera congrue à $-a$. Dans la démonstration il faudra considérer séparément le cas de -1 résidu quadratique, qui a lieu pour $p = 4g + 1$, et celui de -1 non-résidu quadratique, qui a lieu pour $p = 4g - 1$.

Ces préliminaires posés, on démontrera facilement les théorèmes suivants.

« *Théorème.* Si l'on représente par

$$x^h - A_1 x^{h-1} + A_2 x^{h-2} \ldots \pm A_h = 0$$

» l'équation dont les racines sont les différents termes de

$$y_u = R^{\rho^u} + R^{\rho^{u+m}} + R^{\rho^{u+2m}} + \ldots + R^{\rho^{u+(h-1)m}},$$

» on aura

$$(65)\qquad A_i = N^{\circ}_i + N_i^{(m-u)} y_0 + N_i^{(m+1-u)} y_1 + \ldots + N_i^{(m+m-1-u)} y_{m-1},$$

» où l'accent de N_i doit être diminué de m, quand cela est possible.

Démonstration. L'équation en x étant

$$\left(x - R^{\rho^u}\right)\left(x - R^{\rho^{u+m}}\right)\left(x - R^{\rho^{u+2m}}\right)\ldots = 0,$$

on aura

$$A_i = \Sigma R_{\rho^{u\left(\rho^{am}+\rho^{bm}+\rho^{cm}+\ldots\right)}},$$

où il faudra mettre pour $a, b, c\ldots$ toutes les combinaisons i à i des nombres $1, 2, \ldots h$, puis chercher combien il y en a qui rendent l'exposant de R congru à zéro, combien il y en a qui le rendent congru à ρ^{1+m}, ρ^{1+2m}, etc., combien il y en a qui le rendent congru à ρ^{2+fm} et ainsi de suite, et l'on aura la valeur de A_i en remarquant que la congruence

$$x_1^m + x_2^m + \ldots + x_i^m \equiv 0 \text{ ou } \rho^a \pmod{p = hm + 1},$$

a le même nombre de solutions pour des valeurs de a congrues suivant le module m.

Application pour le cas $m = 2$.

Théorème : L'équation qui donne les racines, composant
» $y_1 = R_{\rho^2} + R_{\rho^4} + R_{\rho^6} + \ldots + R_{\rho^{2h}}$, est

$$(66) \qquad Y + Z\sqrt{ip} = 0.$$

» Celle qui donne les racines composant

$$y_1 = R_\rho + R_{\rho^3} + R_{\rho^5} + \ldots + R_{\rho^{2h-1}} \text{ est}$$

$$(67) \qquad Y - Z\sqrt{ip} = 0,$$

» en supposant $p = 4q + i\,(i = +1$ ou $-1)$.

» Le signe du radical dépendant du choix de ρ, mais n'étant
» jamais le même pour y_0 et y_1.

» Les fonctions Y et Z étant

$$(68) \qquad Y = x^h - [N_1^0 - \tfrac{1}{2}(N_1 + N_1^1)]x^{h-1} + [N_2^0 - \tfrac{1}{2}(N_2 + N_2^1)]\,x^{h-2} - \ldots \pm [N_h^0 - \tfrac{1}{2}(N_h + N_h')],$$

$$(69) \qquad Z = \tfrac{1}{2}[(N_1 - N_1')\,z^{h-1} - (N_2 - N_2')z^{h-2} + \ldots \mp (N_{h-1} - N_{h-1}')z],$$

» et satisfaisant à l'équation

$$(70) \qquad Y^2 - piZ^2 = \left(\frac{x^p - 1}{x - 1}\right).$$

Démonstration. Les valeurs de y_0 et y_1 étant les racines de l'équation $y^2+y+\frac{1\mp p}{4}=0$ ou $y^2+y+\frac{1-ip}{4}=0$, c'est-à-dire

$-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{ip}$, si l'on pose $y_0=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{ip}$, on aura $y_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{ip}$,

d'où, par la substitution dans les valeurs de $A_1, A_2, A_3 \ldots A_i$, résulteront les formules (66) — (69). Quant à la formule (70), on l'obtiendra en remarquant que le produit $(Y+Z\sqrt{ip})(Y-Z\sqrt{ip})$, doit égaler $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x^2+x+1=\frac{x^p-1}{x-1}$.

Remarque I. Si l'on multiplie Y et Z par 2, et qu'on simplifie leurs valeurs au moyen des relations (61) — (64), on trouvera

$$(71)\quad Y=(2x^h+a_1x^{h-1}+a_2x^{h-2}\ldots)+i(\ldots a_2x^2+a_1x+2),$$
$$(72)\quad Z=x^{h-1}+b_2x^{h-2}+b_3x^{h-3}+\ldots+b_3x^3+b_2x^2+x,$$

où l'on a

$$(73)\qquad a_i=2N_i^\circ-(N_i+N_i'),\quad b_i=N_i-N_i'.$$

Il faut remarquer que pour h pair $(i=1)$, Y a un terme moyen, qui appartient à sa première partie.

Remarque II. Au moyen de la relation (60), la valeur de y multipliée par $2h=p-1$ donnera $2N_i^\circ-(N_i+N_i')=\frac{1}{h}[pN_i^\circ-(mCi)]$, et par suite

$$(74)\ (p-1)Y=2p(x^h-N_1^\circ x^{h-1}+N_2^\circ x^{h-2}-\ldots\pm N_p^\circ)-2(x-1)^h,$$

d'où la congruence

$$(75)\qquad Y\equiv 2(x-1)^h \text{ (mod. } p).$$

L'équation (74) montre bien que les coefficients de Y ne sauraient se déduire uniquement de la congruence (75), ainsi que Legendre l'avait cru d'abord, après avoir démontré la congruence (75), d'une manière différente de la précédente.

Dans son mémoire sur la détermination des fonctions Y, Z de l'équation

$$4(x^p - 1) = (x - 1)(Y^2 - piZ^2),$$

Legendre a rectifié sa solution et a donné le moyen de calculer les suites $a_1, a_2, a_3 \ldots b_1, b_2, b_3 \ldots$ Sa méthode conduit immédiatement à des formules générales, qu'on peut s'étonner de ne pas trouver dans son mémoire. Voici en quelques mots sa solution.

Il pose

$$Y + Z\sqrt{ip} = 2x^h - A_1 x^{h-1} + A_2 x^{h-2} - \ldots = 0,$$

en supposant $\mp A_i = a_i + b_i \sqrt{ip}$. Il suffira donc pour avoir a_i et b_i de calculer A_i; or si l'on représente par $\int_1, \int_2, \int_3, \ldots$ les sommes des racines de l'équation $Y + Z\sqrt{ip} = 0$ et que l'on fasse.... $\int_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{ip}$, il en résultera $\int_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{ip}$, en représentant par $\left(\frac{n}{p}\right)$ le reste $+1$ ou -1 de $n^{\frac{p-1}{2}}$ divisé par p. Or, ces valeurs de $\int_n$ donnent les valeurs de $A_1, A_2 \ldots$ au moyen des équations (51), où il suffit de remplacer $A_1, A_2 \ldots$ par $\frac{1}{2}A_1, \frac{1}{2}A_2$, etc., et d'où résultent ces valeurs de $a_1, a_2 \ldots b_1, b_2 \ldots$

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{1}{4}(3 + ip), \\ a_3 &= \frac{1}{24}\left\{15 + \left[3 + 6\left(\frac{2}{p}\right)\right]ip\right\}, \\ a_4 &= \frac{1}{192}\left\{105 + \left[30 + 24\left(\frac{2}{p}\right) + 32\left(\frac{3}{p}\right)\right]ip + p^2\right\}, \end{aligned}\right.$$

etc.

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} b_1 &= 1, \\ b_2 &= \frac{1}{4}\left[2 + 2\left(\frac{2}{p}\right)\right], \\ b_3 &= \frac{1}{24}\left[9 + 6\left(\frac{2}{p}\right) + 8\left(\frac{3}{p}\right) + ip\right], \\ b_4 &= \frac{1}{192}\left\{108 + 36\left(\frac{2}{p}\right) + 32\left(\frac{3}{p}\right) + \left[4 + 12\left(\frac{2}{p}\right)\right]ip\right\}. \end{aligned}\right.$$

etc.

Ces formules, dont la loi dérive de celle des formules (51), sont bien propres à montrer l'utilité du signe $\left(\frac{n}{p}\right)$, qui assujétit à une loi constante des quantités qui dépendent non de la grandeur du nombre premier p, mais de sa forme. Or il arrive ici que ce sont les seuls nombres $\left(\frac{n}{p}\right)$ qui varient avec la forme de p.

Exemple. Soit $p = 19 = 4.5 - 1$. On a ici $i = -1$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) = -1$, d'où il résulte

$$a_1 = 1\,,\ a_2 = -4\,,\ a_3 = 3\,,\ a_4 = 5\,;\ b_1 = 1\,,\ b_2 = 0\,,\ b_3 = -1\,,\ b_4 = 1\,,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} Y &= 2x^9 + x^8 - 4x^7 + 3x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x - 2\,, \\ Z &= x^8 - x^6 + x^5 + x^4 - x^3 + x. \end{aligned}$$

Ayant ainsi déterminée les deux séries $a_1, a_2, a_3 \ldots b_1, b_2, b_3 \ldots$ Au moyen des équations (76) et (77), on pourra en déduire les nombres N_i°, N_i, N_i', au moyen des formules

$$(78)\quad \left\{ \begin{aligned} N_i^\circ &= \frac{1}{p}\left[(h\mathrm{C}i) \mp h a_i\right], \\ N_i &= \frac{1}{2p}\left[2(h\mathrm{C}i) \pm (a_i + p b_i)\right], \\ N_i' &= \frac{1}{2p}\left[2(h\mathrm{C}i) \pm (a_i - p b_i)\right]; \end{aligned} \right.$$

où le signe supérieur est pour i impair et l'inférieur pour i pair.

Ces formules se tirent immédiatement des équations (60) et (73), c'est-à-dire de

$$\begin{aligned} N_i^\circ + h(N_i + N_i') &= (h\mathrm{C}i), \\ 2N_i^\circ - (N_i' + N_i') &= \mp a_i; \\ N_i - N_i' &= \pm b_i. \end{aligned}$$

La valeur de $N_i^{(a)}$ pourrait aussi se déduire par voie d'exclusion de celle de $N_i^{(a}$; mais le calcul serait probablement moins simple.

Nous terminerons ici les applications des formules du § 1, à la résolution de l'équation $x^p = 1$, et nous passerons à une autre non moins utile, savoir la démonstration des lois de réciprocité dans la théorie des résidus de puissances.

§ III. *Des résidus de puissances en général et des résidus quadratiques en particulier.*

I.

Caractère propre à exprimer la classe d'un nombre premier donné.

On a dit dans l'article II du § 1, (t. II, p. 259), que pour le module $p=hm+1$ premier, les hm nombres $1, 2, 3, \ldots p-1$ se distribuaient en une classe de résidus de $m^{\text{ième}}$ puissance, et $m-1$ classes de non-résidus, et l'on a donné une règle pour trouver la classe d'un nombre composé, quand celles de ses facteurs premiers étaient connues.

Dans l'article I du § 2, l'on a donné un théorème par lequel on peut déterminer l'un des nombres $N_q^{(a)}$, $n_q^{(a)}$ en fonction de l'autre, ces nombres indiquant combien la congruence

$$x_1^m + x_2^m + \ldots + x_q^m \equiv \rho^a \,(\text{mod. } p),$$

a de solutions (sans excepter ou en exceptant celles où des inconnues sont nulles) le nombre ρ étant une racine primitive de p.

Voici maintenant sur la forme du nombre $n_q^{(a)}$, un théorème qui conduira au caractère servant à décider si le nombre premier q appartient ou non à la classe $a^{\text{ième}}$.

« Théorème. Le nombre de solutions n_q de la conséquence » $x_1^m + x_2^m + \ldots + x_q^m \equiv \rho^a \,(\text{mod. } p)$, où q est premier a nécessai- » rement l'une des formes suivantes :

» 1°. $m^q(q.\text{Q}+1)$, si q est de la classe $a^{\text{ième}}$, et
» 2°. $m^q(q.\text{Q} \qquad)$, si q n'est pas de la classe $a^{\text{ième}}$. »

Démonstration. Soit $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2, \ldots x_q=\alpha_q$, une solution de la congruence précédente, elle en fera obtenir m^q, si l'on combine sans transposition les m valeurs de x_1 donnant $x_1^m \equiv \alpha_1^m \,(\text{mod. } p)$, avec les m valeurs de x_2 donnant $x_2^m \equiv \alpha_2^m \,(\text{mod. } p)$, et ainsi des autres. Le nombre de solutions n_q est donc de la forme $m^q.\text{P}$. Quant à P il ne peut avoir qu'une des formes $qQ+1$ ou qQ. Supposons en effet une solution $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$, ou tous les nombres $\alpha_1 \ldots \alpha_q$, ne soient pas égaux; par la transposition, elle en donnera un nombre $\frac{q.q-1\ldots2.1}{1.2.A \times 1.2.B \times \ldots}$ en supposant que parmi les nombres $\alpha_1 \ldots \alpha_q$, il y en ait A égaux entre eux, et à α_1, B égaux entre eux, et à α_2 et ainsi de suite. Or ce nombre $\frac{q.q-1\ldots2.1}{1.2\ldots A \times 1.2\ldots B \times}$ est de forme qR ou multiple de q. Supposons encore qu'on puisse avoir la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q$, elle n'en donnera aucune autre par la transposition, le nombre total des solutions sera donc $m^q(qQ+1)$ si la solution $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_q$ existe, et $m^q.qQ$ si elle n'existe pas. Or, si l'on pose $x_1 = x_2 \ldots = x_q = \alpha_1$ on a $qx_1^m \equiv \rho^a$, $(qx_1)^m \equiv q^{m-1}\rho^a$ (mod. p); posant $q \equiv \rho^{b+fm}$, il vient $(qx_1)^m \equiv \rho^{a+(m-1)(b+fm)}$, et pour la possibilité de cette congruence $a-b$ doit être multiple de m, ainsi $a \equiv b$ (mod. m), c'est-à-dire que q doit être de la classe a. Réciproquement si q est de la classe a, en posant $q = \rho^{a+fm}$ la congruence $qx_1^m \equiv \rho^a$ deviendra $(\rho^f x_1)^m \equiv 1$ qui est possible, et l'on pourra faire $x_1 = x_2 \ldots = x_q$. Il résulte encore de là que si l'on ne peut faire $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_q$, q n'est pas de la classe a et réciproquement; d'où l'énoncé.

Corollaire. Comme on a $n_q^{(a)} \equiv N_q^{(a)}$ (mod. q), il en résultera $N_q^{(a)} \equiv m^q(qQ+1)$ (mod. q), ou bien encore $N_q^{(a)} \equiv m$ (mod. q), si q nombre premier impair est de classe $a^{ième}$, et $N_q^{(a)} \equiv 0$ (mod. q), si q nombre premier impair n'est pas de classe $a^{ième}$. Nous allons dans l'article suivant appliquer ce caractère aux résidus quadratiques; nous l'appliquerons dans les §§ suivants, aux résidus cubiques et aux résidus bi-quadratiques.

II.

Des résidus quadratiques.

« Théorème I. Le nombre 2 est résidu quadratique des nombres » premiers de forme $8g \pm 1$, et non-résidu des nombres premiers » de forme $8g \pm 5$. »

Démonstration. Le nombre de solutions de la congruence... $x_1^2 + x_2^2 \equiv 1\ (\rho^{2a})$ (mod. p) est $N_2 = p \mp 1$ (§ 1), pour $p = 4q \pm 1$; d'ailleurs $n_2 = N_2 - 2N_1 = N_2 - 4$: donc pour 2 résidu quadratique on aura $4(2Q+1) = p \mp 1 - 4$ ou $p = 8g \pm 1$. Pour 2 non-résidu quadratiques, on aura $4.2Q = p \mp 1 - 4$ ou $p = 8g \pm 5$.

« Théorème II. (Loi de réciprocité de Legendre. Théorème fonda-
» mental.) Soient p et q deux nombres premiers impairs et $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv i$ (mod. p) (i étant $+1$ ou -1) on aura $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv i(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ (mod. q).

N. B. Legendre représente par le symbole $\left(\frac{q}{p}\right)$ le reste $+1$ ou -1 de $q^{\frac{p-1}{2}}$ divisé par p. Le théorème revient donc à la relation $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ ou encore à $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ puisque $\left(\frac{q}{p}\right)^2 = 1$.

Démonstration. 1°. Si q est résidu quadratique de p, c'est-à-dire si $i=1$, il faut avoir $N_q \equiv 2$ (mod. q), ou bien d'après la formule (18) du § 1, $p^{q-1} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} \equiv 2$ (mod. q), d'où $p^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \equiv i(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}}$ (mod. q). 2°. Si q est non-résidu quadratique de p, c'est-à-dire si i est égal à -1, il faut avoir $N_q \equiv 0$ (mod. q) ou bien $p^{q-1} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} \equiv 0$ (mod. q) ou encore $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \equiv i(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ (mod. q). C.Q.F.D.

Remarques. J'ai déjà donné cette démonstration dans une note sur les résidus présentée à l'Académie des Sciences. Avec cette seule différence, qu'au lieu de calculer directement les quantités N_q, je les ai déduites d'une formule de M. Libri [formule (40), § 1]. On peut encore tirer la démonstration, mais d'une manière beaucoup moins simple, de la valeur de n_q, qu'il serait peu utile de mettre ici.

Le théorème fondamental peut encore s'énoncer ainsi qu'il suit.

« Si p et q sont deux nombres premiers impairs, qui ne soient pas
» tous deux de forme $4g-1$, la relation de p à q sera la même que

» celle de q à p. En d'autres termes, si l'on a p résidu de q (ou $p\mathrm{R}q$), » l'on aura aussi q résidu de p (ou $q\mathrm{R}p$). Mais si p et q sont tous deux » de forme $4g-1$, la relation de p à q ne sera pas la même que celle » de q à p. Autrement $p\mathrm{R}q$ donne $q\mathrm{N}p$ et $p\mathrm{N}q$ donne $q\mathrm{R}p$.

Les notations $p\mathrm{R}q$, $p\mathrm{N}q$ et la signification particulière du mot *relation* sont de M. Gauss.

Sans compter la démonstration de Legendre, on en a beaucoup d'autres du théorème précédent, l'un des plus importants de la théorie des nombres. M. Gauss en a donné six: deux sont dans les *Recherches Arithmétiques* et les autres dans les *Commentaires de Gottingue*. M. Jacobi en a donné une qui est rapportée dans la *Théorie des nombres*: M. Cauchy en a donné aussi une dans un mémoire sur les résidus, (*Bulletin de Férussac*, tome XII).

Indépendamment de ces démonstrations générales, les seules importantes dans l'état présent de la théorie des nombres, on en connaît plusieurs relatives aux petits nombres premiers 2, 3, 5... En voici deux : l'une relative à 2 et l'autre relative à 3.

» Théorème. Si l'on pose $(1+\sqrt{-1})^p = \mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}$, on aura

» pour $p = 4\mathrm{K}$ $\quad \mathrm{P} = (-1)^{\frac{p}{4}}\, 2^{\frac{p}{2}},\quad \mathrm{Q} = 0,$

» pour $p = 4\mathrm{K}+2,\ \mathrm{P} = 0,\quad \mathrm{Q} = (-1)^{\frac{p-2}{4}}\, 2^{\frac{p}{2}},$

» et pour $p = 4\mathrm{K}\pm 1,\ \mathrm{P} = \pm\,\mathrm{Q} = (-1)^{\frac{p\pm 1}{4}}\, 2^{\frac{p-1}{2}}$. »

Démonstration. $(1+\sqrt{-1})^4 = (2\sqrt{-1})^2 = -2^2$ donne $(1+\sqrt{-1})^{4k} = (-1)^k . 2^{2k}$: multipliant successivement par $1+\sqrt{-1}$, $(1+\sqrt{-1})^2 = 2\sqrt{-1}$ et $\frac{1}{1+\sqrt{-1}} = \frac{1-\sqrt{-1}}{2}$, on aura

$$
\begin{aligned}
(1+\sqrt{-1})^{4k+1} &= (-1)^k 2^{2k} + (-1)^k . 2^{2k}\sqrt{-1}, \\
(1+\sqrt{-1})^{4k+2} &= +(-1)^k . 2^{2k+1}\sqrt{-1}, \\
(1+\sqrt{-1})^{4k-1} &= (-1)^k 2^{2k-1} - (-1)^k . 2^{2k-1}\sqrt{-1};
\end{aligned}
$$

d'où les résultats de l'énoncé.

Corollaire. Soit p premier impair $P = 1 - \frac{p.p-1}{1.2} + \ldots$ donne $P \equiv 1 \pmod{p}$ ce qui réduit $P = (-1)^{\frac{p\pm 1}{2}} 2^{\frac{p-1}{2}}$ à $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p\pm 1}{2}}$, savoir 2 résidu, si $\frac{p\mp 1}{4}$ est pair, c'est-à-dire si $p = 8g \pm 1$, et 2 non-résidu, si $\frac{p\mp 1}{4}$ est impair, ou si $p = 8g \pm 5$ (*).

« Théorème. Si l'on pose $(1 + \sqrt{-3})^p = P + Q\sqrt{-1}$, on aura
» pour $p = 3k$, $P = (-1)^{\frac{p}{3}} 2^p$, $Q = 0$,
» $p = 3k \pm 1$, $P = \pm Q = (-1)^{\frac{p\mp 1}{3}} 2^{p-1}$.

Démonstration. $(1+\sqrt{-3})^3 = -2^3$, d'où $(1+\sqrt{-3})^{3k} = (-1)^k 2^{3k}$,

et
$$(1 + \sqrt{-3})^{3k+1} = (-1)^k 2^{3k} + (-1)^k 2^{3k} \sqrt{-3},$$
$$(1 + \sqrt{-3})^{3k-1} = (-1)^k 2^{3k-2} - (-1)^k 2^{3k-2} \sqrt{-3},$$

en vertu de $\frac{1}{1+\sqrt{-3}} = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{-3})$. De là les valeurs de P et Q.

Corollaire. Si p est premier, on a

$$Q = p + \frac{p.p-1.p-3}{1.2.3}(-3) + \ldots + (-3)^{\frac{p-1}{2}} \text{ ou } (-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv Q \pmod{p},$$

ou encore

$$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm(-1)^{\frac{p\mp 1}{3}}.2^{p-1} \equiv \pm(-1)^{\frac{p\mp 1}{3}} \equiv \pm 1 \pmod{p},$$

puisque $\frac{p\mp 1}{3}$ est nécessairement pair.

(*) Une autre conséquence du théorème précédent est qu'en posant
$$(1+1)^p = 1 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots Q_p,$$
et faisant
$$S_0 = 1 + Q_4 + Q_8 + \ldots S_1 = Q_1 + Q_5 + \ldots S_2 = Q_2 + Q_6 + \ldots S_3 = Q_3 + Q_4 + \ldots$$
on trouvera pour ces sommes de coefficients binomiaux pris de 4 en 4,
$$2S_0 = 2^{p-1} + P, \quad 2S_2 = 2^{p-1} - P, \quad 2S_1 = 2^{p-1} + Q, \quad S_3 = Q_3 + Q_4 + \ldots$$
ce qui résulte de $P = S_0 - S_2$, $Q = S_1 - S_3$ et $(1-1)^p = 0$ qui donne
$$S_0 + S_2 = S_1 + S_3 = 2^{p-1}, \quad \text{puisque} \quad (1+1)^p = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = 2^p.$$

On a donc d'abord -3 résidu de $p=3k+1$, et non-résidu de $p=3k-1$; ensuite comme $3^{\frac{p-1}{2}}=\pm(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, il en résultera que 3 est résidu quadratique des nombres de forme $12g\pm1$, et non-résidu de ceux de forme $12g\pm5$.

Cette démonstration est la même, au fond, que celle donnée par M. Libri pour ce cas particulier.

La loi de réciprocité a deux usages principaux. Elle fait connaître pour quelles formes de nombres premiers, un nombre a est résidu ou non-résidu quadratique d'un nombre premier donné. Elle fournit aussi un moyen fort court, même pour un fort grand nombre premier, de juger si a est résidu ou non-résidu quadratique d'un module premier p, ce qui ne serait guère praticable par le calcul direct du reste de $a^{\frac{p-1}{2}}$. Pour cette application, rien n'est plus commode qu'un algorithme ou procédé de calcul, que M. Gauss a joint postérieurement à sa troisième démonstration. Cet algorithme ne se trouvant point dans la troisième édition de la théorie des nombres de Legendre, bien que la troisième démonstration de M. Gauss y soit rapportée, nous pensons être utile et agréable aux amateurs de la théorie des nombres, en donnant dans l'article suivant la troisième démonstration de M. Gauss, avec l'algorithme qu'il a exposé dans le Mémoire intitulé *Theorematis fundamentalis in doctrinâ de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novæ.* C'est, selon nous, ce qu'on peut donner de plus direct pour la démonstration et de plus simple pour l'application. Nous avons d'ailleurs simplifié la partie de la démonstration rapportée par Legendre.

III.

Démonstration du théorème fondamental de la théorie des résidus quadratiques. — Algorithme qui s'en déduit pour juger de la possibilité de la congruence $x^2\equiv q$ (mod. p).

Il a été démontré dans le § I, que q est résidu quadratique du nombre premier p, si l'on a $q^{\frac{p-1}{2}}\equiv1$ (mod. p), et non-résidu, si l'on a $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 (\text{mod. } p)$: on a donc toujours $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^n . (\text{mod.} p)$. Ainsi il faut trouver un moyen praticable de reconnaître si le nombre entier que l'on doit mettre pour n, est pair ou impair. C'est l'objet des propositions suivantes.

« Théorème I. Soit q un nombre premier à $p = 2p' + 1$ nombre » premier. Si l'on divise par p les produits $1q$, $2q$, $3q$, $4q, \ldots p'q$, » en prenant les quotients Q_1, Q_2, $Q_3, \ldots Q_{p'}$, les plus approchés qu'il » est possible, en plus ou en moins, de sorte que les restes positifs » ou négatifs r_1, $r_2, \ldots r_{p'}$, soient au signe près $< \frac{p}{2}$, on aura en » supposant qu'il y ait n restes négatifs,

$$\text{(A)} \qquad q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^n (\text{mod. } p).$$

Démonstration. Dans les équations $1 . q = pQ_1 + r_1$, $2q = pQ_2 + r_2 \ldots$ $nq = pQ_a + r_a \ldots$ $bq = pQ_b + r_b \ldots$ $p'q = pQ_{p'} + r_{p'}$ (B), tous les restes sont nécessairement inégaux, car si l'on avait $r_a = \pm r_b$, il viendrait $(a \mp b) q = p (Q_a \mp Q_b)$, ce qui est impossible, puisque $(a \mp b)$ moindre que p devrait être divisible par p. Ainsi r_1, r_2, $r_3, \ldots r_{p'}$, formant à l'ordre et au signe près, la suite $1, 2, 3, \ldots$ $p' = \frac{p-1}{2}$, en multipliant les équations (B) membre à membre, on aura $1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2} . q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2} (-1)^n (\text{mod. } p)$, ou bien $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^n (\text{mod. } p)$, en divisant par $1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2}$.

» Théorème II. Si l'on représente par $e\left(\frac{aq}{p}\right)$, l'entier immédiate- » ment au-dessous de $\frac{aq}{p}$, par $p'\left(=\frac{p-1}{2}\right)$ l'entier $e\left(\frac{p}{2}\right)$, et par $\left[\frac{q}{p}\right]$ » la somme $e\left(\frac{q}{p}\right) + e\left(\frac{2q}{p}\right) + e\left(\frac{3q}{p}\right) + \ldots + e\left(\frac{p'q}{p}\right)$, on aura

$$» \quad \text{(C)} \qquad n \equiv \left[\frac{q}{p}\right] + \tfrac{1}{8} (p^2 - 1)(q - 1) \ (\text{mod. } 2).$$

Démonstration. Si dans l'équation $aq = pQ_a + r_a$, on a r_a positif, il en résultera $Q_a = e\left(\frac{aq}{p}\right)$, mais si r_a est négatif, on aura $Q_a = e\left(\frac{aq}{p}\right) + 1$, par conséquent $Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots Q_{p'} = \left[\frac{q}{p}\right] + n$, d'ailleurs $1 + \;\; + 3 \ldots + \frac{p-1}{2} = \frac{1}{8}(p^2 - 1)$. Ajoutant donc les équations (B) membre à membre, après avoir remplacé le reste négatif r_a par $-r_a + 2r_a$ et ainsi des autres, nous aurons

$$\frac{1}{8}(p^2 - 1)q = p\left\{\left[\frac{q}{p}\right] + n\right\} + \frac{1}{8}(p^2 - 1) + 2r_a + \ldots$$

Omettant les multiples de 2, en réduisant p à l'unité et effaçant les termes $2r_a$ et autres semblables, nous trouverons........ $n \equiv -\left[\frac{q}{p}\right] + \frac{1}{8}(p^2 - 1)(q - 1)$ (mod. 2), d'où la congruence en ajoutant au deuxième membre $2\left[\frac{q}{p}\right]$, ce qui revient à changer le signe du terme négatif $-\left[\frac{q}{p}\right]$.

Cette congruence (C) fera connaître si n est pair ou impair, quand on connaîtra $\left[\frac{q}{p}\right]$, c'est l'objet des corollaires suivants.

Corollaire I. Si $q = 2$, on aura $n \equiv \frac{1}{8}(p^2 - 1)$ (mod. 2), car ici $\left[\frac{q}{p}\right] = 0$, tous les termes de cette somme étant nuls, de là le théorème sur 2.

Corollaire II. Si q est impair, on aura $n \equiv \left[\frac{q}{p}\right]$ (mod. 2), car $(q-1)$ étant pair, il en est de même de $\frac{1}{8}(p^2 - 1)(q - 1)$.

Ainsi le nombre impair q est résidu ou non-résidu quadratique, selon que $\left[\frac{q}{p}\right]$ est pair ou impair.

Corollaire III. Si q est pair, en réduisant $q - 1$ à l'unité, on aura $n \equiv \left[\frac{q}{p}\right] + \frac{1}{8}(p^2 - 1)$. Ainsi pour $\frac{1}{8}(p^2 - 1)$ pair, c'est-à-dire pour $p = 8g \pm 1$, q sera résidu, selon que $\left[\frac{q}{p}\right]$ sera pair ou impair.

Ce sera le contraire pour $\frac{1}{8}(p^2-1)$ impair, c'est-à-dire pour $p=8g\pm 5$.

Corollaire IV. Quel que soit q pair ou non, il est résidu ou non, selon que $\left[\frac{2q}{p}\right]$ est pair ou impair.

Si l'on représente par n' la valeur correspondante à n quand on change q en $2q$, on aura $n'=\left[\frac{2q}{p}\right]+\frac{1}{8}(p^2-1)$. Si $\frac{1}{8}(p^2-1)$ est pair q et $2q$ sont en même temps résidus ou non-résidus, selon que $\left[\frac{2q}{p}\right]$ est pair ou impair. Si $\frac{1}{8}(p^2-1)$ est impair, q et $2q$ sont l'un résidu et l'autre non-résidu. Si $2q$ est non-résidu q est résidu, et cela arrive pour $\left[\frac{2q}{p}\right]$ pair. Si $2q$ est résidu, q est non-résidu, et cela arrive pour $\left[\frac{2q}{p}\right]$ impair.

« Théorème III. Si p et q sont deux nombres premiers entre eux,
» mais d'ailleurs premiers ou non, on aura en représentant par p'
» et q' les entiers égaux à $\frac{p}{2}$, $\frac{q}{2}$ ou immédiatement inférieurs,

» (D) $$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{q}{p}\right]=p'q'.$$

Démonstration. Nous avons par hypothèse,

$$\left[\frac{q}{p}\right]=e\left(\frac{q}{p}\right)+e\left(\frac{2q}{p}\right)+e\left(\frac{3q}{p}\right)+\ldots+e\left(\frac{p'q}{p}\right).$$

Cette valeur, où l'on suppose $q<p$, peut se transformer au moyen des remarques suivantes :

1°. Aucun des nombres $\frac{q}{p}$, $\frac{2q}{p}$ ... $\frac{p'q}{p}$ n'est entier;

2°. $e\left(\frac{p'q}{p}\right)=q'$ pour q impair;

3°. $e\left(\frac{p'q}{q}\right)=q'-1$ pour q pair, alors $e\left(\frac{q'p}{q}\right)=p'$;

4°. Soient $k'q$, $k''q$ ... $k^{(q')}q$ les multiples de q, immédiatement au-dessous de p, $2p$ ... $q'p$, on aura

$$0 = e\left(\frac{q}{p}\right) = e\left(\frac{2q}{p}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots = e\left(\frac{k'q}{p}\right), \quad k' = e\left(\frac{p}{q}\right);$$
$$1 = e\left(\frac{k'+1.q}{p}\right) = e\left(\frac{k'+2.q}{p}\right) \ldots = e\left(\frac{k''q}{p}\right), \quad k'' = e\left(\frac{2p}{q}\right);$$
$$2 = e\left(\frac{k''+1.q}{p}\right) = e\left(\frac{k''+2.q}{p}\right) \ldots = e\left(\frac{k'''q}{p}\right), \quad k''' = e\left(\frac{3p}{q}\right);$$
$$q'-1 = e\left(\frac{k^{(q'-1)}+1.q}{p}\right) = e\left(\frac{k^{(q')}+2.q}{p}\right) \ldots = e\left(\frac{k^{(q')}q}{p}\right), \quad k^{(q')} = e\left(\frac{q'p}{q}\right);$$
$$q' = e\left(\frac{k^{q'}+1.q}{p}\right) = e\left(\frac{k^{(q')}+2.q}{p}\right) \ldots = e\left(\frac{p'q}{p}\right).$$

Ces équations ont lieu pour q impair. Si q est pair les deux dernières doivent être remplacées par

$$q'-2 = e\left(\frac{k^{(q'-2)}+1.q}{p}\right) = e\left(\frac{k^{(q'-2)}+2.q}{p}\right) = \ldots = e\left(\frac{k^{(q'-1)}q}{p}\right), \quad k^{(q'-1)} = e\left(\frac{q'-1.p}{q}\right),$$
$$q'-1 = e\left(\frac{k^{q'-1}+1.q}{p}\right) = e\left(\frac{k^{(q'-1)}+2.q}{p}\right) = \ldots = e\left(\frac{p'q}{p}\right).$$

Ainsi dans le premier cas l'expression $\left[\frac{q}{p}\right]$ sera

$$\left[\frac{q}{p}\right] = 0.k' + 1(k''-k') + 2(k'''-k'') + \ldots + q'(p'-k^{q'}),$$
$$= p'q' - k' - k'' - \ldots\ldots - k^{q'} = p'q' - \left[\frac{p}{q}\right],$$

Dans le second cas, l'on aura

$$\left[\frac{q}{p}\right] = 0.k' + 1(k''-k') + 2(k'''-k'') \ldots + (q'-1)(p'-k^{q'-1}),$$
$$= p'q' - k' - k'' - \ldots - k^{(q'-1)} - p',$$
$$= p'q' - k' - k'' \ldots\ldots - k^{(q'-1)} - k^{(q')} = p'q' - \left[\frac{p}{q}\right].$$

On a donc dans les deux cas

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{p}{q}\right] = p'q'.$$

COROLLAIRE. Si p et q sont premiers et impairs, en représentant, avec Legendre, par $\left(\frac{q}{p}\right)$ le reste ± 1 de $q^{\frac{p-1}{2}}$ divisé par p, on aura

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^n = (-1)^{\left[\frac{q}{p}\right]}, \text{ de même } \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\left[\frac{p}{q}\right]},$$

donc

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{p}{q}\right]} = (-1)^{p'q'} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Multipliant par $\left(\frac{q}{p}\right)$ et remarquant qu'on a $\left(\frac{q}{p}\right)^2 = 1$, il en résultera

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

ce qui est la loi de réciprocité de Legendre.

THÉORÈME IV. *Algorithme.* « Soit q un nombre positif non divisible » par p nombre premier impair, si l'on fait sur p et q l'opération du » plus grand commun diviseur ainsi qu'il suit :

» Divid., div., restes	p,	q,	r,	s	.....	u,	v,	1	
» Quotients		a,	b,	c	.....	k,	l,		(I)
» Demi-dividendes.....	p',	q',	r',	s'	.....	u',	v',		(II),

» et que dans la série (II) il y ait β, permanences de nombres impairs, ou β nombres impairs immédiatement suivis d'un nombre » impair, que dans la série (I) il y ait α quotients impairs au-dessus » desquels se trouvent dans la série (II) des nombres de forme $4g+1$ » ou $4g+2$, la parité ou imparité de $\alpha+\beta$ montrera si q est résidu » ou non-résidu de p par la règle suivante :

» 1° Pour q impair, et pour q pair si $p = 8g \pm 1$; q sera résidu ou » non résidu quad. de p, selon que $\alpha+\beta$ sera pair ou impair.

» 2°. C'est le contraire si q étant pair on a $p = 8g \pm 5$.

» 3°. La première règle a lieu sans exception quand on fait le » même calcul sur $2q$ et p. »

Démonstration. L'opération du plus grand commun diviseur donnant la suite d'équations

$$p = qa + r,\quad q = rb + s \ldots . \quad u = vl + 1.$$

On en tire $\frac{p}{q} = a + \frac{r}{q}$, d'où $\frac{mp}{q} = am + \frac{mr}{q}$,

mettant pour m les valeurs $1, 2, 3, \ldots . q'$ et sommant on trouvera $\left[\frac{p}{q}\right] = \frac{1}{2}(q'^2 + q')\,a + \frac{r}{q}$, qui, en vertu de $\left[\frac{p}{q}\right] = p'q' - \left[\frac{q}{p}\right]$ deviendra

$$\left[\frac{q}{p}\right] = p'q' - \frac{1}{2}(q'^2 + q')a - \left[\frac{r}{q}\right],$$

on aura semblablement

$$\left[\frac{r}{q}\right] = q'r' - \frac{1}{2}(r'^2 + r')b - \left[\frac{s}{r}\right],$$
$$\left[\frac{s}{r}\right] = r's' - \frac{1}{2}(s'^2 + s')c - \left[\frac{t}{s}\right],$$
$$\vdots$$
$$\left[\frac{v}{u}\right] = u'v' - \frac{1}{2}(v'^2 + v')f - \left[\frac{t}{v}\right].$$

Or $\left[\frac{1}{v}\right] = 0$, on trouvera donc par l'élimination

$$\left[\frac{q}{p}\right] = (p'q' - q'r' + r's' \ldots \pm u'v) - \left\{\frac{1}{2}(q'^2 + q')a - \frac{1}{2}(r'^2 + r')b + \ldots \pm \frac{1}{2}(v'^2 + v')c\right\}.$$

Comme il suffit de savoir si $\left[\frac{q}{p}\right]$ est pair ou impair, on pourra d'abord changer tous les signes $-$ en $+$, ce qui revient à ajouter le donble des termes négatifs, puis supprimer tous les termes pairs, et réduire tous les termes impairs à l'unité; on trouve, en opérant ainsi, $\left[\frac{q}{p}\right] \equiv \beta + \alpha \pmod{2}$, ce qui donne la règle de l'énoncé, au moyen des corollaires du th. III.

Exemples. Quoique les deux exemples suivants se rapportent à des nombres assez grands, on a mis ici le calcul sans l'abréviation qui consisterait à n'écrire les restes qu'une fois. Ils font bien voir la simplicité du procédé.

1^{er} EXEMPLE. Le nombre 638 est-il résidu ou non résidu quadratique du nombre premier $1091 = 8.136 + 3$?

$$\begin{array}{r}
1081,\ \ 638,\ 453,\ \ 185,\ 83,\ \ 19,\ \ 7,\ 5,\ 2. \\
1,\ \ \ 1:\ \ \ 2,\ \ 2,\ \ \ 4,\ \ 2,\ 1:2. \\
453,\ \ 185,\ \ 83,\ \ \ 19,\ \ \ 7,\ \ \ 5,\ \ 2,\ 1.\ \ \ \\
545:319,\ 226,\ \ 92,\ 41:\ \ 9:3,\ \ 2,\ \ 1.
\end{array}$$

Ici l'on a $\beta = 3$, $\alpha = 2$, $\alpha + \beta = 5$, or 638 est pair et 1091 de forme $8k + 3$, donc 638 est résidu quadratique d'après la seconde partie de la règle (2°).

2^e EXEMPLE. Calcul fait sur $2.638 = 1276$ et 1091.

$$\begin{array}{r}
1276,\ 1091,\ \ 185,\ 166,\ \ 19,\ 14,\ 5,\ 4. \\
1:\ \ \ 5,\ \ \ 1,\ \ \ 8,\ \ 1,\ 2,\ 1: \\
185,\ \ 166,\ \ \ 19,\ \ 14,\ \ \ 5,\ \ 4,\ 1.\ \ \ \ \ \\
638,\ \ 545,\ \ \ 92,\ \ 83:\ \ 9:\ 7,\ 2,\ 2.
\end{array}$$

Ici $\beta = 2$, $\alpha = 2$, $\alpha + \beta = 4$: il faut donc que 638 soit résidu par la troisième partie de la règle (3°).

NOTE DE GÉOMÉTRIE.

Sur quelques propriétés de l'Ellipsoïde à trois axes inégaux;

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

I.

1°. On sait que les triangles équilatéraux inscrits et circonscrits à un cercle, ont pour centre de gravité, le centre de ce cercle.

Désignons par T l'aire du triangle inscrit, par T_1 l'aire du triangle circonscrit, et par C l'aire du cercle.

2°. Si l'on projette sur un plan P et parallèlement à une droite D les aires C, T, T_1, on obtiendra les aires E, T', T'_1,

E étant l'aire de l'ellipse projection oblique du cercle C,
T'............du triangle.................du triangle inscrit au cercle C,
T'_1.............du triangle.................du triangle circonscr. au cercle C.

On sait que les triangles T' et T'_1 auront pour centre de gravité le centre de l'ellipse E.

3°. On peut inscrire et circonscrire au cercle C une infinité de triangles équilatéraux: tous les triangles inscrits ont même aire. Il en est de même pour les triangles circonscrits.

Désignant donc par T', T'', T''',... les aires des projections obliques sur le plan P des triangles inscrits, et par T'_1, T''_1, T'''_1,... les aires des projections obliques sur le même plan P des triangles circonscrits, on aura

$$T' = T'' = T''' = \ldots \quad \text{et} \quad T'_1 = T''_1 = T'''_1 = \ldots$$

4°. Les aires du cercle C (du rayon R) et du triangle équilatéral inscrit T, sont entre elles :: $\pi R^2 : \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

On aura donc toujours quel que soit le rayon R,

$$\frac{c'}{t} = \frac{4\pi}{\sqrt{27}} = \text{constante} = N \text{ et } \frac{c'}{t_1} = \text{constante} = N_1,$$

où l'on désigne par c' l'aire d'un cercle d'un rayon arbitraire, et par t et t_1 les aires de deux triangles équilatéraux inscrit et circonscrit à ce cercle. On aura donc $\left(\text{puisque } \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}} = \text{constante} = \mathrm{N} \text{ et } \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}_1} = \text{constante} = \mathrm{N}_1\right)$,

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{T}'} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{T}''} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{T}'''} = \ldots = \text{constante} = \mathrm{M},$$
$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{T}'_1} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{T}''_1} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{T}'''_1} = \ldots = \text{constante} = \mathrm{M}_1.$$

Par conséquent si, étant données deux ellipses E et E′, on inscrit les triangles θ à E et θ' à E′, ces deux triangles ayant leur centre de gravité situés, le premier au centre de la courbe E, et le second, aussi, au centre de la courbe E′, les aires des deux ellipses seront entre elles comme les aires des deux triangles; les aires des deux ellipses seront donc égales, si celles des deux triangles sont égales.

Cela posé :

5°. Résolvons le problème suivant :

Inscrire et circonscrire à une ellipse E *deux triangles ayant pour centre de gravité le centre de la courbe donnée.*

Construction. Ayant déterminé le centre o de l'ellipse E, ayant mené par ce centre une droite arbitraire K coupant l'ellipse aux points b et b'; on partagera le diamètre bb' en quatre parties égales entre elles. (Désignons par l la longueur d'une des parties.)

Construisons au point b la tangente B à l'ellipse.

Portons sur la droite K à partir du point b, une longueur $= 3l$, on aura un point a.

Menons par ce point a une droite L parallèle à la tangente B, et coupant l'ellipse aux deux points x et x', la corde xx' sera la *conjuguée* du diamètre bb', dès-lors le point a sera le milieu de cette corde.

Portons sur la droite K à partir du point b une longueur $= 6.l$, on aura un point p, et les droites px et px' seront tangentes à l'ellipse, l'une au point x et l'autre au point x'.

Joignons b et x, b' et x', on aura un parallélogramme $bxpx'$, et le triangle bxx' moitié de ce parallélogramme sera inscrit, à l'ellipse E, et aura son centre de gravité situé au centre o de cette courbe.

Prolongeons les tangentes px, px', elles couperont la droite B, la première en un point y', et la seconde en un point y, le triangle pyy' sera circonscrit à l'ellipse E, et son centre de gravité sera situé au centre o de cette courbe.

Les deux triangles pyy' et bxx' sont semblables et inversement placés l'un par rapport à l'autre, et jouissent des propriétés suivantes.

Les droites xy et $x'y'$, passent par le centre o et coupent respectivement les côtés bx' et bx en leur milieu.

Les points b, x, x', sont respectivement le milieu des côtés du triangle circonscrit, etc.

En un mot, toutes les propriétés qui existent pour deux triangles équilatéraux, inscrit et circonscrit à un cercle, se reproduiront sur la projection, en vertu du principe fondamental des projections cylindriques, savoir : que les rapports de grandeur entre les droites ne sont point altérés, et qu'une tangente à une courbe, se projette suivant une tangente à la projection de la courbe.

Faisant la même construction que ci-dessus pour chaque diamètre de l'ellipse E, on obtiendra une série de triangles inscrits T', T'', T''',... et circonscrits T'_1, T''_1, T'''_1,... ayant tous pour centre de gravité commun, le centre o de l'ellipse donnée E.

6°. Si donc, l'on considère la courbe E comme la base d'un cône ayant pour sommet un point arbitraire S de l'espace, toutes les pyramides qui auront pour sommet commun le point S, et pour bases les triangles inscrits, auront même volume ; il en sera de même pour les pyramides ayant le même point S pour sommet commun, et pour bases les triangles circonscrits.

Et les volumes d'une pyramide inscrite et du cône seront entre eux $:: \sqrt{27} : 4\pi$.

II.

Par le centre o d'une sphère S (du rayon R), concevons trois axes rectangulaires entre eux X, Y, Z, perçant respectivement la surface aux points a, b, d, on aura une pyramide trirectangle (o, abd).

Le triangle base abd sera équilatéral ; le plan de ce triangle coupera la sphère suivant un cercle C, dont le centre sera le centre de gravité du triangle abd.

Le cercle C se projettera orthogonalement sur le plan XY, suivant une ellipse E, et le triangle *abd* suivant le triangle rectangle *oab*.

Le triangle *oab* sera inscrit à l'ellipse E et aura son centre de gravité situé au centre de cette courbe.

Si l'on abaisse du centre o une perpendiculaire r sur la droite ab, et que l'on décrive du centre o avec le rayon r, et dans le plan XY un cercle C′, l'on pourra imaginer un cône de révolution ξ (ayant C′ pour base et le point d pour sommet).

Tout plan tangent à ce cône ξ, coupera la sphère S suivant des cercles égaux entre eux et à C, lesquels se projetteront sur le plan XY, suivant des ellipses dont les aires seront égales entre elles et à celle de l'ellipse E.

Et cela aura lieu pour tout autre système formé par trois droites rectangulaires entre elles X′, Y′, Z′, et se croisant au centre de la sphère; de sorte que les plans des triangles abd, $a'b'd'$,... seront tangents à une sphère S′ concentrique à la sphère S, et le point de contact de chacun de ces plans, sera le centre de gravité de chacun des triangles.

On sait : que le rayon de la sphère S étant égal à R.

1°. Le rayon du cercle C est égal à $\frac{2R}{\sqrt{7}}$ ou $R\sqrt{\frac{4}{7}}$;

2°. Le rayon r du cercle C′ est égal à $\frac{R}{2}\sqrt{3}$ ou $R\sqrt{\frac{3}{4}}$;

3°. Le rayon de la sphère S′ est égal à $\frac{3R}{\sqrt{21}}$. ou $R\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Cela posé,

Concevons par le centre o de la sphère S,

1°. Les trois axes rectangulaires X, Y, Z,

2°. Trois droites arbitraires X_1, Y_1, Z_1.

Prenons un point m sur la sphère; abaissons de ce point une perpendiculaire z sur le plan XY, et perçant ce plan au point t; par le point t menons une perpendiculaire y à l'axe X et rencontrant cette droite au point u.

Les trois coordonnées du point m seront :

$$x = \overline{ou},\quad y = \overline{ut},\quad z = \overline{tm};$$

à partir du point o, portons sur X_1 la droite $\overline{ou_1} = M.x$; par le point u_1 menons une droite parallèle à Y, et prenons sur cette droite, une longueur $\overline{u_1t_1} = M'y$; par le point t_1 menons une parallèle à Z_1, et prenons sur cette droite une longueur $\overline{t_1m_1} = M''.z$.

Le point m_1 sera le *transformé* du point m.

Faisant la même construction pour tous les points de la sphère S, (M, M', M'', restant constants), le lieu des points m_1 sera, ainsi qu'on le sait, un ellipsoïde λ, auquel on donne le nom de *transformé* de la sphère S.

Les axes X_1, Y_1, Z_1, perceront la surface λ en les points a_1, b_1, c_1, et l'on aura : $\overline{oa_1} = M.R$, $\overline{ob_1} = M'.R$, $\overline{oc_1} = M''.R$. (Les points a_1, b_1, c_1, étant respectivement les *transformés* des points a, b, c, en lesquels la sphère S se trouve percée par les axes X, Y, Z).

Représentons M.R par A, M'.R par B, M''.R par D; A, B, D, seront les $\frac{1}{2}$ diamètres conjugués de l'ellipsoïde λ.

Par ce mode de transformation, souvent employé par les géomètres modernes, on transforme ainsi qu'on le sait :

1°. Une droite en une autre droite, et deux droites parallèles en deux autres droites aussi parallèles.

2°. Un plan en un autre plan, et deux plans parallèles en deux autres plans aussi parallèles.

3°. Une surface du second degré en une autre surface du second degré et du même genre.

4°. Trois points p, q, r, situés sur une droite K, en trois autres points p_1, q_1, r_1, situés sur une droite K_1 et tels, que les rapports entre leurs distances restent les mêmes, que ceux qui existaient entre les distances respectives des points primitifs p, q, r.

5°. Un plan tangent T à la sphère S, en un plan T_1 tangent à l'ellipsoïde λ.

6°. Un système quelconque de trois droites rectangulaires entre elles L, L', L'' et se croisant au centre de la sphère S, en un système de trois droites L_1, L'_1, L''_1, qui sont les directions d'un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde λ (*transformé* de la sphère S) (*).

(*) Les résultats énoncés sous les n^{os} 1, 2, 4, 5 et 6 peuvent être évidemment obtenus et démontrés par la *Géométrie descriptive*, sans avoir recours

Cela posé :

Les résultats suivants deviennent évidents et peuvent être facilement énoncés sous forme de *théorèmes* (*).

1. Étant donné un ellipsoïde λ, dont les demi-axes seront A, B, D, construisons un ellipsoïde λ' concentrique et semblable, et semblablement placé par rapport à la surface λ; les demi-axes de λ' étant

$$A\,\frac{3}{\sqrt{21}}\,\Big|\;,\quad B\,\frac{3}{\sqrt{21}}\,\Big|\;,\quad D\,\frac{3}{\sqrt{21}}.$$

Concevons un diamètre A' de λ perçant cette surface en un point a', par ce point a' menons un plan T' tangent à l'ellipsoïde λ', le point de contact étant t'.

Le plan T' coupera λ suivant une ellipse E' dont le centre sera en t'.

Si l'on inscrit à E' le triangle ayant un de ses sommets en a', et pour centre de gravité le point t' (désignant par b' et d' les deux autres sommets du triangle t'). Les trois diamètres passant par les points a', b', d', formeront un système de *diamètres conjugués* de la surface λ.

2. Par le point a' on peut mener une infinité de plans tangents à la surface λ'; ces plans auront pour surface-enveloppe un cône G' (ayant a' pour sommet) tangent à λ' suivant une ellipse g'.

Dès-lors, on aura une infinité de systèmes de *diamètres conjugués*, ayant en commun le diamètre A'; dès-lors, les extrémités des *diamètres conjugués* formant chaque système, seront les sommets de triangles, ayant tous le point a' pour sommet commun, et le centre de gravité de chacun de ces triangles, sera situé sur l'ellipse g'.

3. Si l'on mène un plan T tangent à l'ellipsoïde intérieur λ', ce plan coupant l'ellipsoïde λ suivant une ellipse E; si l'on inscrit à l'el-

---

à l'*analyse;* mais le résultat énoncé sous le n° 3, n'a été jusqu'à présent obtenu qu'au moyen de l'analyse; plus loin nous y parviendrons au moyen de la *Géométrie descriptive*.

(*) La plupart de ces théorèmes sont déjà connus. Mais le mode de démonstration dont je fais usage offre quelques dissemblances avec celui qui avait été employé. (*Voir* le Mémoire de M. Chasles, tome III de la *Correspondance sur l'École Polytechnique,* publiée par Hachette.)

lipse E, les divers triangles θ, θ', θ'', etc., ayant leur centre de gravité au centre de la courbe E, chacun de ces triangles sera la base d'une pyramide, ayant son sommet au centre de la surface λ et dont les trois arètes se croisant au sommet, formeront un système de diamètres conjugués de cette surface.

4. Étant donnés, trois demi-diamètres conjugués A', B', D', de l'ellipsoïde λ; désignant par a', b', d', les points en lesquels la surface se trouve percée par ces demi-diamètres, désignant par G' le cône tangent à l'ellipsoïde λ', et dont le sommet est en a'; désignant par h' l'ellipse, section du cône G' par le plan Q, lequel passe par les deux autres demi-diamètres B' et D', on aura les résultats suivants :

Tout plan P tangent au cône G', coupera l'ellipsoïde λ suivant une ellipse E qui se projettera (par un cylindre parallèle au diamètre A'), sur le plan Q suivant une ellipse E'.

Toutes les ellipses E' auront même aire.

Chaque ellipse E' aura son centre situé sur l'ellipse h' et passera par le centre de la surface λ.

Le triangle a', b', d', se projettera (au moyen du même mode de projection oblique), sur le plan Q suivant un triangle T' dont le centre de gravité sera situé au centre de l'ellipse E'.

Tous les triangles T' auront même aire.

5. En se rappelant, 1° que l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse est constante et égale à celle du rectangle construit sur les demi-axes de cette courbe; 2° que le volume du parallélépipède oblique, construit sur trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde, est constant et égal à celui du parallélépipède rectangle, construit sur les trois demi-axes de cette surface, on voit de suite que :

1°. Toutes les pyramides ayant pour sommet commun le point a' et pour base les divers triangles T', auront même volume V.

2°. Tous les cônes ayant pour sommet commun le point a' et pour base les diverses ellipses E', auront même volume V_1, et les volumes V et V_1 seront constants, quel que soit le système de diamètres conjugués que l'on emploiera, et conserveront la même valeur, en passant d'un système de diamètres conjugués, à un autre système de diamètres conjugués.

6. Si l'on mène un plan tangent P à l'ellipsoïde λ' lequel coupera la surface λ suivant une ellipse E; si du centre de l'ellipsoïde λ, on abaisse sur le plan P une perpendiculaire ν, on aura $\nu.\mathrm{E}=\text{const.}=\alpha$, quelle que soit la position du plan P. En d'autres termes : les cônes ayant leur sommet au centre de l'ellipsoïde, et pour base les diverses sections planes E, auront des volumes égaux, et si l'on inscrit et circonscrit à l'ellipse E, deux triangles θ et θ_1, ayant leur centre de gravité situé au centre de la courbe E, on aura

$$\nu.\theta = \text{constante} = \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \nu.\theta_1 = \text{constante} = \gamma.$$

En d'autres termes : les pyramides ayant leur sommet au centre de l'ellipsoïde, et pour base les divers triangles inscrits θ, auront des volumes égaux; et les pyramides ayant leur sommet au centre de l'ellipsoïde et pour base les divers triangles circonscrits θ_1 auront aussi des volumes égaux.

7. Et comme la pyramide qui a son sommet au centre de l'ellipsoïde λ, et pour base le triangle θ (inscrit à l'ellipse E), est la même que celle qui a son sommet au point a', extrémité du demi-diamètre A', et pour base le triangle T' (inscrit à l'ellipse E' projection oblique de l'ellipse E).

Et comme la pyramide (a', T') est le sixième du parallélépipède oblique construit sur les demi-diamètres conjugués. On aura : le volume de chacune des pyramides telles que (a', T') ou (o, θ) égal à $(\frac{1}{6}.\mathrm{A.B.D})$, égal au sixième du parallélépipède construit sur les demi-axes de l'ellipsoïde λ.

Et comme le volume du cône (a', E') ou (o, E) est au volume de la pyramide inscrite :: $4\pi : \sqrt{27}$. Le volume du cône (a', E') ou (o, E) sera égal à $\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\mathrm{A.B.D}}{\sqrt{27}}\right)$, ou $=\frac{2\pi}{9}\cdot\frac{\mathrm{A.B.D}}{\sqrt{3}}$.

I. Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{d^2}=1$

l'équation d'un ellipsoïde λ rapporté à ses axes et à son centre.

Soit $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{d}=1$

L'équation d'un plan P passant par les extrémités des trois demi-axes positifs de la surface λ.

Si, l'ellipse E section faite dans la surface λ par le plan P, a son centre situé au centre de gravité du triangle T formé par les traces du plan P sur les trois plans des coordonnées rectangulaires, alors : la projection orthogonale de l'ellipse E sur l'un quelconque des trois plans des coordonnées rectangulaires, aura son centre situé au centre de gravité de la projection orthogonale du triangle T sur le même plan des coordonnées. *Et vice versâ.*

En effet :

L'équation de la projection de la courbe E sur le plan des xy sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{xy}{ab}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

Les coordonnées de son centre seront déterminées par les deux équations

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,$$
$$\frac{2y}{b}+\frac{x}{a}-1=0,$$

d'où $y=\frac{1}{3}b$ et $x=\frac{1}{3}a$.
Donc, etc.

II. Désignant par a', b', d', les longueurs de trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde λ, et prenant ces diamètres pour axes des coordonnées obliques, l'équation de cette surface (en coordonnées obliques), sera

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{d'^2}=1,$$

et l'équation d'un plan P' (rapporté aux mêmes coordonnées obliques), en passant par les extrémités des trois demi-diamètres conjugués, sera

$$\frac{x'}{a'}+\frac{y'}{b'}+\frac{z'}{d'}=1.$$

L'équation (en coordonnées obliques), de la projection oblique sur le plan $x'y'$ de la section faite dans la surface λ par le plan P', sera

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{x'y'}{a'b'} - \frac{x'}{a'} - \frac{y'}{b'} = 0,$$

et l'on trouvera pour les coordonnées obliques du centre de cette projection

$$y' = \tfrac{1}{3} b' \quad \text{et} \quad x' = \tfrac{1}{3} a'.$$

Ainsi l'on pourra facilement vérifier par *l'analyse*, les divers résultats auxquels nous sommes parvenus précédemment, en employant (seulement) la méthode des projections, la *Géométrie descriptive*.

III. Étant donné un ellipsoïde λ; en un point m de cette surface, on mène le plan tangent T, lequel coupe les axes (prolongés) de la surface λ respectivement aux points A, B, D; on demande quelle position doit avoir le point m sur l'ellipsoïde pour que l'aire du triangle ABD soit un minimum.

Soit
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{d^2} = 1.$$

L'équation de l'ellipsoïde λ rapportée à ses axes et à son centre.

Désignant par x', y', z', les coordonnées du point m, l'équation du plan T sera

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{d^2} = 1,$$

les coordonnées du point en lequel le plan T coupe

l'axe des x, seront : $y = 0,\quad z = 0,\quad x = \dfrac{a^2}{x'}$,

l'axe des y, $x = 0,\quad z = 0,\quad y = \dfrac{b^2}{y'}$,

l'axe des z, $x = 0,\quad y = 0,\quad z = \dfrac{d^2}{z'}$,

L'aire du triangle ABD est égale à celle de sa projection sur le plan xy, divisée par le cosinus de l'angle α, que le plan T fait avec ce même plan coordonné.

L'aire de la projection du triangle ABC est égale à $\dfrac{a^2b^2}{2.x'y'}$.

$$\text{Le cosinus de l'angle } \alpha = \frac{\dfrac{z'}{d^2}}{\sqrt{\dfrac{x'^2}{a^4} + \dfrac{y'^2}{b^4} + \dfrac{z'^2}{d^4}}},$$

on aura donc, en représentant par S l'aire du triangle ABD,

$$S^2 = \frac{b^4a^4x'^2 + a^4d^4y'^2 + a^4b^4z'^2}{4x'^2.y'^2.z'^2},$$

S sera un minimum, si S^2 est un minimum.

Et l'on trouve que le *minimum* existe, lorsque

$$x' = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y' = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z' = \frac{d}{\sqrt{3}},$$

la surface du triangle *minimum* est exprimée par

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2d^2 + a^2d^2}.$$

Les valeurs trouvées pour les coordonnées x', y', z', du point de contact m, lorsque le triangle ABD est un minimum, sont précisément celles du centre de gravité de ce triangle.

Et le plan tangent T, se trouve dès-lors parallèle au plan passant par les extrémités des trois demi-axes de l'ellipsoïde λ.

Les mêmes conditions subsisteront, et l'on obtiendra des résultats semblables, lorsque l'on considérera l'ellipsoïde λ, comme rapporté à son centre et à trois diamètres conjugués pris pour axes des coordonnées obliques.

On peut demander 1° quel est le triangle dont l'aire est un minimum ou un maximum, entre tous ceux formés par les extrémités des divers systèmes, de trois diamètres conjugués.

En se rappelant ce qui a été dit n° II, il suffira de mener à l'ellipsoïde λ' (intérieur et concentrique à la surface λ), un plan tangent T à l'extrémité de son grand axe, ce plan T coupera l'ellipsoïde λ suivant une ellipse E, et chaque système de diamètres conjugués, ayant pour extrémités les sommets des divers triangles inscrits à l'ellipse E, et ayant leur centre de gravité au centre de cette courbe, résoudra la question du minimum. La question du maximum sera résolue par les triangles inscrits à l'ellipse E', section de l'ellipsoïde λ par le plan T', tangent à l'ellipsoïde λ' à l'extrémité de son petit axe.

2°. Déterminer le système de diamètres conjugués, pour lequel le triangle base de la pyramide sera équilatéral.

Construisant un plan P tangent à l'ellipsoïde intérieur λ', et coupant l'ellipsoïde λ suivant un cercle C.

Tous les triangles inscrits à un cercle C, et ayant leur centre de gravité au centre de ce cercle seront équilatéraux, et les trois diamètres passant respectivement par les sommets de chacun des triangles inscrits, formeront un système satisfaisant à la question proposée.

Si l'ellipsoïde est de révolution, alors la construction précédente conduit à divers systèmes de diamètres conjugués égaux; ainsi un ellipsoïde de révolution a une infinité de systèmes de diamètres conjugués égaux, et les trois angles que ces diamètres font deux à deux, sont égaux entre eux.

La base de la pyramide formée par chaque système, sera 1° un minimum, si la surface est allongée (l'ellipse méridienne tournant autour de son grand axe). Cette base sera 2° un maximum, si l'ellipsoïde est aplati (l'ellipse méridienne ayant tourné autour de son petit axe).

IV.

Jusqu'à présent le résultat obtenu par le mode de transformation employé n° II, pour déformer une sphère en un ellipsoïde, n'a été démontré que par l'analyse.

Ainsi ayant l'équation d'une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

on a remplacé x par Mx', y par Ny', z par Pz', M, N, P, étant des constantes arbitraires ($M = a \cos \alpha$, $N = b \cos \beta$, $P = d \cos \gamma$, α, β, γ, étant des angles constants).

Et l'on a obtenu l'équation

$$M^2 x'^2 + N^2 y'^2 + P^2 z'^2 = R^2,$$

qui est celle d'un ellipsoïde à trois axes, rapportée à trois axes obliques X', Y', Z', et tels que les angles $XX' = \alpha$, $YY' = \beta$, $ZZ' = \gamma$.

Il ne serait peut-être pas sans intérêt, pour la *Géométrie descriptive*, de pouvoir parvenir à démontrer ce résultat par une méthode purement graphique, et en harmonie avec celle des projections.

Ainsi, il faudrait pouvoir démontrer graphiquement, qu'un plan (quelle que soit sa direction) coupera toujours la surface *transformée* de la sphère, suivant une ellipse.

On le pourra au moyen du théorème suivant dont je vais donner la démonstration.

On coupe deux surfaces inconnues par un plan, on obtient deux courbes X et X′ dont la nature est inconnue; mais l'on sait :

1°. Que toute sécante telle que A, parallèle à une droite fixe K, a ses parties interceptées égales et qu'ainsi, on a

$$bb' = aa';$$

2°. Que toute sécante telle que B passant par un point fixe f, a ses parties interceptées égales et qu'ainsi on a

$$ee' = dd'.$$

Dès-lors, les deux courbes X et X′ sont deux sections coniques semblables, et semblablement placées et concentriques. Ainsi, ces deux courbes sont : deux ellipses ou deux hyperboles (dont les axes sont proportionnels), ou deux paraboles (égales et ayant la même droite pour axe infini).

En effet, par un point arbitraire b' (pl. I, fig. 2) de la courbe X′, menons la droite A parallèle à la droite fixe K; par ce même point b', menons la droite B′ passant par le point fixe f.

A coupera la courbe X aux points b et a, et la courbe X′ aux points b' et a'.

B coupera la courbe X aux points g et n, et la courbe X′ aux points b' et n'.

Menons par g' la droite A′ parallèle à la droite K.

A′ coupera la courbe X aux points g et m,

et coupera la courbe X′ aux points d' et m'.

Par le point d' menons B passant par le point f et coupant la courbe X aux points d et e et la courbe X′ aux points d' et e'.

Cela posé :

Par 5 points, on peut faire passer une section conique, et l'on n'en peut faire passer qu'une.

Il passera donc une section conique E par les 5 points b, g, d, a, n.

Il passera donc une section conique E′ par les 5 points b', d', m', a', e'.

On sait que deux sections coniques semblables, et semblablement placées et concentriques jouissent de la propriété suivante :

Savoir : que toute sécante a ses parties interceptées par les deux courbes, égales entre elles.

Si donc, les deux sections coniques E et E′ sont semblables et semblablement placées et concentriques, 1° la courbe E passera par les 7 points b, g, d, a, n, m, e.

2°. La courbe E′ passera par les 6 points b', d', m', a', e', n', puisque par hypothèse, on a

$$gd' = m'm, \quad gb' = n'n, \quad dd' = e'e.$$

Si, par le point fixe f, on fait passer une nouvelle sécante B″, on aura par hypothèse :

$$qq' = pp'.$$

On pourra faire passer une section conique E_1 par les 5 points b, g, p, a, n.

On pourra faire passer une section conique E_1' par les 5 points b', d', p', a', q'.

Si les deux courbes E_1 et E_1' sont semblables et semblablement placées et concentriques, la courbe E_1 passera par les 7 points b, g, p, a, n, m, q; et la courbe E_1' passera par les 6 points b', p', m', a', q', n'.

Les deux courbes E et E_1 auront donc 5 points communs, ainsi que les deux courbes E′ et E_1' ; dès-lors E_1 ne sera autre que la courbe E, et E_1' ne sera, aussi, autre que la courbe E′.

Si donc, les deux sections coniques E et E′ sont semblables et semblablement placées et concentriques, la première aura tous ses points situés sur la courbe X, et la seconde aura aussi, tous ses points situés sur la courbe X′.

Les deux courbes X et X′ seront donc deux sections coniques, semblables et semblablement placées et concentriques.

Or, l'on peut démontrer 1° que 5 points déterminent une section conique, et 2° que deux sections coniques semblables et semblablement placées et concentriques, interceptent sur une sécante arbitraire des parties qui sont égales entre elles, en n'employant que la méthode des projections, sans avoir recours à l'*Analyse;* le théorème précédent se trouve donc établi par la seule méthode des projections.

Cela posé :

Imaginons une sphère S, et transformons-la par la méthode décrite n° II, en une surface λ. La nature de la surface λ nous est inconnue ; mais il est évident que par ce mode de transformation, une droite se transforme en une droite, un plan en un plan, et que 3 points en ligne droite se transforment en 3 points aussi en ligne droite et dont les rapports entre leurs distances respectives, sont les mêmes que ceux qui existaient entre les distances respectives des 3 points primitifs.

Concevons une sphère S' concentrique à la première, et transformons-la par le même mode en une surface λ'.

Il est évident que les sphères S et S' étant concentriques, les surfaces λ et λ' le seront aussi.

Coupons les deux sphères S et S' par un plan arbitraire P suivant deux cercles concentriques C et C'; le plan P se transformera en un plan P_1 et les deux cercles C et C' en deux courbes E et E' situées sur le plan P_1.

Je dis que les deux courbes *transformées*, E et E' ne sont autres que deux ellipses semblables et semblablement placées et concentriques.

En effet :

Il est évident d'abord que la *transformée* d'un cercle, ne peut être qu'une courbe fermée; ensuite que cette *transformée* ne peut être qu'une courbe ayant un centre.

Cela posé :

Concevons dans le plan P un faisceau A, de droites parallèles entre elles, et un faisceau B de droites divergentes d'un point fixe f; toutes les droites du faisceau A se transformeront en un faisceau A', de droites parallèles entre elles; toutes les droites du faisceau B se transformeront en un faisceau B', de droites divergeant d'un point fixe f' (ce point f' est le *transformé* du point f).

Les parties interceptées par les cercles C et C' sur chacune des droites composant les deux faisceaux A et B sont égales entre elles; les parties interceptées par les deux courbes E et E' sur chacune des droites, composant les deux faisceaux A' et B' seront donc aussi égales entre elles.

Donc les deux courbes E et E' sont deux sections coniques semblables et semblablement placées et concentriques; mais elles sont des courbes fermées, donc elles sont des ellipses.

Ainsi tout plan (quelle que soit sa direction), coupera la surface λ suivant une ellipse; donc la surface λ est un *ellipsoïde*.

Toutes les surfaces du second ordre, peuvent être engendrées de deux manières différentes, et les deux modes de génération, sont identiquement les mêmes pour chacune de ces surfaces.

Ainsi : pour l'ellipsoïde par exemple :

1er Mode de génération.

Étant donnée une ellipse E sur le plan horizontal, une verticale D passant par le centre o de la courbe E, prenant un point fixe a sur D, on peut concevoir une ellipse mobile E', ayant son centre en o, et pour l'un de ses axes, la longueur (constante) oa, l'autre axe (variable) étant l'un des diamètres de l'ellipse E.

2e Mode de génération.

Étant donnés trois axes X, Y, Z, rectangulaires entre eux et se croisant en un point o, portant sur chacun d'eux à droite et à gauche du point o des distances égales entre elles, savoir sur X des longueurs égales à a, sur Y des longueurs égales à b, sur Z des longueurs égales à d. Construisant trois ellipses E, E_1, E_2, ayant pour centre commun le point o, et dont les demi-axes seront

$$\begin{aligned} &a \text{ et } b \text{ (pour } E), \\ &a \text{ et } d \text{ (pour } E_1), \\ &b \text{ et } d \text{ (pour } E_2); \end{aligned}$$

on peut concevoir que les deux courbes E et E_1 restent fixes, et que la courbe E_2 se meuve parallèlement à elle-même, et de manière à ce qu'elle varie de grandeur, ces axes étant successivement les coordonnées des courbes E et E_1.

Or, au moyen du théorème précédemment établi, il est facile de démontrer que tout plan (quelle que soit sa direction), coupera toujours la surface engendrée par l'un ou l'autre des deux *modes* ci-dessus, suivant une section conique, et il sera facile de reconnaître la nature de cette section conique, en n'employant d'autres moyens que ceux fournis par la *Géométrie descriptive*.

Et en s'appuyant sur cette propriété fondamentale que toutes les sections planes sont des coniques, il est facile de trouver par la *Géométrie descriptive* seule, les diverses autres propriétés dont jouissent les surfaces du second ordre, lesquelles n'ont encore été démontrées, qu'au moyen de l'analyse de Descartes, dans les traités publiés sur la géométrie à trois dimensions.

SUITE DU MÉMOIRE

Sur la Réduction de l'intégration des Équations différentielles partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires ;

Par M. JACOBI (*).

VIII.

Nous avons vu dans ce qui précède que pour le cas du mouvement d'un système libre de n points matériels, sur lesquels n'agissent que des forces intérieures d'attraction ou de répulsion, le système de $3n$ équations différentielles ordinaires du second ordre est remplacé parfaitement par une seule équation différentielle partielle, dont on n'a besoin de connaître qu'une solution complète quelconque. Il s'agit maintenant de savoir quels moyens l'analyse possède pour trouver une telle solution, et si, d'après l'état actuel de nos connaissances, on a gagné quelque chose par une telle réduction.

Tout ce qu'on connaît d'essentiel sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre est contenu, je crois, dans les leçons de Lagrange sur le calcul des fonctions, et dans un Mémoire de Pfaff, inséré dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, année 1814. Lagrange borne ses recherches aux équations différentielles partielles du premier ordre à *trois* variables, l'une de ces variables devant être déterminée en fonction des deux autres considérées comme indépendantes. Quant à la méthode de Pfaff, qui s'étend aux équations différentielles partielles du pre-

(*) La première partie de ce mémoire a été imprimée dans le cahier de février. *Voyez* page 60 de ce volume. (J. LIOUVILLE.)

mier ordre à un *nombre quelconque* de variables, j'ai essayé, dans le vol. II du Journal de M. Crelle, de l'exposer d'une manière plus symétrique et plus claire, sans cependant y ajouter quelque chose d'essentiellement nouveau. Pfaff quitte la marche que Lagrange a suivie, parce qu'elle lui semble sujette à des difficultés insurmontables, quand on l'applique à des équations à plus de trois variables. Il considère le problème sous un point de vue tout nouveau, comme un cas spécial d'un problème beaucoup plus général qu'il réussit à résoudre.

Soit x une fonction des n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, et $p_1, p_2, \ldots p_n$, les coefficients différentiels partiels de cette fonction pris par rapport à ces variables; l'expression la plus générale d'une équation différentielle partielle du premier ordre à $n+1$ variables est de la forme

$$0 = \varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n).$$

D'après cette équation p_n est une fonction des $2n$ quantités $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$: il s'agit donc d'intégrer l'équation

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1} + p_n dx_n,$$

qui a lieu entre ces $2n$ quantités, et d'y satisfaire par un système de n équations. En effet, x étant fonction de $x_1, x_2, \ldots x_n$, les coefficients différentiels partiels de x, pris par rapport à ces variables, sont eux-mêmes des fonctions de ces quantités, ou bien il y a entre les $2n+1$ quantités $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, un nombre $n+1$ d'équations, dont l'une $\varphi = 0$ est donnée, de sorte qu'après avoir exprimé p_n en fonction des autres quantités à l'aide de cette équation, il reste encore à trouver n équations entre les $2n$ quantités $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, qui doivent satisfaire à l'équation différentielle proposée. Pfaff considère la forme la plus générale d'une équation différentielle linéaire ordinaire du premier ordre entre les $2n$ variables $x, x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$, savoir

$$0 = \mathrm{X}dx + \mathrm{X}_1 dx_1 + \ldots + \mathrm{X}_{2n-1} dx_{2n-1},$$

où $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \ldots \mathrm{X}_{2n-1}$, sont des fonctions quelconques de ces $2n$ variables. Cette équation se réduit à la précédente dans le cas particulier où l'on a

$$X_{n+1} = X_{n+2} = \ldots = X_{2n-1} = 0,$$

pourvu qu'on remplace en outre $-\frac{X_1}{X}$, $-\frac{X_2}{X}, \ldots -\frac{X_n}{X}$, par les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$, en considérant $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, ainsi que $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, comme variables indépendantes, et p_n comme une fonction donnée de ces quantités ; de sorte que les coefficients p_1, p_2, p_{n-1}, tiennent lieu des $n-1$ variables indépendantes x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots x_{2n-1}$. Pfaff se propose ensuite d'exprimer les $2n$ variables en fonction d'une seule d'entre elles, x_{2n-1} par exemple, et de $2n-1$ autres quantités $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$, tellement choisies qu'en introduisant dans l'équation différentielle

$$0 = Xdx + X_1dx_1 + \ldots + X_{2n-1}dx_{2n-1}$$

ces nouvelles variables, l'expression qui multiplie dx_{2n-1} s'évanouisse, et que la quantité x_{2n-1} ne se trouve dans les expressions qui multiplient les autres différentielles $da_1, da_2, \ldots da_{2n-1}$, qu'en facteur commun. Cela étant, après la division par ce facteur commun, l'équation différentielle se réduira à une autre à $2n-1$ variables $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$. L'auteur démontre que cette réduction est toujours possible, et qu'on trouve les substitutions qui conviennent à ce but, en intégrant complétement un certain système de $2n-1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre aux $2n$ variables $x, x_1, \ldots x_{2n-1}$: les expressions des constantes arbitraires en $x, x_1, \ldots x_{2n-1}$, telles qu'elles sont données par ces $2n-1$ équations intégrales, sont les nouvelles quantités $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$, qu'on doit introduire. On a donc ce théorème remarquable, qu'une équation différentielle linéaire ordinaire quelconque, à un nombre pair de variables, peut toujours être réduite à une autre qui ne contient qu'un nombre de variables impair moindre d'une unité. Mais on ne peut pas transformer de la même manière, une équation semblable et à un nombre impair de variables, dans une autre à un nombre pair de variables moindre d'une unité ; à moins que les coefficients de l'équation différentielle proposée ne satisfassent à une certaine équation de condition. Afin de pouvoir appliquer le théorème à une réduction ultérieure, Pfaff égale donc une des quantités introduites a_{2n-1} à une constante : l'équation différentielle ne contient alors que $2n-2$ variables, qu'il réduit d'après la même méthode à une autre, contenant $2n-3$ variables b_1, $b_2, \ldots$ b_{2n-3}; puis il égale b_{2n-3} à une constante, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'à la fin le problème soit réduit à une équation différentielle ordinaire du premier ordre à deux variables, dont l'intégration introduit encore une constante arbitraire. De manière que Pfaff intègre l'équation différentielle proposée en égalant successivement n expressions a_{2n-1}, b_{2n-3}, etc., à des constantes arbitraires, ou, en autres termes, il démontre qu'une équation différentielle linéaire ordinaire du premier ordre à $2n$ variables, peut être intégrée par un système de n intégrales finies, contenant n constantes arbitraires. Connaissant un tel système, Pfaff en déduit la solution la plus générale au moyen d'une fonction arbitraire de $n-1$ quantités ; à cet effet, parmi les constantes arbitraires, que nous nommerons α_1, $\alpha_2, \ldots$ α_n, il en considère une, α_n par exemple, comme fonction arbitraire des autres, qu'il traite comme des quantités variables ; on obtient alors une équation différentielle de la forme

$$Xdx + X_1 dx_1 + \ldots + X_{2n-1} dx_{2n-1} = \Pi_1 d\alpha_1 + \Pi_2 d\alpha_2 + \ldots + \Pi_{n-1} d\alpha_{n-1},$$

qui se réduit à la proposée, si l'on détermine α_1, $\alpha_2, \ldots$ α_{n-1}, en fonction de x, x_1, $x_2, \ldots$ x_{2n-1}, au moyen des $n-1$ équations

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \ldots \quad \Pi_{n-1} = 0.$$

En appliquant cette méthode générale à l'équation

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1} + p_n dx_n,$$

où p_n est, en vertu de l'équation différentielle partielle $\varphi = 0$, une fonction déterminée des autres variables, on obtient n équations qui donnent l'intégrale cherchée de l'équation $\varphi = 0$ après l'élimination des $n-1$ quantités p_1, $p_2, \ldots$ p_{n-1}. Voilà tout ce qu'on connaissait (à ce que je sache), sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, le nombre des variables surpassant trois.

D'après cette méthode, on doit donc trouver successivement n systèmes différents d'équations différentielles ordinaires, et les intégrer *tous complétement*; savoir, un système de $2n-1$ équations différentielles à $2n$ variables, un de $2n-3$ équations à $2n-2$ variables, et ainsi de suite jusqu'à une équation différentielle à deux variables. On ne peut écrire généralement que le premier système, puisque cette méthode exige pour pouvoir assigner un système quelconque, l'intégration complète de tous les systèmes précédents. Si l'on fait pour abréger

$$(\alpha,\ \beta) = \frac{dX_\alpha}{dx_\beta} - \frac{dX_\beta}{dx_\alpha},$$

ce premier système peut s'écrire, en introduisant encore une autre différentielle $d\mathrm{N}$, sous la forme suivante,

$$\begin{array}{rl}
Xd\mathrm{N} = & * \quad (0,1)dx_1 + \ldots + (0,2n-1)dx_{2n-1},\\
X_1d\mathrm{N} = & (1,0)dx \quad * \quad + \ldots + (1,2n-1)dx_{2n-1},\\
X_2d\mathrm{N} = & (2,0)dx + (2,1)dx_1 \ * \ldots + (2,2n-1)dx_{2n-1},\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_{2n-1}d\mathrm{N} = & (2n-1,0)\,dx + (2n-1,1)\,dx_1 + \ldots + \quad *.
\end{array}$$

C'est ce que j'ai fait voir dans le Journal de M. Crelle, t. II, p. 353.

Au moyen de ces équations, on trouve les rapports de dx_1, dx_2,... dx_{2n-1}. Les coefficients d'une ligne horizontale sont égaux, et de signes contraires, aux coefficients de la colonne verticale de même rang que la ligne horizontale, puisqu'on a

$$(\alpha,\ \beta) = -(\beta,\ \alpha);$$

c'est aussi en conséquence de cette règle que tous les termes sur la diagonale s'évanouissent, car

$$(\alpha,\ \alpha) = 0.$$

Ces équations ressemblent en cela aux équations linéaires auxquelles Lagrange et M. Poisson sont parvenus dans leurs travaux sur la variation des constantes dans les problèmes de Mécanique. J'ai fait quelques remarques, à l'endroit cité du Journal de M. Crelle, sur cette sorte d'équations linéaires, qui se résolvent toujours avec une grande facilité.

En mettant $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, au lieu de $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n-1}$, et en faisant

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \ldots X_{n-1} = p_{n-1}, \quad X_n = p_n,$$
$$X = -1, \quad X_{n+1} = X_{n+2} \ldots = X_{2n-1} = 0,$$

le précédent système d'équations différentielles se change en

$$-dN = - \frac{dp_n}{dx} dx_n,$$

$$p_1 dN = dp_1 - \frac{dp_n}{dx_1} dx_n,$$

$$p_2 dN = dp_2 - \frac{dp_n}{dx_2} dx_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n-1} dN = dp_{n-1} - \frac{dp_n}{dx_{n-1}} dx_n,$$

$$p_n dN = \frac{dp_n}{dx} dx + \frac{dp_n}{dx_1} dx_1 + \ldots + \frac{dp_n}{dx_{n-1}} dx_{n-1},$$
$$+ \frac{dp_n}{dp_1} dp_1 + \frac{dp_n}{dp_2} dp_2 + \ldots + \frac{dp_n}{dp_{n-1}} dp_{n-1},$$

$$0 = - dx_1 - \frac{dp_n}{dp_1} dx_n,$$

$$0 = - dx_2 - \frac{dp_n}{dp_2} dx_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = - dx_{n-1} - \frac{dp_n}{dp_{n-1}} dx_n.$$

Si, à l'aide de la première équation, l'on introduit partout dx_n au lieu de dN et qu'on élimine dans la $(n+1)^{ième}$, $dx_1, \ldots dx_{n-1}$, $dp_1, \ldots dp_{n-1}$, à l'aide des autres équations, on obtient

$$dx_1 = - \frac{dp_n}{dp_1} dx_n,$$

$$dx_2 = - \frac{dp_n}{dp_2} dx_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$dx_{n-1} = - \frac{dp_n}{dp_{n-1}} dx_n,$$

$$dp_1 = \left(\frac{dp_n}{dx_1} + \frac{dp_n}{dx}\, p_1\right) dx_n,$$
$$dp_2 = \left(\frac{dp_n}{dx_2} + \frac{dp_n}{dx}\, p_2\right) dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$dp_{n-1} = \left(\frac{dp_n}{dx_{n-1}} + \frac{dp_n}{x}\, p_{n-1}\right) dx_n,$$
$$dx = \left(p_n - p_1\frac{dp_n}{dp_1} - p_2\frac{dp_n}{dp_2} \ldots - p_{n-1}\frac{dp_n}{dp_{n-1}}\right) dx_n.$$

L'équation différentielle partielle proposée étant

$$\varphi(x,\ x_1,\ x_2, \ldots\ x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots\ p_n) = 0,$$

on a

$$\frac{dp_n}{dx_i} = -\frac{\frac{d\varphi}{dx_i}}{\frac{d\varphi}{dp_n}},\quad \frac{dp_n}{dp_i} = -\frac{\frac{d\varphi}{dp_i}}{\frac{d\varphi}{dp_n}}.$$

Donc les équations précédentes se changent, en introduisant une nouvelle différentielle dt, pour rendre les équations plus symétriques, dans les suivantes

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dp_1},\quad -\frac{dp_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dx_1} + p_1\frac{d\varphi}{dx},$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d\varphi}{dp_2},\quad -\frac{dp_2}{dt} = \frac{d\varphi}{dx_2} + p_2\frac{d\varphi}{dx},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{d\varphi}{dp_n},\quad -\frac{dp_n}{dt} = \frac{d\varphi}{dx_n} + p_n\frac{d\varphi}{dx},$$
$$\frac{dx}{dt} = p_1\frac{d\varphi}{dp_1} + p_2\frac{d\varphi}{dp_2} + \ldots + p_n\frac{d\varphi}{dp_n}.$$

Quand l'équation différentielle partielle ne contient pas la fonction cherchée elle-même, on a $\frac{d\varphi}{dx} = 0$: dans ce cas les termes des seconds membres qui contiennent la quantité $\frac{d\varphi}{dx}$ en facteur s'évanouissent.

Appliquons ces formules générales à l'équation différentielle partielle,

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2\right]=U+h,$$

où les $3n$ quantités x_i, y_i, z_i, sont les variables indépendantes; V la fonction cherchée, qui ne se trouve pas elle-même dans l'équation différentielle proposée; U une fonction seulement des quantités x_i, y_i, z_i; h une constante.

En faisant

$$\frac{dV}{dx_i}=p_i,\quad \frac{dV}{dy_i}=q_i,\quad \frac{dV}{dz_i}=r_i,$$

l'équation aux différences partielles devient

$$o=\varphi=\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}(p_i^2+q_i^2+r_i^2)-U-h;$$

et pour l'intégrer il faut intégrer complétement le système de $6n$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, savoir

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt}&=\frac{d\varphi}{dp_i}=\frac{1}{m_i}p_i, & \frac{dp_i}{dt}&=-\frac{d\varphi}{dx_i}=\frac{dU}{dx_i},\\
\frac{dy_i}{dt}&=\frac{d\varphi}{dq_i}=\frac{1}{m_i}q_i, & \frac{dq_i}{dt}&=-\frac{d\varphi}{dy_i}=\frac{dU}{dy_i},\\
\frac{dz_i}{dt}&=\frac{d\varphi}{dr_i}=\frac{1}{m_i}r_i, & \frac{dr_i}{dt}&=-\frac{d\varphi}{dz_i}=\frac{dU}{dz_i}:
\end{aligned}$$

ce sont les équations différentielles du mouvement, comme il est facile de le voir. Car on peut toujours représenter un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre par un système d'un nombre double d'équations différentielles du premier ordre en considérant les coefficients différentiels du premier ordre, comme de nouvelles variables. Ainsi en faisant

$$m_i\frac{dx_i}{dt}=p_i,\quad m_i\frac{dy_i}{dt}=q_i,\quad m_i\frac{dz_i}{dt}=r_i,$$

les $3n$ équations différentielles du mouvement

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{dU_i}{dx_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{dU}{dy_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{dU}{dz_i},$$

qui sont du second ordre, peuvent être remplacées par ce système de $6n$ équations différentielles du premier ordre

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = p_i, \quad m_i \frac{dy_i}{dt} = q_i, \quad m_i \frac{dz_i}{dt} = r_i,$$
$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{dU}{dx_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dU}{dy_i}, \quad \frac{dr_i}{dt} = \frac{dU}{dz_i};$$

or ces dernières équations coïncident avec celles trouvées ci-dessus.

Si l'on veut appliquer les formules générales à l'autre équation de M. Hamilton,

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right] = U,$$

on y trouve une nouvelle variable indépendante t. En faisant

$$\frac{dS}{dx_i} = p_i, \quad \frac{dS}{dy_i} = q_i, \quad \frac{dS}{dz_i} = r_i,$$

et

$$\frac{dS}{dt} = -H,$$

l'équation proposée devient

$$o = \varphi = \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} (p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) - H - U.$$

Si dans les formules générales de la page 167 on met $d\tau$ au lieu de la différentielle dt, la lettre t étant ici déjà employée dans une autre signification, on obtient encore les équations ci-dessus où l'on n'a qu'à changer dt en $d\tau$; et comme on a en outre l'équation

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{d\varphi}{dH} = 1 \quad \text{ou} \quad d\tau = dt,$$

il s'ensuit qu'on retombe précisément sur les équations trouvées tout-à l'heure, c'est-à-dire sur les équations différentielles du mouvement.

Donc, si d'un côté les équations différentielles du mouvement sont réduites, par la *nouvelle méthode* de M. Hamilton, à l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre, d'un autre côté tout ce que nous connaissons actuellement sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, du moins dans le cas de plus de trois variables, consiste, comme je l'ai montré par ce qui précède, à ramener cette intégration à celle des équations du mouvement. On peut même dire que l'intégration complète des équations différentielles du mouvement, d'après la méthode de Pfaff, telle que je viens de l'exposer, n'est qu'un acheminement à l'intégration de l'équation différentielle partielle, puisque, en vertu de cette théorie, on a encore besoin de former une série de systèmes d'équations différentielles ordinaires, et d'intégrer chacun d'eux complétement; tandis qu'il résulte du travail de M. Hamilton ce fait remarquable, savoir que l'intégration d'un certain genre d'équations différentielles partielles établies par lui revient uniquement à l'intégration complète des équations différentielles du mouvement, sans qu'on ait besoin d'aucune autre intégration de systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Cette remarque de M. Hamilton est d'autant plus importante qu'elle peut s'étendre facilement *à toutes les équations différentielles partielles du premier ordre*. En effet, en suivant la méthode de M. Hamilton, on arrivera, comme je le ferai voir dans le paragraphe suivant, à ce résultat général, que pour l'intégration d'une équation différentielle partielle quelconque à un nombre quelconque de variables, il suffit d'intégrer complétement le *premier* des systèmes d'équations différentielles ordinaires établis par Pfaff; et qu'on n'a pas besoin, comme la méthode de ce géomètre l'exige, d'intégrer en outre complétement une suite de systèmes d'équations différentielles ordinaires. Cette généralisation se trouve même déjà renfermée, pour le cas où la fonction cherchée n'est pas contenue dans l'équation différentielle partielle, dans quelques formules remarquables de M. Hamilton, pourvu qu'on ne borne pas la signification des signes qui y entrent à celle qu'ils ont dans la Mécanique.

IX.

Soient comme précédemment $x_1, x_2, \ldots x_n$, les variables indépendantes, x une fonction de ces variables et $p_1, p_2, \ldots p_n$, les coefficients différentiels partiels de cette fonction pris par rapport à ces variables, de manière qu'on ait

$$\frac{dx}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots \quad \frac{dx}{dx_n} = p_n;$$

soit de plus

$$\varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = h$$

l'équation différentielle partielle du premier ordre dont on s'occupe, h désignant une constante. Pour intégrer l'équation $\varphi = h$, Pfaff établit d'abord ces $2n$ équations différentielles ordinaires,

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{P}\,\dfrac{dx_1}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dp_1}, & -\mathrm{P}\,\dfrac{dp_1}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dx_1} + \quad \dfrac{d\varphi}{dx}, \\
\mathrm{P}\,\dfrac{dx_2}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dp_2}, & -\mathrm{P}\,\dfrac{dp_2}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dx_2} + p_2\,\dfrac{d\varphi}{dx}, \\
\ldots & \ldots \\
\mathrm{P}\,\dfrac{dx_n}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dp_n}, & -\mathrm{P}\,\dfrac{dp_n}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dx_n} + p_n\,\dfrac{d\varphi}{dx},
\end{array}$$

où l'on a fait pour abréger

$$p_1\,\frac{d\varphi}{dp_1} + p_2\,\frac{d\varphi}{dp_2} + \ldots + p_n\,\frac{d\varphi}{dp_n} = \mathrm{P}.$$

De ces équations, il suit identiquement

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dx_1}\,dx_1 + \frac{d\varphi}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n}\,dx_n$$
$$+ \frac{d\varphi}{dp_1}\,dp_1 + \frac{d\varphi}{dp_2}\,dp_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\,dp_n = 0;$$

d'où l'on tire par l'intégration $\varphi = h$, ce qui démontre qu'une des intégrales de ces équations est la proposée même. En désignant les $2n - 1$ autres intégrales par

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1},$$

α_1, $\alpha_2, \ldots$ α_{2n-1} étant des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans les fonctions A_1, $A_2, \ldots$ A_{2n-1}, Pfaff fait voir que l'intégrale complète de l'équation proposée $\varphi = h$ est représentée par un système de n équations entre les fonctions A_1, $A_2, \ldots$ A_{2n-1}, contenant n constantes arbitraires, au moyen duquel, en ayant égard à l'équation $\varphi = h$, on peut exprimer l'inconnue x, ainsi que ses coefficients différentiels partiels p_1, $p_2, \ldots$ p_n, en fonction de x_1, $x_2, \ldots$ x_n. Ces n équations doivent être déterminées de manière qu'elles satisfassent, à l'aide de l'équation $\varphi = h$, à l'équation différentielle

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

qui est contenue dans le système d'équations différentielles ordinaires établi plus haut. A cet effet, Pfaff exprime les quantités x_1, $x_2, \ldots$ x_n, p_1, $p_2, \ldots$ p_n, en fonction de x, A_1, $A_2, \ldots$ A_{2n-1}, à l'aide des équations

$$\varphi = h, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1},$$

et il fait voir qu'après avoir substitué ces expressions dans l'équation différentielle ci-dessus, celle-ci est changée dans une autre

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 + \ldots + B_{2n-1} dA_{2n-1},$$

où B_1, $B_2, \ldots$ B_{2n-1}, sont des fonctions de A_1, $A_2, \ldots$ A_{2n-1} seulement. Pour l'intégrer par un système de n équations à n constantes arbitraires, Pfaff est obligé d'intégrer successivement et complétement $n - 1$ systèmes d'équations différentielles ordinaires, respectivement à $2n - 2$, $2n - 4, \ldots$ et à deux variables. Or, la méthode de M. Hamilton généralisée apprend qu'une fois arrivé à l'équation

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 + \ldots + B_{2n-1} dA_{2n-1}$$

on n'a plus besoin de considérer d'autres équations différentielles, et même on ne rencontre plus aucune difficulté d'intégration : cette méthode en effet donne immédiatement les n équations cherchées à n constantes arbitraires.

« Substituez dans les équations

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}, \quad \varphi = h,$$

pour x, x_1, x_2, ... x_n, p_1, p_2, ... p_n, les valeurs

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots \quad x_n = x_n^0, \\ p_1 = p_1^0, \quad p_2 = p_2^0, \quad \ldots \quad p_n = p_n^0; \end{aligned}$$

alors on pourra exprimer les quantités x_1^0, x_2^0, ... x_n^0, p_1^0, p_2^0, ... p_n^0, en α_1, α_2, ... α_{2n-1}, au moyen de ces équations. Soient les valeurs de x_1^0, x_2^0, ... x_n^0, ainsi trouvées,

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \Pi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2^0 &= \Pi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}), \\ x_n^0 &= \Pi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}), \end{aligned}$$

les équations

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \Pi_1(A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}), \\ x_2^0 &= \Pi_2(A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}), \\ x_n^0 &= \Pi_n(A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}), \end{aligned}$$

qu'on déduit des précédentes en y mettant A_1, A_2, ... A_{2n-1}, au lieu de α_1, α_2, ... α_{2n-1} respectivement, sont les n équations cherchées à n constantes arbitraires x_1^0, x_2^0, ... x_n^0, qui, combinées avec l'équation donnée $\varphi = h$, satisfont à l'équation différentielle

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

ou à sa transformée

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 + \ldots + B_{2n-1} dA_{2n-1}:$$

en d'autres termes le système de ces équations renferme la solution complète de l'équation différentielle proposée. »

En voici maintenant la démonstration :

Qu'on exprime, au moyen des équations

$$\varphi = h, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \ldots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1},$$

les quantités $x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ en fonction de x, α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$, et qu'on substitue ces valeurs dans les équations (voir p. 171 ci-dessus),

$$\begin{aligned}
P\frac{dx_1}{dx} &= \frac{d\varphi}{dp_1}, \quad -P\frac{dp_1}{dx} = \frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx}p_1, \\
P\frac{dx_2}{dx} &= \frac{d\varphi}{dp_2}, \quad -P\frac{dp_2}{dx} = \frac{d\varphi}{dx_2} + \frac{d\varphi}{dx}p_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P\frac{dx_n}{dx} &= \frac{d\varphi}{dp_n}, \quad -P\frac{dp_n}{dx} = \frac{d\varphi}{dx_n} + \frac{d\varphi}{dx}p_n,
\end{aligned}$$

qui doivent devenir identiques par cette substitution, ainsi que l'équation qui en dérive

$$1 = p_1\frac{dx_1}{dx} + p_2\frac{dx_2}{dx} + \ldots + p_n\frac{dx_n}{dx}.$$

Prenant la différentielle partielle de cette dernière par rapport à l'une des constantes arbitraires α, on obtient, en multipliant par P et ayant égard en même temps aux autres équations,

$$\begin{aligned}
0 = {} & \frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{dx} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{d\alpha} \\
& + P\left(p_1\frac{d^2x_1}{d\alpha dx} + p_2\frac{d^2x_2}{d\alpha dx} + \ldots + p_n\frac{d^2x_n}{d\alpha dx}\right).
\end{aligned}$$

Prenant aussi la différentielle partielle par rapport à α de l'équation $\varphi = h$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 = {} & \frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{d} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{d\alpha} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{d\alpha} \\
& + \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{d\alpha} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{d\alpha},
\end{aligned}$$

ou, à l'aide des équations différentielles écrites en premier lieu,

$$\frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{d\alpha}+\ldots+\frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{d\alpha}$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{dp_1}{dx}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha}+\frac{dp_2}{dx}\cdot\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+\frac{dp_n}{dx}\cdot\frac{dx_n}{d\alpha}\right)$$
$$+\frac{d\varphi}{dx}\left(p_1\frac{dx_1}{d\alpha}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha}\right);$$

ce qui, substitué dans l'équation précédente, fournit

$$o=\mathrm{P}\frac{d\left(p_1\frac{dx_1}{d\alpha}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha}\right)}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}\left(p_1\frac{dx_1}{d\alpha}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha}\right):$$

en intégrant, à partir de $x=o$, il vient

$$p_1\frac{dx_1}{d\alpha}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha}=\mathrm{M}\left(p_1^o\frac{dx_1^o}{d\alpha}+p_2^o\frac{dx_2^o}{d\alpha}+\ldots+p_n\frac{dx_n^o}{d\alpha}\right),$$

où l'on a fait pour abréger

$$\mathrm{M}=e^{-\int_o^x\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{\mathrm{P}}},$$

e étant la base des logarithmes népériens.

Considérant de même les quantités α_1, α_2, ... α_{2n-1}, comme des variables, déterminées par les équations

$$\mathrm{A}_1=\alpha_1,\quad \mathrm{A}_2=\alpha_2,\ldots\quad \mathrm{A}_{2n-1}=\alpha_{2n-1},$$

on a

$$dx-(p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n)$$
$$=dx\left(1-p_1\frac{dx_1}{dx}-p_2\frac{dx_2}{dx}-\ldots-p_n\frac{dx_n}{dx}\right)$$
$$-\Sigma\left(p_1\frac{dx_1}{d\alpha_i}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha_i}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha_i}\right)d\alpha_i:$$

le signe Σ s'étend à toutes les valeurs de i comprises dans la série 1, 2,... $2n-1$. Comme l'on a

$$1-p_1\frac{dx_1}{dx}-p_2\frac{dx_2}{dx}-\ldots-p_n\frac{dx_n}{dx}=o,$$

et pour chaque valeur de i,

$$p_1 \frac{dx_1}{d\alpha_i} + p_2 \frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{d\alpha_i} = \mathrm{M}\left(p_1^\circ \frac{dx_1^\circ}{d\alpha_i} + p_2^\circ \frac{dx_2^\circ}{d\alpha_i} + \ldots + p_n^\circ \frac{dx_n^\circ}{d\alpha_i}\right),$$

l'équation ci-dessus prend la forme

$$dx - (p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n) = -\mathrm{M}\Sigma\left(p_1^\circ \frac{dx_1^\circ}{d\alpha_i} + p_2^\circ \frac{dx_2^\circ}{d\alpha_i} + \ldots + p_n^\circ \frac{dx_n^\circ}{d\alpha_i}\right) d\alpha_i,$$

ou, à l'aide de l'équation

$$dx_k^\circ = \Sigma \frac{dx_i^\circ}{d\alpha_i} d\alpha_i,$$

celle-ci

$$dx - (p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n) = -\mathrm{M}(p_1^\circ dx_1^\circ + p_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + p_n^\circ dx_n^\circ).$$

On conclut de cette équation identique, que l'équation

$$dx - (p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n) = 0$$

peut être transformée dans la suivante

$$p_1^\circ dx_1^\circ + p_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + p_n^\circ dx_n^\circ = 0,$$

à laquelle on satisfait en égalant les quantités x_1°, x_2°, ... x_n°, à des constantes arbitraires. C.Q.F.D.

L'analyse dont nous avons fait usage coïncide avec celle dont Pfaff s'est servi dans le mémoire cité pour démontrer que les rapports des $2n-1$ quantités obtenues, en donnant à i toutes les valeurs de 1 à $2n-1$ dans l'expression

$$p_1 \frac{dx_1}{d\alpha_i} + p_2 \frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{d\alpha_i}$$

sont indépendants de x; mais il n'a pas ajouté la remarque que par cette raison ces quantités peuvent être prises proportionnelles aux quantités

$$p_1^\circ \frac{dx_1^\circ}{d\alpha_i} + p_2^\circ \frac{dx_2^\circ}{d\alpha_i} + \ldots + p_n^\circ \frac{dx_n^\circ}{d\alpha_i},$$

ce qui fait qu'on trouve l'équation différentielle transformée elle-même, et qu'on obtient immédiatement les n équations qui y satisfont. J'ajoute que lorsque la valeur particulière o, qu'on a donnée à x, présente des inconvénients, elle peut être remplacée par une autre valeur numérique quelconque.

Les expressions des quantités $x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ en x, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$, contiennent aussi la constante h. Différentiant par rapport à h les équations

$$\varphi = h, \quad 1 = p_1 \frac{dx_1}{dx} + p_2 \frac{dx_2}{dx} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{dx},$$

et se rappelant que

$$\mathrm{P}\frac{dx_i}{dx} = \frac{d\varphi}{dp_i}, \quad \frac{d\varphi}{dx_i} = -\mathrm{P}\frac{dp_i}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}p_i,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
0 = {} & \frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{dp_1}{dh} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{dh} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{dh} \\
& + \mathrm{P}\left(p_1 \frac{d^2x_1}{dxdh} + p_2 \frac{d^2x_2}{dxdh} + \ldots + p_n \frac{d^2x_n}{dxdh}\right), \\
1 = {} & \frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{dh} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{dh} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{dh} \\
& - \mathrm{P}\left(\frac{dp_1}{dx}\cdot\frac{dx_1}{dh} + \frac{dp_2}{dx}\cdot\frac{dx_2}{dh} + \ldots + \frac{dp_n}{dx}\cdot\frac{dx_n}{dh}\right) \\
& - \frac{d\varphi}{dx}\left(p_1\frac{dx_1}{dh} + p_2\frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n.\frac{dx_n}{dh}\right);
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned}
0 = 1 + {} & \frac{\mathrm{P}d\left(p_1\frac{dx_1}{dh} + p_2\frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n\frac{dx_n}{dh}\right)}{dx} \\
& + \frac{d\varphi}{dx}\left(p_1\frac{dx_1}{dh} + p_2\frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n\frac{dx_n}{dh}\right).
\end{aligned}$$

Multipliant cette équation par $\frac{1}{\mathrm{MP}}$, et intégrant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x$, on obtient

$$0 = \int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}} + \frac{1}{\mathrm{M}}\left(p_1\frac{dx_1}{dh} + p_2\frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n\frac{dx_n}{dh}\right) - \left(p_1^\circ\frac{dx_1^\circ}{dh} + p_2^\circ\frac{dx_2^\circ}{dh} + \ldots + p_n^\circ\frac{dx_n^\circ}{dh}\right).$$

Quand on considère h comme variable, on doit, dans l'expression de dx ci-dessus trouvée (p. 176)

$$dx = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \ldots + p_ndx_n - \mathrm{M}(p_1^\circ dx_1^\circ + p_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + p_n^\circ dx_n^\circ),$$

tenir compte d'un terme nouveau, savoir

$$\left(p_1\frac{dx_1}{dh} + p_2\frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n\frac{dx_n}{dh}\right)dh - \mathrm{M}\left(p_1^\circ\frac{dx_1^\circ}{dh} + p_2^\circ\frac{dx_2^\circ}{dh} + \ldots + p_n^\circ\frac{dx_n^\circ}{dh}\right)dh = -\mathrm{M}\int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}}\cdot dh,$$

et l'on a

$$dx = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \ldots + p_ndx_n - \mathrm{M}(p_1^\circ dx_1^\circ + p_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + p_n^\circ dx_n^\circ) + \mathrm{M}\int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}}\cdot dh.$$

Si l'on désigne par A_i° ce que devient A_i, et par φ° ce que devient φ, quand on fait en même temps $x = 0$, $x_i = x_i^\circ$, $p_i = p_i^\circ$, et si l'on élimine des $2n+1$ équations

$$\varphi = 0,\quad \varphi_0 = h,\quad \mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_1^\circ,\quad \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_2^\circ,\quad \mathrm{A}_{2n-1} = \mathrm{A}_{2n-1}^\circ,$$

les $2n$ quantités $p_1, p_2, p_n, \ldots p_1^\circ, p_2^\circ, \ldots p_n^\circ$, on obtient x exprimé en $x_1, x_2, \ldots x_n, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ, h$; et les coefficients différentiels partiels de cette expression de x pris par rapport à ces quantités, sont

$$\frac{dx}{dx_1} = p_1,\quad \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots \quad \frac{dx}{dx_n} = p_n,$$
$$\frac{dx}{dx_1^\circ} = -\mathrm{M}p_1^\circ,\quad \frac{dx}{dx_2^\circ} = -\mathrm{M}p_2^\circ, \ldots \quad \frac{dx}{dx_n^\circ} = -\mathrm{M}p_n^\circ,\quad \frac{dx}{dh} = \mathrm{M}\int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}}.$$

Dans les deux intégrales qui entrent dans ces formules, savoir

$$\int \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{\mathrm{P}},\quad \int \frac{dx}{\mathrm{MP}},$$

on doit considérer les quantités x_i°, p_i° comme des constantes, et exprimer toutes les variables en fonction d'une seule d'entre elles au moyen des intégrales complètes des équations différentielles ordinaires de la page 171.

Dans ce qui précède, j'ai pris pour constantes arbitraires les valeurs des variables correspondantes à $x=0$; mais on démontre par un calcul semblable, qu'en exprimant au moyen des intégrales complètes des équations différentielles ordinaires écrites ci-dessus (p. 171) toutes les variables par une seule quelconque d'entre elles ou par une autre quantité quelconque t, puis désignant les valeurs de $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$, correspondantes à $t=0$, par $x^\circ, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots x_n^\circ$, p_1°, $p_2^\circ, \ldots p_n$, et considérant de même ces valeurs comme variables, on aura cette équation

$$dx - p_1dx_1 - p_2dx_2 - \ldots - p_ndx_n = \mathrm{M}(dx^\circ - p_1^\circ dx_1^\circ - p_2^\circ dx_2^\circ - \ldots - p_n^\circ dx_n^\circ) + \mathrm{M}\int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}}\, dh,$$

où

$$\mathrm{M} = e^{-\int_{x^0}^{x} \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{\mathrm{P}}}.$$

Si l'équation différentielle partielle proposée ne contient pas la fonction inconnue x, ce qui arrive dans les applications à la dynamique, on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \text{partant} \quad \mathrm{M} = 1.$$

Alors le système d'équations différentielles ordinaires se réduit au suivant,

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n = \frac{d\varphi}{dp_1} : \frac{d\varphi}{dp_2} : \ldots : \frac{d\varphi}{dp_n} : -\frac{d\varphi}{dx_1} : -\frac{d\varphi}{dx_2} : \ldots : -\frac{d\varphi}{dx_n},$$

lequel système contient une équation et une variable x de moins. Après avoir intégré complétement ce dernier système, et après avoir exprimé toutes les variables x_i, p_i en fonction de x_1 et de $2n-1$ constantes arbitraires, on obtient x par une simple quadrature, à l'aide de l'équation

$$x - \alpha = \int_0^{x_1} \frac{P dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}},$$

α étant une nouvelle constante arbitraire, qui n'entre pas dans les expressions de $x_2, x_3, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ en x_1. En désignant maintenant par $x_2^\circ, x_3^\circ, \ldots x_n^\circ, p_1^\circ, p_2^\circ, \ldots p_n^\circ$ les valeurs de ces expressions, correspondantes à la valeur $x = 0$, puis observant que $x_1^\circ = 0$ et $M = 1$, on trouve par la formule générale (p. 179),

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n - (p_2^\circ dx_2^\circ + p_3^\circ dx_3^\circ + \ldots + p_n^\circ dx_n^\circ) + \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}} dh + d\alpha,$$

où l'on a remplacé $\frac{dx}{P}$ par $\frac{dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}}$.

Cette équation donne

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots \quad \frac{dx}{dx_n} = p_n \\ \frac{dx}{dx_2^\circ} = -p_2^\circ, \quad \frac{dx}{dx_3^\circ} = -p_3^\circ, \ldots \quad \frac{dx}{dx_n^\circ} = -p_n^\circ \end{array}\right\} \frac{dx}{dh} = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}}.$$

Si par l'introduction d'un nouvel élément dt l'on donne aux équations différentielles ordinaires la forme qu'elles ont dans les problèmes de mécanique, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dp_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{d\varphi}{dx_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{d\varphi}{dp_n}, \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{d\varphi}{dx_n} \end{array}\right\} dt = \frac{dx}{P}:$$

après avoir intégré complétement les équations

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n = \frac{d\varphi}{dp_1} : \frac{d\varphi}{dp_2} : \ldots \frac{d\varphi}{dp_n} : -\frac{d\varphi}{dx_1} : -\frac{d\varphi}{dx_2} : \ldots : -\frac{d\varphi}{dx_n},$$

et formé les expressions de $x_2, x_3, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, en fonction de x_1, on pourra calculer x et t par des quadratures, à l'aide des formules

$$x - \alpha = \int_0^{x_1} \frac{P dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}}, \quad t + \tau = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}},$$

α et τ étant des nouvelles constantes arbitraires.

Mais l'une de ces deux intégrales est la différentielle partielle de l'autre par rapport à h. En effet on a, d'après les formules précédentes,

$$\frac{dx}{dh} = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}} = t + \tau.$$

Si outre la variable x, il manque encore dans la fonction φ une seconde variable, x_n par exemple, on aura aussi $\frac{d\varphi}{dx_n} = 0$; donc les équations différentielles ordinaires donneront

$$dp_n = 0 \quad \text{ou} \quad p_n = \text{const.},$$

ce qui diminuera leur nombre de deux unités. Elles deviendront dans ce cas

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{n-1} : dp_1 : dp_2 : \ldots dp_{n-1} = \frac{d\varphi}{dp_1} : \frac{d\varphi}{dp_2} : \ldots : \frac{d\varphi}{dp_{n-1}} : -\frac{d\varphi}{dx_1} : \ldots -\frac{d\varphi}{dx_{n-1}},$$

où l'on doit regarder p_n comme une constante.

Quand, par l'intégration de ces équations, on aura exprimé les quantités $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, en fonction d'une seule d'entre elles, l'équation

$$dx_n = \frac{d\varphi}{dp_n} \cdot \frac{dx_i}{\frac{d\varphi}{dp_i}} = - \frac{d\varphi}{dp_n} \cdot \frac{dp_i}{\frac{d\varphi}{dx}}$$

donnera par une simple quadrature la valeur de x_n.

Mais on peut encore dans ce cas suivre une marche semblable à celle que M. Hamilton emploie pour remplacer la fonction S par V et transformer ainsi généralement l'équation $\varphi = h$ elle-même en une autre, dans laquelle le nombre de variables indépendantes est diminué d'une unité. En effet, la fonction φ ne contenant ni x ni x_n, on fera

$$x = y + p_n x_n;$$

par conséquent

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1} - x_n dp_n.$$

Si l'on regarde dans cette équation p_n comme constante, elle se change en

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1};$$

d'où il suit que les quantités $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, deviennent les coefficients différentiels partiels de y pris par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, et que l'équation différentielle partielle proposée, dans laquelle on a regardé de même p_n comme constante, se change en une équation différentielle partielle en y à $n-1$ variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$. Ayant trouvé y en fonction de $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, de $n-1$ constantes arbitraires et de la constante p_n, on obtiendra la fonction cherchée x en éliminant p_n de l'équation

$$x = y + p_n x_n,$$

à l'aide de la relation

$$\frac{dy}{dp_n} = -x_n.$$

On peut ajouter à x_n une constante arbitraire; alors x renfermera n constantes arbitraires, comme une solution complète l'exige.

X

Nous avons vu, par ce qui précède, comment on peut trouver une solution complète d'une équation différentielle partielle par l'intégration d'un *seul* système d'équations différentielles ordinaires. Maintenant je vais résoudre le problème inverse : déduire les intégrales complètes du système d'équations différentielles ordinaires d'une solution complète quelconque.

Supposons donc que l'on connaisse une expression de x en x_1, $x_2, \ldots x_n$, avec n constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, satisfaisant à l'équation différentielle partielle proposée $\varphi = h$. Qu'on forme les $n - 1$ équations suivantes représentées par des proportions,

$$\frac{dx}{d\alpha_1} : \frac{dx}{d\alpha_2} : \ldots : \frac{dx}{d\alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 : \ldots : \beta_n :$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, sont de nouvelles constantes arbitraires, et puisqu'elles n'entrent dans le calcul que par leurs rapports, elles équivalent seulement à $n - 1$ constantes. En introduisant une nouvelle quantité M, on peut poser

$$\frac{dx}{d\alpha^1} + \beta_1 \mathrm{M} = 0, \quad \frac{dx}{d\alpha_2} + \beta_2 \mathrm{M} = 0, \ldots \quad \frac{dx}{d\alpha_n} + \beta_n \mathrm{M} = 0.$$

Ces équations déterminent les $n + 2$ quantités x, x_1, $x_2, \ldots x_n$, M sont en fonction d'une seule d'entre elles. Différentiant l'équation

$$\frac{dx}{d\alpha_i} + \beta_i \mathrm{M} = 0,$$

et substituant dans sa différentielle la valeur de β_i, tirée de cette même équation, on a

$$0 = -\frac{dx}{d\alpha_i} \cdot \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{d^2x}{d\alpha_i dx_1} dx_1 + \frac{d^2x}{d\alpha_i dx_2} dx_2 + \ldots + \frac{d^2x}{d\alpha_i dx_n} dx_n,$$

de sorte que si l'on fait

$$\frac{dx}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots \quad \frac{dx}{dx_n} = p_n,$$

il vient

$$0 = -\frac{dx}{d\alpha_i} \cdot \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{dp_1}{d\alpha_i} dx_1 + \frac{dp_2}{d\alpha_i} dx_2 + \ldots + \frac{dp_n}{d\alpha} dx_n.$$

Si dans l'équation différentielle partielle proposée $\varphi = h$, on substitue la valeur donnée de x et les valeurs de p_1, $p_2, \ldots p_n$, qui s'en déduisent à l'aide de la différentiation partielle par rapport à x_1, $x_2, \ldots x_n$, cette équation doit devenir identique en x_1, $x_2, \ldots$

x_n, α_1, α_2, . . . α_n, h. Prenant donc la différentielle partielle par rapport à α_i, on trouve

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{d\alpha_i} + \frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{d\alpha_i} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{d\alpha_i} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{d\alpha_i}.$$

En comparant les deux systèmes de n équations qui résultent de cette équation et de la précédente, si l'on donne à i successivement les valeurs de 1, 2, . . . n, on arrive à cette suite de proportions

$$\frac{dM}{M} : dx_1 : dx_2 : \ldots dx_n = -\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{dp_1} : \frac{d\varphi}{dp_2} : \ldots : \frac{d\varphi}{dp_n}$$

et comme on a

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

cette suite fournit ces équations

$$P\frac{dM}{Mdx} = -\frac{d\varphi}{dx},\ P\frac{dx_1}{dx} = \frac{d\varphi}{dp_1},\ P\frac{dx_2}{dx} = \frac{d\varphi}{dp_2}, \ldots\ P\frac{dx_n}{dx} = \frac{d\varphi}{dp_n},$$

où l'on a fait comme ci-dessus

$$P = p_1\frac{d\varphi}{dp_1} + p_2\frac{d\varphi}{dp_2} + \ldots + p_n\frac{d\varphi}{dp_n}.$$

Différentiant maintenant l'équation $\varphi = h$ par rapport à x_i, et faisant dans la différentielle

$$\frac{dp_k}{dx} = \frac{dp_i}{dx_k},$$

on obtient

$$0 = \frac{d\varphi}{dx_i} + p_i\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_i}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_i}{dx_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_i}{dx_n},$$

et puisqu'on vient de trouver

$$\frac{d\varphi}{dp_1} = P\frac{dx_1}{dx},\ \frac{d\varphi}{dp_2} = P\frac{dx_2}{dx}, \ldots\ \frac{d\varphi}{dp_n} = P\frac{dx_n}{dx},$$

on en conclut

$$0 = \frac{d\varphi}{dx_i} + p_i\frac{d\varphi}{dx} + P\frac{dp_i}{dx}.$$

Ainsi l'on a déduit, par une analyse inverse, les $2n$ équations différentielles du premier ordre

$$\mathrm{P}\,\frac{dx_i}{dx} = \frac{d\varphi}{dp_i},\quad \mathrm{P}\,\frac{dp_i}{dx} = -\frac{d\varphi}{dx_i} - \frac{d\varphi}{dx}\,p_i,$$

des $2n$ équations

$$\varphi = h,\ \frac{dx}{d\alpha_1} : \frac{dx}{d\alpha_2} : \ldots : \frac{dx}{d\alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 : \ldots \beta_n,$$
$$\frac{dx}{dx_1} = p_1,\ \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots\ \frac{dx}{dx_n} = p_n;$$

ces dernières renfermant $2n$ constantes arbitraires, savoir h, α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$, et les rapports de $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, sont par conséquent les intégrales complètes des équations différentielles dont il s'agit.

XI.

La dernière analyse peut s'étendre aussi à la recherche plus générale, dans laquelle Pfaff comprend l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, et l'on peut démontrer que connaissant un système quelconque de n équations à n constantes arbitraires, satisfaisant à l'équation différentielle

$$\mathrm{o} = \mathrm{X}_1 dx_1 + \mathrm{X}_2 dx_2 + \ldots + \mathrm{X}_{2n} dx_{2n},$$

(où l'on a changé la quantité x des formules précédentes en x_{2n}), on peut en déduire les intégrales complètes du système de $2n-1$ équations différentielles ordinaires établi par Pfaff et donné ci-dessus, p. 165.

Au moyen des n équations données, exprimez $x_1, x_2, \ldots x_n$, en fonction des variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n}$, et des constantes α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$; formez les équations

$$\mathrm{X}_1\frac{dx_1}{d\alpha_1} + \mathrm{X}_2\frac{dx_2}{d\alpha_1} + \ldots + \mathrm{X}_n\frac{dx_n}{d\alpha_1} + \mathrm{M}\beta_1 = \mathrm{o},$$
$$\mathrm{X}_1\frac{dx_1}{d\alpha_2} + \mathrm{X}_2\frac{dx_2}{d\alpha_2} + \ldots + \mathrm{X}_n\frac{dx_n}{d\alpha_2} + \mathrm{M}\beta_2 = \mathrm{o},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{X}_1\frac{dx_1}{d\alpha_n} + \mathrm{X}_2\frac{dx_2}{d\alpha_n} + \ldots + \mathrm{X}_n\frac{dx_n}{d\alpha_n} + \mathrm{M}\beta_n = \mathrm{o},$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, *étant de nouvelles constantes arbitraires; en éliminant* M, *vous en déduirez* $n - 1$ *équations qui, jointes aux* n *équations données, seront les intégrales complètes du système d'équations différentielles ordinaires, établi par Pfaff; ces intégrales, comme cela doit être, contiendront* $2n - 1$ *constantes arbitraires, savoir* n *constantes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, *et* $n - 1$ *rapports des constantes* $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$.

Voici la démonstration de ce théorème.

Les expressions de $x_1, x_2, \ldots x_n$ en fonction $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n}$, et des n constantes arbitraires, déduites des n équations données, devant satisfaire à l'équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_{2n} dx_{2n} = 0,$$

il faut que

$$\begin{aligned} X_1 \frac{dx_1}{dx_{n+1}} + X_2 \frac{dx_2}{dx_{n+1}} + \ldots + X_n \frac{dx_n}{dx_{n+1}} + X_{n+1} &= 0, \\ X_1 \frac{dx_1}{dx_{n+2}} + X_2 \frac{dx_2}{dx_{n+2}} + \ldots + X_n \frac{dx_n}{dx_{n+2}} + X_{n+2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ X_1 \frac{dx_1}{dx_{2n}} + X_2 \frac{dx_2}{dx_{2n}} + \ldots + X_n \frac{dx_n}{dx_{2n}} + X_{2n} &= 0. \end{aligned}$$

Maintenant on peut supposer qu'on ait exprimé à l'aide des n équations

$$X_1 \frac{dx_1}{d\alpha_i} + X_2 \frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + X_n \frac{dx_n}{d\alpha_i} + M\beta_i = 0,$$

les $n + 1$ quantités $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n}$, M en fonction d'une seule d'entre elles, de M par exemple : alors ces quantités, et par conséquent $x_1, x_2, \ldots x_n$, deviennent des fonctions de M, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$. Pour distinguer par un signe particulier les coefficients différentiels partiels pris dans cette hypothèse, je les renfermerai entre des crochets; les coefficients différentiels partiels dépourvus de crochets se rapportant au cas où l'on considère $x_1, x_2, \ldots x_n$, comme étant des fonctions de x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots x_{2n}$, α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$. On aura par conséquent

$$\begin{aligned}
X_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) + \ldots + X_n\left(\frac{dx_n}{d\alpha_i}\right) &= X_1\frac{dx_1}{d\alpha_i} + X_2\frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{d\alpha_i} \\
&+ \left(X_1\frac{dx_1}{dx_{n+1}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{n+1}} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{n+1}}\right)\left(\frac{dx_{n+1}}{d\alpha_i}\right) \\
&+ \left(X_1\frac{dx_1}{dx_{n+2}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{n+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{n+2}}\right)\left(\frac{dx_{n+2}}{d\alpha_i}\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(X_1\frac{dx_1}{dx_{2n}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{2n}} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{2n}}\right)\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\
&= -M\beta_i - X_{n+1}\left(\frac{dx_{n+1}}{d\alpha_i}\right) - X_{n+2}\left(\frac{dx_{n+2}}{d\alpha_i}\right) \ldots - X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right),
\end{aligned}$$

ou

$$X_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) + M\beta_i = 0.$$

Différentiant cette équation par rapport à M, on obtient

$$\begin{aligned}
0 = \left(\frac{dX_1}{dM}\right)\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + \left(\frac{dX_2}{dM}\right)\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + \left(\frac{dX_{2n}}{dM}\right)\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\
+ X_1\left(\frac{d^2x_1}{dMd\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{d^2x_2}{dMd\alpha_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{d^2x_{2n}}{dMd\alpha_i}\right) + \beta_i.
\end{aligned}$$

D'un autre côté l'équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2n} dx_{2n} = 0,$$

en y considérant toutes les quantités comme étant des fonctions de M, donne

$$X_1\left(\frac{dx_1}{dM}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{dM}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right) = 0,$$

d'où l'on conclut en différentiant par rapport à α_i,

$$\begin{aligned}
0 = X_1\left(\frac{d^2x_1}{dMd\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{d^2x_2}{dMd\alpha_i}\right) + X_{2n}\left(\frac{d^2x_{2n}}{dMd\alpha_i}\right) \\
+ \left(\frac{dX_1}{d\alpha_i}\right)\cdot\left(\frac{dx_1}{dM}\right) + \left(\frac{dX_2}{d\alpha_i}\right)\cdot\left(\frac{dx_2}{dM}\right) \ldots + \left(\frac{dX_{2n}}{d\alpha_i}\right)\cdot\left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, au moyen de cette équation, la précédente multipliée par dM devient

$$\begin{aligned} o = d\mathrm{X}_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + d\mathrm{X}_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + d\mathrm{X}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\ - dx_1\left(\frac{d\mathrm{X}_1}{d\alpha_i}\right) - dx_2\left(\frac{d\mathrm{X}_2}{d\alpha_i}\right) \ldots - dx_{2n}\left(\frac{d\mathrm{X}_{2n}}{d\alpha_i}\right) + \beta_i d\mathrm{M}, \end{aligned}$$

où l'on a remplacé $\left(\frac{d\mathrm{X}_1}{d\mathrm{M}}\right) d\mathrm{M}$ par $d\mathrm{X}_1$, $\left(\frac{dx_1}{d\mathrm{M}}\right) d\mathrm{M}$ par dx_1, etc. Éliminant β_i de cette équation à l'aide de l'équation

$$\mathrm{X}_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + \mathrm{X}_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) + \ldots + \mathrm{X}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) + \mathrm{M}\beta_i = o,$$

on obtient

$$\begin{aligned} o = d\mathrm{X}_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + d\mathrm{X}_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + d\mathrm{X}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\ - dx_1\left(\frac{d\mathrm{X}_1}{d\alpha_i}\right) - dx_2\left(\frac{d\mathrm{X}_2}{d\alpha_i}\right) \ldots - dx_{2n}\left(\frac{d\mathrm{X}_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\ - \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\left[\mathrm{X}_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + \mathrm{X}_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + \mathrm{X}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right)\right]. \end{aligned}$$

Faisant, ce qui est permis, $\beta_n = 1$, on trouvera par la même analyse, pour les $n-1$ autres constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$, des formules semblables à celle qu'on a trouvée précédemment pour α_i. On a d'abord

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + \mathrm{X}_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + \mathrm{X}_n\left(\frac{dx_n}{d\beta_i}\right) \\ &\qquad = \left(\mathrm{X}_1\frac{dx_1}{dx_{n+1}} + \mathrm{X}_2\frac{dx_2}{dx_{n+1}} \ldots + \mathrm{X}_n\frac{dx_n}{dx_{n+1}}\right)\left(\frac{dx_{n+1}}{d\beta_i}\right) \\ &\qquad + \left(\mathrm{X}_1\frac{dx_1}{dx_{n+2}} + \mathrm{X}_2\frac{dx_2}{dx_{n+2}} \ldots + \mathrm{X}_n\frac{dx_n}{dx_{n+2}}\right)\left(\frac{dx_{n+2}}{d\beta_i}\right) \\ &\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\qquad + \left(\mathrm{X}_1\frac{dx_1}{dx_{2n}} + \mathrm{X}_2\frac{dx_2}{dx_{2n}} \ldots + \mathrm{X}_n\frac{dx_n}{dx_{2n}}\right)\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right) \\ &= -\left[\mathrm{X}_{n+1}\left(\frac{dx_{n+1}}{d\beta_i}\right) + \mathrm{X}_{n+2}\left(\frac{dx_{n+2}}{d\beta_i}\right) \ldots + \mathrm{X}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right)\right], \end{aligned}$$

ou $o = \mathrm{X}_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + \mathrm{X}_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + \mathrm{X}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right).$

Différentiant cette équation par rapport à M, et l'équation

$$o = X_1\left(\frac{dx_1}{dM}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{dM}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right),$$

par rapport à β_i, soustrayant les résultats l'un de l'autre, multipliant le reste par dM, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} o = dX_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + dX_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + dX_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right) \\ - dx_1\left(\frac{dX_1}{d\beta_i}\right) - dx_2\left(\frac{dX_2}{d\beta_i}\right) \ldots - dx_{2n}\left(\frac{dX_{2n}}{d\beta_i}\right). \end{aligned}$$

Pour lui donner la même forme, que nous avons trouvée pour l'équation qui se rapporte à α_i, nous en retrancherons l'équation

$$o = X_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right),$$

multipliée par $\frac{dM}{M}$. De cette manière, on a

$$\begin{aligned} o = dX_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + dX_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + dX_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right) \\ - dx_1\left(\frac{dX_1}{d\beta_i}\right) - dx_2\left(\frac{dX_2}{d\beta}\right) \ldots - dx_{2n}\left(\frac{dX_{2n}}{d\beta_i}\right) \\ - \frac{dM}{M}\left[X_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dans cette équation et dans l'équation semblable par rapport à α_i, ci-dessus trouvée, nous allons mettre pour les différentielles partielles $\left(\frac{dX_k}{d\alpha_i}\right)$, $\left(\frac{dX_k}{d\beta_i}\right)$, leurs valeurs développées :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dX_k}{d\alpha_i}\right) &= \frac{dX_k}{dx_1}\cdot\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + \frac{dX_k}{dx_2}\cdot\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + \frac{dX_k}{dx_{2n}}\cdot\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right), \\ \left(\frac{dX_k}{d\beta_i}\right) &= \frac{dX_k}{dx_1}\cdot\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + \frac{dX_k}{dx_2}\cdot\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + \frac{dX_k}{dx_{2n}}\cdot\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right); \end{aligned}$$

et ordonner les expressions par rapport aux quantités $\left(\frac{dx_k}{d\alpha_i}\right)$, $\left(\frac{dx_k}{d\beta_i}\right)$ Alors ces équations se changent en celles-ci :

$$o = T_1 \left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{dx}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right),$$

$$o = T_1 \left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right),$$

où

$$T_1 = dX_1 - \left(\frac{dX_1}{dx_1} dx_1 + \frac{dX_2}{dx_1} dx_2 \ldots + \frac{dX_{2n}}{dx_1} dx_{2n}\right) - X_1 \frac{dM}{M},$$

$$T_2 = dX_2 - \left(\frac{dX_1}{dx_2} dx_1 + \frac{dX_2}{dx_2} dx_2 \ldots + \frac{dX_{2n}}{dx_2} dx_{2n}\right) - X_2 \frac{dM}{M},$$

. . . .

$$T_{2n} = dX_{2n} - \left(\frac{dX_1}{dx_{2n}} dx_1 + \frac{dX_2}{d_{2n}} dx_2 \ldots + \frac{dX_{2n}}{dx_{2n}} dx_{2n}\right) - X_{2n} \frac{dM}{M}.$$

Si l'on multiplie ces valeurs de T_1, T_2, etc., par dx_1, dx_2,... dx_{2n}, et qu'on en fasse la somme, tous les termes du second membre se détruisent, vu que l'on a

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots X_{2n} dx_{2n} = o,$$

et
$$\frac{dX_k}{dx_1} dx_1 + \frac{dX_k}{dx_2} dx_2 + \ldots + \frac{dX_k}{dx_{2n}} dx_{2n} = dX_k,$$

et l'on obtient l'équation

$$T_1 dx_1 + T_2 dx_2 + \ldots + T_{2n} dx_{2n} = o,$$

ou ce qui est la même chose

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{dM}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{dM}\right) + \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right) = o,$$

puisque les différentielles dx_1, dx_2, etc., dans les formules précédentes, remplacent les produits $\left(\frac{dx_1}{dM}\right) dM$, $\left(\frac{dx_2}{dM}\right) dM$, etc.

Des n équations

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) = o,$$

jointes aux $n-1$ équations

$$T_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right)+T_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right)\ldots+T_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right)=0,$$

et à l'équation

$$T_1\left(\frac{dx_1}{dM}\right)+T_2\left(\frac{dx_2}{dM}\right)\ldots+T_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right)=0,$$

on déduit les $2n$ équations

$$T_1=0,\quad T_2=0,\quad\ldots\quad T_{2n}=0,$$

qui coïncident avec les équations différentielles de Pfaff, quand on y change dN, X_{2n}, x_{2n}, en $\frac{dM}{M}$, X, x, respectivement. C.Q.F.D.

Voici comment on peut prouver que les équations

$$T_1=0,\quad T_2=0,\ldots\quad T_{2n}=0,$$

résultent de celles que nous venons d'obtenir. Si l'on considère $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, β_1, $\beta_2, \ldots \beta_{n-1}$, M comme $2n$ quantités variables en même temps, les équations, qui existent entre ces quantités et les $2n$ quantités x_1, $x_2, \ldots x_{2n}$, n'établissent entre ces dernières aucune relation déterminée; mais ces équations font seulement voir comment l'un des systèmes de $2n$ variables peut être exprimé par l'autre système de $2n$ variables. Qu'on désigne des variations quelconques des quantités x_1, $x_2, \ldots x_{2n}$ par δx_1, $\delta x_2, \ldots$ δx_{2n}: ces variations sont indépendantes les unes des autres, puisqu'il n'y a aucune relation entre les quantités x_1, $x_2, \ldots x_{2n}$; en nommant $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2, \ldots \delta\alpha_n$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2, \ldots \delta\beta_{n-1}$, δM les variations correspondantes des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, β_1, $\beta_2, \ldots \beta_{n-1}$, M, on a

$$\begin{aligned}\delta x_k = {} & \left(\frac{dx_k}{d\alpha_1}\right)\delta\alpha_1+\left(\frac{dx_k}{d\alpha_2}\right)\delta\alpha_2\ldots+\left(\frac{dx_k}{d\alpha_n}\right)\delta\alpha_n,\\ & +\left(\frac{dx_k}{d\beta_1}\right)\delta\beta_1+\left(\frac{dx_k}{d\beta_2}\right)\delta\beta_2\ldots+\left(\frac{dx_k}{d\beta_{n-1}}\right)\delta\beta_{n-1},\\ & +\left(\frac{dx_k}{dM}\right)\delta M.\end{aligned}$$

Donc multipliant les $2n$ équations, que nous avons trouvées ci-dessus,

$$\mathrm{T}_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right) + \mathrm{T}_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_1}\right) \ldots + \mathrm{T}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_1}\right) = 0,$$

$$\mathrm{T}_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_2}\right) + \mathrm{T}_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_2}\right) \ldots + \mathrm{T}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_2}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{T}_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_n}\right) + \mathrm{T}_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_n}\right) \ldots + \mathrm{T}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_n}\right) = 0,$$

$$\mathrm{T}_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_1}\right) + \mathrm{T}_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_1}\right) \ldots + \mathrm{T}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_1}\right) = 0,$$

$$\mathrm{T}_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_2}\right) + \mathrm{T}_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_2}\right) \ldots + \mathrm{T}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_2}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{T}_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_{n-1}}\right) + \mathrm{T}_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_{n-1}}\right) \ldots + \mathrm{T}_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_{n-1}}\right) = 0,$$

$$\mathrm{T}_1\left(\frac{dx_1}{d\mathrm{M}}\right) + \mathrm{T}_2\left(\frac{dx_2}{d\mathrm{M}}\right) \ldots + \mathrm{T}_{2n}\left(\frac{dx_n}{d\mathrm{M}}\right) = 0,$$

par $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2, \ldots \delta\alpha_n$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2$, $\ldots\delta\beta_{n-1}$, $\delta\mathrm{M}$ respectivement, et faisant la somme, on trouve

$$\mathrm{T}_1\delta x_1 + \mathrm{T}_2\delta x_2 \ldots + \mathrm{T}_{2n}\delta x_{2n} = 0,$$

Or, comme δx_1, $\delta x_2, \ldots \delta x_{2n}$, sont des variations indépendantes, les unes des autres, cette équation ne peut pas avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$\mathrm{T}_1 = 0, \quad \mathrm{T}_2 = 0, \quad \mathrm{T}_{2n} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut encore s'assurer par les considérations suivantes, qu'on obtient toujours par la méthode que j'ai indiquée, les intégrales complètes des équations différentielles ordinaires, établies par

Pfaff, quand on sait satisfaire à l'équation

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 \ldots + X_{2n}dx_{2n} = 0$$

par un système quelconque de n équations à n constantes arbitraires. Qu'on résolve ces n équations par rapport aux n constantes arbitraires de manière qu'elles prennent la forme

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \ \ldots \ A_n = \alpha_n,$$

α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$, étant les constantes arbitraires, qui n'entrent plus dans A_1, $A_2, \ldots A_n$. Pour que ces équations satisfassent à l'équation différentielle

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 + \ldots + X_{2n}dx_{2n} = 0,$$

il doit exister n multiplicateurs U_1, $U_2, \ldots U_n$, au moyen desquels on ait *identiquement*

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 \ldots + X_{2n}dx_{2n} = U_1dA_1 + U_2dA_2 + \ldots + U_ndA_n.$$

En supposant qu'on ait exprimé x_1, $x_2, \ldots x_n$ en A_1, $A_2, \ldots A_n$, x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots x_{2n}$, cette équation fournit

$$U_i = X_1 \frac{dx_1}{dA_i} + X_2 \frac{dx_2}{dA_i} \ldots + X_{2n} \frac{dx_{2n}}{dA_i}.$$

De l'analyse donnée par Pfaff lui-même, il suit que, sachant transformer d'une manière quelconque l'équation

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 \ldots + X_{2n}dx_{2n}$$

en une autre à $2n - 1$ variables seulement, on obtient les intégrales de ses équations différentielles ordinaires, en égalant ces $2n - 1$ variables à des constantes arbitraires. Or nous avons

$$0 = X_1dx_1 + X_2dx_2 \ldots + X_{2n}dx_{2n} = U_1dA_1 + U_2dA_2 \ldots + U_ndA_n$$

ou

$$o = \frac{U_1}{U_n} dA_1 + \frac{U_2}{U_n} dA_2 + \ldots + \frac{U_{n-1}}{U_n} dA_{n-1} + dA_n,$$

ce qui est une équation différentielle à $2n - 1$ variables seulement,

$$A_1,\ A_2, \ldots\ A_n,\ \frac{U_1}{U_n},\ \frac{U_2}{U_n},\ \ldots\ \frac{U_{n-1}}{U_n}.$$

Donc celles-ci égalées à des constantes arbitraires doivent être les intégrales complètes du système d'équations différentielles ordinaires de Pfaff. Or, elles coïncident parfaitement avec les $2n - 1$ équations telles que je les ai établies plus haut.

XII.

J'ai remarqué ci-dessus, que la méthode proposée par Pfaff, pour intégrer l'équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_{2n} dx_{2n} = o,$$

a cet inconvénient, qu'on n'établit à *priori* que le premier des systèmes d'équations différentielles ordinaires dont on doit s'occuper successivement : on ne peut qu'indiquer la manière dont chacun des autres est formé, et cela après l'intégration complète de tous les précédents. A cause de cette circonstance on ne peut pas se faire une idée nette de l'ensemble de la méthode. Pour le cas particulier qui fournit l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, nous avons vu (IX), que l'intégration du premier de ces systèmes d'équations différentielles ordinaires suffit complétement, et qu'on n'a plus besoin d'établir et d'intégrer d'autres systèmes. Ce cas particulier peut encore être énoncé comme étant celui dans lequel un nombre $n - 1$ des $2n$ quantités X_1, X_2,... X_{2n}, est égal à zéro. Soit par exemple

$$X_{n+2} = X_{n+3} = \ldots = X_{2n} = o,$$

de manière que l'équation proposée devienne

$$dx_{n+1} = \frac{-1}{X_{n+1}} (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_n dx_n).$$

Faisant

$$-\frac{X_1}{X_{n+1}} = p_1, \quad -\frac{X_2}{X_{n+1}} = p_2, \quad -\frac{X_n}{X_{n+1}} = p_n,$$

les quantités p_1, p_2,... p_n, sont les coefficients différentiels partiels de x_{n+1}, considéré comme fonction de x_1, x_2,... x_n, et l'élimination des $n-1$ quantités x_{n+2}, x_{n+3},... x_{2n}, de ces n équations donne l'équation différentielle partielle, qu'on devait intégrer. Maintenant, je vais démontrer qu'en appliquant la méthode, dont nous nous sommes servis pour ce cas *particulier*, à l'équation différentielle *générale* de Pfaff, on peut se débarrasser de l'inconvénient ci-dessus mentionné; car on réussit par-là à établir sans difficulté tous les systèmes qui sont à intégrer sans en avoir intégré aucun.

Pour arriver à ce résultat, on prendra dans les intégrales du premier des systèmes d'équations différentielles ordinaires établis par Pfaff, pour constantes arbitraires, les valeurs de x_1, x_2,... x_{2n-1}, correspondantes à $x_{2n}=0$, valeurs que nous désignerons par x_1^0, x_2^0,... x_{2n-1}^0. En désignant aussi les valeurs correspondantes de X_1, X_2,... X_{2n} par X_1^0, X_2^0,... X_{2n}^0, on obtient des équations de la forme

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_1^0 + x_{2n}\xi_1, & X_1 = X_1^0 + x_{2n}\Xi_1, \\ x_2 = x_2^0 + x_{2n}\xi_2, & X_2 = X_2^0 + x_{2n}\Xi_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}, & X_{2n} = X_{2n}^0 + x_{2n}\Xi_{2n}, \end{array}$$

ξ_1, ξ_2,... ξ_{2n-1}, Ξ_1, Ξ_2,... Ξ_{2n}, étant des fonctions de x_{2n}, x_1^0, x_2^0,... x_{2n-1}^0, qui ne deviennent pas infinies pour $x_{2n}=0$. En substituant ces valeurs de x_1, x_2,... x_{2n-1}, telles qu'on les trouve par l'intégration complète des équations différentielles ordinaires établies par M. Pfaff, dans l'équation

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \dots + X_{2n} dx_{2n},$$

on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (X_1^0 + x_{2n}\Xi_1)\, d(x_1^0 + x_{2n}\xi_1) \\ &\quad + (X_2^0 + x_{2n}\Xi_2)\, d(x_1^0 + x_{2n}\xi_2) \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\quad + (X_{2n-1}^0 + x_{2n}\Xi_{2n-1})\, d(x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}) \\ &\quad + (X_{2n}^0 + x_{2n}\Xi_{2n})\, dx_{2n} \\ &= B dx_{2n} + B_1 dx_1^0 + B_2 x_2^0 \dots + B_{2n-1} dx_{2n-1}^0, \end{aligned}$$

où (i désignant un des nombres $1, 2, \ldots 2n-1$)

$$\begin{aligned}
B_i = {} & X_i^\circ + x_{2n}\Xi_i \\
& + x_{2n}\left(X_1^\circ \frac{d\xi_1}{dx_i^\circ} + X_2^\circ \frac{d\xi_2}{dx_i^\circ} \ldots + X_{2n-1}^\circ \frac{d\xi_{2n-1}}{dx_i^\circ}\right) \\
& + x_{2n}^2\left(\Xi_1 \frac{d\xi_1}{dx_i^\circ} + \Xi_2 \frac{d\xi_2}{dx_i^\circ} \ldots + \Xi_{2n-1} \frac{d\xi_{2n-1}}{dx_i^\circ}\right).
\end{aligned}$$

Mais Pfaff a démontré, que si au moyen des intégrales complètes de ses équations différentielles ordinaires, on exprime les $2n$ variables $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{2n}$, en fonction de l'une d'entre elles, de x_{2n} par exemple, et de $2n-1$ constantes arbitraires, et qu'ensuite on substitue ces valeurs dans lesquelles on considère aussi les constantes arbitraires comme variables, dans l'expression

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_{2n} dx_{2n};$$

le coefficient de dx_{2n} s'évanouit, et les rapports des coefficients des différentielles des constantes arbitraires deviennent indépendans de x_{2n}. On a donc

$$B = 0,$$

et les rapports de B_1, B_2, B_{2n-1}, sont indépendants de x_{2n}.

Par conséquent, ils ne sont pas changés, quand on fait $x_{2n} = 0$, dans les expressions de $B_1, B_2, \ldots B_{2n-1}$; on obtient donc

$$B_1 : B_2 : \ldots : B_{2n-1} = X_1^\circ : X_2^\circ : \ldots : X_{2n-1}^\circ,$$

ou en introduisant un facteur M,

$$B_1 = MX_1^\circ, \quad B_2 = MX_2^\circ, \ldots \quad B_{2n-1} = MX_{2n-1}^\circ.$$

Ainsi nous voyons qu'en introduisant les variables $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ, x_{2n}$ au lieu des variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}, x_{2n}$, et moyennant les expressions

$$x_1 = x_1^\circ + x_{2n}\xi_1, \quad x_2 = x_2^\circ + x_{2n}\xi_2, \ldots \quad x_{2n-1} = x_{2n-1}^\circ + x_{2n}\xi_{2n-1},$$

auxquelles on est conduit (p. 195) par l'intégration complète des équations différentielles ordinaires de Pfaff, l'équation différentielle proposée

$$o = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_{2n} dx_{2n},$$

se change en celle-ci :

$$o = X_1^\circ dx_1^\circ + X_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + X_{2n-1}^\circ dx_{2n-1}^\circ,$$

c'est-à-dire en une équation différentielle, qui contient une variable de moins et qu'on trouve, en faisant $x_{2n} = o$ dans la proposée, et en y remplaçant x_1, $x_2, \ldots$ x_{2n-1} par x_1°, $x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ$. Et réciproquement l'intégration de la dernière équation donnera donc l'intégration de la proposée, en exprimant dans ses équations intégrales x_1°, $x_2^\circ, \ldots$ x_{2n-1}° en x_1, $x_2, \ldots$ x_{2n-1}, x_{2n}, à l'aide des équations ci-dessus établies.

Cela posé, on doit d'après la méthode de Pfaff égaler une des quantités x_1°, $x_2^\circ, \ldots$ x_{2n-1}°, qui entrent dans l'équation

$$o = X_1^\circ dx_1^\circ + X_2^\circ dx_2^\circ \ldots + X_{2n-1}^\circ dx_{2n-1}^\circ,$$

à une constante arbitraire : soit donc

$$x_{2n-1}^\circ = \alpha_1,$$

α_1 étant une constante arbitraire. Alors l'équation différentielle se change en

$$o = X_1^\circ dx_1^\circ + X_2^\circ dx_2^\circ \ldots + X_{2n-2}^\circ dx_{2n-2}^\circ,$$

où l'on doit remplacer x_{2n-1} par α_1 dans les fonctions X_1°, $X_2^\circ, \ldots X_{2n-2}^\circ$. Ayant intégré cette équation différentielle par un système de $n-1$ équations à $n-1$ constantes arbitraires, on y joindra l'équation

$$x_{2n-1}^\circ = \alpha_1,$$

et l'on exprimera x_1°, $x_2^\circ, \ldots$ x_{2n-1}° en x, $x_1, \ldots$ x_{2n}, à l'aide des équations intégrales du premier système; alors on aura les n équations à n constantes arbitraires, qui satisfont à l'équation différentielle proposée

$$o = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_{2n} dx_{2n}.$$

Maintenant on peut réduire de la même manière l'équation, à laquelle on a ramené la proposée, à une autre qui renferme deux variables de moins. Le second système d'équations différentielles, qu'on doit intégrer pour atteindre ce but, se déduit du premier, en omettant les deux dernières équations de celui-ci, faisant $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$ et remplaçant x_i, X_i par x_i^0, X_i^0. Alors on parvient à $2n - 3$ équations différentielles ordinaires aux $2n - 2$ variables x_1^0, x_2^0,... x_{2n-2}^0. Pour constantes arbitraires, on prendra comme précédemment les valeurs de x_1^0, x_2^0,... x_{2n-3}^0 correspondant à $x_{2n-2}^0 = 0$, et que nous désignerons par x_1^{00}, x_2^{00},... x_{2n-3}^{00}, et l'on nommera X_i^{00}, la valeur correspondante de X_i^0; alors le problème est réduit à celui d'intégrer l'équation

$$X_1^{00}dx_1^{00} + X_2^{00}dx_2^{00} \ldots + X_{2n-4}^{00}dx_{2n-4}^{00} = 0,$$

(qu'on déduit de la proposée, en y faisant $x_{2n} = 0$, $x_{2n-2} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2$, où α_1, α_2, représentent des constantes arbitraires, et en y remplaçant X, x, par X^{00}, x^{00}) par un système de $2n - 2$ équations à $n - 2$ constantes arbitraires. Qu'on y joigne l'équation

$$x_{2n-3}^{00} = \alpha_2,$$

et qu'on exprime x_1^{00}, x_2^{00},... x_{2n-3}^{00} en x_1^0, x_2^0,... x_{2n-2}^0, à l'aide des équations intégrales du second système, qu'on y joigne encore l'équation

$$x_{2n-1}^{0} = \alpha_1,$$

et qu'on exprime x_1^0, x_2^0,... x_{2n-1}^0 en x_1, x_2,... x_{2n}, à l'aide des équations intégrales du premier système : alors on aura les n intégrales de l'équation proposée à n constantes arbitraires. Si l'on continue ainsi à débarrasser chaque équation, à laquelle on a réduit la proposée, de deux variables, en y égalant l'une des variables à zéro, une autre à une constante arbitraire, on arrive enfin à une équation qui ne renferme que deux variables

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 = 0,$$

où l'on doit faire $x_{2n} = x_{2n-2} \ldots = x_4 = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2$,... $x_3 = \alpha_{n-1}$, dans les expressions de X_1, X_2.

Donc si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, des constantes arbitraires, l'ensemble du procédé nécessaire pour établir les divers systèmes d'équations différentielles ordinaires qu'on doit intégrer, consiste en ce qui suit : dans le premier système d'équations différentielles ordinaires on fera $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$; omettant les deux dernières équations et remplaçant x_i, X_i par x_i°, X_i°, on obtiendra le second système : on y fera $x_{2n-2}^{\circ} = 0$, $x_{2n-3}^{\circ} = \alpha_2$, on en omettra de même les deux dernières équations, et l'on écrira $x_i^{\circ\circ}$, $X_i^{\circ\circ}$, au lieu de x_i°, X_i°; de cette manière on obtiendra le troisième système : on y fera $x_{2n-4}^{\circ\circ} = 0$, $x_{2n-5}^{\circ\circ} = \alpha_3$, on en omettra comme auparavant les deux dernières équations, et l'on écrira $x_i^{\circ\circ\circ}$, $X_i^{\circ\circ\circ}$ au lieu de $x_i^{\circ\circ}$, $X_i^{\circ\circ}$; on obtiendra ainsi le quatrième système d'équations différentielles, et ainsi de suite : enfin on parviendra à l'équation, qui représente le $n^{ième}$ système

$$X_1^{\circ^{(n-1)}} dx_1^{\circ^{n-1}} + X_2^{\circ^{n-1}} dx_2^{\circ^{n-1}} = 0.$$

Si l'on désigne par $x_1^{\circ^{n-m}}$, $x_2^{\circ^{n-m}}$, $\ldots$ $x_{2m+1}^{\circ^{n-m}}$ les valeurs que les quantités $x_1^{\circ^{n-m-1}}$, $x_2^{\circ^{n-m-1}}$, $\ldots$ $x_{2m+1}^{\circ^{n-m-1}}$, prennent dans les $2m+1$ intégrales du $(n-m)^{me}$ système d'équations différentielles, quand on y fait $x_{2m-2}^{\circ^{n-m-1}} = 0$, alors toutes les équations intégrales des différens systèmes, combinés avec les équations

$$x_{2n-1}^{\circ} = \alpha_1, \quad x_{2n-3}^{\circ\circ} = \alpha_2, \quad x_{2n-5}^{\circ\circ\circ} = \alpha_3, \ldots \quad x_1^{\circ^{n}} = \alpha_n,$$

donnent la solution demandée. Car dans ces n équations, on peut exprimer $x_1^{\circ^{n}}$ en $x_1^{\circ^{n-1}}$, $x_2^{\circ^{n-1}}$, à l'aide de l'intégrale de l'équation différentielle du $n^{ième}$ système; puis $x_1^{\circ^{n-1}}$, $x_2^{\circ^{n-1}}$, $x_3^{\circ^{n-1}}$ en $x_1^{\circ^{n-2}}$, $x_2^{\circ^{n-2}}$, $x_3^{\circ^{n-2}}$, $x_4^{\circ^{n-2}}$, à l'aide des trois intégrales du $(n-1)^{me}$ système; puis $x_1^{\circ^{n-2}}$, $x_2^{\circ^{n-2}}$, $x_3^{\circ^{n-2}}$, $x_4^{\circ^{n-2}}$, $x_5^{\circ^{n-2}}$ en $x_1^{\circ^{n-3}}$, $x_2^{\circ^{n-3}}$, $\ldots$ $x_6^{\circ^{n-3}}$, à l'aide des cinq intégrales du $(n-2)^{me}$ système d'équations différentielles, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'à l'aide de l'intégration du premier système, on ait exprimé toutes les quantités qui entrent dans les n équations en fonction des variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots x_{2n}$.

Nous avons vu que quand $n-1$ des $2n$ quantités $X_1, X_2, \ldots X_{2n}$, s'évanouissent (ce qui donne le cas des différentielles partielles du premier ordre), alors l'intégration du premier système d'équations différentielles suffit. Lorsqu'un nombre $n-m$ de ces quantités s'annule seulement, de manière qu'on ait

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-m} = 0,$$

on n'a qu'à continuer le procédé indiqué, jusqu'à ce qu'on ait réduit l'équation différentielle proposée à une équation à $2n-2m+2$ variables, qui aura la forme

$$0 = X^{\circ\, m-1}_{n-m+1} dx^{\circ\, m-1}_{n-m+1} + X^{\circ\, m-1}_{n-m+2} dx^{\circ\, m-1}_{n-m+2} \ldots + X^{\circ\, m-1}_{2n-2m+2} dx^{\circ\, m-1}_{2n-2m+2},$$

car les coefficients de $dx^{\circ\, m-1}_1$, $dx^{\circ\, m-1}_2$, ... $dx^{\circ\, m-1}_{n-n}$ s'évanouissent. L'intégration du $m^{ième}$ système d'équations différentielles, suffit pour trouver les $n-m+1$ équations, qui satisfont à cette équation différentielle, et l'on n'a plus besoin d'intégrer aucun autre système.

On peut encore intégrer l'équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2n} dx_{2n} = 0,$$

par une méthode différente de celle de Pfaff. Considérant x_1, x_2, comme variables, on peut faire

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = U du,$$

par l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre à deux variables. Considérant de même x_3 et x_4 comme variables, on obtient

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = U du + U' dx_3 + U'' dx_4,$$

où par l'introduction de u au lieu de x_1 les quantités U, U', U'', deviennent des fonctions de u, x_2, x_3, x_4. A l'aide de l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre à trois variables, il est facile de démontrer qu'on peut donner à cette expression la forme

$$Udu + U'dx_3 + U''dx_4 = V_1dv_1 + V_2dv_2.$$

Considérant encore x_5, x_6, comme variables, on obtient

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 \ldots + X_6dx_6 = V_1dv_1 + V_2dv_2 + V'dx_5 + V''dx_6;$$

en introduisant dans cette équation v_1, v_2, au lieu de x_1, x_2, les quantités V_1, V_2, V', V'', deviennent des fonctions de v_1, v_2, x_3, x_4, x_5, x_6. A l'aide de l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre à quatre variables, on donnera à l'expression précédente, la forme

$$V_1dv_1 + V_2dv_2 + V'dx_5 + V''dx_6 = W_1dw_1 + W_2dw_2 + W_3dw_3,$$

d'où

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 \ldots + X_6dx_6 = W_1dw_1 + W_2dw_2 + W_3dw_3,$$

et ainsi de suite. Continuant ainsi, après avoir intégré d'abord une équation différentielle ordinaire du premier ordre à deux variables, ensuite successivement des équations différentielles partielles du premier ordre à 3, 4,... n variables, on obtiendra enfin par l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre à $n+1$ variables, les n équations demandées. Puisque d'après le premier procédé décrit ci-dessus, une équation différentielle partielle du premier ordre à $k+1$ variables, exige l'intégration de $2k-1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre à $2k$ variables, il est visible que par ce second procédé on a besoin d'intégrer autant de systèmes d'équations différentielles ordinaires à autant de variables que par le premier. Lorsque m des quantités x_1, x_2,... x_{2n} s'évanouissent, on peut aussi commencer par l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre à $n+2$ variables.

Sur quelques questions relatives à la théorie des Courbes;

PAR AUGUSTE **MIQUEL**,

Régent de Mathématiques à Nantua.

I.

Lorsque deux cercles matériels sont mobiles autour de leurs centres, si la somme de leurs rayons r et r', est égale à la distance constante k de leurs centres, les cercles peuvent tourner ensemble sans que la circonférence de l'un glisse sur la circonférence de l'autre; et alors les vitesses de rotation sont dans le rapport inverse de celui des rayons.

Cela posé, nous dirons que deux courbes en général sont *syntrépentes* (*), quand elles peuvent tourner simultanément autour de chacune des extrémités O et O′ (fig. 3), d'une distance OO′ constante que nous appellerons k, sans jamais cesser d'être tangentes entre elles, et sans qu'il y ait glissement; c'est-à-dire, de manière que les deux arcs des deux courbes HM, HM′, qui passent dans le même espace de temps par le point H de contact (point qui peut d'ailleurs être variable de position, mais toujours sur la même droite OO′), soient constamment égaux entre eux. Et il est facile de voir que quand deux courbes satisfont à cette condition pour deux points O, O′, relatifs à chacune d'elles,

1°. La somme des rayons vecteurs OM, O′M′, des points correspondants M et M′, est constante (et égale à k);

2°. Les angles formés par ces rayons vecteurs avec les tangentes menées aux points M et M′, sont toujours égaux deux à deux.

(*) de συντρέπειν, tourner ensemble.

Pour exprimer analytiquement ces deux caractères que nous prendrons désormais pour définition des syntrépentes, désignons par $\omega = \varphi(\rho)$ et $\omega = \psi(\rho)$ les équations polaires des deux courbes rapportées aux points O et O$'$ pris respectivement pour origines. D'après ce qui vient d'être dit, en posant

$$\mathrm{OM} = \rho, \quad \mathrm{OM}' = \rho', \quad \mathrm{MOX} = \omega, \quad \mathrm{M'O'X} = \omega',$$

on aura

$$\frac{\rho d\omega}{d\rho} = \frac{\rho' d\omega'}{d\rho'},$$

ou bien

$$\rho\varphi'(\rho) = \rho'\psi'(\rho') :$$

ce qui, en observant que $\rho + \rho' = k$, remplaçant en conséquence ρ par $(k - \rho')$, et supprimant dans le résultat l'accent de la variable ρ, revient à

$$\rho\psi'(\rho) = (k - \rho)\,\varphi'(k - \rho).$$

Cette équation entre deux fonctions peut donner lieu à deux questions principales : la première est de déterminer l'une des fonctions lorsqu'on connaît l'autre ; la seconde est de déterminer les deux fonctions en supposant qu'elles doivent satisfaire en même temps, et à l'équation obtenue, et à une condition particulière donnée. Je vais m'occuper de la première question.

II.

Une courbe étant donnée, soit proposé de lui trouver une syntrépente par rapport à une droite OO$'$. Soit $\omega = \varphi(\rho)$ l'équation de la courbe rapportée au point O ; en représentant par $\psi(\rho)$ la fonction correspondante à la courbe cherchée rapportée au point O$'$, on aura, d'après ce qui a été dit,

$$\psi'(\rho) = \frac{k - \rho}{\rho}\,\varphi'(k - \rho);$$

et l'on pourra trouver la fonction $\psi(\rho)$ toutes les fois qu'on saura intégrer $\frac{k-\rho}{\rho}\,\varphi'(k - \rho)$. Ainsi l'équation de la courbe cherchée peut être représentée par

$$\omega = \int \frac{k-\rho}{\rho} \varphi'(k - \rho)\, d\rho + \text{const.}$$

La constante arbitraire semblerait indiquer qu'il y a plusieurs courbes qui satisfont à l'énoncé pour une même valeur de k; mais il est facile de voir qu'elle ne donne en réalité que les diverses positions d'une même courbe. On peut donc la supprimer, en ayant soin de faire correspondre deux positions convenables de la courbe donnée et de la courbe cherchée.

Soit pour exemple à déterminer la syntrépente d'une ellipse tournant autour d'un de ses foyers pris pour centre de rotation. Son équation est

$$\rho = a + \frac{c\rho \cos \omega - c^2}{a},$$

qui revient à

$$\omega = \arccos \frac{a\rho - b^2}{c\rho},$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(\rho) = \frac{d\omega}{d\rho} = -\frac{b}{\rho\sqrt{-b^2 + 2a\rho - \rho^2}}.$$

Par conséquent,

$$\varphi'(k - \rho) = -\frac{b}{(k-\rho)\sqrt{-b^2 + 2a(k-\rho) - (k-\rho)^2}};$$

et par suite, on aura pour équation de la courbe cherchée :

$$\omega = \int \frac{(k-\rho)\,\varphi'(k-\rho)}{\rho}\, d\rho = -\int \frac{b}{\rho\sqrt{c^2 - (a-k+\rho)^2}}\, d\rho.$$

On pourrait déterminer la valeur de cette intégrale en commençant par la rendre rationnelle au moyen des procédés ordinaires; mais on peut l'obtenir plus simplement et sous une forme plus commode. Pour cela, observons que, d'après ce qui précède, on a évidemment

$$\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{-b^2 + 2a\rho - \rho^2}} = -\frac{1}{b} \arccos \frac{a\rho - b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}\,.\,\rho},$$

et que pour passer de cette intégrale à la suivante,

$$\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{c^2 - (a - k + \rho)^2}},$$

il suffit de changer a en $(k - a)$, et b^2 en $(k - a)^2 - c^2$. Opérant donc ce changement, et multipliant par $-b$, on trouve facilement

$$\omega = \frac{b}{\sqrt{(k-a)^2 - c^2}} \text{arc cos} \frac{(k-a)\rho - (k-a)^2 + c^2}{c\rho},$$

équation qui détermine, pour la même ellipse, une infinité de syntrépentes différentes, correspondant aux diverses valeurs attribuées à k.

Par exemple, en faisant (fig. 4),

$$k = 2a,$$

on a une ellipse égale à la première, comme il est d'ailleurs facile de le prévoir *à priori*.

J'appellerai *isotrépente* une courbe qui, comme l'ellipse, aura pour syntrépente une courbe égale à elle-même.

Quant à l'équation générale des syntrépentes de l'ellipse, elle représente une famille de courbes faciles à construire pour chaque valeur de k, en observant que $\text{arc cos} \frac{(k-a)\rho - (k-a)^2 + c^2}{c\rho}$ représente l'arc correspondant à un rayon vecteur quelconque d'une ellipse dont le grand axe serait $2(k - a)$ et l'excentricité $2c$. En désignant cet arc par ω_1 et $\frac{b}{\sqrt{(k-a)^2 - c^2}}$ par m, l'équation des syntrépentes de l'ellipse se réduira à

$$\omega = m\omega_1.$$

III.

Une courbe étant donnée, on peut se proposer, comme cas particulier de la théorie précédente, de lui trouver une syntrépente dont tous ses points décrivent des droites parallèles entre elles. Pour cela il faut supposer $k = \infty$ dans l'équation générale des syntrépentes de la proposée, après avoir fait préalablement,

$$\rho = k - x \quad \text{et} \quad \omega = \frac{y}{k},$$

hypothèses qui rendent ρ infiniment grand et ω infiniment petit, et ramènent la courbe cherchée à des coordonnées rectangulaires.

Prenant pour exemple de cette tranformation l'équation générale des syntrépentes de l'ellipse, trouvée plus haut, on obtient

$$y = b \operatorname{arc}.\cos.\frac{a-x}{c},$$

ou

$$x = a - c.\cos\frac{y}{b},$$

ou enfin, en changeant de coordonnées,

$$x = c.\cos\frac{y}{b},$$

équation d'une *sinusoïde*.

IV.

Pour en revenir aux syntrépentes en général, soient MN et RS (fig. 5), deux courbes syntrépentes par rapport aux centres O et O'. Considérons deux autres courbes, R'S' et M'N', la première syntrépente de MN, la seconde syntrépente de M'N'. Soient O'' et O''' les centres de rotation de ces nouvelles courbes, situés sur la droite OO', et soit H le point de contact commun de toutes les courbes. Il résulte de ces hypothèses que la courbe MN peut tourner simultanément avec la courbe RS sans cesser de lui être tangente, et sans qu'il y ait glissement entre ces courbes; qu'en même temps la courbe R'S' peut tourner en remplissant les mêmes conditions par rapport à la courbe MN, et qu'il en est de même de la courbe M'N' par rapport à RS. Il suit de là nécessairement que les courbes M'N', R'S', peuvent tourner simultanément sans cesser d'être tangentes, et sans qu'il y ait entre elles glissement; et qu'on peut en dire de même des courbes S'R' et SR. Donc les courbes M'N' et R'S' sont syntrépentes par rapport à la distance O'''O'', en même temps que les courbes RS et R'S' sont syntrépentes par rapport à la distance O'O'' (*). On peut donc conclure généralement de ce qui vient d'être dit :

Que, si deux courbes sont syntrépentes entre elles, chacune des syntrépentes de la première sera syntrépente de chacune des syntrépentes de la seconde; et que deux quelconques des syntrépentes de l'une d'elles seront intérieurement syntrépentes entre elles.

V.

Cherchons encore, pour terminer, l'équation générale des courbes isotrépentes. Soit

$$\omega = \varphi(\rho)$$

l'équation d'une pareille courbe. On aura, d'après le n° I,

$$\rho\varphi'(\rho) = (k - \rho)\,\varphi'(k - \rho),$$

représentant toujours une quantité arbitraire, mais qui reste la même pour une même courbe. Faisons

$$\rho\varphi'(\rho) = \mathrm{F}(\rho);$$

$(k - \rho)\,\varphi'(k - \rho)$ deviendra $\mathrm{F}(k - \rho)$; et l'on aura

$$\mathrm{F}(\rho) = \mathrm{F}(k - \rho). \qquad (1)$$

$\mathrm{F}(\rho)$ est donc une fonction symétrique de ρ et de $(k - \rho)$, fonction

(*) Dans ce dernier cas, la distance des centres O', O'', est constamment égale, non à la somme, mais à la différence des rayons qui passent par le point de contact. Pour ne pas confondre, nous dirons que les courbes R'S' et RS sont syntrépentes *intérieurement*.

que nous représenterons simplement par F. On aura ainsi

$$\varphi'(\rho) = \frac{F}{\rho};$$

et par suite, l'équation des courbes isotrépentes sera

$$\omega = \int \frac{F}{\rho}\, d\rho + \text{const.}$$

A l'aide de cette équation on pourra trouver autant de courbes isotrépentes qu'on voudra, en prenant pour F une fonction symétrique quelconque de ρ et de $k - \rho$.

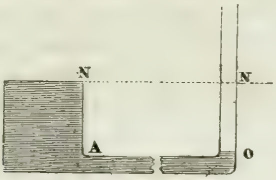
L'équation polaire de l'ellipse peut se ramener à cette forme, en y faisant $k = 2a$; car elle revient à

$$\omega = -\int \frac{\frac{b}{\sqrt{-b^2 + \rho(2a - \rho)}}}{\rho}\, d\rho.$$

Sur la Théorie des oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite;

PAR ANATOLE DE CALIGNY.

1. Je suppose que du fond d'un réservoir à niveau constant N, on dérive horizontalement un tuyau de conduite à section constante, dont l'extrémité opposée se relève verticalement. Le tuyau horizontal est d'abord plein d'eau en repos jusqu'à la partie inférieure O de la portion verticale indéfiniment prolongée que je nommerai *tuyau d'ascension*: de ce point O partira l'oscillation que nous allons considérer. Le réservoir est d'ailleurs à niveau constant : je fais d'abord abstraction des résistances passives, frottements, etc.; je suppose le tuyau de conduite très long par rapport à la hauteur du niveau constant et du tuyau d'ascension. J'admets le parallélisme des tranches.



On sait qu'en vertu de la vitesse acquise depuis le point de départ jusqu'à la hauteur du niveau du réservoir, l'eau montera au-dessus de ce niveau. Commençons par déterminer d'une manière élémentaire l'équation des forces vives du système.

2. Il est évident que dans ce genre d'oscillation, comme dans les siphons, plus la colonne immobile au moment du départ sera longue,

plus la vitesse moyenne sera petite. Cette colonne étant très longue par hypothèse, la vitesse sera très petite. La pression du réservoir sur l'origine A du tuyau sera sensiblement constante et égale à la hauteur AN du niveau du réservoir au-dessus de l'origine. La force motrice, au moment du départ de la colonne oscillante sera mesurée par la hauteur ON du niveau du réservoir au-dessus du point O; mais elle ira sans cesse en diminuant en vertu de la pression résistante qui dans chaque élément du temps sera la hauteur d'eau pénétrée au-dessus du point de départ dans le tuyau vertical. Le diamètre du tuyau étant constant, je n'ai point à m'en occuper.

3. Au moment où l'eau arrivera à une hauteur donnée, la quantité de travail, développé depuis le point de départ, sera le produit du chemin parcouru, par la hauteur du réservoir au-dessus de ce point de départ, moins le produit de ce même chemin par une certaine pression résistante moyenne entre zéro et la hauteur effective de l'eau déjà pénétrée au-dessus du point de départ O; cette moyenne est la moitié de la hauteur effective. Pour le voir, il suffit suivant un mode de démonstration connu, de diviser cette hauteur en portions moindres que toute quantité donnée, et de remarquer que la pression résistante augmente comme les éléments d'un triangle dont la base est cette même hauteur effective.

Si donc nous appelons H la hauteur ON du réservoir au-dessus du point de départ, h la hauteur effective obtenue par la colonne au-dessus de ce point de départ au moment que l'on considère, la quantité de travail moteur, moins la quantité de travail résistant développé jusqu'au même instant, sera représentée par

$$\mathrm{H}h - h \times \tfrac{1}{2} h = h \times \tfrac{1}{2}(2\mathrm{H} - h).$$

Considérons maintenant une droite double de H; partageons-la en deux segments h et $2\mathrm{H} - h$. L'expression que nous venons de trouver est le produit d'un des segments de cette droite par la moitié de l'autre segment. Quand la hauteur atteinte est double de la hauteur H, la force vive trouvée est zéro et la colonne s'arrête. Sur cette hauteur 2H comme diamètre décrivons un demi-cercle. Le produit des deux segments considérés de ce diamètre, sera égal au carré de l'ordonnée correspondante du cercle. La force vive, que je définis égale à la différence des quantités de travail moteur et résistant développées avant l'époque que l'on considère, variera donc comme les carrés des ordonnées du demi-cercle. Il nous sera plus commode de dire qu'elle varie comme les cercles de la sphère du même diamètre, qui sont comme les carrés de ces mêmes ordonnées. J'emploie la définition de la force vive adoptée par M. Coriolis, parce qu'elle simplifie mes démonstrations.

4. La colonne liquide en mouvement étant supposée très longue et par conséquent d'une masse sensiblement constante, le carré de la vitesse variera comme les cercles de la sphère, et la vitesse elle-même, comme les ordonnées du grand cercle. Il est entendu qu'il ne s'agit pas tant ici d'avoir des valeurs absolues que d'en connaître l'ordre. Ces valeurs sont très faciles à déterminer dans tous les cas. Les vitesses dépendent de la longueur de la colonne oscillante; la force vive dépend du chemin parcouru et de la hauteur du niveau du réservoir au-dessus du point de départ, quand on fait abstraction des résistances passives. Il suffit pour s'en rendre compte, dans le cas d'une masse variable à laquelle on ne pourrait appliquer l'équation des forces vives, de bien saisir le cas où nous avons supposé la pression motrice constante sur l'origine à cause de la longueur de la colonne. L'inertie de la longue colonne horizontale, immobile au moment du départ, influe sur la vitesse moyenne jusqu'à ce que l'eau atteigne une hauteur donnée; mais cette hauteur étant une fois atteinte, l'inertie de cette longue colonne se trouve n'avoir pas changé la somme des forces vives accumulées le long du chemin. Voyez Carnot, rapport sur Manoury Dectot.

5. Il est cependant intéressant d'étudier le mode d'action des pressions dans les deux cas extrêmes; celui dont il a été question où la colonne immobile au moment du départ est très longue et celui où elle est très petite. Dans le premier cas nous avons deux choses à considérer, 1°. la pression venant immédiatement de la pesanteur, considérée soit comme résistance, soit comme puissance; 2°. la pression hydraulique de la colonne en mouvement dans le tuyau horizontal

en dessous de la colonne verticale. Quand la masse en mouvement n'a qu'une très petite vitesse; et c'est le cas d'une colonne très longue, la pression résistante provenant du poids de la colonne du tuyau d'ascension diffère très peu du poids effectif de cette colonne dans chaque élément du temps. Sa vitesse étant très petite, sa force vive ne la ferait monter que d'une très petite quantité si la force vive de la longue colonne qui pousse en arrière ne surmontait pas sa pression résistante. Ainsi, quand la colonne s'est élevée au-dessus du niveau, il faut admettre que la pression au point O est plus grande que la hauteur de ce niveau au-dessus de ce point; cette conséquence est confirmée par l'expérience suivante. Je pratique sur le tuyau de conduite, auprès du tuyau vertical, un orifice d'un diamètre petit relativement à celui de ce tuyau. Par cet orifice qui est en mince paroi, sort un jet d'eau qui sans être soutenu par des parois latérales, s'élève à de grandes hauteurs au-dessus du réservoir, avec la colonne oscillante. J'ai donné les détails du phénomène dans un autre mémoire, où je l'applique à des objets d'utilité publique.

6. Quand on établit l'équation des forces vives de ce système, il faut bien prendre garde que la pression sensiblement constante est celle du réservoir sur l'origine du tuyau et non sur l'extrémité O, point de départ de la colonne oscillante. Si vous fermez cette extrémité et que vous l'ouvriez après un certain temps de repos, même en faisant abstraction de toute espèce de résistances passives, la pression du réservoir sur cette extrémité est très peu de chose dans les premiers instants du mouvement. La force motrice est d'abord employée à vaincre l'inertie de la colonne. Les détails de l'expérience précédente éclaircissent ces principes, le jet d'eau vertical oscillant dans l'air libre, suit la colonne du tuyau d'ascension. Quand on ferme l'extrémité O, on a un jet d'eau ordinaire, qui cesse au moment où l'on ouvre cette extrémité, et ne se relève qu'avec la colonne oscillante. La pression sur le point O croît comme la hauteur de la colonne au-dessus de ce point, abstraction faite du jet d'eau.

7. Je suppose maintenant que la longueur de la colonne immobile au moment du départ et l'inertie de l'eau du réservoir soient négligées: un des facteurs de la force vive, la masse, croîtra comme un des seg-

ments d'une ligne droite; l'autre diminuera donc comme l'autre segment ou comme les ordonnées d'un triangle, n° 3. Ce que les hydrauliciens nomment la *hauteur due à la vitesse*, serait au premier instant la hauteur du niveau du réservoir au-dessus du point du départ. Nous venons de voir qu'elle diminue comme les ordonnées d'un triangle. D'après le théorème de Bernouilli, la pression dans le mouvement permanent est la hauteur du réservoir moins la *hauteur due à la vitesse*. Sans donner plus de détails sur ce cas du mouvement oscillatoire, à cause de l'inertie de l'eau du réservoir que j'ai négligée, je conclus que dans le cas d'une colonne immobile au moment du départ, très courte, la pression moyenne supportée par les parois du tuyau d'ascension est bien moindre que dans le cas où cette même colonne était très longue. Je ne fais d'ailleurs cette observation que relativement à quelques phénomènes particuliers.

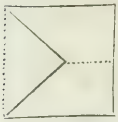
Entre ces deux cas extrêmes, celui où l'on néglige l'inertie des masses au moment du départ et celui où cette inertie est très grande à cause de la longueur de la colonne, se trouveront compris tous les cas de la pratique.

Quant à la pression dans le tuyau horizontal, elle dépend essentiellement des phénomènes de la pression hydraulique de la colonne en mouvement.

8. Nous savons déjà que la force vive varie comme les cercles d'une sphère, mais on verra combien il est commode de concevoir qu'elle varie comme les sections d'un système de figures terminées par des plans. Je vais d'abord donner une idée de ces transformations.

Il est facile de voir que les sections de la sphère varient comme celles d'un solide qui ressemble à une espèce de sablier formé par deux cubes dont on aurait ôté intérieurement deux pyramides quadrangulaires ayant chacune pour base une face d'un cube. Je prouve, par la simple transposition d'une pyramide, qu'elle varie aussi comme les éléments d'un solide assez élégant qui ressemble à la hache à double tranchant des anciens.

Coupez par la moitié les deux cubes, dont je parlais il y a un instant et formez-en deux prismes triangulaires dont la hauteur est double de celle d'un cube; placez-les face à face, de manière à ce qu'ils n'en forment qu'un de même hauteur, à base double. Retranchez-en deux pyramides quadrangulaires équivalentes à celles que j'avais retranchées des deux cubes pour avoir mon espèce de sablier. Ces pyramides retranchées ainsi sont opposées par la base au lieu de l'être par le sommet, et vous aurez le polyèdre dont je parle; une projection est composée de deux trapèzes, l'autre est un triangle rectangle et isoscèle. On peut lui donner une forme plus élégante, sans changer l'ordre de la variation des éléments. Chacune des moitiés symétriques peut être formée elle-même de quatre polyèdres symétriques; une projection est un hexagone à angles rentrants; l'autre est un losange. Mais il est inutile ici de le considérer sous cette forme; retranchons de l'autre forme deux pyramides triangulaires, plaçons-les (sans changer les distances de leurs sections à la base commune aux deux moitiés du polyèdre), sur les prismes qui restent, et nous retrouverons une figure formée par le reste de deux cubes dont on a ôté deux pyramides quadrangulaires.



En faisant varier l'angle des tranchants de cette espèce de hache, on ne changera pas l'ordre des variations des sections et le polyèdre sera équivalent à un ellipsoïde de révolution donné.

L'espèce de sablier, formé par la révolution d'un triangle rectangle et isoscèle autour d'un axe passant par le sommet de l'angle droit et parallèle à l'hypoténuse, est équivalent à une sphère, et ses sections normales à l'axe, sont équivalentes aux cercles de la sphère. Quand le triangle isoscèle n'a pas d'angle droit, il engendre une espèce de sablier, égal en volume à un ellipsoïde de révolution et les sections normales à l'axe sont équivalentes à celles de cet ellipsoïde.

Lorsqu'un trapèze, segment d'un triangle rectangle et isoscèle, tourne autour d'un axe, passant par son angle aigu et parallèle à la hauteur, il engendre un solide équivalent à un segment de sphère à deux bases, dont une est un grand cercle. Quand il tourne autour de la plus petite de ses deux bases parallèles, il engendre un solide équivalent à un segment de sphère à une base (sans que les sections varient de la même manière). La hauteur de ce segment est égale à celle du premier segment que j'avais considéré, etc.

Ces théorèmes et quelques autres sont très commodes dans le genre de recherches dont je m'occupe. Les démonstrations sont si simples, que je crois devoir les omettre.

9. En supposant le tuyau de conduite très large relativement à l'amplitude de l'oscillation, les théorèmes établis précédemment suffiraient à la rigueur pour déterminer le travail des résistances passives, proportionnelles aux premières et aux secondes puissances des vitesses, et les intégrales seraient fournies par l'expression du volume de la sphère, et par celle de l'aire du cercle. Mais je vais considérer les autres cas où le frottement est très puissant.

Commençons par étudier le mouvement d'une longue colonne liquide dans un tuyau horizontal croisé avec un tuyau d'ascension rectiligne, vertical, indéfiniment prolongé. En faisant d'abord abstraction des résistances passives, on trouverait que les forces vives varieraient comme les cercles d'une demi-sphère, à partir de l'époque où la colonne horizontale pénètre dans le tuyau d'ascension. Il suffit pour s'en rendre compte de voir qu'à partir de l'époque où l'eau de ma colonne oscillante, n^{os} 1 — 5, était de niveau dans le tuyau et dans le réservoir, les choses se passaient comme si ce réservoir n'existant plus, on avait eu simplement une colonne liquide dans un tuyau horizontal. On suppose les résistances passives indépendantes des pressions.

Nous connaissons ce que les hydrauliciens nomment le *coefficient du frottement proportionnel au carré de la vitesse moyenne dans le mouvement permanent*. Commençons par établir les formules du mouvement dont il s'agit comme si nous n'avions à tenir compte que de ce même *coefficient*.

11. Nous savons quelle serait la quantité de force vive suffisante pour qu'une colonne parvînt à une hauteur donnée, s'il n'y avait pas de résistance passive. Nous connaissons la loi de la variation des forces vives, et par suite quelle serait la quantité de travail nécessaire pour faire atteindre à l'eau la hauteur donnée dans l'hypothèse des résistances, en supposant cette quantité de travail fournie par un piston; mais il n'en est plus ainsi quand nous voulons substituer à ce piston fictif un surcroît de force vive, parce que ce surcroît de force vive occasionnerait lui-même un surcroît de frottement et ainsi de suite.

La quantité de force vive nécessaire pour suppléer à l'action de ce piston et faire monter la colonne à une hauteur donnée est donc exprimée par la somme des termes d'une série convergente.

D'après la définition de la force vive, n° 3, à un instant quelconque, la force vive doit être égale à la somme des quantités de travail de la pesanteur et de travail des résistances passives qui restent à vaincre. Le premier surcroît de force vive varie donc comme les volumes des segments d'une demi-sphère (n° 9).

12. Cette demi-sphère varie elle-même de sections comme un prisme triangulaire dont on ôte une pyramide quadrangulaire (n° 8). Les volumes des segmens du prisme triangulaire, considérés à partir de l'arète supérieure, varient comme leurs sections triangulaires ou comme les carrés des hauteurs de ces sections. Le solide dont les sections normales à sa hauteur varient comme les carrés des hauteurs dont il s'agit, est le cône ou la pyramide. Mais nous avons aussi à considérer les segments de la pyramide retranchée du prisme n° 8. Le volume de ces segments varie comme les cubes des hauteurs dont il s'agit : nous avons donc à trouver l'expression du volume du corps dont les sections normales à sa hauteur varient comme les cubes des distances au sommet. Cette expression est les trois quarts de celle du volume de la pyramide : je n'en donne pas la démonstration, qui se trouve dans tous les éléments de statique.

Nous savons donc déterminer le second surcroît de force vive nécessaire pour que la colonne atteigne une hauteur donnée, ou le second terme de la série. Si je veux déterminer les termes suivants pour l'expression desquels je pourrais me contenter en général d'avoir une approximation très grossière, je trouve des solides dont les sections varient comme les puissances quatrièmes, cinquièmes, etc., des distances au sommet, et j'approche de la vérité autant que je le désire. Il est entendu que les sections de chaque solide varieront comme une même puissance des hauteurs dont il s'agit.

Cependant je ne pousserai pas plus loin pour le moment cette approximation, parce que je n'ai pas de démonstrations élémentaires aussi simples pour déterminer les volumes des corps dont l'ensemble forme chaque terme de la série. Je me contente de dire que je peux trouver leurs volumes d'une manière assez approchée, par la géométrie élémentaire.

14. On a déjà vu combien il est utile de savoir que les sections de la demi-sphère varient comme celles d'un polyèdre dont une des projections est un trapèze, l'autre étant un triangle rectangle et isoscèle; on en va voir de nouveaux exemples.

Considérons toujours, comme nous venons de le faire, le mouvement d'une longue colonne d'eau dans un tuyau horizontal croisé avec un tuyau d'ascension. Proposons-nous de déterminer la forme générale de la courbe ayant pour ordonnées les forces vives à chaque hauteur obtenue par la colonne; nous savons que, s'il n'y avait pas de résistances passives, les ordonnées de cette courbe varieraient comme les sections d'une demi-sphère. La pression résistante de la pesanteur dans chaque élément du chemin parcouru, augmente avec la hauteur variable; mais les résistances passives diminuent quand la hauteur augmente, puisque la vitesse de la colonne diminue. Or, la force vive doit varier comme la somme des quantités de travail de la pesanteur et des résistances qui restent à vaincre. La véritable courbe des forces vives se rétrécit donc plus rapidement vers le sommet qu'une courbe de même hauteur dont les ordonnées varieraient comme les sections d'une demi-sphère.

15. La transformation précédente de la demi-sphère est très commode pour faire embrasser la marche des résultats. C'est un prisme triangulaire qui s'allonge graduellement vers son arète supérieure, n° 8, d'autant plus que l'on s'approche plus de cette arète. D'après le numéro précédent, la partie supérieure se raccourcit plus ou moins dans la forme modifiée en vertu des résistances passives.

16. Ces remarques sont immédiatement applicables; je suppose qu'on coupe le tuyau d'ascension à une certaine hauteur au-dessous de la limite que l'eau peut atteindre; la colonne versera par cette section : mais par la raison même que l'eau s'élèvera moins haut, il en sortira une plus grande quantité en vertu du principe des forces vives. Cette augmentation est accompagnée d'une augmentation du chemin parcouru par les frottements. Il s'agit de savoir si, dans le cas où le tuyau n'était pas coupé, la quantité de travail des frottements, pour ce qui restait de chemin à parcourir, était considérable relativement au reste

du travail des frottements, afin de déterminer la limite de la quantité dont ce versement peut en faire varier la somme totale. Or cela nous est donné immédiatement par la forme de la courbe des forces vives. On voit que plus le frottement est grand, plus la courbe se rétrécit rapidement vers le sommet et plus la portion rétrécie est petite relativement à la portion comprise au-dessous de la section de versement, en supposant d'ailleurs que le rapport de la hauteur de cette section, à la hauteur effective, dans le tuyau indéfiniment prolongé, soit toujours le même. Mais dans tous les cas, si l'on coupait le tuyau d'ascension très près du long tuyau horizontal, le chemin parcouru par le frottement serait considérablement augmenté. Le produit de l'eau versée par la hauteur du versement serait considérablement diminué. Je fais abstraction pour le moment de la force vive perdue en vertu de la vitesse de l'eau sortie ; je suppose la colonne horizontale très longue par rapport à la colonne partielle sortie. D'ailleurs on peut supposer le tuyau évasé par le sommet, afin de négliger cette vitesse.

17. Je vais maintenant considérer une question qui semble d'abord différente : soit une colonne d'eau en mouvement dans un siphon dont les deux branches verticales se terminent à la même hauteur et dont une est assez évasée pour qu'on puisse négliger la perte de force vive provenant du versement ; je suppose ce siphon complétement rempli d'eau, en mouvement vers la branche évasée, au premier instant que l'on considère ; cela correspond au cas où une colonne oscillante du n° 1 rentre dans le réservoir de pression, après avoir déjà atteint dans sa descente le niveau de ce réservoir.

A mesure qu'en vertu de la vitesse (acquise par hypothèse d'une manière quelconque), la colonne liquide se transporte dans le sens du mouvement, l'eau baisse dans la branche non évasée. L'excès de hauteur de l'eau dans la branche évasée au sommet, augmente de plus en plus, quoique la hauteur n'augmente pas dans cette branche; cela revient au cas examiné dans les numéros précédents, où, dans un tuyau vertical indéfiniment prolongé, plus la colonne montait, plus la pression résistante augmentait ; la résistance passive et le chemin qu'elle parcourait étaient les mêmes.

18. Dans tous les cas étudiés aux numéros précédens, on doit chercher l'influence de la longueur de la colonne sur la perte de force

vive au versement, quand l'évasement n'est point parfait. Il faut une quantité donnée de force vive pour qu'une hauteur donnée soit atteinte et qu'un certain versement soit effectué ; si un des deux facteurs, la masse, est très considérable, le produit de l'eau versée par la moyenne des carrés des vitesses sera bien moindre que si c'est l'autre facteur de la force vive qui est grand.

19. J'ai considéré la manière dont se dépense la force vive, en la supposant acquise d'une manière quelconque, jusqu'au moment où elle arrive à un tuyau d'ascension croisé avec un tuyau horizontal. Cela revenait au cas où une colonne oscillante étant arrivée au niveau du réservoir de pression, comme je l'ai dit n° 1, l'eau montait ensuite au-dessus de ce niveau en vertu de la vitesse acquise. Je reprends maintenant le cas de la figure de ce n° 1, afin de considérer le mode d'accumulation des forces vives, depuis le point de départ O jusqu'au niveau N, en tenant compte des frottements, supposés sensiblement indépendants des pressions et proportionnels aux forces vives, ou au produit du carré de la vitesse moyenne dans chaque élément du temps, par la longueur de la portion de tuyau remplie dans ce même élément. Il est entendu que c'est la seule espèce de frottement dont je m'occupe spécialement dans ce mémoire.

20. Nous savons que, s'il n'y avait pas de résistances passives, la force vive varierait comme les cercles d'une demi-sphère depuis l'origine du mouvement jusqu'à ce que l'eau arrive au niveau N; mais dans l'hypothèse de ces résistances, il y aura une tangente à cette courbe des forces vives, parallèle à l'axe du tuyau, avant que la colonne ait atteint le niveau. En effet, il y a une certaine époque où ce qui reste de force motrice est moins puissant que le frottement; le maximum de la vitesse a donc lieu avant que la colonne ait atteint le niveau.

Je suppose que l'on connaisse la force vive à l'époque où ce niveau est atteint; on sait, par hypothèse, pour une force vive donnée, quelle serait la hauteur d'une colonne d'eau, de même diamètre que le tuyau, dont le poids serait égal à la résistance du frottement, quand l'eau arrive au niveau. On peut la nommer *colonne du frottement au niveau*. La force vive étant déjà diminuée à cette époque, nous savons que, pour trouver successivement les ordonnées inférieures, il faut tenir compte de la quantité de force vive absorbée par le frottement

28..

entre deux ordonnées, et qui dépend elle-même de la grandeur de ces ordonnées. La surface de la portion de courbe, ainsi déterminée par approximation, entre le niveau et une profondeur donnée, servira à déterminer le travail du frottement dans cet intervalle; mais au lieu de faire ce calcul, on pourra souvent se contenter du moyen suivant, en négligeant la portion de travail du frottement, provenant du renflement de la courbe entre le niveau et le point, dont il s'agit d'abord de déterminer la profondeur, où la colonne arrive avec une force vive égale à ce qu'elle redeviendra quand cette même colonne atteindra le niveau. Cette omission sera tout à l'avantage de la conséquence que je veux établir à la fin de ce mémoire sur la nature des frottements dans les mouvements oscillatoires.

Étant donnée la hauteur de la *colonne du frottement au niveau*, on peut déterminer immédiatement une profondeur moindre que la profondeur cherchée; il suffit d'en prendre une double de la hauteur de cette colonne du frottement. En effet, si à cette profondeur on a déjà la même force vive qu'au niveau, la résistance moyenne depuis ce point jusqu'au niveau, sera plus grande que le poids de cette *colonne du frottement* et la force motrice *moyenne* sera égale à ce même poids dans le même intervalle. A cause du renflement de la courbe du frottement, nous savons que la profondeur cherchée est plus grande.

21. Considérons maintenant la loi de la variation des forces vives, depuis le point de départ O jusqu'à ce que la colonne parvienne au point dont je viens de parler; puisque la résistance passive augmente avec la vitesse, dans les premiers instants, où cependant la force motrice est la plus considérable, la résistance passive est d'abord très peu de chose relativement à cette force motrice. La courbe des forces vives effectives est tangente au point de départ à la courbe des forces vives dépouillées de l'effet des résistances : plus la colonne augmente de vitesse jusqu'au maximum de force vive, plus la résistance augmente, tandis qu'au contraire la force motrice diminue, plus par conséquent, la forme de la courbe des forces vives effectives s'éloigne de celle de l'autre.

22. On voit, n° 20, que, depuis la profondeur où la force vive atteint la valeur qu'elle conservera en arrivant au niveau, jusqu'à

ce niveau, après avoir été augmentée dans l'intervalle, il y a une différence plus ou moins grande entre l'aire de la portion de la courbe effective et celle d'une portion de courbe dont les ordonnées varieraient comme les cercles d'une demi-sphère, depuis le point de départ de l'oscillation jusqu'au niveau. Enfin, depuis le point de départ jusqu'à ce que la colonne atteigne la profondeur dont il s'agit, la courbe est plus renflée à son origine, que si ses ordonnées augmentaient aussi rapidement que les cercles d'une demi-sphère, dont le grand cercle serait la force vive effective, au moment où la colonne atteint le niveau nº 21. La courbe des forces vives effectives, pour l'époque où la colonne oscillante n'a pas atteint le niveau, recouvre donc tout entière une courbe, dont l'ordonnée maximum représenterait la force vive au moment où la colonne atteint le niveau et dont les autres ordonnées varieraient depuis le point de départ comme les cercles d'une demi-sphère; son aire est plus grande que celle de cette dernière courbe.

23. Après avoir donné une idée assez exacte des véritables formes de la courbe des forces vives, depuis le point de départ jusqu'au niveau et depuis ce niveau jusqu'à la limite de hauteur obtenue par la colonne, je vais donner une formule empirique exprimant les rapports entre chaque hauteur obtenue au-dessus du niveau et la profondeur de chaque point de départ. Au moyen de quelques représentations géométriques des lois de l'oscillation de l'eau dans les tuyaux de conduite, on saisira facilement l'ensemble des résultats de mes expériences et des lois qui en résultent.

Soit x le rapport entre la hauteur obtenue au-dessus du niveau N et la profondeur du point de départ au-dessous; D le diamètre constant du tuyau; L la longueur ON du chemin parcouru dans le tuyau par la colonne oscillante depuis le point de départ jusqu'au niveau du réservoir; F un coefficient constant déterminé par l'expérience. Je suis parvenu à une formule empirique de la forme suivante, pour des tuyaux dont les dimensions étaient à peu près des moyennes entre les dimensions analogues des tuyaux dans lesquels Bossut a fait des expériences sur le mouvement uniforme de l'eau.

Je trouve $x = \frac{1}{\frac{L}{D}F + 1}$: le tuyau d'ascension est rectiligne et indéfiniment prolongé ; le tuyau horizontal est plein d'eau immobile au moment du départ. Il s'agit de voir par quelle hypothèse on peut représenter dans l'espace le principe sur lequel reposerait cette formule en supposant le coefficient du frottement constant.

24. Je suppose que malgré le frottement, la courbe des forces vives, depuis le point de départ jusqu'au niveau, varie à peu près comme les cercles d'une demi-sphère, je veux dire d'une figure dont les sections normales à l'axe varient selon les mêmes rapports. Je suppose que depuis l'époque où la colonne a dépassé le niveau, la force vive varie aussi à peu près comme les cercles d'une demi-sphère, appuyée sur le même grand cercle au niveau. La hauteur de ce dernier solide est la hauteur effective obtenue au-dessus du niveau par la colonne oscillante. Ces hypothèses ne sont pas admissibles quand le travail du frottement est considérable par rapport à celui de la pesanteur, mais il nous sera très commode de nous en servir provisoirement. Il résulte d'ailleurs des n^{os} 14 et 22, qu'il y a, jusqu'à un certain point, compensation dans les deux erreurs provenant de ces hypothèses, dont nous savons déterminer le degré d'exactitude et sur lesquelles nous reviendrons.

25. Il est facile de calculer le travail nécessaire pour conserver les vitesses de la colonne oscillante comme s'il n'y avait pas de frottement, *en surmontant ce frottement au moyen d'un piston* : il suffit de connaître ce que j'ai nommé, n° 20, *la colonne du frottement* pour une force vive donnée. Si par exemple on la connaît pour la force vive qui aura lieu dans cette hypothèse à l'époque où la colonne atteindra le niveau, il suffira d'en prendre les $\frac{2}{3}$, puisque la moyenne des cercles d'une sphère est les $\frac{2}{3}$ du grand cercle, et de multiplier ce résultat par le chemin parcouru, depuis le point de départ jusqu'à ce que la colonne atteigne le niveau. Nous ne cherchons d'abord la quantité de travail résistant surmonté par le piston (toujours supposé sans frottement) que dans ces limites.

26. Si nous supprimons ce piston, par la raison même que les vitesses sont diminuées par le frottement, ce frottement est moindre.

Or, si nous supposons (n° 24) que la force vive, tout en étant moindre, varie encore à peu près selon les mêmes rapports que dans le cas du piston ; le rapport du travail effectif du frottement au travail du frottement que l'on aurait à vaincre avec le piston, sera exprimé par le rapport de la force vive effective de la colonne arrivant au niveau, à la force vive dépouillée de l'effet de la résistance passive, puisque le chemin est le même, et que le rapport des forces vives moyennes, auxquelles les résistances passives sont proportionnelles, est exprimé par celui dont il s'agit.

27. Soit x' le rapport de la force vive effective de la colonne arrivant au niveau à la force vive dépouillée de l'effet du frottement ; F′ le rapport du travail effectif du frottement à la différence du travail moteur et du travail résistant de la pesanteur, depuis le point de départ jusqu'à ce que la colonne atteigne le niveau ; d'après la définition de la force vive adoptée par M. Coriolis, j'ai l'équation

$$x' = 1 - F'.$$

Soit F″ le travail surmonté par le piston, ce qui a été dit au n° précédent se traduit ainsi :

$$x'F'' = F', \quad \text{d'où} \quad x' = 1 - x'F'' = \frac{1}{F'' + 1}.$$

Or, je dis que dans l'hypothèse admise n° 24, ce serait aussi le rapport entre la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir et la profondeur ON du point de départ au-dessous.

28. Le rapport du travail du frottement, dans l'hypothèse de la conservation des vitesses au moyen du piston, au travail de la pesanteur, dans un tuyau d'un diamètre constant donné, est en raison de l'amplitude théorique de l'oscillation. En effet, le travail de la pesanteur est le produit de la force motrice moyenne par le chemin parcouru depuis le point de départ jusqu'au niveau. Le travail du frottement, dans l'hypothèse dont il s'agit, est comme le volume de la demi-sphère ayant pour rayon ce chemin parcouru. Ainsi le travail de la pesanteur est comme le carré du chemin parcouru, et celui du frottement comme son cube. Le rapport du travail du frottement au travail de la pesanteur est donc, dans l'hypothèse du frottement pro-

portionnel aux carrés des vitesses, en raison du chemin parcouru depuis le point de départ O jusqu'au niveau N.

Si l'on considère le travail résistant de la pesanteur au-dessus du niveau, on trouvera le même rapport entre le travail du frottement que surmonterait le piston pour conserver les vitesses au-dessus du niveau, et ce travail résistant de la pesanteur; je veux dire que ce rapport sera proportionnel au chemin parcouru depuis le niveau jusqu'à la limite de l'amplitude.

29. Mais si pour conserver ces vitesses, on veut substituer un surcroît de force vive à l'action du piston, ce surcroît sera plus grand nécessairement que le travail surmonté par le piston, d'après les définitions dont je me sers. S'il lui était seulement égal, il occasionnerait lui-même un surcroît de frottement qui exigerait un second surcroît de force vive, et ainsi de suite. On trouverait une série convergente, n° 12.

Mais si chaque surcroît de force vive variait au-dessus du niveau, selon les mêmes rapports que les cercles d'une demi-sphère, en un mot si la force vive totale variait selon ces mêmes rapports, n° 24, chaque surcroît serait un terme de progression géométrique, dont la raison serait le rapport du premier terme, ou premier surcroît de force vive, à la force vive suffisante s'il n'y avait pas de frottement pour que la hauteur voulue fût atteinte.

Soit $\frac{1}{m}$ le rapport du premier surcroît à cette force vive, suffisante s'il n'y avait pas de frottement, quand la colonne arrive au niveau. Dans les hypothèses précédentes, cette dernière force vive devrait être multipliée par la somme des termes de la progression

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}\cdots\cdots$$

30. Je suppose, comme je l'ai dit (n° 27), le rapport de la hauteur effective au-dessus du niveau à la profondeur ON du point de départ égal à $\frac{1}{F''+1}$. Le rapport du travail qu'un piston aurait à surmonter, pour conserver les vitesses, comme s'il n'y avait pas de frottement, au travail résistant de la pesanteur (l'un et l'autre considérées dans le système depuis que la colonne a atteint le niveau) serait $\frac{F''}{F''+1}$ (n° 28).

La force vive effective, suffisante, s'il n'y avait pas de frottement, pour que la hauteur $\frac{1}{F''+1}$ fût obtenue, serait $\frac{1}{(F''+1)^2}$ de la force vive dépouillée de l'effet du frottement, au-dessous du niveau, puisqu'elle serait comme le grand cercle du rayon $\frac{1}{F''+1}$ égal à la hauteur effective. Je suppose que l'on remplace la quantité de travail du piston, considérée depuis que le niveau est atteint, par une quantité égale de force vive, celle-ci sera $\frac{F''}{F''+1}$ de celle qui vient d'être trouvée. Dans l'hypothèse du n° 29, l'expression $\frac{1}{(F''+1)^2}$ devra être multipliée par la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, on aura $\frac{1}{m}=\frac{F''}{F''+1}$, cette somme sera $\frac{1}{1-\frac{F''}{F''+1}}$ ou $F''+1$. Multipliant par cette somme l'expression suffisante quand la colonne arrive au niveau, s'il n'y avait pas de frottement, on a $\frac{1}{(F''+1)^2}\times(F''+1)=\frac{1}{F''+1}$ de la force vive dépouillée de l'effet du frottement au-dessous du niveau. Or c'est précisément l'expression que nous avons trouvée pour la force vive effective au niveau, n° 27, ce qu'il fallait démontrer. Le rapport entre la hauteur obtenue au-dessus du niveau et la profondeur du point de départ est donc $\frac{1}{F''+1}$.

D'après ce que nous avons dit, n° 28, la quantité F'' est en raison de $\frac{L}{D}$; nous avons donc pour sa valeur une expression de la forme $\frac{L}{D}F$, ce qui nous conduit à l'équation $x=\frac{1}{\frac{L}{D}F+1}$, formule empirique du (n° 23).

31. L'hypothèse sur laquelle repose cette formule, n° 24, n'est pas rigoureuse, mais la discussion précédente n'en est pas moins utile : elle fait voir, d'une manière élémentaire, par quelle représentation géométrique dans l'espace, on peut exprimer l'hypothèse dont il faudrait partir pour parvenir à cette formule, en supposant le coefficient constant.

32. Avant d'aller plus loin, je vais montrer, dans l'hypothèse du

n° 24, au moyen des expériences connues sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite, quelle serait la valeur du coefficient, supposé constant F, si l'ordre des vitesses des filets considérés les uns par rapport aux autres et la nature du frottement qui résulte de cet ordre, étaient les mêmes dans les mouvemens oscillatoires que dans les mouvemens permanens, pour une même vitesse moyenne dans le même élément de l'espace et du temps. Les vitesses moyennes étant supposées un peu grandes, je me propose d'établir une formule au moyen de laquelle je puisse prouver que le frottement est moindre dans les mouvements oscillatoires que dans les mouvements permanents. Je dois donc me servir d'une des expériences employées dans les Tables de M. de Prony, qui donneraient le moindre coefficient du frottement. Cette expérience réunissant d'ailleurs toutes les conditions nécessaires, a été faite par Bossut, dans un tuyau de 2 pouces de diamètre et de 180 pieds de long, qui absorbait par son frottement les $\frac{27}{28}$ de la hauteur du réservoir au-dessus de l'orifice de sortie, c'est-à-dire 27 fois la *hauteur due* à la vitesse moyenne de sortie.

Soit $L = 10$ pieds, le tuyau d'ascension ayant par hypothèse le même diamètre que la conduite. D'après ce qui a été dit au commencement du Mémoire, n° 7, s'il n'y avait pas de résistance passive et que l'on fit abstraction de l'inertie de la colonne immobile dans les tuyaux au moment du départ, comme si l'on avait un simple tuyau rectiligne enfoncé verticalement dans un réservoir, ce que les hydrauliciens nomment dans tous les cas *la hauteur due* à la vitesse de la colonne, à l'instant où elle atteindrait le niveau, serait $\frac{1}{2}$ L ou 5 pieds; mais si le tuyau a, depuis le réservoir jusqu'à ce point, où il coupe la ligne de niveau, une longueur développée de 180 pieds, la force vive étant cependant, n° 4, la même quand la colonne arrive à ce point, *la hauteur due* à la vitesse ne sera que $\frac{1}{18}$ de 5 pieds. La longueur du tuyau, relativement à l'amplitude de l'oscillation, étant assez grande pour que la vitesse varie à peu près comme si la masse oscillante était constante, la moyenne *des hauteurs dues* aux vitesses variables sera les $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{18}$ pieds, puisque la moyenne des cercles d'une sphère est les $\frac{2}{3}$ du grand cercle. Elle sera donc $\frac{5}{27}$ pieds. Or, la pression moyenne qui serait nécessaire, dans l'hypothèse du frottement, pour maintenir, au moyen d'un piston, ces vitesses comme s'il n'y avait pas de frottement, diffère peu du poids d'une colonne d'eau de même diamètre que le tuyau et ayant 27 fois la hauteur moyenne $\frac{5}{27}$ pieds que je viens de trouver. Cette résistance moyenne serait donc exprimée par 5 pieds. La force motrice moyenne, depuis le point de départ de l'oscillation jusqu'à ce que la colonne arrive au niveau, est la moitié de la hauteur 10 pieds que le niveau du réservoir avait au-dessus de la tête de la colonne ascendante au moment du départ. Dans ce cas où $\frac{L}{D} = 60$, le travail résistant, surmonté par le piston, se trouve précisément égal au travail de la pesanteur; on a donc $\frac{L}{D} F = 1$ et $x = \frac{1}{2}$.

35. Quand le tuyau d'ascension n'a pas le même diamètre que le tuyau de conduite, il faut en tenir compte; mais je néglige pour un moment la résistance passive du tuyau d'ascension. Le travail de la pesanteur, depuis le point de départ jusqu'au niveau, est comme la section du tuyau d'ascension ON. La force vive moyenne serait donc proportionnelle à cette section s'il n'y avait aucune résistance passive; mais par cette raison le travail qui serait nécessaire pour maintenir avec un piston les vitesses, comme s'il n'y avait pas de frottement proportionnel aux forces vives dans le tuyau de conduite horizontal, serait, en supposant ce tuyau de conduite très long, et faisant pour un moment abstraction du frottement dans le tuyau d'ascension, comme le produit de cette section par le chemin parcouru dans la longue conduite, ou comme le carré de cette section. Le rapport de ce travail au travail de la pesanteur est donc en raison du rapport de la section du tuyau d'ascension à celle de la conduite. Il suffit, pour en tenir compte, de convenir que L est, dans tous les cas où le tuyau d'ascencension est rectiligne, le *chemin parcouru* dans le long tuyau de

conduite, depuis l'époque du départ jusqu'à ce que la colonne coupe le niveau. Nous retrouvons ainsi, pour le cas où le frottement dans le tuyau d'ascension est négligeable, la formule $x = \frac{1}{\frac{L}{D} F + 1}$.

Quand le frottement dans le tuyau d'ascension ne pourra pas être négligé, on en tiendra compte en le supposant, comme à l'ordinaire, en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres. Pour le cas des tuyaux de zinc d'un petit diamètre, assez difficile à déterminer exactement dans l'intérieur, il serait inutile de chercher rigoureusement quelle longueur moyenne de tuyau d'ascension on doit prendre pour y avoir égard dans les calculs. Je prendrai tout simplement la moitié de la longueur qui se trouvera remplie en définitive par l'amplitude effective totale. Cette longueur m'était immédiatement donnée par l'expérience, mais il serait facile, si cela était nécessaire, de la trouver par quelques opérations numériques. Il est entendu qu'il s'agit du cas où le tuyau commence à se rétrécir au point de départ O de l'oscillation, le diamètre rétréci étant d'ailleurs constant. Dans la formule, on multipliera F par un coefficient relatif au rapport des diamètres et à cette moyenne comparée à la longueur de la conduite.

54. Dans ce qui précède, j'ai seulement tenu compte du rapport du chemin parcouru au diamètre, sans faire entrer dans la formule la longueur du tuyau de conduite. Si ce tuyau est plus long, les surfaces frottantes sont, il est vrai, plus grandes, mais la moyenne des carrés des vitesses est moindre, comme nous l'avons vu, de façon que cela fait compensation relativement au calcul des frottements. Il se présente même un résultat assez intéressant : quand il y a un coude brusque, un rétrécissement, ou une cause quelconque assez sensible de déviations brusques de filets, plus le tuyau de conduite est long, plus la colonne oscillante s'élève haut dans un même tuyau d'ascension, pour une même profondeur ON du point de départ. Le seul cas où il serait désavantageux d'allonger outre mesure le tuyau de conduite, est celui où, par suite de cet allongement, relativement à une hauteur donnée du réservoir au-dessus du point de

départ de l'oscillation, la moyenne des carrés des vitesses serait au-dessous de la valeur pour laquelle il serait trop inexact de ne compter que sur le terme de la résistance proportionnelle aux carrés des vitesses. Plus le tuyau est long, plus la vitesse avec laquelle se fait un choc est petite dans la limite du chemin parcouru; cela explique le fait dont il s'agit. On tiendra compte en général de ce choc ou des déviations, quand la colonne sera sensiblement constante, en multipliant F par l'unité plus un coefficient en raison inverse du rapport de la longueur au diamètre.

35. Les résultats de la formule précédente sont conformes à un grand nombre d'expériences que j'ai faites sur des tuyaux de zinc, dont le diamètre intérieur était à peu près une moyenne entre les diamètres 16 lignes et 2 pouces, employés par Bossut, dans ses expériences sur le mouvement permanent. Les longueurs variant de 100 à 150 pieds, peuvent être aussi regardées comme des moyennes entre les longueurs employées par Bossut. Je ne donnerai pas ici le détail de ces expériences; on les trouvera dans des recueils spéciaux. Je dirai seulement que la formule empirique $x = \frac{1}{\frac{L}{D}F + 1}$ ne donne pas des résultats trop forts, au moins depuis $\frac{L}{D} = 10$ jusqu'à $\frac{L}{D} = 90$.

Dans le cas où le tuyau d'ascension avait un pouce de diamètre, depuis le point de départ O jusqu'à la limite de l'oscillation, on en tenait compte, n° 33. Les résultats de la formule ainsi modifiée n'étaient pas supérieurs à ceux des expériences, je néglige par prudence des quantités qui peuvent provenir de quelque erreur dans la mesure des diamètres. Dans le calcul qui va suivre, je vais seulement m'occuper des cas où l'on peut négliger le frottement dans le tuyau d'ascension.

36. Quand la longueur du chemin parcouru dans le grand tuyau de conduite est petite relativement à son diamètre, les hypothèses du n° 24, sur lesquelles on peut établir la formule, diffèrent peu de la vérité, parce que les formes des courbes ayant pour ordonnées les forces vives, diffèrent peu de ce qu'admettent ces hypothèses, d'ailleurs les erreurs se compensent jusqu'à un certain point n° 24.

37. Ce qui précède nous apprend déjà que pour les amplitudes peu considérables par rapport au diamètre, la somme des coefficients des résistances passives n'est pas sensiblement plus grande que le coefficient du frottement proportionnel aux carrés des vitesses moyennes ordinaires dans les mouvements permanents. Or, cette somme de résistances comprend non-seulement ici ce genre de frottement, mais un genre de résistances particulier aux petites vitesses qui succèdent à l'état de repos de la colonne oscillante. J'ai traité cette question dans un Mémoire qui commence le t. XIII des *Annales des Mines*. La somme des résistances comprend aussi celle d'un coude à angle droit vif, d'un diamètre moindre que la conduite, et quelques autres causes de perte de force vive, dont je parlerai dans un autre mémoire. Le coefficient de la résistance du frottement proprement dit est donc moindre que dans le mouvement permanent, pour mes oscillations d'une petite amplitude, puisqu'il suffit pour expliquer le déchet.

Quant à celles dont les amplitudes sont grandes, la compensation, dont j'ai parlé au numéro précédent, n'est plus évidente au-delà de certaines limites. Mais quand $\frac{L}{D}$ ne surpasse pas 60, les méthodes exposées n° 12 et n° 27, suffiraient pour faire voir que dans mes oscillations le coefficient du frottement dont il s'agit, ne peut pas être sensiblement plus grand que dans les mouvements permanents.

On peut approcher de la vérité d'une manière plus rigoureuse et très simple. Puisque les sections de la demi-sphère varient comme celles d'un prisme triangulaire qui s'allongent à mesure que l'on s'éloigne du centre n° 15, le volume d'un segment quelconque de sphère à une base, est plus grand que le produit de cette base par la moitié de la hauteur de ce segment. Cela est vrai, à plus forte raison, n° 22, pour les segmens de la figure modifiée, au-dessous du niveau N en vertu du frottement. La profondeur au-dessous du niveau N, à laquelle la colonne ascendante arrivera, quand elle aura la quantité de force vive, qu'elle doit conserver en coupant ce niveau, est plus grande, n° 20, que le double de la hauteur de la *colonne du frottement au niveau*. La surface d'un trapèze dont la grande base sera L, pour un système d'un diamètre constant, la petite base le double de la hauteur de la *colonne du frottement au niveau*, et dont la hauteur sera simplement celle de cette dernière colonne, exprimera l'intégrale du travail du frottement au-dessous du niveau, en négligeant les portions de courbes retranchées par les lignes droites. Pour mes grandes oscillations, cette aire sera plus grande que celle que j'ai fait entrer dans l'équation du n° 27. En refaisant le calcul du travail du frottement au-dessous du niveau avec cette correction et en calculant le travail au-dessus du niveau par la méthode d'intégration exposée n° 12, on trouve que le frottement proportionnel aux forces vives, suffit pour expliquer assez sensiblement le déchet, malgré les renflements des courbes que j'ai négligés. Le coefficient de ce frottement est donc moindre dans toutes ces oscillations que dans les mouvements permanents, puisqu'il y a encore d'autres résistances.

On conçoit qu'au-delà d'une certaine limite d'amplitude, le chemin parcouru, avec une vitesse presque permanente, aux environs du maximum, étant considérable, la nature du frottement doit se rapprocher plus ou moins de celle du frottement dans les mouvements permanents.

Je me contente ici de donner d'une manière succincte un moyen, reposant sur la Géométrie élémentaire, d'établir une loi immédiatement applicable au calcul de l'effet des machines hydrauliques, dont un grand nombre ne sont autre chose, selon moi, que des colonnes oscillantes plus ou moins gênées par des obstacles.

Je n'entrerai pas ici dans le détail des formes plus ou moins intéressantes sous lesquelles se présentent les lois des oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite. Je dirai seulement que l'étude de la forme de la courbe des forces vives ne doit pas simplement être considérée comme un moyen d'intégration. On en va voir deux exemples.

38. Quand il y a des résistances passives, on ne peut plus supposer comme le fait avec raison M. Navier pour le cas où il n'y a pas de frottement, qu'il faut commencer à rétrécir le tuyau d'ascension à la hauteur du niveau, pour obtenir, avec un diamètre rétréci donné, le maximum de hauteur. Ce fait s'explique tout naturellement; dans

le cas des résistances, le maximum de la force vive a lieu avant que la colonne atteigne le niveau. La recherche de la profondeur à laquelle on doit commencer ce rétrécissement sera utile dans les applications.

Je suppose que la portion du tuyau d'ascension, comprise entre le point de départ et le niveau, soit plus grosse que la conduite, ou que, sans être plus grosse, elle soit inclinée, afin que la force motrice moyenne ait une plus grande longueur de chemin à parcourir. S'il n'y a pas de frottement, la force vive emmagasinée au moment où la colonne atteint le niveau est plus grande, ce chemin étant ainsi augmenté. Mais quand il y a du frottement, après être parvenue à une certaine distance du niveau, la colonne ne peut plus que diminuer de force vive. Ainsi, passé ce point, au lieu d'augmenter le chemin parcouru jusqu'au niveau, il faut le diminuer autant que possible, en ayant égard aux contractions de veines fluides, etc. et au frottement du tuyau d'ascension, afin d'obtenir dans ce tuyau le maximum de hauteur.

39. Parmi les formes sous lesquelles se présentent dans mes expériences les lois du frottement, il y en a plusieurs faciles à expliquer par ce qui précède et cependant assez intéressantes, par exemple :

1°. Quand tout le tuyau d'ascension est rétréci à partir du point O, l'eau partant du repos, et par conséquent *sans coup de bélier primitif*, s'élève plus haut que dans le tuyau d'ascension non rétréci, ou si on la fait verser à la même hauteur dans les deux cas, elle redescend plus bas dans le tuyau d'ascension rétréci que dans l'autre. On suppose le tuyau de conduite très long, afin de négliger autant que possible le frottement du tuyau d'ascension et la perte de force vive résultant du changement de diamètre. On conçoit d'ailleurs que le diamètre du tuyau d'ascension ne doit pas être excessivement petit.

2°. Quand on commence à rétrécir le tuyau d'ascension à la hauteur du niveau, il y a un coup de bélier et l'eau monte évidemment plus haut que dans le tuyau d'ascension non rétréci au niveau; or à cause de la modification du travail des frottements, le produit de la quantité d'eau soulevée au-dessus du niveau, par la hauteur de son centre de gravité au-dessus de ce même niveau, est augmenté en vertu du rétrécissement, comme si le rétrécissement avait augmenté la force vive au lieu d'en détruire par une contraction quelconque, etc., etc.

40. Je ne m'arrêterai pas davantage sur ces détails relatifs à des machines particulières. Mon principal but est de faire voir que dans les mouvements oscillatoires d'une certaine amplitude et d'une certaine vitesse, le coefficient du frottement, proprement dit, est moindre que dans les mouvements permanents, qu'au moins il n'est jamais plus grand; aussi dans les expériences que j'ai faites aux bassins Saint-Victor sur de *rapides* oscillations dans les tuyaux rectilignes, j'ai trouvé le coefficient de la somme des résistances moindre que dans les expériences objet de ce Mémoire; mais je ne peux pas en donner ici le détail; elles sont d'une espèce toute particulière.

Les autres termes de la résistance des parois peuvent être déterminés par des méthodes élémentaires fournies aussi par la Géométrie. On les trouvera en partie, ainsi que mes recherches sur les siphons, dans les *Annales des Mines*, tome XIII. Je préviens que l'hypothèse de la conservation des vitesses au moyen d'un piston, ne pourrait pas servir *dans la pratique* à estimer le travail nécessaire pour cette conservation, comme je l'ai supposé ici seulement, pour simplifier des explications. On verra comment j'ai tiré parti des expériences de Dubuat et d'Eytelwein. Les expériences de Dubuat sur les siphons n'étaient peut-être pas faites assez en grand pour en conclure si le frottement est ou n'est pas influencé par les pressions; plusieurs de mes oscillations ont eu jusqu'à 5 et 6 mètres d'amplitude, et je n'ai rien vu qui ne soit conforme à l'opinion de Dubuat sur l'indépendance du frottement relativement aux pressions, confirmée aussi par les expériences de M. Leroy et de M. Gueymard sur le mouvement permanent dans des conduites en siphon.

Je suppose d'après cela que chaque tranche isolée, frappant par sa circonférence une couronne d'aspérités des parois, perde une quantité de force vive proportionnelle à celle qu'elle avait en arrivant au choc, la vitesse d'une couronne liquide étant *interceptée*, quant à sa composante immédiatement utile au transport de l'eau. Dans un mouvement permanent, chaque tranche qui arrive au point de versement d'un tuyau a frappé le même nombre d'aspérités, elle aura donc nécessité, pour conserver sa vitesse permanente, une quantité de travail proportionnelle au carré de cette vitesse. La *hauteur due* à la vitesse moyenne de sortie est donc, ce qui est conforme à l'expérience pour les vitesses ordinaires, la différence entre la hauteur du réservoir et une hauteur proportionnelle au carré de cette vitesse, en supposant le carré de la vitesse moyenne peu différent de la moyenne des carrés des vitesses.

Cependant, d'après divers auteurs, la résistance, proportionnelle au carré de la vitesse, provient de ce que le nombre de molécules est proportionnel à la vitesse, et de ce que la résistance de chaque molécule, relativement au choc ou à l'adhérence, est selon eux simplement proportionnelle à la promptitude de l'arrachement. Mais alors le travail de la résistance serait seulement proportionnel au produit de l'eau passée, par sa vitesse moyenne. Pour les oscillations d'une même colonne, dans le long tuyau de conduite, le travail du frottement à chaque oscillation serait comme le produit de l'amplitude par la vitesse moyenne. Or, si l'on conservait ces vitesses avec le piston, elles varieraient comme les ordonnées d'un cercle ayant l'amplitude pour diamètre. L'intégrale du travail de ce frottement serait donc comme l'aire de ce cercle, au lieu d'être comme le volume de la sphère du même diamètre; le travail de la pesanteur, n° 28, est aussi comme le carré de ce diamètre; le rapport de la hauteur effective au-dessus du niveau, à la profondeur ON du point de départ, quand on supprime l'hypothèse du piston, ne dépendrait donc pas de la grandeur de l'amplitude. J'ai fait voir par des considérations rationnelles dans mon premier Mémoire (*Annales des Mines*, tome XIII), que le coefficient du frottement doit augmenter, il est vrai, avec l'amplitude dans un même tuyau, mais seulement dans certaines limites. Mes expériences fournissent donc un nouveau moyen de décider la question. C'est bien des phénomènes du choc des fluides que dépend le terme de la résistance des parois, proportionnel aux carrés des vitesses des fluides dans les conduites, et ce sont les autres termes qui se trouvent expliqués par les divers phénomènes de l'adhérence. La colonne liquide est ainsi en vibration, même indépendamment des phénomènes découverts par M. Savart, et qui se retrouvent d'ailleurs, au moins jusqu'à un certain point, dans mon jet d'eau oscillant dans l'air libre.

Addition à une précédente Note relative à la résolution des équations numériques;

Par M. VINCENT,

Professeur au Collége royal de Saint-Louis.

I.

Dans un des précédents numéros de ce Journal (*tome* Ier, *page* 341), j'ai fait voir que le procédé de Lagrange pour la réduction des racines des équations en fraction continue, avait la propriété, indépendamment de toute opération préalable, de séparer les racines réelles inégales. Au reste, la proposition, ainsi énoncée, n'a besoin d'aucune démonstration; la seule chose qu'il fût véritablement nécessaire de prouver, c'est que les racines imaginaires ne sauraient introduire de variations permanentes dans les transformées successives : car cette circonstance, si elle pouvait se présenter dans la résolution d'une équation, exposerait le calculateur à *poursuivre* indéfiniment des racines qui n'existent pas.

Je crois avoir suffisamment établi dans l'endroit cité, que ce reproche fait à la méthode ne serait nullement fondé; mais il en est un autre que l'on pourrait plus justement lui adresser : c'est qu'elle suppose ou paraît supposer inégales toutes les racines réelles; et dès lors, si l'équation a des racines égales, comme l'existence de ces racines entraîne celle d'un pareil nombre de variations qu'il est impossible de séparer, on se trouve, ou du moins peut-on le craindre, dans le cas de douter éternellement si les racines que l'on poursuit sont réelles et égales, ou réelles et inégales mais jusque alors non séparées, ou même enfin imaginaires mais non encore exclues des limites qui leur permettent de communiquer des variations à l'équation et à ses transformées.

A la vérité encore, on peut se délivrer de cette crainte en commençant par décomposer le polynome en d'autres qui n'aient que des facteurs simples. Mais, obligé pour cela de recourir à la méthode ordinaire des racines égales, opération longue et pénible, dont la nature est d'élever continuellement l'ordre des chiffres auxquels le calcul donne lieu, on perd tout le bénéfice de la déduction si simple des transformées successives.

Frappé de cet inconvénient dont je ne me dissimulais pas la gravité, j'ai dû m'occuper de le détruire; et pour cela, j'ai cherché s'il ne serait pas possible d'assigner au nombre des transformées, une limite passé laquelle cessât toute incertitude sur la nature des racines. J'ai reconnu que la question se réduisait à obtenir une formule simple au moyen de laquelle on pût lire comme intuitivement sur l'équation donnée, une limite inférieure des racines réelles, *tant positives que négatives*, de l'équation aux carrés des différences de celles de la proposée.

Or, précisément, M. Cauchy a donné une pareille formule dans le 4e volume de ses *Exercices mathématiques* (*page* 121). Avant de la connaître, j'en avais de mon côté trouvé une, moins simple à la vérité, et moins avantageuse dans la pratique; toutefois, comme sa détermination est fondée sur des considérations que l'on regarde ordinairement comme plus élémentaires, attendu qu'elles sont entièrement indépendantes de la théorie des modules des expressions imaginaires qui n'est pas encore généralement admise, je me hasarderai à la présenter. Au surplus, il est bon de le remarquer, c'est bien moins de telle limite plus ou moins rapprochée qu'il s'agit véritablement ici, que de l'existence absolue d'une limite quelconque, pourvu seulement que l'on soit sûr qu'elle a pour valeur un nombre fini.

II.

Pour parvenir à la limite indiquée, nommons k la plus grande valeur absolue des coefficients de l'équation proposée, supposés entiers, celui du premier terme étant d'ailleurs l'unité; et soient, conformément aux notations ordinaires de la théorie des fonctions symétriques, S_1, S_2, S_3,..., les sommes successives des puissances semblables et entières des racines de l'équation, sommes que nous ne considérons toutefois que dans leur valeur absolue.

D'après la composition des équations qui déterminent ces sommes, on aura dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire en remplaçant, comme je le ferai dans tout ce qui suivra, chacun des coefficients par le plus grand d'entre eux et les affectant tous du même signe; on aura, dis-je, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &< k, \\ S_2 &< (k+1)^2 - 1, \\ S_3 &< (k+1)^3 - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

et en général, on démontre facilement que l'on a l'inégalité

$$S_p < (k + 1)^p - 1,$$

formule que l'on peut étendre à toute valeur entière et positive de p, aussi grande que l'on voudra, même supérieure à m, degré de l'équation, et à laquelle je substituerai pour plus de simplicité, la formule suivante

$$S_p < (k + 1)^p,$$

qui est vraie *à fortiori*.

Maintenant, en nommant S'_1, S'_2, S'_3,... les sommes des puissances 2^e, 4^e, 6^e,... des différences des racines, on a encore dans le cas le plus défavorable, d'après les équations qui déterminent leurs valeurs,

$$\begin{aligned} S'_1 &< (m + 1)(k + 1)^2, \\ S'_2 &< (m - 1 + 2^3)(k + 1)^4, \\ S'_3 &< (m - 1 + 2^5)(k + 1)^6, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et en général,

$$S'_q < (m - 1 + 2^{2q-1})(k + 1)^{2q}.$$

Cette formule est également susceptible de simplification; car on a toujours, *pourvu cependant que* m *soit* > 2, restriction qui est sans inconvénient,

$$m - 1 + 2^{2q-1} < (m + 1)^q.$$

En effet, soit $m = 3 + h$; il s'agit de prouver que

$$2 + h + \frac{1}{2}(4)^q < (4 + h)^q,$$

ce qui est vrai à la limite où $h = 0$, puisque l'on a

$$2 < \frac{1}{2}(4)^q,$$

et ce qui l'est *à fortiori* quand $h > 0$.

Par suite, la formule générale précédente devient

$$S'_q < (m + 1)^q (k + 1)^{2q};$$

et l'on en tire sans peine, en désignant par 1, P'_1, P'_2, $P'_3 \ldots$, les coefficients de l'équation aux carrés des différences,

$$\begin{aligned}
P'_1 &< (m + 1)(k + 2)^2,\\
P'_2 &< (m + 1)^2(k + 1)^4,\\
P'_3 &< (m + 1)^3(k + 1)^6,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P'_q &< (m + 1)^q(k + 1)^{2q}.
\end{aligned}$$

Cela posé, en représentant par n le degré de cette équation, ou faisant $n = \frac{1}{2} m(m - 1)$, on aura, pour la limite inférieure des racines, tant négatives que positives, de cette équation, la formule

$$\frac{P'_n}{P'_n + P'_t},$$

dans laquelle il faut prendre P'_n le plus petit possible, P'_t représentant d'ailleurs le plus grand de tous les coefficients précédents.

Or, d'une part, relativement à P'_n, si la forme de l'équation qui le donne ne permet pas de conclure immédiatement qu'il soit entier, cela résulte du moins de la composition connue de ce coefficient (*) ; et, sauf le cas de racines égales, il est au moins égal à 1.

Quant à la limite supérieure de P'_t, elle ne peut dépasser la plus grande valeur de P'_{n-1}, ou $(m+1)^{n-1}(k+1)^{2n-2}$, expression à laquelle on peut substituer sans inconvénient, la limite

$$P'_{n-1} < (m+1)^{n-1}(k+1)^{2n-2} - 1\,;$$

de sorte que l'on a

$$\frac{P'_n}{P'_n + P'_t} > \frac{1}{(m+1)^{n-1}(k+1)^{2n-2}}.$$

Les racines, tant positives que négatives, de l'équation aux carrés des différences, ont donc cette dernière fraction pour limite inférieure.

Le calcul précédent suppose égal à l'unité le coefficient du premier terme de l'équation proposée; dans le cas contraire, en nommant A le premier coefficient, la limite trouvée devra être remplacée par.. $\frac{1}{A^2(m+1)^{n-1}(k+1)^{2n-2}}$, k étant alors le plus grand des coefficients de la transformée que l'on obtiendrait en faisant $x = \frac{y}{A}$ pour faire disparaître le coefficient du premier terme.

Si l'on veut employer au lieu de la limite précédente, celle de M. Cauchy, dont j'ai parlé plus haut, il faudra substituer le nombre 4 au nombre $(m+1)$, ou prendre la fraction

$$\frac{1}{A^2[2(k+1)]^{4n-2}}\,;$$

et comme j'ai supposé $(m+1)$ au moins égal à 4, il s'ensuit

(*) Un terme de la forme $a^p b^p c^p \ldots$ qui se trouverait dans ce coefficient ou dans un autre, devra s'y trouver un nombre de fois égal à celui des permutations que l'on peut faire entre les lettres qui y entrent, ou un multiple de ce nombre de permutations; et cela suffit pour faire disparaître le dénominateur de la formule qui donne la somme des termes de cette forme, et par suite pour rendre entiers les coefficients de l'équation aux carrés des différences, quand ceux de la proposée le sont. Il en serait de même de toute autre équation dont les racines seraient des fonctions symétriques entières quelconques de celles de la proposée.

que la limite de M. Cauchy est plus approchée; et je l'emploierai de préférence. Au reste, comme je l'ai dit, le rapprochement de la limite n'est ici que d'une importance secondaire.

III.

Passons aux conséquences; et supposons que dans la résolution de l'équation en fraction continue, on ait poussé l'opération jusqu'à ce que, nommant p' et q' les dénominateurs de deux réduites consécutives (*Journal de Mathématiques, tome* I, *p.* 343 *et suiv.*), on ait

$$p'q' > A[2(k+1)]^{n-1},$$

ce qui est toujours possible, vu l'accroissement indéfini des termes successifs des réduites.

Alors, en nommant d'abord δ une des différences entre les racines réelles, on aura

$$\delta > \frac{1}{A[2(k+1)]^{n-1}} > \frac{1}{p'q'}.$$

Ainsi, en premier lieu, deux racines réelles différentes ne seront plus comprises entre les deux réduites consécutives (*ibidem*, p. 344).

Secondement, si $2\beta\sqrt{-1}$ est la différence de deux racines imaginaires conjuguées, on aura aussi, dans la même hypothèse,

$$2\beta > \frac{1}{A[2(k+1)]^{n-1}} > \frac{1}{p'q'}.$$

Ainsi encore, la condition nécessaire (*ibidem*, p. 345) pour que les deux racines imaginaires puissent donner lieu à deux variations, n'existera plus.

La conséquence théorique à tirer de ce résultat, est que si le calcul, poussé jusqu'à la limite indiquée, a conservé plusieurs variations, ces variations ne peuvent provenir que de l'existence d'un pareil nombre de racines égales.

Quant à la conséquence pratique, c'est que l'on peut, dans tous les cas, se dispenser du calcul préalable des racines égales, puisque, même quand il existe de pareilles racines dans l'équation, *la méthode* *des transformées,* loin de se trouver pour cela en défaut, *donne* au contraire, *non-seulement les valeurs des racines multiples*, comme celles des racines simples, *mais même leur degré de multiplicité.*

Mais allons plus loin, et tâchons de faire ressortir de cette nouvelle propriété, tous les avantages qui peuvent en rejaillir sur la méthode pratique, et contribuer à la simplifier.

La chose qui paraît le plus importer pour cela, est de voir comment on pourra étendre à ce cas des racines égales, l'application de la méthode de Newton, telle que nous l'avons employée aux pages 353 et suivantes du volume cité.

Or, en raisonnant comme nous l'avons fait en cet endroit, il est aisé de reconnaître que si, dans une transformée en y qui aurait, par exemple, *deux* racines égales, on fait $y = g + h$, et que l'on détermine par le tâtonnement, un ou plusieurs chiffres décimaux de la valeur de h, on parviendra sans difficulté à faire passer les deux variations de cette transformée, entre les trois premiers termes ordonnés suivant les puissances ascendantes de h.

Cela fait, on pourra mettre l'équation en h sous la forme

$$f''(g)h^2 + 2f'(g)\,h + 2f(g) + \frac{h^3}{3}\left[f'''(g) + f^{\text{IV}}(g)\frac{h}{4} + \ldots\right] = 0;$$

d'où, résolvant comme pour le second degré,

$$h = \frac{-f'(g) \pm \sqrt{[f'(g)]^2 - 2f(g).f''(g) - \frac{h^3}{3}f''(g)\,[f'''(g) + \ldots.]}}{f''(g)}.$$

Ici, en supposant que g soit une valeur suffisamment approchée de y, et par suite que h soit suffisamment petit, on pourra négliger sous le radical le cube et les puissances supérieures de cette inconnue. Il restera alors

$$h = \frac{-f'(g) \pm \sqrt{[f'(g)]^2 - 2.f(g).f''(g)}}{f''(g)};$$

et comme h doit avoir deux valeurs égales, il s'ensuit que l'on aura approximativement

$$[f'(g)]^2 - 2.f(g).f''(g) = 0;$$

c'est-à-dire autrement, que les trois premiers termes de l'équation formeront alors approximativement un carré parfait en h; d'où résultera pour cette quantité, la valeur positive

$$h = -\frac{f'(g)}{f''(g)}.$$

Ce résultat était facile à prévoir; et l'on peut évidemment le généraliser. C'est-à-dire, 1° que si une transformée qui a dépassé le point de séparation des racines, présente un nombre n de variations, elle a nécessairement n racines égales; et 2° que si l'on fait passer ces n variations aux $(n+1)$ premiers termes ordonnés suivant les puissances ascendantes, comme on le peut toujours par le même procédé, ces $(n+1)$ premiers termes formeront approximativement la quantité

$$\frac{\{f^{(n-1)}(g)+f^{(n)}(g).h\}^n}{1.2.3\ldots n\{f^{(n-1)}(g)\}^{n-1}};$$

d'où

$$h = -\frac{f^{(n-1)}g}{f^{(n)}g}.$$

Il y a néanmoins un inconvénient à considérer la question sous le point de vue précédent; car on a commis deux sortes d'erreurs, l'une en négligeant la puissance $(n+1)^e$ ainsi que les puissances supérieures; l'autre en considérant les $(n+1)$ premiers termes comme formant une puissance n^e parfaite; et dès lors, il devient difficile d'évaluer le degré de chaque approximation, ou le nombre de chiffres exacts de la valeur de h.

C'est pourquoi, aussitôt que l'on aura reconnu, par le moyen indiqué, l'égalité d'un nombre n de racines poursuivies, on substituera immédiatement à la dernière transformée, sa $(n-1)^e$ dérivée; et l'opération se trouvant ainsi ramenée à la recherche d'une racine simple, on pourra suivre le procédé du *numéro* 6, p. 352, qui reproduira alors, d'une manière plus rigoureuse, la valeur précédente de h.

Il nous semble que la méthode des transformées, ainsi modifiée et étendue, acquiert un degré de précision et de rigueur qui ne le cède plus à sa simplicité. Le seul reproche que l'on pût encore être tenté de lui faire, serait la petitesse des limites données plus haut, même de celle que nous avons empruntée à M. Cauchy, petitesse d'où résulterait, dans le cas de racines égales, un nombre fini à la vérité, mais toujours plus ou moins considérable de transformations nécessaires avant que l'on pût compter avec certitude sur la réalité de ces racines. Il pourrait donc rester quelques recherches à faire sous ce rapport : car les limites que nous avons employées sont considérablement exagérées en petitesse; mais de cette exagération même il résulte que le doute relatif à la nature des racines sera toujours résolu beaucoup plus tôt que la limite ne semble l'indiquer. Ce point de vue est du reste le seul sous lequel la méthode des transformées (nous ne disons pas la résolution des équations) nous paraisse désormais susceptible de perfectionnement. Nous nous bornerons à indiquer pour cela un moyen simple en théorie, et que l'on pourra employer quand l'importance de la question le méritera : c'est le calcul, au moyen des fonctions symétriques, du dernier terme de l'équation aux carrés des différences, et la division, par la racine carrée de ce dernier terme, du dénominateur de la limite de la plus petite différence.

Observons encore, en terminant, que pour pouvoir former de la petitesse de cette limite, une objection fondée contre la méthode des transformées, il faudrait commencer par prouver que les calculs préparatoires employés par toute autre méthode pour assigner *à priori* le nombre et les limites des racines réelles, sont moins longs et moins compliqués que ceux mêmes qu'exige la méthode des transformées avant que l'on ne soit parvenu au point de séparation des diverses sortes de racines. Mais c'est ce que l'on ne saurait faire; car les deux sortes de calculs tirent leur complication des mêmes causes : l'élévation du degré de l'équation, et la grandeur de ses coefficients. Il nous serait facile de faire voir au contraire, par de nombreux exemples, que c'est principalement sous le rapport même de la rapidité, que la méthode des transformées ne le cède à aucune autre. Au reste, nous en renvoyons tout le mérite à ses auteurs, MM. Budan et Fourier; le seul qu'il nous fût peut-être permis de revendiquer, serait d'en avoir mieux fixé les bases.

NOTE DE M. POINSOT

Sur une certaine démonstration du principe des vitesses virtuelles, qu'on trouve au chapitre III *du livre* Ier *de la Mécanique céleste.*

(On suppose que le lecteur a sous les yeux le passage dont il s'agit.)

L'équation

$$o = \Sigma . mS . \delta s + \Sigma . p . \delta f + \Sigma . R\delta r \ldots \quad (k) \text{ (page 39), t. I,}$$

est entièrement exacte, elle est même identique; elle a lieu aux différences finies, puisqu'elle n'est que la somme faite de toutes les équations relatives à chaque point du système, considéré dans le cas de l'équilibre, comme étant seul en équilibre en vertu de toutes les forces qui le sollicitent, c'est-à-dire, non-seulement de la force appliquée (mS), mais encore des forces de réaction (p) suivant les droites (f), et des résistances (R) normales aux surfaces fixes où il pourrait être obligé de se mouvoir.

Effaçons tout de suite les termes $\Sigma . R . \delta r$ qui ne font rien à la démonstration; et l'on aura simplement

$$o = \Sigma . mS . \delta s + \Sigma p \delta f,$$

qui est encore exacte, mais qui n'a plus lieu qu'aux différences infiniment petites, puisqu'on n'est en droit de compter comme nulles les vitesses virtuelles (δr), que dans le cas où les points décrivent sur les surfaces des arcs infiniment petits, auquel cas les vitesses virtuelles sont des sinus-verses d'arcs infiniment petits, et sont rigoureusement nulles. Mais, pour plus de clarté, supposons qu'il n'y ait point du tout de ces surfaces fixes, et que le système soit libre; la démonstration n'en doit pas moins réussir, puisqu'elle est générale.

On aura donc l'équation

$$o = \Sigma . mS . \delta s + \Sigma . p . \delta f,$$

qui sera identique et aura lieu aux différences quelconques, comme pour un seul point libre.

L'auteur remarque bien que si la liaison des parties du système consiste en ce que toutes les distances mutuelles f, f', f'', etc., soient *invariables*, on a séparément :

$$\Sigma . p . \delta f = o,$$

d'où l'on conclut

$$\Sigma . mS . \delta s = o,$$

c'est-à-dire que la somme des moments des *seules forces appliquées*, doit être nulle dans le cas de l'équilibre : ce qui est exact.

Mais il faut remarquer que cette équation n'a lieu qu'aux différences infiniment petites, car il n'est permis de compter comme nuls d'eux-mêmes tous les termes $p\delta f$, qu'autant qu'on dérange *infiniment peu* chaque droite (f). La différence des vitesses virtuelles des deux bouts de cette droite est le sinus-verse de l'angle que la droite fait sur elle-même en changeant de place ; et cet angle doit être infiniment petit pour que le sinus-verse soit regardé comme nul.

Mais tout ceci n'a point de difficulté ; il s'agit d'un système quelconque *variable de figure*, et il faut démontrer que dans l'équation,

$$o = \Sigma . mS . \delta s + \Sigma . p . \delta f,$$

on peut toujours supprimer $\Sigma . p . \delta f$, en assujétissant les variations à satisfaire aux équations de condition qui lient entre eux les points du système, et c'est là la grande difficulté.

D'abord j'observe que l'auteur n'a pas encore fait un seul pas vers la démonstration générale. Car démontrer que les termes $\Sigma . p . \delta f$ sont nuls d'eux-mêmes, ou démontrer que les termes $\Sigma . mS . \delta s$ sont nuls d'eux-mêmes, c'est identiquement la même chose ; je ne dis pas seulement que l'un soit une conséquence de l'autre, comme il paraît par l'équation ci-dessus, mais que c'est une seule et même chose, et qu'on n'arrivera pas plus vite à l'une qu'à l'autre.

En effet, les forces (p) dans les droites (f) ne sont autre chose (au signe près, ce qui ne fait rien ici), que les composantes des forces mêmes (mS) appliquées au système. Cela est manifeste, puisque l'auteur dit que chaque point est seul en équilibre, en vertu des forces appliquées et de ces forces de réaction (p) dirigées suivant les droites (f) qui aboutissent à ce point. Les forces (p) ne sont donc, au signe près, que les forces appliquées (mS) décomposées dans les droites f, f', f'', etc. Donc, tout ce que l'auteur va dire pour démontrer que $\Sigma.p.\delta f$ est nul vous pourrez l'appliquer, mot à mot, pour démontrer que $\Sigma.m\text{S}.\delta s$ est nul; donc l'auteur va prouver qu'on a toujours $\Sigma.m\text{S}.\delta s = 0$, dans l'équilibre de tout système, c'est-à-dire qu'il va prouver le principe des vitesses virtuelles, comme s'il commençait de s'en occuper.

Il s'agit maintenant d'examiner cette démonstration.

L'auteur suppose le système animé des seules forces p, p', p'', etc.; il en est le maître : il peut choisir ces forces-là, au lieu des forces appliquées mS, m'S$'$, etc., puisque les unes ne sont que les égales et contraires des autres, ou de leurs équivalentes.

Ensuite, il décompose les forces p, p', p'', etc. (qui, remarquez bien, agissent déjà dans les droites f, f', f'', etc.), en d'autres, dont les unes q, q', q'', etc., agissent *encore* dans les droites f, f', f'', etc., et se détruisent, dit-il, d'elles-mêmes, sans produire d'action sur les courbes décrites. Mais si elles se détruisent d'elles-mêmes sans produire d'action sur les courbes décrites, on pourrait donc ôter ces courbes ou ces canaux dans lesquels les points sont pour le moment renfermés, et ces points resteraient en équilibre en vertu des seules forces q, q', q'', etc. : mais, par hypothèse, ils sont aussi en équilibre en vertu des seules forces p, p', p'', etc., dirigées dans les mêmes droites; d'où il paraît que ces premières composantes q, q', q'', etc., sont encore les mêmes forces p, p', p'', etc., qu'il a d'abord considérées; que par conséquent, les secondes composantes T, T$'$, T$''$, etc., perpendiculaires, et les autres tangentielles aux courbes décrites, sont nulles d'elles-mêmes : de sorte que l'auteur n'aurait encore fait que changer le nom de ses forces, sans faire un seul pas vers la démonstration.

Mais pour voir la chose avec plus de clarté, suivons l'auteur plus loin. Accordons-lui que chaque force (p) est décomposée en une autre (q), une autre T, et une autre tangentielle. Accordons encore que toutes les forces tangentielles se détruisent d'elles-mêmes sur chaque point.

Alors le groupe des forces (p) *dirigées dans les droites* f, f', f'', etc., sera donc réduit au groupe des forces (q) *dirigées dans les mêmes droites*, et au groupe des forces (T) perpendiculaires aux courbes décrites; et l'on aura, comme l'auteur le suppose, l'équation

$$o = \Sigma(q - p)\delta f + \Sigma.T.\delta i, \qquad \text{(page 41)}$$

Mais actuellement, comment peut-il savoir que l'on a séparément l'équation

$$\Sigma.q\delta f = o?$$

Est-ce parce que les forces q, q', q'', etc., se font équilibre d'elles-mêmes sur le système? Mais la loi de l'équilibre des forces q, q', q'', etc., lui est aussi inconnue que la loi de l'équilibre des forces p, p', p'', etc. qui se font aussi équilibre, ou des forces appliquées mS, m'S', etc. qui se font aussi équilibre : l'équation $o = \Sigma.q.\delta f$ est donc le principe même des vitesses virtuelles qu'il cherche, et l'auteur paraît être dans le cercle vicieux.

Pour s'en convaincre, qu'on prenne ici l'exemple d'un système formé de quatre points liés ensemble par une seule équation donnée entre leurs distances mutuelles f, f', f'', etc. J'ai démontré ailleurs (*), que les forces p, p', p'', etc., qu'on suppose être en équilibre sur le système, sont nécessairement proportionnelles à de certaines fonctions tirées de l'équation dont il s'agit. D'autres forces quelconques q, q', q'', etc., qu'on imaginerait aussi en équilibre dans les mêmes droites, seraient donc exactement proportionnelles aux premières p, p', p'', etc. : Ainsi l'on ne peut avoir, pour poser l'équation $o = \Sigma q\delta f$, aucune raison qu'on ne l'ait également pour poser tout d'un coup $o = \Sigma p\delta f$, c'est-à-dire, l'équation même qu'on veut démontrer.

L'auteur, il est vrai, dit encore qu'on a $o = \Sigma.q.\delta f$, en vertu de

---

(*) Voyez notre *Statique*, 7e édition, page 435.

l'équation (k). Mais l'équation (k) n'est qu'une identité formée de toutes les équations relatives à chaque point, considéré comme seul en équilibre en vertu de toutes les forces qui le sollicitent. D'après cela, il supposerait donc que toutes les forces (q) ont, autour de chaque point, des résultantes nulles. Alors tout le groupe des forces q, q', q'', etc., dont il nous a parlé est parfaitement nul; il ne resterait donc enfin, à chaque point, que les forces perpendiculaires T, T', T'', etc.; il suppose donc que les forces p, p', p'', etc. peuvent se réduire à des forces perpendiculaires aux courbes décrites; 1° ce qu'on ne sait pas; 2° ce qui ne suffit pas pour l'équilibre, et par conséquent pour démontrer la loi de l'équilibre.

De quelque côté qu'on l'examine, on voit que cette démonstration est illusoire: on ne l'avait regardée jusqu'ici que comme obscure, et difficile à comprendre; elle avait un défaut plus grave, et qu'il était bon de découvrir, parce qu'il y a toujours quelque chose d'instructif dans la recherche d'une erreur qui a pu échapper à un grand géomètre.

Quant au principe des vitesses virtuelles, il est, comme on sait, très vrai, et bien établi sur d'autres preuves. Et j'observerai même à ce sujet, que c'est souvent cette certitude qu'on a *d'ailleurs* de la vérité d'un théorème, qui nous expose à en donner de fausses démonstrations. Comme on est rassuré d'avance sur le résultat, on marche avec moins de précaution, on prend facilement pour preuve ce qui ne prouve point, et pour différent ce qui est le même sous une autre forme. Il faut donc toujours se défier d'une démonstration nouvelle qu'on veut donner d'une vérité déjà bien connue et bien démontrée, surtout quand la nouvelle démonstration paraît plus simple et plus rapide: et même, si elle a été plus longue et plus laborieuse, il y a encore une illusion à craindre; c'est que la longueur et l'ennui du voyage font souvent croire qu'on doit être arrivé.

Sur une Propriété du Paraboloïde osculateur par son sommet en un point d'une surface du second degré;

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

Supposons deux surfaces dont les équations soient algébriques, et toutes deux du degré n.

Supposons que ces deux surfaces aient un point de contact; et soient rapportées l'une et l'autre;

1°. A ce point de contact, comme origine des coordonnées;

2°. A leur normale commune, comme axe des Z.

3°. Aux tangentes à leurs lignes de courbure, comme axes des X et des Y.

(Leurs lignes de courbure ayant à l'origine des coordonnées même direction.)

Les équations de ces surfaces étant $\varphi(x, y, z) = 0$ et $\psi(x, y, z) = 0$, devront être telles qu'elles soient satisfaites par $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et l'on devra avoir en même temps:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dxdy} = 0,$$

et aussi

$$\frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi}{dy} = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dxdy} = 0.$$

Si ensuite on établit que ces deux surfaces ont un contact du $n^{ième}$ ordre, les deux fonctions φ et ψ seront telles qu'en faisant $z = 0$ dans l'une et l'autre, on obtiendra la même fonction en x et y, que je désigne par $f(x, y)$.

Dès-lors, on conclut que toutes les surfaces du degré n et ayant en un point un contact de l'ordre n, se coupent suivant une courbe dont l'une des branches est plane et située dans leur plan tangent commun, et que l'équation de cette branche plane est $f(x, y) = 0$.

Appliquons ce qui précède à deux surfaces du deuxième degré.

Les équations des deux surfaces ζ et ζ_1 osculatrices l'une à l'autre, seront

$$\text{pour } \zeta \qquad ax^2 + by^2 + mz^2 + nxz + pyz + z = 0, \qquad (1)$$
$$\text{pour } \zeta_1 \qquad ax^2 + by^2 + Mz^2 + Nxz + Pyz + z = 0. \qquad (2)$$

Cherchons l'équation de la projection sur le plan des xy de la courbe, intersection des deux surfaces données.

Il faudra éliminer z entre les équations (1) et (2).

Ces équations sont satisfaites par $z=0$... (3) et $ax^2+by^2=0$... (4). Ainsi : on voit de suite que les équations (3) et (4) seront celles d'une courbe commune aux deux surfaces ζ et ζ_1, quels que soient les coefficients m, n, p, M, N, P, et que cette courbe est un *point* lorsque a et b sont de même signe et *deux droites*, lorsque a et b sont de signes différents.

Pour effectuer l'élimination, retranchons les deux équations (1) et (2) l'une de l'autre, on aura

$$z[z(m - M) + x(n - N) + y(p - P)] = 0,$$

d'où l'on tire les valeurs de z;

$$z = 0 \quad \text{et} \quad z = \frac{x(N - n) + y(P - p)}{m - M}.$$

Substituant la seconde valeur de z dans l'équation (1) ou (2), on aura

$$ax^2 + by^2 + \left[\frac{x(N - n) + y(P - p)}{m - M}\right] \left\{\frac{m}{m - M}[x(N - n) + y(P - p)] + (nx + py + 1)\left[\frac{x(N - n) + y(P - p)}{m - M}\right]\right\} = 0.$$

et en ordonnant

$$\left.\begin{array}{l} +a \\ +\dfrac{m(N-n)^2}{(m-M)^2} \\ +\dfrac{n(N-n)}{m-M} \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} b \\ +\dfrac{m(P-p)^2}{(m-M)^2} \\ +\dfrac{p(P-p)}{m-M} \end{array}\right| y^2 + \left.\begin{array}{l} \dfrac{2m(N-n)(P-p)}{(m-M)^2} \\ +\dfrac{n(P-p)}{m-M} \\ +\dfrac{p(N-n)}{m-M} \end{array}\right| xy + \frac{N-n}{m-M}x + \frac{P-p}{m-M}y = 0 \quad (5).$$

Ainsi la courbe, intersection des deux surfaces ζ et ζ_1 se composera de deux branches, l'une B invariable, et dont les équations sont (3) et (4), l'autre que je désigne par A et qui sera variable suivant les valeurs attribuées à m, M, n, N, p, P, et dont la projection sur le plan xy (plan tangent au point d'osculation), aura pour équation, l'équation (5).

On voit que la courbe A peut être l'une des trois sections coniques, et qu'elle passe toujours par l'origine des coordonnées qui est le point d'osculation des deux surfaces ζ et ζ_1.

Si 1° $n = \mathrm{N} = 0$ et $p = \mathrm{P} = 0$ ou si 2° $\mathrm{N} = n$, $\mathrm{P} = p$.

L'équation (5) se réduit à

$$ax^2 + by^2 = 0.$$

La courbe complète d'intersection des deux surfaces ζ et ζ_1 est donc dans ce cas :

$$(ax^2 + by^2)^2 = 0. \qquad (6)$$

Ainsi : 1° si a et b sont de même signe, les deux surfaces n'ont d'autres points communs que le *point* de contact; 2° si a et b sont de signe contraire, les deux surfaces n'ont d'autres lignes communes que les deux *génératrices droites* qui se croisent au point de contact.

Dans le 1er cas les deux surfaces ont leurs rayons de courbure *maximum* et *minimum* dirigés dans le même sens; dans le deuxième cas, les rayons de courbure sont dirigés en sens opposé.

Dans le deuxième cas, les surfaces sont *gauches*, dans le premier cas elles ne sont pas *gauches*.

L'équation (6) prouve que les deux surfaces ont, dans les deux cas, un contact du troisième ordre, ce qui doit avoir lieu en effet : car les équations seront : si $n = \mathrm{N} = 0$ et $p = \mathrm{P} = 0$,

$$\text{pour } \zeta \qquad ax^2 + by^2 + mz^2 + z = 0,$$
$$\text{pour } \zeta_1 \qquad ax^2 + by^2 + \mathrm{M}z^2 + z = 0,$$

et l'on voit que ces deux surfaces ont deux plans diamétraux principaux communs, qui sont les plans des xz et des yz; le point d'osculation est donc en même temps le sommet de l'une et l'autre surface :

ainsi se trouve vérifié le résultat déjà connu, savoir, que lorsque deux surfaces du deuxième degré ont une osculation par leurs sommets, l'ordre du contact est pair.

Et les équations seront : si $n = \mathrm{N}$, $p = \mathrm{P}$,

$$\text{pour } \zeta \qquad ax^2 + by^2 + mz^2 + nxz + pyz + z = 0,$$
$$\text{pour } \zeta_1 \qquad ax^2 + by^2 + \mathrm{M}z^2 + nxz + pyz + z = 0,$$

et alors les deux surfaces ont un plan diamétral principal commun, et passant par le point d'osculation ; et en effet dans ce cas, le contact du troisième ordre doit exister.

Car, si par la normale au point d'osculation, normale qui n'est autre que l'axe des z, et par le centre de la surface ζ (ce centre étant à distance finie ou infinie), on fait passer un plan R, les cordes conjuguées de ce plan diamétral R seront parallèles au plan XY, qui est le plan tangent au point d'osculation, et à une certaine droite B. Ces cordes se projetteront donc sur le plan R suivant des perpendiculaires à l'axe des Z; dès-lors un plan Q passant par la normale Z et parallèle à la droite B, coupera la surface ζ suivant une *conique* δ ayant son sommet au point d'osculation.

Faisant la même construction pour la surface ζ_1, on aura la *conique* δ_1. Si les deux courbes δ et δ_1 sont dans un même plan Q, elles auront un contact du troisième ordre en leur sommet commun, car ces deux *coniques* ayant un sommet commun et une osculation en ce sommet, ne peuvent y avoir qu'un contact d'ordre impair.

Or, ce que nous venons de dire n'aura lieu qu'autant que les centres des deux surfaces et la normale Z seront dans un même plan R ; qu'autant que les deux surfaces ζ et ζ_1, auront un plan diamétral R commun et passant par le point d'osculation.

Et si ce plan R est un plan diamétral principal pour les deux surfaces, alors tous les plans Q′, Q″,... passant par le point d'osculation et perpendiculaires au plan R couperont les deux surfaces suivant des couples de *coniques* δ' et δ'_1, δ'' et δ''_1,... qui auront une osculation du troisième ordre ; les deux surfaces ζ et ζ_1 auront donc une osculation du troisième ordre, quand elles auront un plan diamétral principal commun.

Si l'on suppose que $M = 0$, $P = 0$, $N = 0$.

Alors la surface ζ_1 sera un paraboloïde osculateur par son sommet à la surface ζ.

L'équation de la projection de la courbe A deviendra

$$ax^2 + by^2 - \frac{n}{m}x - \frac{p}{m}y = 0. \qquad (7)$$

Les coordonnées du centre de cette courbe, seront :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{l'abscisse} & \alpha = -\frac{n}{2am}, \\ \text{l'ordonnée} & \beta = -\frac{p}{2bm}. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

La courbe rapportée à son centre et à ses axes, sera

$$ax^2 + by^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{am^2} + \frac{p^2}{bm^2}\right). \qquad (9)$$

L'équation (7) montre que la projection, sur le plan tangent au point d'osculation, de l'intersection d'une surface du deuxième degré avec son paraboloïde osculateur par son sommet, sera une courbe de même nature que *l'indicatrice* du deuxième ordre, et que les axes de cette courbe d'intersection seront parallèles et proportionnels aux axes de *l'indicatrice*, propriété remarquable qui n'appartient pas seulement au paraboloïde osculateur par son sommet, comme nous le verrons plus loin.

Si dans l'équation (7) on suppose que $a = b$ (a et b étant de même signe). Alors la projection de l'intersection sera un cercle, alors la surface ζ sera coupée par des plans parallèles au plan des xy, qui est le plan tangent, suivant des cercles et le paraboloïde osculateur sera de révolution.

Le point d'osculation sera alors un des *ombilics* de la surface ζ, résultat déjà connu et qui se trouve vérifié.

Si l'on avait une seconde surface ζ' du second degré et dont l'équation serait :

$$ax^2 + by^2 + m'z^2 + n'xz + p'yz + z = 0,$$

l'on voit par l'équation (7) que si $\frac{n'}{m'} = \frac{n}{m} =$ constante $=$ C et si, en même temps, $\frac{p'}{m'} = \frac{p}{m} =$ constante $=$ C', toutes les surfaces telles que ζ' et ζ auront le même paraboloïde osculateur et se couperont toutes, suivant une même courbe plane, *ellipse* ou *hyperbole* (suivant que ces surfaces ne seront pas ou seront *gauches*), qui se projettera sur le plan tangent au point d'osculation, suivant une courbe, ayant pour équation

$$ax^2 + by^2 - Cx - C'y = 0.$$

NOTE

Sur la Théorie des Équations différentielles ;

Par J. LIOUVILLE.

Désignons par x une variable réelle qui peut croître depuis x jusqu'à X ; par $P_1, P_2, \ldots P_n$, g des fonctions de x positives et continues ; par r un paramètre variable ; et par U une fonction de x et de r satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{d.P_n d.P_{n-1} \ldots d.P_2 d.P_1 U}{dx^n} + grU = 0 :$$

enfin, pour déterminer les n constantes arbitraires implicitement contenues dans U, donnons-nous les valeurs des n quantités suivantes

$$P_1U, \quad \frac{P_2 d.P_1 U}{dx}, \ldots \ldots \frac{P_n d.P_{n-1} \ldots d.P_1 U}{dx^{n-1}}$$

pour $x = \mathrm{x}$; admettons de plus que ces valeurs soient positives et indépendantes de r. Cela posé, la fonction U jouira de propriétés toutes semblables à celles de la fonction V dont on s'est occupé si souvent dans les deux premiers volumes de ce journal, et qui se présente en analyse lorsqu'on veut déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène. Mais la méthode par laquelle je suis parvenu à démontrer ces propriétés pour la fonction U, qui satisfait à une équation linéaire d'un ordre quelconque n, diffère beaucoup de celle dont on avait fait usage pour la fonction particulière V qui répond au cas où $n = 2$: elle diffère également de celle que j'ai suivie pour traiter l'équation $\frac{d^3U}{dx^3} + rU = 0$ qui est du troisième ordre, à coefficients constants, et à laquelle j'ai été conduit dans mon Mémoire sur l'intégration de l'équation $\frac{du}{dt} = \frac{d^3u}{dx^3}$ (Voyez le 25^{me} cahier du *Journal de l'École Polytechnique*). Non-seulement tous les théorèmes que j'ai donnés dans ce dernier Mémoire peuvent être étendus aux équations linéaires à coefficients variables; mais on peut encore en démontrer beaucoup d'autres qui n'ont pas moins d'intérêt.

Dès que l'abondance des matières me permettra de prendre dans ce Journal une place suffisante, je m'empresserai d'y publier le Mémoire dont je viens d'indiquer les principaux résultats, et qui n'est du reste à mes yeux qu'une petite partie d'un très long travail que j'ai entrepris sur la théorie générale des équations différentielles et sur le développement des fonctions en séries.

Je me suis occupé aussi d'autres recherches d'un genre très différent et qui ont pour objet l'intégration des équations différentielles sous forme finie, en admettant dans l'expression de l'intégrale des fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles seulement. Par exemple étant donnée l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y,$$

dans laquelle P représente une fonction entière de x, je puis toujours décider par une méthode certaine s'il est possible ou non d'y satisfaire par une valeur de la forme $y = f(x)$, $f(x)$ étant une fonction qui ne renferme qu'un nombre limité de fois les signes relatifs aux opérations algébriques, exponentielles et logarithmiques. Dans le cas d'une réponse affirmative, la même méthode fournit aussi la valeur de y.

MÉMOIRE

Sur les applications du Calcul des Chances à la Statistique judiciaire;

Par A.-A. COURNOT,

Recteur de l'Académie de Grenoble.

1. Il est manifeste que les conditions de majorité, de pluralité, imposées aux décisions d'un corps judiciaire ou d'une assemblée délibérante, doivent avoir des relations avec la théorie mathématique des chances. Un accusé qui ne connaît pas ses juges, qui ignore leurs dispositions favorables ou défavorables, qui n'est instruit ni du système de procédure suivi dans l'instruction et dans les débats, ni de la manière dont les juges communiquent entre eux et recueillent leurs votes ne regardera pas comme indifférent d'être jugé par un tribunal de trois juges, qui condamne à la pluralité de deux voix, ou par un tribunal de six juges, qui ne peut condamner qu'à la pluralité de quatre voix. Il y a donc dans le seul énoncé du nombre des votants et du chiffre de pluralité des conditions arithmétiques, indépendantes des qualités et des dispositions personnelles des juges : conditions qui, par l'influence constante qu'elles exercent sur une série nombreuse de décisions, doivent prévaloir à la longue sur les circonstances variables de la composition du tribunal dans chaque affaire particulière. Il y a par conséquent une question purement arithmétique au fond de toute loi régulatrice des votes d'un tribunal : cette question est essentiellement du ressort de la théorie des chances; mais aussi le calcul doit nécessairement emprunter certaines données à l'observation, c'est-à-dire à la statistique judiciaire qui résume et coordonne des faits assez nombreux pour que les anomalies du hasard soient sans influence sensible sur les résultats moyens.

Deux hommes célèbres à des titres différents, Condorcet et Laplace, se sont occupés d'appliquer le calcul des chances ou des probabilités aux jugements des tribunaux, l'un dans un traité spécial sur la matière, l'autre incidemment dans son grand ouvrage sur la théorie des probabilités. Mais aux époques où Condorcet et Laplace écrivaient, la statistique judiciaire n'existait pas encore. Pour tirer du calcul quelques résultats numériques, ces auteurs ont été obligés de faire des hypothèses arbitraires, et que l'on a avec raison contestées. On sait d'ailleurs que dans toutes les branches des Mathématiques appliquées, où l'on ne procède que par des approximations successives, le contrôle des faits est indispensable pour affermir les raisonnements théoriques, et mettre sur la trace des erreurs qui échappent à l'esprit le plus attentif. Il en doit être de même, à plus forte raison, dans un sujet aussi délicat.

Un grand pays tel que la France, régi par une législation rigoureusement uniforme et par une administration centralisée, se trouve placé dans les circonstances les plus favorables pour la formation de la statistique judiciaire. C'est aussi en France que l'administration de la justice a pris, il y a une douzaine d'années, l'initiative de la publication des *Comptes rendus*, où l'on puisera un jour une foule de documents précieux pour le perfectionnement de la législation, et l'étude de la société, sous les rapports moraux et civils.

Tout récemment, M. Poisson a publié sous le titre de *Recherches sur la Probabilité des Jugements en matière criminelle et en matière civile*, un ouvrage étendu où pour la première fois ont été employées les données de la statistique officielle. Cet ouvrage, que le nom de l'illustre auteur, l'importance et la nouveauté du sujet recommandaient assez à l'attention publique, n'a pas encore épuisé la question. Occupé moi-même de recherches analogues, et honoré, par suite d'une bienveillance qui m'est singulièrement précieuse, de quelques communications anticipées sur le contenu de ce traité, j'ai dû en attendre la publication pour achever de m'éclairer, et profiter des indications qu'il renferme. On jugera, en lisant le présent Mémoire, de la valeur des développements nouveaux que j'ai cru devoir ajouter à la partie théorique de la question, et des définitions également nouvelles à l'aide desquelles il m'a semblé indispensable de fixer le sens de certains termes qui n'avaient par reçu une détermination mathématique.

Déjà familiarisé par des études antérieures avec les principes de notre droit et de notre organisation judiciaire, j'ai examiné attentivement les *Comptes rendus*, et par des dépouillements convenables j'ai reconnu des faits curieux de pure statistique que les tableaux ne mettaient pas dans une suffisante évidence. On trouvera dans ce Mémoire quelques indications sur des lacunes que présentent les *Comptes rendus* déjà publiés, et qu'il serait facile de combler dans ceux qui paraîtront à l'avenir.

M. Poisson s'est principalement et presque exclusivement occupé de l'application des formules aux jugements des jurys en matière de grand criminel. Je fais voir que l'on peut renfermer entre des limites assez étroites les valeurs inconnues des probabilités des jugements des tribunaux de première instance et d'appel en matière civile. Mais j'ai principalement insisté sur l'application des formules aux appels de police correctionnelle, application que l'on peut rendre plus complète que toute autre, à la faveur du système assez compliqué qui régit ces appels; et qui successivement envisagée sous des faces diverses, montre bien comment les hypothèses théoriques doivent se modifier, pour s'adapter de mieux en mieux à la nature spéciale de chaque question.

2. Quoiqu'on ait toujours eu en vue, en traitant de la probabilité des jugements, d'appliquer cette théorie aux jugements des tribunaux civils et criminels, il n'est pas hors de propos de prendre d'abord le mot de *jugement* avec toute la latitude d'acception qu'il conserve, tant dans la langue commune que dans la langue philosophique, et d'étudier d'une manière tout-à-fait générale les conséquences qui résultent de l'association de l'idée de chance à l'idée de jugement. Cette étude, intéressante en elle-même, nous préparera à mieux comprendre la théorie spéciale des jugements des tribunaux.

Pour fixer les idées par un exemple, supposons qu'un observateur de la campagne, un homme dont l'attention s'est toujours portée sur l'état du ciel, soit dans l'habitude de pronostiquer, à chaque coucher du soleil, le temps qu'il fera le jour suivant. Si l'on tenait registre de ses pronostics ou de ses jugements, et que, sur un grand nombre n de ces jugements, il y en eût m que l'événement a vérifiés, la fraction $\frac{m}{n} = v$ exprimerait la probabilité que l'événement vérifiera un autre jugement ou pronostic du même observateur. En d'autres termes, s'il n'a ni gagné ni perdu en perspicacité, on trouverait en continuant à tenir registre de ses pronostics, que le nombre M des pronostics vérifiés par l'événement est au nombre total N des pronostics, sensiblement dans le rapport de m à n, pourvu que les nombres M et N fussent suffisamment grands.

Concevons maintenant que deux observateurs A et B fassent chacun de leur côté la même observation, et que v' soit pour l'observateur B l'analogue du nombre v pour l'observateur A. Si les causes qui influent sur la vérité ou l'erreur du jugement de A étaient complétement indépendantes de celles qui influent sur la vérité ou l'erreur du jugement de B; si, par exemple, ces causes résidaient dans les dispositions physiques et morales des deux observateurs dans l'état de santé dont ils jouissent, dans le degré d'attention qu'ils apportent, etc., on aurait évidemment :

1°. Pour la probabilité que les deux observateurs seront d'accord dans le jugement qu'ils émettront, soit qu'ils devinent juste, soit qu'ils se trompent tous deux,

$$p = vv' + (1 - v)(1 - v') = 1 - (v + v') + 2vv'; \qquad (1)$$

2°. Pour la probabilité de deux jugements contradictoires,

$$q = v(1 - v') + v'(1 - v) = v + v' - 2vv' = 1 - p;$$

3°. Pour la probabilité que le pronostic au sujet duquel les deux observateurs sont d'accord, se vérifiera,

$$V = \frac{vv'}{vv' + (1 - v)(1 - v')};$$

4°. Pour la probabilité que le pronostic de A se vérifiera, quand le jugement de B est contraire,

$$V' = \frac{v(1 - v')}{v(1 - v') + v'(1 - v)}.$$

Ces expressions doivent être entendues dans un sens objectif et absolu : elles signifient que si l'on tenait effectivement registre des pronostics des deux observateurs pour les comparer avec l'événement, sur un très grand nombre N d'observations simultanées, on en trouverait sensiblement

$$pN = [vv' + (1 - v)(1 - v')]N,$$

pour lesquelles les deux observateurs sont tombés d'accord; dans ce nombre

$$\frac{vv'}{vv' + (1 - v)(1 - v')} N$$

qui ont été confirmées par l'événement, et ainsi de suite; les v, v' ayant été déterminés par une série d'observations précédentes, ainsi qu'on l'a expliqué ci-dessus.

3. Dans l'exemple que nous imaginons, la vérité ou l'erreur de chaque observateur peuvent être soumis à un *criterium* infaillible, et ce *criterium*, c'est l'observation même de l'événement. Mais dans une foule d'autres cas un semblable *criterium* n'existe pas, et même il répugne à la nature des choses qu'il en existe un. Par exemple, quand un médecin prescrit un traitement à son malade, on ne saurait tirer de l'événement un *criterium* infaillible de la vérité ou de l'erreur du jugement du médecin; car il peut se faire que le malade succombe quoique le traitement prescrit soit réellement le meilleur, et au contraire qu'il guérisse malgré les vices du traitement. A supposer donc que deux médecins soient appelés en consultation, ensemble ou séparément, pour une nombreuse série de cas pathologiques, il n'y aura aucun moyen de déterminer directement les nombres v, v', exprimant, pour chacun des deux médecins, la probabilité d'un pronostic ou jugement vrai; mais le registre des consultations fera connaître combien de fois les deux médecins ont été d'accord et combien de fois ils ont émis des opinions contraires. On aura donc, si la série des observations est suffisamment grande, une valeur sensiblement exacte du nombre p qui entre dans l'équation (1), et par suite on aura une équation de condition entre les valeurs numériques de v et de v', valeurs numériques qu'il est impossible d'assigner par des observations directes.

On ne doit pas perdre de vue que l'existence de cette équation de condition repose sur l'hypothèse que les causes anomales qui prédisposent à la vérité ou à l'erreur le jugement de A sont indépendantes de celles qui prédisposent à la vérité ou à l'erreur le jugement de B. Nous nous bornons d'abord à étudier les conséquences de cette hypothèse, tacitement admise par tous ceux qui ont traité jusqu'ici de la probabilité des jugements.

4. Revenons à notre premier exemple, pris dans les pronostics météorologiques, et supposons qu'on tienne registre d'une série de pronostics faits par trois observateurs A, B, C. Conservons aux lettres v, v' leur signification, et appelons v'' l'analogue de v pour l'observateur C. Il pourra arriver que les trois observateurs soient d'accord, que A soit d'un avis contraire à B et à C, que B soit d'un avis contraire à A et à C, ou bien enfin que C soit opposé à A et à B. En appelant p, a, b, c ces quatre probabilités, on aura

$$\left.\begin{aligned}
p&=vv'v''+(1-v)(1-v')(1-v'')=1-(v+v'+v'')+vv'+vv''+v'v'',\\
a&=(1-v)v'v''+v(1-v')(1-v'')=v(1-v'-v'')+v'v'',\\
b&=(1-v')vv''+v'(1-v)(1-v'')=v'(1-v-v'')+vv'',\\
c&=(1-v'')vv'+v''(1-v)(1-v')=v''(1-v-v')+vv'.
\end{aligned}\right\}(2)$$

Il est évident *à priori* que les fractions p, a, b, c doivent être liées par l'équation de condition

$$p+a+b+c=1,$$

équation qui se vérifie aussi au moyen des expressions précédentes.

Il suit de là que si l'on déterminait par l'observation directe, au moyen d'une nombreuse série d'épreuves, les nombres v, v', v'', p, a, b, c, les valeurs de ces nombres devraient vérifier les équations (2); et si elles ne satisfaisaient pas à ces équations, ce serait une preuve que l'hypothèse admise sur l'indépendance des causes d'erreur pour chacun des observateurs A, B, C, n'est pas conforme à la réalité.

Au contraire dans le cas où il n'y a pas de *criterium* propre à déterminer directement les nombres v, v', v'', on peut déterminer ces nombres indirectement au moyen des valeurs de p, a, b, c, données par l'observation, et de trois quelconques des équations (2), la quatrième rentrant dans les trois autres. A cause de la symétrie il convient de choisir les trois dernières, et si nous posons

$$v = \frac{1}{2} + z, \quad v' = \frac{1}{2} + z', \quad v'' = \frac{1}{2} + z'',$$

$$a - \frac{1}{4} = \alpha, \quad b - \frac{1}{4} = \beta, \quad c - \frac{1}{4} = \gamma,$$

ces équations deviendront

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = z'z'' - zz' - zz'', \\ \beta = zz'' - zz' - z'z'', \\ \gamma = zz' - zz'' - z'z'', \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} z'z'' = -\dfrac{\beta+\gamma}{2}, \\ zz'' = -\dfrac{\alpha+\gamma}{2}, \\ zz' = -\dfrac{\alpha+\beta}{2}; \end{array}\right\} \quad (3)$$

et par suite,

$$z = \pm\sqrt{-\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{2(\beta+\gamma)}}, z' = \pm\sqrt{-\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}{2(\alpha+\gamma)}}, \ z'' = \pm\sqrt{-\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}{2(\alpha+\beta)}},$$

$$v = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(a + b - \frac{1}{2}\right)\left(a + c - \frac{1}{2}\right)}{1 - 2(b + c)}},$$

$$v' = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(a + b - \frac{1}{2}\right)\left(b + c - \frac{1}{2}\right)}{1 - 2(a + c)}},$$

$$v'' = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(a + c - \frac{1}{2}\right)\left(b + c - \frac{1}{2}\right)}{1 - 2(a + b)}}.$$

Pour que les valeurs de v, v', v'' soient réelles, il faut que les trois quantités

$$a + b - \frac{1}{2}, \quad a + c - \frac{1}{2}, \quad b + c - \frac{1}{2} \qquad (m)$$

soient toutes trois négatives, ou que deux soient positives et la troisième négative. En outre, pour que les valeurs de v, v', v'' restent renfermées entre zéro et l'unité, il faut, comme on le démontre aisément, que les trois quantités (m) soient chacune numériquement inférieure à $\frac{1}{2}$. Or, pour que cette dernière condition soit satisfaite, il faut et il suffit que l'on ait

$$a + b < 1, \quad a + c < 1, \quad b + c < 1.$$

Si ces diverses conditions ne sont pas satisfaites par les valeurs de a, b, c, telles que l'observation les donne, ce sera une preuve que l'hypothèse admise sur l'indépendance des causes d'erreur doit être rejetée.

Les valeurs de z, z', z'', et par suite celles de v, v', v'' sont doubles, en raison de l'ambiguité du signe radical; mais, à cause des équations (3), il n'est pas permis de combiner indifféremment ces valeurs. En effet, par suite de la remarque faite précédemment sur les signes des quantités (m), il faut que les trois produits

$$zz', \quad zz'', \quad z'z'', \qquad (n)$$

soient positifs, ou que deux soient négatifs et le troisième positif. Supposons-les tous les trois positifs : il en résultera que les quantités z, z', z'' doivent être prises à la fois toutes trois positives, ou toutes trois négatives; et si l'on faisait une autre hypothèse sur les signes des quantités (m) ou (n), on trouverait qu'à chacune d'elles ne correspondent que deux hypothèses sur les signes des quantités z, z', z'', ou deux systèmes de valeurs pour les inconnues v, v', v''.

5. Cette analyse s'applique naturellement aux jugements des tribunaux composés de trois juges, comme le sont en France la plupart des tribunaux de première instance. Si le greffier tenait note des votes de chaque juge, le relevé de ces notes donnerait, après l'expédition d'un assez grand nombre d'affaires, les valeurs des nombres a, b, c, avec toute la précision désirable. On pourrait donc en déduire, par les formules précédentes, les valeurs de v, v', v'' qu'il serait impossible de déterminer directement, attendu que la vérité ou la bonté du jugement d'un tribunal ne peuvent être contrôlées que par un autre tribunal, sujet lui-même à l'erreur, de quelques lumières que l'on suppose ses membres pourvus.

Le calcul donnerait, il est vrai, deux systèmes de valeurs pour les nombres v, v', v'' : mais, dans la plupart des cas, l'un des deux systèmes serait *à priori* inadmissible, ce qui lèverait toute ambiguité. Si, par exemple, les trois quantités (m) étaient négatives, les valeurs de v, v', v'', seraient dans le premier système toutes plus grandes, et dans le second toutes plus petites que $\frac{1}{2}$. Or il répugnerait d'admettre que dans un tribunal de trois juges chaque juge rencontre l'erreur plus souvent que la vérité : ce serait prendre au sérieux la plaisanterie de ce juge de Rabelais qui remettait aux dés la décision des procès. Le premier système serait donc seul admissible ; et le calcul donnerait ainsi, par voie indirecte, les valeurs de v, v', v'', d'une manière aussi sûre que pourrait les donner l'observation directe, si l'on était en possession d'un *criterium* infaillible pour des jugements de cette nature.

Il faut bien remarquer que toutes ces conséquences reposent sur une hypothèse dont nous aurons à discuter plus loin la légitimité : sur celle de l'indépendance des causes qui prédisposent à l'erreur chaque juge individuellement ; de sorte que les cas où l'un des juges se trompe, se combinent indifféremment avec ceux où l'autre juge rencontre la vérité ou l'erreur. Mais d'abord la détermination des valeurs de a, b, c donnerait souvent la preuve directe que cette hypothèse est inadmissible, en assignant à v, v', v'' des valeurs imaginaires, ou négatives, ou plus grandes que l'unité ; et dans le cas contraire les valeurs assignées à v, v', v'' seraient au moins (comme on l'expliquera plus loin) des limites au-dessous desquelles devraient tomber les véritables valeurs des fractions que ces lettres représentent.

Si l'on pouvait considérer *à priori* les trois fractions v, v', v'' comme égales entre elles, ou la chance d'erreurs comme la même pour chaque votant, on ferait dans la première équation (2), $v = v' = v''$, et l'on en tirerait

$$p = 1 - 3v + 3v^2, \quad v = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4p-1}{3}}, \qquad (4)$$

ou simplement

$$v = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4p-1}{3}};$$

en rejetant la valeur de v qui tombe au-dessous de $\frac{1}{2}$. Dans cette hypothèse il suffirait donc, comme l'a remarqué Laplace, de connaître le rapport du nombre des jugements rendus à l'unanimité au nombre total des jugements, rapport que nous désignons par p. Ce rapport, dont la détermination n'offrirait ni difficulté, ni inconvénient dans la pratique, devrait surpasser $\frac{1}{4}$; sans quoi, la valeur de v devenant imaginaire, on serait averti de la fausseté de l'une au moins des hypothèses adoptées, savoir celle de l'indépendance des causes d'erreur pour chaque votant, et celle de l'égalité des chances d'erreur, aussi pour chaque votant.

Au reste, bien que cette dernière hypothèse soit sans doute arbitraire et inadmissible en général, il est aisé de voir que l'on peut considérer la racine de l'équation (4) comme exprimant sensiblement la moyenne des véritables valeurs des trois quantités v, v', v'', du moins lorsque les différences entre ces valeurs ne sont pas fort grandes relativement. Pour prendre un exemple, supposons que les valeurs de v, v', v'' tirées des trois dernières équations (2) soient respectivement 0,6, 0,7, 0,8; auquel cas la moyenne sera 0,7, et la valeur correspondante de p devra être 0,36. En substituant cette valeur de p dans l'équation (4), on en tirera $v = 0{,}692$, valeur qui n'est inférieure que de $\frac{1}{125}$ à la moyenne véritable.

Il serait sans doute intéressant de connaître pour chaque tribunal composé de juges permanents une valeur aussi approchée de la moyenne des probabilités de vérité et d'erreur pour chaque juge; et dès-lors on doit désirer que l'administration prenne des mesures à l'effet de faire constater, pour chaque tribunal de cette nature, le rapport du nombre des jugements rendus à l'unanimité pendant une période décennale, au nombre total des jugements; bien entendu que l'on ferait une catégorie à part des jugements de pure forme, de ceux que l'on appelle *convenus*, des jugements par défaut, et ainsi de suite.

6. La probabilité que le tribunal de trois juges prononcera son jugement à l'unanimité, et qu'il jugera bien, a pour valeur

$$vv'v'';$$

la probabilité que le tribunal jugera encore bien, mais à la simple majorité, est exprimée par

$$(1 - v)v'v'' + (1 - v')vv'' + (1 - v'')vv'.$$

En conséquence, si l'on désigne par V la probabilité que le tribunal jugera bien, soit à l'unanimité, soit à la simple majorité, on aura

$$V = vv'v'' + (1-v)v'v'' + (1-v')vv'' + (1-v'')vv' = vv' + vv'' + v'v'' - 2vv'v''. \quad (5)$$

En d'autres termes, le tribunal constitue une personne morale, pour laquelle V représente ce que désignent respectivement les lettres v, v', v'' pour chacun des juges A, B, C.

Il devrait toujours y avoir entre les nombres v, v', v'' de tels rapports que la valeur de V, donnée par l'équation (5), fût supérieure à chacun de ces nombres; car si V, par exemple, était plus petit que v, il serait déraisonnable d'adjoindre les juges B et C au juge A, cette adjonction n'ayant pour effet que de diminuer la probabilité d'un *bien jugé*. Or, l'équation (5), mise sous la forme

$$V = v(v' + v'') - (2v - 1)v'v'',$$

nous montre que l'on aura nécessairement $V < v$, si l'on suppose à la fois

$$v' + v'' < 1, \quad v > \tfrac{1}{2};$$

mais dans le cas plus probable où les trois nombres v, v', v'' seraient chacun plus grand que $\frac{1}{2}$, V serait nécessairement plus grand que chacun de ces nombres.

Si l'on attribuait aux probabilités des voix A, B, C des valeurs égales entre elles, et égales à la moyenne des vraies valeurs de v, v', v'', la probabilité du bien jugé n'aurait plus la valeur donnée par l'équation (5), mais une autre valeur

$$V_1 = \frac{1}{3}(v + v' + v'')^2 - \frac{2}{27}(v + v' + v'')^3.$$

On en déduit :

$$V - V_1 = 2\left[\frac{1}{27}(v+v'+v'')^3 - vv'v''\right] - \frac{1}{3}\left[v^2+v'^2+v''^2 - (vv'+vv''+v'v'')\right].$$

D'après des formules connues (*), on a toujours

$$vv'v'' < \frac{1}{27}(v + v' + v'')^3, \quad vv' + vv'' + v'v'' < v^2 + v'^2 + v''^2;$$

(*) *Voyez* Cauchy, *Analyse algébrique*, note II.

mais néanmoins la différence $V - V_1$ peut être, selon les cas, positive ou négative : en posant, pour simplifier, $v' = v''$, on aura

$$V - V_1 = 2\left[\frac{1}{27}(v + 2v')^3 - vv'^2\right] - \frac{1}{3}(v - v')^2,$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$V - V_1 = \frac{1}{27}(v - v')^2(2v + 16v' - 9).$$

Lorsque chacune des quantités v, v' dépassera $\frac{1}{2}$, la différence $V - V_1$ sera positive ; de sorte que l'égale répartition entre les juges de ce que l'on pourrait nommer le fonds commun de probabilité, affaiblirait dans ce cas pour le tribunal la probabilité du bien jugé. En prenant pour exemple, avec M. Poisson (*),

$$v = \frac{4}{5}, \quad v' = \frac{3}{5},$$

on aura $V = \frac{93}{125}$, $V_1 = \frac{20}{27}$, $V - V_1 = \frac{11}{3375}$. Mais il suffirait de prendre

$$v' < \frac{9 - 2v}{16},$$

pour rendre au contraire $V_1 > V$.

7. Afin d'indiquer au moins la marche générale du calcul, considérons encore le cas où le tribunal serait formé de quatre juges A, B, C, D. Appelons v, v', v'', v''' leurs chances de bien juger ; admettons qu'on ait constaté leurs votes dans une longue série de jugements communs ; que a désigne le rapport du nombre de cas où le juge A s'est trouvé seul de son avis, au nombre total des jugements compris dans la série ; que b, c, d désignent les rapports analogues pour les juges B, C, D. On aura, pour déterminer les quatre inconnues v, v', v'', v''', les quatre équations

$$\begin{aligned}
a &= (1 - v)v'v''v''' + v(1 - v')(1 - v'')(1 - v'''),\\
b &= (1 - v')vv''v''' + v'(1 - v)(1 - v'')(1 - v'''),\\
c &= (1 - v'')vv'v''' + v''(1 - v)(1 - v')(1 - v'''),\\
d &= (1 - v''')vv'v'' + v'''(1 - v)(1 - v')(1 - v'').
\end{aligned}$$

(*) *Recherches sur la Probabilité des Jugements*, p. 406.

En constatant les cas où A et B auraient été d'un même avis contre C et D, A et C d'un même avis contre B et D, A et D d'un même avis contre B et C, enfin les cas d'unanimité, on formerait quatre autres équations d'où l'on pourrait encore tirer les valeurs de v, v', v'', v'''; et si ces valeurs ne s'accordaient pas avec celles qui sont déduites des valeurs de a, b, c, d, ce serait une preuve qu'on doit rejeter l'hypothèse de l'indépendance des causes d'erreurs pour chaque juge.

Si l'on pose dans les équations précédentes

$$v=\frac{1}{2}+z,\quad v'=\frac{1}{2}+z',\quad v''=\frac{1}{2}+z'',\quad v'''=\frac{1}{2}+z''';$$
$$2a-\frac{1}{4}=\alpha,\quad 2b-\frac{1}{4}=\beta,\quad 2c-\frac{1}{4}=\gamma,\quad 2d-\frac{1}{4}=\delta;$$

elles deviendront :

$$\begin{aligned}
\alpha&=z'z''+z'z'''+z''z'''-zz'-zz''-zz'''-4zz'z''z''',\\
\beta&=zz''+zz'''+z''z'''-zz'-z'z''-z'z'''-4zz'z''z''',\\
\gamma&=zz'+zz'''+z'z'''-zz''-z'z''-z''z'''-4zz'z''z''',\\
\delta&=zz'+zz''+z'z''-zz'''-z'z'''-z''z'''-4zz'z''z'''.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left.\begin{aligned}
\alpha+\beta&=2(z''z'''-zz')-8zz'.z''z''',\\
\gamma+\delta&=2(zz'-z''z''')-8zz'.z''z''';
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

d'où

$$\begin{aligned}
8zz'&=\gamma+\delta-(\alpha+\beta)\pm\sqrt{[\alpha+\beta-(\gamma+\delta)]^2-4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},\\
8z''z'''&=\alpha+\beta-(\gamma+\delta)\pm\sqrt{[\alpha+\beta-(\gamma+\delta)]^2-4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}.
\end{aligned}$$

On trouverait de même

$$\begin{aligned}
8zz''&=\beta+\delta-(\alpha+\gamma)\pm\sqrt{[\alpha+\gamma-(\beta+\delta)]^2-4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},\\
8z'z'''&=\alpha+\gamma-(\beta+\delta)\pm\sqrt{[\alpha+\gamma-(\beta+\delta)]^2-4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},\\
8zz'''&=\beta+\gamma-(\alpha+\delta)\pm\sqrt{[\beta+\gamma-(\alpha+\delta)]^2-4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},\\
8z'z''&=\alpha+\delta-(\beta+\gamma)\pm\sqrt{[\beta+\gamma-(\alpha+\delta)]^2-4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}.
\end{aligned}$$

Chacun des produits zz', $z''z'''$, etc., a deux valeurs, à cause de l'ambiguité du signe radical, mais on ne peut satisfaire aux équation (6) qu'en prenant le même radical avec le même signe dans les expressions des deux produits où entre ce radical, ce qui ne donne que deux systèmes de valeurs pour chacun des groupes $(zz', zz''z''')$, $(zz'', z'z''')$, $(zz''', z'z'')$. D'ailleurs ces valeurs peuvent être positives ou négatives.

On aura ensuite

$$z = \pm\sqrt{\frac{zz'.zz''}{z'z''}} = \pm\sqrt{\frac{zz'.zz'''}{z'z'''}} = \pm\sqrt{\frac{zz''.zz'''}{z''z'''}},$$

et les autres inconnues z', z'', z''' s'exprimeront d'une manière analogue.

Désignons, comme plus haut, par la lettre p le rapport du nombre des jugements unanimes au nombre total des jugements, il viendra :

$$p = vv'v''v''' + (1-v)(1-v')(1-v'')(1-v''').$$

Si l'on suppose $v = v' = v'' = v'''$, cette équation deviendra plus simplement

$$p = v^4 + (1-v)^4,$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3+2\sqrt{2(p+1)}}. \qquad (7)$$

Pour que la valeur de v soit réelle, il faut qu'on ait $p > \frac{1}{8}$.

Afin de comparer la valeur de v ainsi déterminée à la moyenne des vraies valeurs de v, v', v'', prenons pour exemple $v = 0,6$; $v' = 0,7$; $v'' = 0,7$; $v''' = 0,8$; auquel cas la moyenne arithmétique sera $0,7$, et la valeur correspondante de p, $0,2424$. Cette valeur de p étant substituée dans l'équation (7), il viendra $v = 0,695$, valeur inférieure de $0,005$ à celle de la moyenne véritable.

8. Afin d'éviter le partage égal des voix et la nécessité d'attribuer à l'un des juges une voix prépondérante, ou d'appeler d'autres juges pour vider le partage, les tribunaux proprement dits sont ordinairement composés d'un nombre impair de juges. Si l'on désigne par V_m la probabilité du bien jugé, quand le tribunal est composé de $2m+1$ juges, pour chacun desquels la chance de ne se pas tromper est la même, et égale à v, on aura, en posant pour abréger $1 - v = e$, et indiquant par $\varphi(p, q)$ le coefficient du terme $v^{p-q}e^q$ dans le dévelop-

pement de $(\nu + e)^p$,

$$\left.\begin{array}{l} V_m = \nu^{2m+1} + \varphi(2m+1,1)\nu^{2m}e + \varphi(2m+1,2)\nu^{2m-1}e^2 + \ldots \\ \quad + \varphi(2m+1,m)\,\nu^{m+1}e^m, \end{array}\right\} \quad (8)$$

On trouverait de même

$$\begin{array}{l} V_{m+1} = \nu^{2m+3} + \varphi(2m+3,1)\nu^{2m+2}e + \varphi(2m+3,2)\nu^{2m+1}e^2 + \ldots \\ \quad + \varphi(2m+3,m+1)\nu^{m+2}e^{m+1}. \end{array}$$

Pour comparer plus facilement les valeurs de V_m et de V_{m+1}, on multiplie la première par $(\nu + e)^2 = 1$, ce qui n'en change pas la valeur et ce qui donne

$$V_m = \nu^{2m+3} + \left.\begin{array}{l}\varphi(2m+1)\\ +2\end{array}\right| \nu^{2m+2}e + \left.\begin{array}{l}\varphi(2m+1,2)\\ +2\varphi(2m+1,1)\\ +1\end{array}\right| \nu^{2m+1}e^2 \ldots + \left.\begin{array}{l}\varphi(m+1,m-1)\\ +2\varphi(2m+1,m-2)\\ +\varphi(2m+1,m-3)\end{array}\right| \nu^{m+4}e^{m-1}$$

$$+ \left.\begin{array}{l}\varphi(2m+1,m)\\ +2\varphi(2m+1,m-1)\\ +\varphi(2m+1,m-2)\end{array}\right| \nu^{m+3}e^m + \left.\begin{array}{l} \\ 2\varphi(2m+1,m)\\ +\varphi(2m+1,m-1)\end{array}\right| \nu^{m+2}e^{m+1} + \varphi(2m+1,m)\nu^{m+1}e^{m+2}.$$

Maintenant on remarque que

$$\varphi(2m+1,\,i) + 2\varphi(2m+1,\,i-1) + \varphi(2m+1,\,i-2)$$

est le coefficient de $\nu^{2m+3-i}e^i$ dans le développement de

$$(\nu + e)^{2m+1}(\nu + e)^2,$$

de sorte que l'on doit avoir identiquement

$$\varphi(2m+1,i) + 2\varphi(2m+1,\,i-1) + \varphi(2m+1,\,i-2) = \varphi(2m+3,\,i).$$

Au moyen de cette relation, on trouve

$$\begin{array}{l} V_m = \nu^{2m+3} + \varphi(2m+3,\,1)\nu^{2m+2}e + \varphi(2m+3,\,2)\,\nu^{2m+1}e^2 \ldots \\ \quad + \varphi(2m+3,m+1)\nu^{m+2}e^m - \varphi(2m+1,\,m+1)\nu^{m+2}e^{m+1} \\ \quad + \varphi(2m+1,m)\nu^{m+1}e^{m+2}, \end{array}$$

et en comparant avec la valeur de $Vm+1$, donnée ci-dessus :

$$V_{m+1} - V_m = \varphi(2m+1,\,m+1)\nu^{m+2}e^{m+1} - \varphi(2m+1,\,m)\nu^{m+1}e^{m+2}.$$

Mais on a identiquement

$$\varphi(2m+1,\ m+1) = \varphi(2m+1,\ m);$$

donc

$$V_{m+1} - V_m = \varphi(2m+1,\ m) . v^{m+1} e^{m+1} (v-e); \qquad (9)$$

ou

$$V_{m+1} - V_m = \frac{(2m+1)2m(2m-1)\ldots(m+2)}{1.2\ldots\ldots(m+1)} v^{m+1}(1-v)^{m+1}(2v-1).$$

Ainsi l'on aura

$$V_{m+1} \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right. V_m, \quad \text{selon que} \quad v \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right. \frac{1}{2}.$$

La différence $V_{m+1} - V_m$ s'évanouira pour les trois valeurs $v = 0$, $v = \frac{1}{2}$, $v = 1$; la valeur numérique de cette différence passera par deux maximums, l'un pour une valeur de v comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, l'autre pour une valeur de v comprise entre un zéro et $\frac{1}{2}$.

On tire encore de l'équation (9) :

$$V_m = v + (v-c)[ve + \varphi(3,1)v^2e^2 + \varphi(5,2)v^3e^3 + \ldots + \varphi(2m-1,\ m-1)v^m e^m].$$

Cette formule élégante a été donnée par Condorcet. D'ailleurs l'hypothèse sur laquelle elle repose est inadmissible en général, et elle donnerait pour V_m une valeur inexacte, à supposer que l'on prît pour v une moyenne arithmétique entre les valeurs de v pour chaque juge, et qu'on eût un moyen de déterminer numériquement cette moyenne.

9. Il faut pourtant remarquer que cette formule, et toutes celles où l'on suppose les chances d'erreur des votants égales entre elles, deviendraient susceptibles d'application, si le conseil ou le tribunal n'était plus composé de juges permanents, mais de juges pris au hasard sur une liste nombreuse. La lettre v désignerait dans ces formules la moyenne entre les véritables valeurs de v pour chacune des personnes comprises sur la liste. C'est-à-dire que si la liste comprenait m_1 personnes pour lesquelles v a la valeur v_1, m^2 pour lesquelles v a la valeur v_2, etc., la lettre v, dans les formules dont il s'agit, exprimerait la moyenne

$$\frac{m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots}, \qquad (o)$$

En effet l'on peut concevoir que le premier juge désigné par le sort dépose son suffrage dans une urne A, le second dans une urne B, et ainsi de suite. Les urnes A, B, C,... sont substituées ainsi aux juges A, B, C,... du tribunal permanent. Mais alors la fraction (*o*) exprime évidemment la probabilité de la bonté du suffrage déposé dans l'urne A, et elle exprime encore la probabilité de la bonté du suffrage déposé dans chacune des urnes B, C,...., si le nombre des personnes comprises sur la liste de tirage est assez considérable pour que le retranchement des personnes déjà désignées par le sort n'altère pas sensiblement la valeur de la moyenne v.

Pour déterminer en pareil cas la valeur de v, le procédé le plus simple serait de déterminer par l'expérience le rapport du nombre des jugements rendus à la simple majorité, au nombre total des jugements. Car, en désignant par q ce rapport, et par $2m+1$ le nombre des juges, on aura

$$\begin{aligned} q &= \varphi(2m+1,\ m+1)v^{m+1}e^m + \varphi(2m+1,\ m)v^m e^{m+1} \\ &= \varphi(2m+1,\ m)v^m(1-v)^m; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \sqrt[m]{\frac{q}{\varphi(2m+1,\ m)}}}.$$

En conséquence, pour que les valeurs de v soient réelles, il faut qu'on ait

$$q > \varphi(2m+1,\ m).\frac{1}{4^m}.$$

Si le tribunal était composé d'un nombre pair de votants, désigné par $2m$, on trouverait de même, en appelant q le rapport du nombre des cas de partage au nombre total des délibérées,

$$v = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \sqrt[m]{\frac{q}{\varphi(2m,\ m)}}}.$$

Enfin, si l'on connaissait la probabilité V_m du bien jugé d'un tribunal formé de $2m+1$ votants, on déterminerait la valeur de v, en résolvant par rapport à v l'équation (8), du degré $2m+1$, après qu'on y aurait substitué pour e sa valeur $1-v$.

10. La probabilité du bien jugé, quand on sait que le jugement a été rendu à la majorité simple, par un tribunal formé de $2m+1$ juges, a pour valeur

$$\frac{\varphi(2m+1,\, m+1)v^{m+1}e^{m}}{\varphi(2m+1,\, m+1)v^{m+1}e^{m}+\varphi(2m+1,\, m)v^{m}e^{m+1}} = \frac{v}{v+e} = v.$$

C'est-à-dire que, dans un très grand nombre de jugements rendus à la majorité simple, le rapport du nombre des bien jugés au nombre des mal jugés sera sensiblement le même que le rapport du nombre des jugements vrais au nombre des jugements erronnés pour chaque juge en particulier.

En général, la probabilité du bien jugé, quand on sait que le jugement a été rendu à la pluralité de $m+i$ voix contre $m-i+1$, a pour valeur

$$\frac{\varphi(2m+1,\, m+i)v^{m+i}e^{m-i+1}}{\varphi(2m+1,\, m+i)v^{m+i}e^{m-i+1}+\varphi(2m+1,\, m-i+1)v^{m-i+1}e^{m+i}} = \frac{v^{2i+1}}{v^{2i+1}+e^{2i+1}}.$$

Elle est par conséquent la même que si le jugement avait été rendu à l'unanimité par un tribunal composé seulement de $2i+1$ juges, pour chacun desquels la chance du bien jugé aurait été égale à v. En d'autres termes, la probabilité du bien jugé ne dépendra pas du nombre absolu des suffrages, mais de la différence entre les suffrages affirmatifs et les suffrages négatifs.

En conséquence, imaginons deux tribunaux, l'un de $2m+1$ juges, l'autre de $2m_1+1$, m_1 étant supposé $> m$, et la probabilité du jugement individuel v étant la même pour les deux tribunaux. Quand l'un et l'autre auront jugé un très grand nombre N d'affaires, si l'on fait une catégorie à part des N' affaires jugées à la pluralité de $2i-1$ voix par le premier tribunal, et une autre des N_1' affaires jugées à la même pluralité par le second tribunal, le nombre N_1' sera en général plus petit que le nombre N'; mais le rapport du nombre des bien jugés au nombre des mal jugés sera sensiblement le même dans l'une et dans l'autre série.

11. Si les mêmes affaires, en grand nombre, étaient soumises successivement à la décision de plusieurs tribunaux, on pourrait cal-

culer la probabilité du bien jugé pour chaque tribunal, de même que l'on calcule, par les formules données dans les articles précédents, la probabilité du bien jugé pour les différents juges dont un tribunal se compose, quand on a tenu note de la concordance ou de la discordance des voix dans une longue série d'affaires. Il semble donc que l'institution de l'*appel* et la publicité de la statistique judiciaire dans un pays tel que la France doivent conduire à la détermination de ces quantités désignées plus haut par V, d'où l'on tirerait ensuite, comme il a été dit, la valeur moyenne de v. Mais il y a à cet égard plusieurs remarques essentielles à faire.

En premier lieu les procès, et surtout les procès civils, présentent souvent à juger des questions complexes, et se transforment dans les différentes phases de la procédure. Le point de fait ou de droit soumis aux juges d'appel peut différer notablement du point jugé en première instance; et l'appelant peut gagner sa cause, sans que le jugement d'appel soit à proprement parler une infirmation de celui de première instance. Il en est autrement à l'égard des pourvois en cassation, attendu que le demandeur ne peut faire valoir que des moyens de droit tirés de la substance même de l'arrêt attaqué; mais d'un autre côté, si la cassation d'un arrêt indique que la cour d'appel a mal jugé (ou du moins a jugé contrairement à la doctrine de la cour de cassation) dans un des points de la question complexe qui lui était soumise, le rejet du pourvoi, comme le savent toutes les personnes à qui les éléments de notre droit français ne sont point étrangers, n'indique pas que la cour d'appel ait bien jugé, ni que le fond de son arrêt soit approuvé par la cour de cassation.

Si l'on veut écarter cette première considération, dont en tout cas ni la statistique judiciaire, ni l'analyse combinatoire ne peuvent tenir compte, il faudra observer que l'appel ne saisit les juges du second ressort que de la minorité des affaires jugées en premier ressort. La méthode dont il s'agit ici ne pourra donc en aucun cas déterminer la quantité V pour les tribunaux du premier ressort que par rapport à la catégorie d'affaires dont il y a appel. A la vérité, si le pur caprice des plaideurs déterminait l'appel, la quantité V serait la même pour les procès dont on appelle et pour ceux dont on n'appelle pas. Il en serait de même, si, pour déterminer l'appel ou l'acquiescement, il n'y avait, outre le caprice des plaideurs, que le degré d'importance pécuniaire du procès; car il est naturel de croire que les procès d'une faible importance pécuniaire présentent l'un dans l'autre autant de difficultés à résoudre que ceux dont l'importance est grande, et que des magistrats consciencieux apportent le même soin à les résoudre selon les principes de l'équité et du droit. Mais on doit admettre encore que le plaideur vaincu acquiesce souvent par le sentiment qu'il a de la faiblesse de sa cause; de sorte qu'il se trouve notablement plus de procès bien jugés en premier ressort parmi ceux auxquels on acquiesce, que parmi ceux qui sont déférés aux juges du second ressort.

Le personnel des tribunaux se renouvelle avec le temps; la législation varie; la jurisprudence s'affermit sur certains points, et l'on voit surgir de nouvelles questions controversées; les quantités V et v doivent donc varier avec le temps. Pour n'embrasser qu'une période où ces quantités restent sensiblement invariables, et pour avoir néanmoins à sa disposition un nombre suffisant de décisions, il ne faut pas se restreindre à un petit nombre de tribunaux de première instance ou d'appel. Il faut, par exemple, employer les chiffres que l'administration publie annuellement, et qui se rapportent à la France entière. Cela revient à supposer qu'il n'y a en France qu'un siége de première instance et un siége d'appel, où sont appelés à siéger chaque tribunal de première instance et chaque tribunal d'appel, de manière que la chance pour un plaideur de tomber sur une cour d'appel déterminée, soit égale au nombre des appels plaidés annuellement devant cette cour, divisé par le nombre annuel des appels pour toute la France. Si le tribunal (1), dont la chance de bien juger est V_1, juge annuellement m_1 procès dont il y a appel, la quantité V qu'on déterminera pour le siége fictif de première instance, tel que nous venons de le définir, sera égale à

$$\frac{m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3 + \text{etc.}}{m_1 + m_2 + m_3 + \text{etc.}}.$$

Pour le siége fictif d'appel on aura de même

$$V' = \frac{m'_1 V'_1 + m'_2 V'_2 + m'_3 V'_3 + \text{etc.}}{m' n_2 + n'_3 + \text{etc.}},$$

les nombres V'_1, $V'_2, \ldots m'_1$, $m'_2, \ldots$ relatifs à chaque cour d'appel, étant suffisamment définis d'après ce qui précède.

12. Sous l'empire de la loi du 16 août 1790, les tribunaux de districts étaient réciproquement juges d'appel les uns des autres; la constitution de l'an III avait maintenu le même système, en réduisant seulement le nombre des tribunaux à un par département. A la faveur d'une telle organisation judiciaire, les quantités V, V' devenaient égales entre elles, et en appelant q le rapport du nombre des arrêts infirmés au nombre des arrêts attaqués, on aurait eu

$$q = 2V - 2V^2, \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{q}{2}}.$$

Rien ne serait donc plus facile que la détermination de la moyenne V pour cette époque, si la statistique judiciaire avait pu être dressée dans ces temps de troubles civils, qui devaient d'ailleurs apporter de notables perturbations, même dans le cours de la justice ordinaire.

Un système plus compliqué, mais jusqu'à un certain point analogue, règne encore en France, au sujet de l'appel des jugements de police correctionnelle. Dans les départements où ne siége pas de cour royale, les jugements de cette espèce rendus en premier ressort par les tribunaux d'arrondissement, sont déférés en appel au tribunal du chef-lieu du département où cinq juges doivent siéger pour vider l'appel (*).

Les jugements rendus en premier ressort par le tribunal du chef-lieu où ne siégent alors communément que trois juges, sont déférés, selon les distances, soit au tribunal d'un chef-lieu voisin, soit à la cour royale, qui reçoit d'ailleurs indistinctement les appels de tous les tribunaux de police correctionnelle compris dans le département où elle siége (**).

(*) Pour quelques départements les chefs-lieux judiciaires ne sont pas les mêmes que les chefs-lieux administratifs; mais cela ne change rien au système.

(**) D'après le tableau officiel annexé au décret du 18 août 1810, et dressé en exécution de l'article 200 du Code d'Instruction criminelle, il n'y a que huit tribunaux de chefs-lieux, sur 86, dont les appels ressortent à un tribunal chef-lieu de département voisin, au lieu de ressortir à la cour royale, selon la règle la

Appelons V la probabilité du bien jugé par les tribunaux d'arrondissement formés de trois juges, V' la même probabilité pour les tribunaux de chefs-lieux où cinq juges prononcent sur l'appel, V'' la même probabilité pour les cours royales. Appelons encore q le rapport du nombre des jugements infirmés au nombre des jugements déférés des tribunaux d'arrondissement aux tribunaux de chefs-lieux; q' le même rapport pour les jugements déférés aux cours royales. On aura d'abord

$$q = \mathrm{V} + \mathrm{V}' - 2\mathrm{VV}'. \qquad (10)$$

Mais, d'après nos institutions et nos mœurs, on ne peut guère admettre que la valeur moyenne de v soit autre pour les juges appelés à siéger dans les tribunaux des chefs-lieux de départements (*), qu'elle ne l'est pour les juges des tribunaux d'arrondissement. Leur autorité en matière civile est généralement réputée la même; et l'erreur de cette hypothèse, en admettant qu'il y ait erreur, doit tomber entre les limites de celles qui résultent de l'imperfection des données, ou d'autres circonstances dont l'analyse est obligée de faire abstraction. Cela posé, on aura

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{V} &= v^3 + 3v^2(1-v) \\ \mathrm{V}' &= v^5 + 5v^4(1-v) + 10v^3(1-v)^2, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

et par conséquent trois équations pour déterminer v, V et V'.

Si l'on admet en outre que la probabilité du bien jugé, pour les tribunaux correctionnels de trois juges est la même, relativement à la série des causes portées en appel devant les tribunaux de chefs-lieux, et relativement à la série des causes que l'appel défère aux cours royales, on aura

$$q' = \mathrm{V} + \mathrm{V}'' - 2\mathrm{VV}'', \qquad (12)$$

ce qui déterminera V''.

---

plus générale. Ce sont les tribunaux de Périgueux, Perpignan, Tours, Chartres, Auxerre, Saintes, Bourbon-Vendée et Quimper.

(*) On doit remarquer qu'il ne s'agit point des chefs-lieux de départements, qui sont en même temps des résidences de cours royales.

Cette seconde hypothèse admise, il serait facile de s'affranchir de la première, à l'aide de documents que la statistique judiciaire pourrait et devrait fournir. Il suffirait de distinguer, parmi les jugements de police correctionnelle déférés aux cours royales, ceux qui ont été rendus par les tribunaux d'arrondissement, d'avec ceux qui émanent de tribunaux de chefs-lieux. Appelons q'' et q''' les valeurs de q' relatives à l'une et à l'autre de ces séries ; il viendra d'abord :

$$q'' = V + V'' - 2VV''. \qquad (13)$$

Désignons par v' la chance moyenne du bien jugé pour le juge du tribunal de chef-lieu; par V et V', la probabilité du bien jugé de ce tribunal, selon qu'il juge en appel ou en premier ressort, le nombre des juges étant de cinq dans le premier cas et de trois dans le second, on aura

$$\left.\begin{aligned} V' &= v'^5 + 5v'^4(1-v') + 10v'^3(1-v')^2, \\ V'_1 &= v'^3 + 3v'^2(1-v'), \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

et ensuite

$$q''' = V'_1 + V'' - 2V'_1V''. \qquad (15)$$

Les équations (10), (13), (14) et (15) seront suffisantes pour déterminer V, V', V'_1, V'' et v'.

Mais nous verrons, par un examen attentif des documents statistiques, qu'en fait la seconde hypothèse n'est pas rigoureusement admissible, tandis que rien ne milite contre la vraisemblance de la première.

13. Les *Comptes rendus* de l'administration de la justice criminelle en France nous apprennent que dans les *dix années* écoulées de 1826 à 1835 inclusivement, il a été statué en appel de police correctionnelle sur le sort de 78208 prévenus. On a, pour chaque année de cette période décennale, un tableau présentant les résultats des appels portés devant chaque cour royale et devant chaque tribunal de chef-lieu, de sorte qu'il est facile d'en déduire les valeurs des rapports q, q'. Mais les tableaux ne distinguent point, parmi les appels portés devant les cours royales, ceux qui correspondent à des jugements rendus en premier ressort par des tribunaux d'arrondissement, d'avec ceux qui correspondent à des jugements rendus, aussi en premier ressort, par

des tribunaux de chefs-lieux. C'est une lacune facile à combler, et que l'on doit désirer de voir combler pour l'avenir.

Nous avons extrait des tableaux donnés par les *comptes rendus*, le tableau suivant, où se trouvent tous les éléments de la solution numérique des questions que nous nous proposons de traiter dans ce Mémoire.

TABLEAU (*A*).

Appels des tribunaux de police correctionnelle.

	Années.	Nombre des prévenus à l'égard desquels ont été rendus des arrêts ou jugements					
		qui confirment des jugements		qui émendent ou modifient en			
		d'aquittem.	de condamnat.	condamnant des individus acquittés	acquittant des condamnés.	aggravant la peine	diminuant la peine.
Appels portés devant les tribunaux de chefs-lieux de départements	1826	558	984	408	311	293	383
	1827	760	1069	533	382	272	408
	1828	683	1051	478	395	311	379
	1829	798	1150	798	332	366	433
	1830	885	998	281	333	257	351
	1831	378	987	358	270	141	450
	1832	657	1228	408	311	215	506
	1833	488	1176	442	298	178	436
	1834	537	1177	445	299	226	366
	1835	591	1327	542	299	214	425
	Totaux..	6335	11147	4693	3230	2473	4137
Appels portés devant les cours royales.	1826	694	1679	419	456	333	620
	1827	782	1585	492	475	275	639
	1828	819	1816	438	529	302	713
	1829	754	1802	502	484	329	757
	1830	570	1603	433	425	185	659
	1831	575	1747	254	496	190	831
	1832	759	1917	508	578	301	878
	1833	714	2095	516	425	332	907
	1834	556	2240	569	459	281	874
	1835	718	2552	701	489	361	801
	Totaux..	6941	19036	4832	4816	2889	7679

Il est bon de faire dès à présent les remarques suivantes :

1°. Le nombre des prévenus qui subissent les deux degrés de juridiction, est très petit en comparaison du nombre total des prévenus traduits en police correctionnelle. Dans notre période décennale, le nombre total des prévenus a été 1906169, ce qui ne donne qu'environ 4 prévenus sur 100, appelés à subir les deux degrés de juridiction. Ce fait tient à la fois au peu de gravité de la plupart des délits et des peines, et au peu de chances que la plupart des prévenus ont d'être acquittés, soit en premier ressort, soit en appel. En effet la plupart des prévenus sont poursuivis pour des délits forestiers, ou autres analogues, à la suite de procès-verbaux dressés par des agents dont le témoignage écrit fait foi jusqu'à inscription de faux, et la voie de l'inscription de faux, n'est suivie que dans des cas fort rares. Aussi le nombre des prévenus acquittés en premier ressort, pendant la période décennale, n'a-t-il été que de 273361, environ 0,143 du nombre total des prévenus.

2°. Les 27 cours royales ont statué en appel sur le sort de 46193 prévenus, tandis que 59 tribunaux de chefs-lieux n'en ont eu à juger que 32015 : aussi les cours royales ont-elles une chambre spécialement affectée à cette branche du service; et l'on peut supposer que des magistrats, constamment occupés d'affaires du même genre, dans le cours d'une année judiciaire, prennent l'habitude d'une plus grande célérité de décision.

3°. Le rapport entre le nombre des prévenus jugés en premier ressort et celui des prévenus appelants ou intimés, varie selon que l'appel doit être porté devant une cour royale ou devant un tribunal de chef-lieu. Cela résulte d'un dépouillement que la longueur du travail nous a empêché de faire pour toutes les années de la période, mais qu'il suffit d'avoir fait pour les deux années 1834 et 1835, et dont les *Comptes rendus* donnent tous les éléments. Le rapport dont il s'agit a eu pour valeur :

	en 1834	en 1835
A l'égard des tribunaux qui ressortent en appel aux cours royales........................	0,0538,	0,0578;
A l'égard des tribunaux qui ressortent en appel aux tribunaux de chefs-lieux................	0,0436,	0,0492.

Ainsi il y a des causes, en vertu desquelles on appelle plus facilement des jugements de police correctionnelle, lorsque l'appel doit être porté devant les cours royales; et l'une de ces causes est manifeste, car on conçoit bien que pour les affaires jugées en première instance dans le lieu même où siége la cour, on doit user plus volontiers de la faculté d'appel. L'imperfection des *comptes rendus* dans cette partie nous empêche de reconnaître si d'autres causes se joignent à celle que l'on vient de signaler.

Quand la faculté d'appel est plus facilement ou plus légèrement exercée, il doit y avoir, proportion gardée, moins de jugements infirmés; il doit y avoir aussi un plus grand nombre de prévenus condamnables qui usent de la faculté d'appel, et qui sont effectivement condamnés, dans les deux degrés de juridiction. Nous verrons que le calcul confirme tous ces aperçus, et par suite ne nous permet pas d'admettre d'une manière absolue la seconde hypothèse posée dans l'article précédent.

4°. Les cours royales ont un penchant marqué à l'indulgence, en comparaison des tribunaux de chefs-lieux. Ainsi, sur 10000 prévenus qui subissent les deux degrés de juridiction, on en compte :

Pour les tribunaux de chefs-lieux.	1466	1009	772	1292
Pour les cours royales.........	1046	1043	625	1662
	acquittés en premier ressort et condamnés en appel.	condamnés en premier ressort et acquittés en appel.	dont la peine est aggravée en appel.	dont la peine est atténuée en appel.

Ce fait remarquable, sous le point de vue purement statistique, a échappé comme les précédents aux rédacteurs des rapports qui précèdent les *comptes rendus*, parce qu'on n'y a pas disposé les tableaux des appels de police correctionnelle, de manière à distinguer ce qui se rapporte aux cours royales d'avec ce qui se rapporte aux tribunaux de chefs-lieux. Il concorde avec la remarque faite depuis long-temps, et confirmée par les *comptes rendus*, que l'énergie de la répression pénale diminue d'autant plus qu'il s'est écoulé plus de temps entre le délit et le jugement. Les cours royales, chargées de vider un beaucoup plus grand nombre d'appels, doivent les vider plus tardivement, et dans le cas de détention du prévenu, après qu'il a subi un plus long emprisonnement préventif.

Le penchant plus grand à l'indulgence, de la part des cours royales, ressort d'autant plus qu'il y a, comme la statistique l'indique et comme le calcul des chances le confirme, une plus grande proportion de prévenus condamnables parmi ceux sur lesquels les cours royales statuent en appel, que parmi ceux qui sont jugés en appel par les tribunaux de chefs-lieux. Il faudra avoir égard à cette double circonstance dans l'interprétation des résultats du calcul.

14. En matière de police correctionnelle, les juges cumulent les fonctions attribuées séparément aux jurés et aux magistrats des cours d'assises, en matière de grand criminel. Ils prononcent sur la culpabilité du prévenu et sur l'application de la peine. Ainsi pour chaque prévenu, appelant ou intimé, il y a deux jugements distincts, susceptibles d'être confirmés ou infirmés séparément par le tribunal d'appel.

Nous ferons d'abord abstraction du jugement qui intervient sur la fixation de la peine, pour ne considérer que celui qui intervient sur la déclaration de culpabilité.

Pour les appels ressortant aux tribunaux de chefs-lieux, le nombre des prévenus qui ont subi les deux degrés de juridiction pendant la période décennale est 32015; le nombre des prévenus pour lesquels le premier jugement a été infirmé, en ce qui concerne la déclaration de culpabilité, est, d'après le tableau (A), $4693+3230=7923$. On a donc

$$q=\frac{7923}{32015}=0,2475.$$

Par suite, on tire des équations (10) et (11),

$$v=0,742,\quad V=0,834,\quad V'=0,887.$$

D'après ces valeurs, on aurait 0,975 pour la probabilité de la bonté du jugement rendu en dernier ressort par le tribunal d'appel, quand il s'agit d'un jugement confirmatif, et seulement 0,610 quand il s'agit d'un jugement infirmatif.

A l'égard des appels qui ressortent aux cours royales, le nombre total des prévenus est 46193; le nombre de ceux pour lesquels le premier jugement a été infirmé en ce qui concerne la déclaration de culpabilité, est $4832 + 4816 = 9648$. On a donc

$$q' = \frac{9648}{46193} = 0,2089;$$

d'où, en vertu de l'équation (12) et de la valeur précédente de V,

$$V'' = 0,935.$$

On en tire, pour la probabilité de la bonté du jugement confirmatif, 0,987, et pour celle de la bonté du jugement infirmatif, 0,744.

La loi n'exige que la présence de cinq juges pour vider les appels de police correctionnelle, devant les cours royales comme devant les tribunaux de chefs-lieux. A la vérité, les chambres des appels de police correctionnelle étant aussi chargées subsidiairement de statuer en appel sur certaines affaires civiles, pour lesquelles la loi exige le concours de sept juges au moins, il arrive assez fréquemment que plus de cinq juges prennent part au jugement des appels de police correctionnelle. Mais dans le plus grand nombre des cas, les arrêts sont rendus au *minimum* légal de cinq juges; et pour rendre les résultats comparables, nous adoptons partout l'hypothèse que le nombre des juges qui concourent à un arrêt ou jugement, est celui du *minimum* légal.

D'après cela, si l'on désigne par v'' la probabilité du bien jugé pour un juge de cour royale, on aura

$$V'' = v''^5 + 5v''^4(1 - v'') + 10v''^3(1 - v'')^2.$$

On tirera de cette équation, après y avoir substitué la valeur trouvée précédemment pour V'',

$$v'' = 0,792.$$

15. On conclut du tableau (A) que, dans la période décennale, 17757 prévenus ont été déclarés coupables, tant en premier ressort qu'en appel devant les tribunaux de chefs-lieux. Dans ce nombre figurent $2473 + 4137 = 6610$ prévenus pour lesquels il y a eu désaccord entre les tribunaux d'instance et d'appel sur l'arbitrage de la peine : en conséquence on a, en ce qui concerne cette autre

espèce de jugement,

$$q = \frac{6610}{17757} = 0,3722;$$

d'où

$$v = 0,658, \quad V = 0,730, \quad V' = 0,778.$$

Le nombre des prévenus déclarés coupables tant en premier ressort qu'en appel devant les cours royales, est de 29604; et dans ce nombre figurent $2889 + 7679 = 10568$ prévenus pour lesquels le tribunal et la cour sont tombés en désaccord sur l'arbitrage de la peine. Par conséquent,

$$q' = \frac{10568}{29604} = 0,3570,$$

d'où

$$V'' = 0,811.$$

Ces valeurs de V' et de V'' donnent encore une supériorité au jugement de la cour royale sur celui du tribunal de chef-lieu, en ce qui concerne l'appréciation de la peine; mais cette supériorité est moindre que pour le jugement sur la déclaration de culpabilité. La valeur de V'' substituée dans l'équation (16) donne

$$v'' = 0,680.$$

Au surplus, les valeurs numériques trouvées dans le précédent article et dans celui ci, ne doivent être acceptées que provisoirement et pour servir de termes de comparaison à d'autres résultats que nous trouverons dans la suite de ce mémoire, en appliquant à la même question d'autres méthodes d'analyse, mieux appropriées à sa nature spéciale.

16. En matière civile, si nous désignons par V la valeur moyenne de la chance du bien jugé, pour les tribunaux de première instance du royaume et pour les causes qui vont en appel; par V' la valeur moyenne de la chance du bien jugé pour les cours royales; par q le rapport du nombre des jugements infirmés au nombre tota des causes d'appel, nous aurons, comme dans l'art. 11,

$$q = V + V' - 2VV'; \qquad (10)$$

mais cette équation ne suffit pas pour déterminer séparément V, V';

et la même indétermination aurait lieu, s'il s'agissait des appels des sentences de juges-de-paix, appels portés devant les tribunaux d'arrondissement.

L'indétermination ne pouvant être levée qu'à la faveur d'une hypothèse, M. Poisson en fait une analogue à celle qui a été adoptée ci-dessus, mais dans des circonstances différentes à l'égard des appels de police correctionnelle, portés devant les tribunaux de chefs-lieux. Il suppose que la chance moyenne v est la même pour les juges de première instance et pour les juges de cours royales; il admet en outre que les jugements de première instance sont rendus tous par trois juges, et tous ceux d'appel par sept juges : les nombres 3 et 7 étant effectivement les *minima* fixés par la loi et que l'on dépasse rarement. Cette double supposition donne

$$\left.\begin{aligned} V &= v^3 + 3v^2(1-v), \\ V' &= v^7 + 7v^6(1-v) + 21v^5(1-v)^2 + 35v^4(1-v)^3. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Au moyen des *comptes rendus* de l'administration de la justice civile en France, depuis le commencement de l'année judiciaire 1830 — 31, jusqu'à la fin de l'année civile 1834, nous avons formé le tableau suivant, où nous avons distingué, avec plus de netteté que ne le font les *Comptes rendus*, les appels de jugements émanés des tribunaux de commerce, d'avec les appels de jugements rendus en premier ressort par les tribunaux civils, composés de magistrats permanents.

TABLEAU (*B*).

Années.	Tribunaux civils.			Tribunaux de commerce.		
	Nombre des appels.	Jugements infirmés en tout ou en partie	Rapports q.	Nombre des appels	Jugements infirmés en tout ou en partie.	Rapports q.
Année judiciaire 1830—31.	7578	2476	0.3268	1079	339	0,3142
Trois derniers mois de 1831.	1364	388	0,2845	224	51	0,2866
1832.	7766	2465	0,3174	1000	311	0,3110
1833.	8087	2617	0,3236	860	341	0,3965
1834.	7365	2227	0,3024	872	279	0,3199
Totaux.........	32160	10173	0,3163	4035	1321	0,3274

Ce tableau constate d'abord un fait bien remarquable : l'égalité du rapport q pour les tribunaux civils et pour les tribunaux de commerce; car la faible différence d'un centième tombe entre les limites des anomalies du hasard, eu égard surtout à l'ordre de grandeur des nombres qui servent à déterminer le rapport q, en ce qui concerne les tribunaux de commerce. Il faut donc que les avantages résultant pour les juges civils de la permanence de leurs fonctions, de leurs études professionnelles, soient compensés presque exactement par la justesse d'appréciation que la pratique des affaires commerciales donne aux notables commerçants investis temporairement de la mission de vider les démêlés que ce genre d'affaires suscite.

Dans les arrondissements judiciaires qui n'ont pas de tribunaux spéciaux de commerce, le tribunal civil en remplit les fonctions et juge *commercialement* les affaires commerciales. Il serait intéressant de distinguer à l'avenir dans les *Comptes rendus* les appels des jugements des tribunaux civils jugeant en matière civile, d'avec les appels des jugements des mêmes tribunaux jugeant en matière commerciale. On verrait par là si le rapport q est le même, en matière commerciale, pour les tribunaux de commerce et pour les tribunaux civils, ou si, dans cet ordre spécial d'affaires, il y a une différence, à l'avantage, soit des tribunaux civils, soit des tribunaux de commerce.

En 1834, sur 29594 jugements contradictoires et définitifs rendus en matière commerciale, il y en a eu 25642 rendus par les tribunaux de commerce, et seulement 3952 rendus par les tribunaux civils, jugeant commercialement, c'est-à-dire moins d'un septième du nombre total. D'un autre côté le nombre des jugements contradictoires et définitifs rendus en matière civile par les tribunaux de première instance, a été de 61237, nombre qui surpasse quinze fois celui des jugements contradictoires et définitifs, rendus par les mêmes tribunaux en matière commerciale. D'après ces indications, il y a tout lieu de croire que dans les causes portées par la voie de l'appel des tribunaux civils de première instance aux cours royales, la proportion des affaires jugées commercialement est trop faible pour influer d'une manière notable sur la valeur du rapport q, en ce qui concerne les tribunaux civils.

17. En substituant pour q dans l'équation (10) la valeur 0,3165, on déduit des équations (10) et (17),

$$v = 0{,}696, \quad \mathrm{V} = 0{,}779, \quad \mathrm{V}' = 0{,}869.$$

Au moyen de ces valeurs, la probabilité moyenne de la bonté d'un arrêt de cour royale serait 0,959 pour un arrêt confirmatif, et seulement 0,652 pour un arrêt infirmatif.

Mais l'hypothèse à laquelle les valeurs ainsi déterminées se rattachent, est évidemment trop défavorable aux cours royales, en ce qu'elle réduit leur supériorité sur les tribunaux de première instance à ne dépendre que de la supériorité du nombre des juges, tandis que la constitution hiérarchique des corps judiciaires doit concentrer dans les tribunaux supérieurs plus d'expérience et de lumières. L'influence de cette supériorité de lumières doit se manifester d'une manière bien plus sensible dans la solution des questions scientifiques de droit civil, que dans des causes de police correctionnelle que l'on aurait très bien pu déférer aux jurés, c'est-à-dire à des juges temporaires, sans études professionnelles, si l'on n'avait craint leur extrême indulgence plus que leur défaut de lumières.

D'autres documents statistiques viennent confirmer pleinement cet aperçu, et déterminer des limites assez étroites, entre lesquelles sont renfermées les valeurs de v, V, V'.

En effet, on lit à la page XXIX du rapport placé en tête du *Compte rendu de l'administration de la justice civile* pour 1834, que le rapport du nombre des arrêts de cassation au nombre des pourvois, est 0,19 pour les pourvois en cassation formés contre des arrêts de cours royales, jugeant en matière civile, et 0,39 pour les pourvois en cassation formés contre des jugements des tribunaux de première instance, non susceptibles d'appel. Dans quelques années ces rapports seront connus avec une plus grande précision : provisoirement nous appliquerons le calcul aux valeurs qui viennent d'être données.

Continuons de désigner par V et V', les valeurs moyennes de la chance du bien jugé pour les tribunaux de première instance et pour les cours royales; désignons par V'' la chance analogue pour la cour de cassation; par q' le rapport du nombre des arrêts de cassation au nombre des pourvois, à l'égard des tribunaux de première instance; par q'' le même rapport à l'égard des cours royales : on aura

$$q' = V + V'' - 2VV'', \qquad (18)$$
$$q'' = V' + V'' - 2V'V'', \qquad (19)$$

et en éliminant V'',

$$V(1 - 2q'') - V'(1 - 2q') = q' - q''. \qquad (20)$$

Il suffirait de combiner l'équation (10) avec celle-ci, pour déterminer séparément V et V', indépendamment de l'hypothèse admise par M. Poisson, si l'on pouvait admettre d'autre part que les valeurs de V, V' sont les mêmes pour la série des affaires qui vont en appel devant les cours royales, et pour celle des affaires dont la cour suprême est saisie par suite de pourvois en cassation.

Or, il suffit d'être un peu familiarisé avec les principes de notre organisation judiciaire pour présumer *à priori* que cette dernière hypothèse n'est pas admissible, et que les questions délicates, à l'occasion desquelles sont formés le plus souvent les pourvois en cassation, doivent exposer les tribunaux de première instance et les cours royales à plus de chances d'erreur qu'il n'y en a moyennement pour les affaires qui subissent seulement l'épreuve de l'appel.

On peut d'ailleurs démontrer par le calcul l'inadmissibilité de l'hypothèse dont il s'agit, au moyen des valeurs numériques que la statistique judiciaire assigne aux rapports q, q', q'', puisqu'il en résulterait pour V', en vertu des équations (10) et (20), une valeur plus grande que l'unité.

Observons que si l'on fait successivement dans l'équation (18), $V''=1$, $V''=V$, on en tirera deux valeurs de V, l'une certainement plus petite, l'autre certainement plus grande que la vraie valeur; car d'une part, la cour de cassation est elle-même sujette à l'erreur, et il lui arrive quelquefois de réformer sa propre jurisprudence; d'autre part il serait absurde de supposer $V'' < V$, ou la chance moyenne du bien jugé, pour la cour de cassation, plus petite que la chance moyenne du bien jugé, dans la même série d'affaires, pour les tribunaux de première instance. On déduit de là, au moyen de la valeur $q' = 0,39$,

$$V > 0,610, \quad V < 0,734. \qquad (21)$$

Le même raisonnement, appliqué à l'équation (19), donnera

$$V' > 0{,}810, \quad V' < 0{,}894. \qquad (22)$$

Mais, puisque dans l'hypothèse $V' = V''$, on a $V' = 0{,}894$, et que, quand V' diminue, V'' augmente, le produit

$$\left(V' - \tfrac{1}{2}\right)\left(V'' - \tfrac{1}{2}\right)$$

étant constant, en vertu de la même équation, l'inégalité $V' < 0{,}894$ entraînera

$$V'' > 0{,}894.$$

On aura donc une limite supérieure de V en faisant dans l'équation (18) $V'' = 0{,}894$; car il n'y a aucune raison de supposer que V'' puisse tomber, à l'égard de la série des pourvois contre des jugements de tribunaux de première instance, au-dessous de la limite que le même rapport ne franchit pas, à l'égard de la série des pourvois formés contre des arrêts de cours royales. Par suite, les inégalités (21) pourront être remplacées par les suivantes

$$V > 0{,}610, \quad V < 0{,}640,$$

auxquelles correspondent

$$v > 0{,}574, \quad v < 0{,}595.$$

Comme on le voit, cette analyse resserre les valeurs inconnues de V et surtout celle de v, relativement à la série des affaires qui entraînent pourvoi, entre des limites fort rapprochées; et il y a lieu de croire que les valeurs inconnues sont plus voisines des limites inférieures que des limites supérieures.

Aux inégalités (22) correspondront

$$v' > 0{,}649, \quad v' < 0{,}701,$$

v' désignant, pour les juges de cours royales, l'analogue de v pour les juges de tribunaux de première instance ; et il y a, à plus forte raison, lieu de croire que les vraies valeurs tombent plus près des limites inférieures que des limites supérieures.

D'après les valeurs des limites, on a nécessairement $v' > v$, pour la série des affaires qui entraînent pourvoi.

En prenant pour V, V' leurs limites inférieures, qui n'en peuvent pas différer beaucoup (savoir, pour V, 0,610 et pour V', 0,810), on aura sensiblement $V' = \frac{4}{3}V$. Relativement à la série des affaires qui entraînent appel, et auxquelles se rapporte la valeur de q, le rapport de V' à V doit être moindre, parce qu'elles ne présentent pas en général d'aussi graves difficultés à résoudre, et que, plus les difficultés sont grandes, plus la supériorité de lumières des juges d'appel doit être sensible. Si donc nous faisons dans l'équation (10), $V' = \frac{4}{3}V$, ce qui donne

$$V = 0{,}707, \quad V' = 0{,}943,$$

et par suite

$$v = 0{,}642, \quad v' = 0{,}754,$$

nous aurons une limite inférieure de V, et une limite supérieure de V', relativement à la série des appels ; tandis que nous avons obtenu, par une autre hypothèse extrême $v = v'$, une limite inférieure de V' et une limite supérieure de V.

Ainsi, relativement à la série des affaires qui entraînent appel, nous pourrons poser

$$V \begin{cases} > 0{,}707 \\ < 0{,}779 \end{cases}, \quad V' \begin{cases} > 0{,}869 \\ < 0{,}943 \end{cases},$$

$$v \begin{cases} > 0{,}642 \\ < 0{,}696 \end{cases}, \quad v' \begin{cases} > 0{,}696 \\ < 0{,}754 \end{cases}.$$

Les valeurs de V et de V', correspondantes à l'hypothèse extrême $V' = \frac{4}{3}V$, donnent pour la probabilité de la bonté de l'arrêt confirmatif, 0,976, et pour celle de la bonté de l'arrêt infirmatif, 0,873.

De pareils nombres sont beaucoup plus favorables que ceux qui correspondent à l'autre hypothèse extrême $v = v'$.

Il faut d'ailleurs se garder de confondre, ainsi qu'on l'a déjà fait observer dans l'art. 10, les valeurs de V et de v, pour les causes qui vont en appel ou en cassation, avec celles qui se rapporteraient à la généralité des causes jugées en première instance.

18. Quand la cour de cassation casse un arrêt de cour royale, elle renvoie les parties devant une autre cour royale qui juge identiquement le même point de droit. La probabilité du bien jugé de la cour de cassation a pour valeur

$$\frac{(1 - V')V''}{(1 - V')V'' + V'(1 - V'')} = \frac{1}{q''}(1 - V')V'',$$

et la probabilité que, la cour de cassation ayant bien jugé, la cour royale saisie du renvoi jugera bien aussi, est exprimée par

$$\frac{1}{q''}(1 - V')V''V';$$

de même

$$\frac{1}{q''}V'(1 - V'')(1 - V')$$

exprimera la probabilité que, la cour de cassation ayant mal à propos cassé, la cour royale saisie du renvoi adoptera néanmoins sa jurisprudence. Donc, si l'on désigne par r' le rapport entre le nombre des causes où la seconde cour royale aura jugé contrairement à la première, et le nombre total des causes renvoyées, on aura

$$r' = \frac{1}{q''}[(1 - V')V''V' + V'(1 - V'')(1 - V')] = \frac{V'(1 - V')}{q''}. \quad (23)$$

Si le rapport r' pouvait être donné avec une précision suffisante, on tirerait la valeur de V′ de cette équation, et ensuite celle de V″ de l'équation (19). Réciproquement, si l'on substitue au lieu de V′, dans l'équation (23), les limites supérieure et inférieure de V′ trouvées ci-dessus, et au lieu de q'' la valeur 0,19, on aura

pour $V' = 0,810$, $r' = 0,810$,
pour $V' = 0,894$, $r' = 0,499$.

Cette seconde valeur de r' n'est pas admissible; car, bien que le rapport r' ne soit pas encore connu avec une suffisante précision, on sait que le plus souvent la seconde cour royale juge dans le sens de la cour de cassation. Mais au reste, pour que l'équation (23) fût rigoureusement applicable, il faudrait que la seconde cour royale jugeât absolument comme elle le ferait, si elle ignorait l'arrêt de la cour de cassation. Or, il est au contraire vraisemblable que l'autorité qui s'attache à la jurisprudence de la cour de cassation contribue beaucoup à augmenter le nombre des cas où la cour saisie du renvoi juge dans le sens de l'arrêt de cassation, et contrairement à l'arrêt cassé.

Si r désigne, pour les tribunaux de première instance, l'analogue du rapport r' pour les cours royales, on aura pareillement

$$r = \frac{V(1 - V)}{q'},$$

d'où l'on tirera

$$\text{pour} \quad V = 0{,}610, \quad r = 0{,}610,$$
$$\text{pour} \quad V = 0{,}640, \quad r = 0{,}591.$$

Mais ces deux valeurs de r sont certainement trop faibles, à cause de l'autorité attachée à la jurisprudence connue de la cour de cassation, autorité qui doit agir sur les tribunaux inférieurs avec au moins autant d'efficacité que sur les cours royales.

19. Jusqu'à présent nous avons raisonné dans l'hypothèse que les causes d'erreur sont indépendantes pour chaque juge, en sorte que les cas où le juge A rencontre la vérité ou l'erreur se combinent indifféremment avec ceux où les juges B, C,... rencontrent eux-mêmes l'erreur ou la vérité, de la même manière que chaque face d'un dé se combine indifféremment avec toutes les faces d'un autre dé. Or, cela est vrai seulement des causes d'erreur que l'on peut appeler *subjectives*, de celles qui proviennent des circonstances accidentelles sous l'empire desquelles chaque juge en particulier se trouve placé, de son état de santé physique et morale, du degré auquel son attention est excitée, de ses habitudes d'esprit, de ses préjugés individuels, etc. Mais il y a d'autres causes d'erreur que l'on désignerait

convenablement par la qualification *d'objectives*, et qui sont de nature à influer en même temps sur le jugement de tous ceux qui prendront connaissance de l'affaire. Par suite de l'influence de ces causes objectives, il arrivera nécessairement que l'événement consistant dans l'erreur du juge A se combinera plus facilement ou plus fréquemment avec l'événement consistant dans l'erreur du juge B qu'avec l'événement contraire, et de même pour chacun des juges C, D, etc.

Revenons à notre exemple primitif, et supposons deux observateurs doués au même degré de perspicacité et d'expérience, dont on enregistre simultanément les pronostics météorologiques : v désigne pour chacun d'eux le rapport du nombre des pronostics vérifiés au nombre total des pronostics ; p désigne le rapport entre le nombre total des observations où les deux observateurs se sont trouvés d'accord, et le nombre total des observations. En vertu de l'équation (1) on doit avoir

$$p = 1 - 2v + 2v^2, \quad \text{ou} \quad v = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2p - 1}; \qquad (24)$$

et comme le registre des pronostics, combiné avec le registre des observations subséquentes, détermine les nombres v et p, on devra trouver entre v et p la relation exprimée par l'équation qui précède, s'il est vrai que les causes d'erreur soient indépendantes pour les deux observateurs.

Maintenant, supposons que l'on répartisse la série des pronostics en deux catégories, l'une comprenant par exemple ceux qui tombent entre l'équinoxe du printemps et l'équinoxe d'automne, et l'autre, ceux qui ont eu lieu de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe du printemps. Désignons par p_1, v_1, p_2, v_2 les valeurs de p et de v pour la première et pour la seconde série ; désignons aussi par μ_1, μ_2, les rapports des nombres de pronostics contenus dans la première et dans la seconde série, au nombre total des pronostics, de manière que $\mu_1 + \mu_2 = 1$. On devrait avoir, en vertu de l'équation (1),

$$p_1 = 1 - 2v_1 + 2v_1^2, \quad p_2 = 1 - 2v_2 + 2v_2^2,$$

ou

$$v_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2p_1 - 1}, \quad v_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2p_2 - 1};$$

et c'est en effet ce que les registres d'observations donneront, si dans chaque série les causes d'erreur sont indépendantes pour chacun des observateurs. On aura par conséquent

$$\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\mu_1\sqrt{2p_1 - 1} + \mu_2\sqrt{2p_2 - 1}\right).$$

D'un autre côté, si l'on substitue dans l'équation (24) pour p sa valeur, il viendra

$$\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2) - 1}.$$

Or, il est facile de s'assurer que, selon que l'on prendra les radicaux avec le signe positif ou avec le signe négatif, c'est-à-dire selon que l'on supposera pour chaque observateur la chance de réalisation du pronostic plus grande ou plus petite que $\frac{1}{2}$, la valeur précédente de ν, conclue de la série générale, sans distinction de catégories, sera plus grande ou plus petite que la valeur de ν, telle qu'on l'obtient en tenant compte de la distribution des observations par catégories, valeur qui est évidemment égale à $\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2$.

Ceci revient à établir l'inégalité

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2) - 1} > \mu_1 \frac{1}{2}\sqrt{2p_1 - 1} + \mu_2 \frac{1}{2}\sqrt{2p_2 - 1},$$

ou plus simplement en posant

$$\frac{1}{2}\sqrt{2p_1 - 1} = z_1, \quad \frac{1}{2}\sqrt{2p_2 - 1} = z_2,$$

$$\sqrt{\mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2} > \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2,$$

inégalité qui conduit à

$$\mu_1\mu_2(z_1 - z_2)^2 > 0,$$

quand on développe en ayant égard à la relation $\mu_1 + \mu_2 = 1$.

Pour plus de généralité, concevons que l'on ait classé la totalité des observations en n catégories, chacune assez nombreuse pour que la loi des grands nombres puisse s'y appliquer; désignons par p_1, p_2, $p_3, \ldots p_n$, ν_1, ν_2, $\nu_3, \ldots \nu_n$, les valeurs des rapports p et ν pour chaque catégorie; désignons aussi par μ_i le rapport du nombre des observations comprises dans la catégorie (i) au nombre des observations comprises dans la série totale, de manière qu'on ait

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_n = 1.$$

La véritable valeur du rapport ν sera exprimée par

$$\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3 + \ldots + \mu_n\nu_n;$$

et en supposant maintenant que dans chaque catégorie, les causes d'erreurs agissent indépendamment sur chaque observateur, on aura rigoureusement

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\mu_1 \sqrt{2p_1 - 1} + \mu_2 \sqrt{2p_2 - 1} + \ldots + \mu_n \sqrt{2p_n - 1}\right), \quad (25)$$

l'influence des causes d'erreur que nous avons nommées objectives, et qui inclinent à l'erreur les deux observateurs à la fois, se trouvant ainsi éliminée.

Afin de simplifier le raisonnement, nous admettons que tous les nombres ν_1, $\nu_2, \ldots \nu_n$ surpassent $\frac{1}{2}$, et qu'ainsi tous les radicaux doivent être pris positivement: l'hypothèse contraire sera plus loin l'objet d'un examen spécial.

Or, si l'on n'avait pas pu faire, ou si l'on n'avait pas fait la classification par catégories, et si l'on avait admis l'indépendance des causes d'erreurs relativement à la série générale, on aurait tiré de l'équation (24)

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2p - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3 + \ldots + \mu_n p_n) - 1},$$

et il est facile de prouver que cette valeur inexacte de ν surpasse toujours la vraie valeur.

Cela revient à démontrer l'inégalité

$$\sqrt{\mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 + \mu_3 z_3^3 + \ldots + \mu_n z_n^2} > \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 + \ldots + \mu_n z_n,$$

qui devient successivement,

$$\mu_1(1-\mu_1)z_1^2 + \mu_2(1-\mu_2)z_2^2 + \ldots + \mu_n(1-\mu_n)z_n^2 > 2\mu_1\mu_2 z_1 z_2 + 2\mu_1\mu_3 z_1 z_3 + \text{etc.},$$

$$\mu_1(\mu_2+\mu_3+\ldots+\mu_n)z_1^2 + \mu_2(\mu_1+\mu_3+\ldots+\mu_n)z_2^2(\ldots+\mu_n(\mu_1+\mu_2\ldots+\mu_{n-1})z_n^2 > 2\mu_1\mu_2 z_1 z_2 + 2\mu_1\mu_3 z_1 z_3 + \text{etc.},$$

et enfin

$$\mu_1\mu_2(z_1 - z_2)^2 + \mu_1\mu_3(z_1 - z_3)^2 + \text{etc.} > 0.$$

20. Dans un cas où l'on pourrait déterminer directement par l'expérience la valeur du nombre v, tel que celui que nous discutons ici pour l'ordre et la clarté des idées, on serait donc averti, avant toute classification des jugements par catégories, de l'erreur de l'hypothèse sur l'indépendance des causes d'erreur pour chaque juge, en ce que la valeur de v déduite de l'équation (24) surpasserait celle que donne l'observation directe; et la différence serait encore plus grande, si la valeur de v_1 pour certaines catégories, pouvait descendre au-dessous de $\frac{1}{2}$, sans cesser d'être plus grande que $\frac{1}{2}$ pour la série générale.

Au contraire, dans le cas ordinaire où la valeur du nombre v ne peut être donnée qu'indirectement par le calcul, au moyen de l'équation (24) ou de toute autre analogue, rien n'avertirait le calculateur de l'erreur de son hypothèse, si la série générale des jugemens n'était pas assez nombreuse pour pouvoir, à l'aide des documents statistiques, se subdiviser en catégories ou séries partielles, assez nombreuses elles-mêmes pour manifester la permanence de rapports qui résulte de la loi des grands nombres. Lorsque cette classification pourra s'opérer, il arrivera en général que le rapport p variera d'une catégorie à l'autre, et deviendra successivement p_1, $p_2, \ldots p_n$. On calculera alors la valeur de v par l'équation (25), et cette seconde valeur, toujours moindre que la première, sera cependant supérieure encore à la vraie valeur, si dans chacune des catégories ou dans quelques-unes d'entre elles, l'hypothèse de l'indépendance des causes d'erreur est encore inadmissible. Quand ensuite la statistique se sera enrichie d'un plus grand nombre d'observations, on multipliera le nombre des catégories; on obtiendra une valeur de v plus faible que les précédentes, et plus approchée de la vraie valeur.

21. Lorsque parmi les rapports v_1, $v_2, \ldots v_n$, il n'y en a aucun

qui puisse descendre au-dessous de $\frac{1}{2}$, on assigne une limite à la différence entre les valeurs de v données par les équations (24) et (25).

Représentons la première par

$$v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2p-1} = \frac{1}{2} + z,$$

et la seconde par

$$v = \frac{1}{2} + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \ldots + \mu_n z_n = \frac{1}{2} + \zeta,$$

on aura

$$z^2 - \zeta^2 = \mu_1\mu_2(z_1 - z_2)^2 + \mu_1\mu_3(z_1 - z_3)^2 + \text{etc.}, \quad (26)$$

et c'est de la valeur du second membre de cette dernière équation qu'il s'agit de trouver la limite.

D'abord, dans le cas où les catégories se réduiraient à deux, on aurait simplement

$$z^2 - \zeta^2 = \mu_1\mu_2(z_1 - z_2)^2;$$

mais comme les quantités z_1, z_2, toutes deux positives, sont chacune plus petites que $\frac{1}{2}$, on a $(z_1 - z_2)^2 < \frac{1}{4}$; on a aussi $\mu_1\mu_2 < \frac{1}{4}$, à cause de $\mu_1 + \mu_2 = 1$; donc

$$z^2 - \zeta^2 < \frac{1}{16}.$$

Pour trois catégories, il vient

$$z^2 - \zeta^2 = \mu_1\mu_2(z_1 - z_2)^2 + \mu_1\mu_3(z_1 - z_3)^2 + \mu_2\mu_3(z_2 - z_3)^2.$$

Supposons, ce qui est permis, que l'ordre des indices soit aussi l'ordre de grandeur des quantités z_1, z_2, z_3, et posons

$$z_1 - z_2 = u, \quad z_2 - z_3 = u',$$

de manière que u, u' désignent des quantités positives, l'équation précédente deviendra

$$z^2 - \zeta^2 = \mu_1\mu_2 u^2 + \mu_1\mu_3(u+u')^2 + \mu_2\mu_3 u'^2.$$

Quels que soient les nombres μ_1, μ_2, μ_3, la fonction qui forme le second membre de l'équation atteindra sa plus grande valeur, si l'on donne à la somme $u+u'$ la plus grande valeur dont elle est susceptible, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$, et si l'on détermine ensuite u, u' par les règles ordinaires; d'où il résulte

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_3}, \quad u' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_3},$$

et par suite, toutes réductions faites,

$$z^2 - \zeta^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu_1\mu_3}{\mu_1+\mu_3}.$$

Pour trouver le maximum de la fonction

$$\frac{\mu_1\mu_3}{\mu_1+\mu_3},$$

dont la détermination échappe à la règle ordinaire, nous poserons

$$\mu_1 + \mu_3 = h, \quad \frac{\mu_1\mu_3}{\mu_1+\mu_3} = \mathrm{K},$$

d'où

$$\mu_1 = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4h\mathrm{K}}}{2}, \quad \mu_3 = \frac{h \mp \sqrt{h^2 - 4h\mathrm{K}}}{2}.$$

Comme μ_1, μ_3 ne peuvent pas cesser d'être des quantités réelles, la plus grande valeur dont K soit susceptible est égale à $\frac{h}{4}$; et comme, d'une autre part, la quantité $h = \mu_1 + \mu_3$ est nécessairement plus petite que l'unité, il s'ensuit qu'on a encore, dans le cas de trois catégories,

$$z^2 - \zeta^2 < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} > \frac{1}{16}.$$

Si l'on voulait étendre cette analyse à un plus grand nombre de catégories, le calcul deviendrait bientôt impraticable; mais par d'autres raisonnements, on assigne à la différence $z^2 - \zeta^2$ une autre limite, indépendante du nombre des catégories.

Remarquons d'abord que l'on a

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \text{etc.} + 2(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \text{etc.}) = (\mu_1 + \mu_2 + \text{etc.})^2 = 1,$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \text{etc.} = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \text{etc.} - \frac{1}{2}[(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\mu_1 - \mu_3)^2 + \text{etc.}].$$

Donc

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \text{etc.} < \mu_1^2 + \mu_2^2 + \text{etc.},$$

et en vertu de la première équation,

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \text{etc.} < \frac{1}{3}.$$

Observons ensuite que la somme

$$(z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 + \text{etc.}$$

exprime la somme des carrés des distances entre n points pris deux à deux, ces n points étant assujettis à se trouver sur une portion de droite dont la longueur est $\frac{1}{2}$. Or, il est facile de voir que cette somme atteindra sa valeur maximum, si l'on suppose la moitié des points à l'une des extrémités de la droite, et l'autre moitié à l'autre extrémité; auquel cas la somme dont il s'agit aura pour valeur $\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2}{4}$ ou $\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2-1}{4}$, selon que n se trouvera un nombre pair ou impair.

Donc on aura une limite supérieure de la valeur du second membre de l'équation (26), si l'on y suppose la moitié des quantités z_i égales à zéro, et l'autre moitié égale à $\frac{1}{2}$, ce qui réduit à $\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2}{4}$ ou à $\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2-1}{4}$ le nombre des termes de ce second membre; et si en même temps l'on admet que la somme des coefficients $\mu_i\mu_i$, des termes conservés, a pour valeur $\frac{1}{3}$. Donc on aura toujours

$$z^2 - \zeta^2 < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} < \frac{1}{12},$$

et par suite

$$\zeta > \sqrt{z^2 - \frac{1}{12}}.$$

Si, par exemple, la série générale, employée sans distinction de catégories, avait donné $v = 0{,}9$ ou $z = 0{,}4$, la véritable valeur de v (telle qu'on l'obtiendrait si l'on pouvait multiplier assez les catégories, pour éliminer l'influence des causes objectives d'erreur, et ne plus laisser subsister que l'influence des causes variables d'un juge à l'autre) serait certainement comprise entre 0,9 et

$$\frac{1}{2} + \sqrt{0{,}16 - \frac{1}{12}} = 0{,}7769.$$

Cette formule relative à la limite inférieure de v deviendra illusoire et n'apprendra rien, quand z sera inférieur à la fraction $\frac{1}{\sqrt{12}}$, ou n'excédera que de très peu la valeur de cette fraction. En ce cas on ne pourra attendre que du perfectionnement de la statistique des notions précises sur la valeur du rapport v. Lorsque cette valeur restera stationnaire, quoique l'accroissement du nombre des observations permette de multiplier le nombre des catégories, on sera averti que la limite est atteinte; que dans chaque catégorie on peut considérer les causes d'erreur comme agissant d'une manière régulière et variable sur chaque juge ou observateur, et en un mot que l'influence des causes objectives est éliminée.

22. Considérons maintenant un tribunal de trois juges, pour chacun desquels on est fondé à attribuer au rapport v la même valeur, soit que le tribunal se compose de trois juges permanents, également éclairés, soit qu'il se compose de trois juges pris au hasard pour chaque affaire sur une liste générale; auquel cas v désigne, ainsi qu'on l'a expliqué, une moyenne entre les valeurs de la chance du bien jugé pour chaque individu inscrit sur la liste. Si p exprime le rapport du nombre des jugements rendus à l'unanimité au nombre total des jugements, rapport connu d'après une longue série d'observations, on aura (art. 5)

$$v = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4p - 1}{3}}.$$

Cette expression de v est tout-à-fait semblable, quant à la forme, à celle que donne l'équation (24); par conséquent on pourra y appliquer tous les raisonnements des précédents articles, en ce qui concerne l'élimination de l'influence des causes objectives par la multiplication des catégories, l'abaissement successif des valeurs de v, et les limites de cet abaissement.

La probabilité du bien jugé, ou le rapport du nombre des bien jugés au nombre total des jugements, est pour ce tribunal

$$V = 3v^2 - 2v^3,$$

lorsque tous les jugements peuvent être confondus en une seule série. Concevons-les maintenant répartis en deux catégories, pour lesquelles v prend les valeurs v_1, v_2; le rapport du nombre des bien jugés au nombre total des jugements deviendra

$$\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 = 3(\mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2) - 2(\mu_1 v_1^3 + \mu_2 v_2^3),$$

et il faut prouver que l'on a

$$\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 < V, \qquad (27)$$

du moins dans le cas où les trois nombres v, v_1, v_2 seraient supposés $> \frac{1}{2}$.

Dans ce cas en effet, le rapport p pour la série générale étant une moyenne entre les valeurs p_1, p_2 que prend ce rapport pour l'une et pour l'autre catégorie, la valeur de v tombera aussi entre celles de v_1 et de v_2, de sorte que l'on pourra supposer

$$v_1 > v, \quad v > v_2. \qquad (28)$$

D'un autre côté on aura, par ce qui a été démontré ci-dessus,

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 < v, \quad \text{ou} \quad \mu_1 < \frac{v - v_2}{v_1 - v_2}. \qquad (29)$$

Or, si l'inégalité (27) n'était pas satisfaite, et qu'on eût au contraire

$$\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 > V,$$

ou

$$\mu_1 (V_1 - V_2) > V - V_2,$$

il serait permis d'en conclure

$$\mu_1 > \frac{V - V_2}{V_1 - V_2},$$

et par suite, à cause de l'inégalité (29),

$$(\nu - \nu_2)(V_1 - V_2) > (\nu_1 - \nu_2)(V - V_2); \qquad (30)$$

car, la fonction V étant croissante avec ν, les inégalités (28) entraînent

$$V_1 - V_2 > 0, \quad V - V_2 > 0;$$

et dès-lors on peut, sans intervertir les inégalités, multiplier ou diviser par les binomes $V_1 - V_2$, $V - V_2$. Maintenant, l'inégalité (30) se réduit, après qu'on y a substitué pour V, V_1, V_2 leurs valeurs, et supprimé les facteurs communs, à

$$(\nu - \nu_1)[3 - 2(\nu + \nu_1 + \nu_2)] < 0,$$

mais, tant que les fractions ν, ν_1, ν_2 surpassent chacune $\frac{1}{2}$, selon l'hypothèse, le facteur

$$3 - 2(\nu + \nu_1 + \nu_2)$$

est positif; donc on aurait

$$\nu < \nu_1,$$

contrairement à la première inégalité (28). Donc enfin l'inégalité (27) est vérifiée, en excluant le cas infiniment peu probable de l'égalité des deux membres.

Ainsi, à mesure que l'accroissement des documents statistiques permet d'opérer une élimination plus complète de l'influence des causes objectives, par la multiplication des catégories, la valeur assignée par le calcul à la chance moyenne du bien jugé pour le tribunal va en s'abaissant, comme la valeur assignée à la chance moyenne du bien jugé pour chaque juge.

23. Jusqu'ici nous avons supposé connus, et immédiatement donnés par les documents statistiques, les nombres μ_1, μ_2,... que l'on pourrait nommer les coefficients des catégories, et qui expriment les probabilités qu'un jugement pris au hasard dans la série générale, se rapportera aux catégories (1), (2),... Mais on peut aussi supposer les nombres μ_1, μ_2,... inconnus, et se proposer de les déterminer par le calcul au moyen d'un nombre suffisant d'éléments, choisis parmi ceux que fournit l'observation immédiate. C'est sur la solution d'un problème de cette nature que reposent les applications de la théorie des chances à la statistique judiciaire, en matière criminelle.

En effet, la série des accusés traduits devant un tribunal criminel se fractionne naturellement en deux catégories, celle des accusés coupables et celle des accusés innocents; μ_1, μ_2 désigneront les probabilités que l'on a de tomber sur un coupable ou sur un innocent, en prenant un nom au hasard dans la liste générale des accusés. Les nombres μ_1, μ_2, dont la somme est l'unité, ne sont pas donnés directement et ne peuvent l'être, puisque l'on n'aura jamais un *criterium* infaillible de la culpabilité et de l'innocence des accusés : il est seulement très vraisemblable *à priori* que, dans l'état de nos mœurs et d'après nos institutions judiciaires, μ_1 l'emporte notablement sur μ_2, la traduction des accusés devant le tribunal qui doit les juger, n'ayant lieu qu'à la suite d'une instruction préliminaire, qui écarte les inculpés sur lesquels ne pèsent pas des charges très sérieuses.

La chance v du bien jugé pour chacun des juges dont le tribunal se compose, a pour valeur $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$, v_1, v_2 désignant les valeurs de cette chance par rapport à la série des accusés coupables et par rapport à la série des accusés innocents. Il y a lieu de croire qu'en thèse générale les nombres v_1, v_2 ne sont point égaux, ou en d'autres termes que le rapport du nombre des coupables condamnés par un juge, au nombre des coupables qu'il acquitte, n'est pas le même que le rapport du nombre des innocents qu'il acquitte, au nombre des innocents qu'il condamne. Dans tous les cas, ce serait à l'expérience à démontrer l'égalité des rapports v_1, v_2. On a donc en général trois quantités inconnues, μ_1, ν_1, ν_2, qu'il s'agit de déterminer d'après les données de l'observation.

Admettons pour un moment que le juge qui condamne un accusé affirme par cela même que l'accusé est coupable, et que réciproquement le juge qui acquitte un accusé affirme par cela même sa nonculpabilité. Désignons par c le rapport du nombre des accusés condamnés à l'unanimité, au nombre total des accusés; par c' le rapport du nombre des accusés condamnés à la simple majorité, au même nombre total; enfin par a le rapport du nombre des accusés acquittés à l'unanimité, au nombre total : on aura entre les inconnues μ_1, ν_1, ν_2 les trois équations

$$\left.\begin{aligned}\mu_1\nu_1^3+(1-\mu_1)(1-\nu_2)^3&=c,\\ 3\mu_1\nu_1^2(1-\nu_1)+3(1-\mu_1)\nu_2(1-\nu_2)^2&=c',\\ \mu_1(1-\nu_1)^3+(1-\mu_1)\nu_2^3&=a,\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

qui suffisent pour les déterminer complétement.

On objectera avec raison que le juge qui acquitte un accusé n'entend point d'ordinaire affirmer que l'accusé n'est pas coupable, mais seulement qu'à ses yeux les indices de culpabilité ne sont pas suffisants pour déterminer une condamnation; que réciproquement le juge qui condamne n'entend point affirmer avec une absolue certitude, la culpabilité de l'accusé, mais seulement l'existence de tels indices, d'une présomption si forte de culpabilité, qu'on ne saurait, sans paralyser l'action de la justice et compromettre la sûreté publique, acquitter les accusés contre lesquels pèsent de tels indices, et d'aussi fortes présomptions.

La conséquence de cette objection, c'est que les nombres μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, déterminées par les équations précédentes, sont relatifs, non point, comme nous l'avions supposé d'abord, à deux catégories dont l'une comprendrait les accusés coupables, et l'autre les accusés innocents; mais bien à deux autres dont la première comprendrait les accusés *condamnables*, et la seconde les accusés *noncondamnables* ou *acquittables;* la première pouvant à la rigueur comprendre des innocents, et la seconde comprenant très vraisemblablement beaucoup de vrais coupables. Mais d'un autre côté, si l'esprit saisit tout de suite la distinction absolue des accusés coupables et noncoupables, il s'en faut bien que l'on se forme aussi facilement une idée précise de la division catégorique en accusés condamnables et accusés non-condamnables. Comme c'est ici le point le plus délicat d'une théorie, d'ailleurs délicate dans toutes ses parties, on ne saurait y apporter trop d'attention.

(24). Nous demanderons à ce sujet la permission de revenir encore sur l'exemple fictif qui nous a servi plusieurs fois à fixer la valeur de certaines notions. Quand un homme exercé aux pronostics météorologiques, prédit le beau temps pour le lendemain, il n'entend sûrement pas affirmer d'une manière absolue qu'il fera beau; mais seulement que les chances de beau temps sont très grandes, assez grandes par exemple pour entreprendre sans hésitation un voyage, une ascension alpestre. De même le chirurgien qui opine pour l'amputation d'un membre, n'affirme pas absolument l'impossibilité d'une autre cure; il affirme seulement que dans son opinion les chances d'une issue funeste, si le membre n'est pas amputé, sont assez grandes pour déterminer le sacrifice du membre affecté. La même remarque s'applique à la plupart des jugements des hommes, et n'a rien de spécial aux jugements en matière criminelle.

Ceci rentre tout-à-fait dans ce que nous avons dit au sujet de l'influence des causes *objectives* d'erreur, ou de celles qui sont indépendantes des affections variables et irrégulièrement variables de chaque juge en particulier. On se rend compte de cette influence en concevant que les questions à juger sont réparties en diverses catégories, pour chacune desquelles la chance v de la conformité de l'événement à l'affirmation du juge, prend une valeur différente. Cela posé, il faut distinguer deux cas : celui où la chance v, en variant d'une catégorie à l'autre, reste toujours au-dessus de $\frac{1}{2}$, et celui où elle peut descendre pour certaines catégories, au-dessous de $\frac{1}{2}$.

Dans le premier cas il n'y aurait aucune équivoque possible. Les chances $v_1, v_2, \ldots v_l$, pourraient être indifféremment déterminées, ou par l'observation directe, comme cela est possible à l'égard des pronostics météorologiques, ou indirectement par le calcul, suivant la théorie qui fait l'objet de ce mémoire, dans les cas où l'observation directe est impossible. Le calcul assignant à chaque quantité v_i une valeur ambiguë de la forme $\frac{1}{2} \pm z_i$, on saurait qu'il faut toujours prendre z_i avec le signe positif, et que par ce moyen les résultats du calcul coïncideront toujours avec ceux que donnerait l'observation directe, si elle pouvait avoir lieu.

Cela posé, concevons les accusés répartis en un assez grand nombre de catégories, pour que dans chacune les causes d'erreur agissent fortuitement et indépendamment sur chaque juge, chaque catégorie comprenant d'ailleurs des accusés coupables et des accusés innocents. Si, dans chacune de ces catégories, la valeur du rapport v ne peut descendre au-dessous de $\frac{1}{2}$, soit pour les coupables, soit pour les innocents, les équations (31), appliquées à chaque catégorie, détermineront effectivement le rapport du nombre des coupables au nombre des innocents, exprimé par $\frac{\mu_1}{1-\mu_1}$, la valeur de la chance v_1 de la condamnation des coupables, et celle de la chance v_2 de l'acquittement des innocents. Ce calcul donnant les valeurs de v_1, v_2, par couples de la forme $\frac{1}{2} \pm z_1$, $\frac{1}{2} \pm z_2$, on saura qu'il faut toujours prendre z_1, z_2 avec le signe positif.

Les mêmes équations (31), appliquées à la série générale des accusés, ne donneraient sans doute qu'une approximation des rapports cherchés, selon la théorie exposée dans les articles précédents; mais cette approximation se rapporterait toujours à la classification des accusés en coupables et en innocents : la distinction faite plus haut entre les accusés coupables et les accusés condamnables, entre les accusés innocents et les accusés acquittables, ne se rattacherait en rien aux résultats du calcul.

Or, au contraire, on doit admettre, que pour de nombreuses catégories d'accusés, la chance v d'un vote conforme à la réalité du fait tombe au-dessous de $\frac{1}{2}$, et s'approche même indéfiniment de zéro. Il y a sans doute beaucoup d'accusés coupables qui ont la presque certitude d'obtenir un vote d'acquittement, soit à cause de la faiblesse des preuves juridiques qui pèsent sur eux, soit en raison de diverses causes (telles que la trop grande rigueur de la loi pénale) qui prédisposent à l'indulgence la généralité des juges. On ne peut guère plus se refuser à admettre que, pour un très petit nombre d'accusés innocents, il y a presque la certitude d'être atteints par un vote de condamnation, tant sont grandes les charges qu'un enchaînement fatal de circonstances fait peser sur eux, et qui sont de nature à déterminer la conviction des juges les plus éclairés et les plus impartiaux.

En conséquence il y a des catégories d'accusés pour lesquelles, si l'on faisait usage des équations (31), en les rattachant à la classification des accusés en coupables et en innocents, il faudrait choisir pour v_2, ou pour v_1 et v_2, celles des valeurs données par le calcul, qui tombent au-dessous de $\frac{1}{2}$. Il résulterait de là que l'on ne pourrait plus, même dans une première approximation, appliquer les équations (31) à la série générale des accusés, ou du moins que l'on aurait de justes raisons de douter si, entre les deux valeurs de v_2 tirées de ces équations, on ne doit pas choisir de préférence celle qui tombe au-dessous de $\frac{1}{2}$, comme plus approchée de la vraie valeur.

Il n'y a qu'une manière de lever cette difficulté, et de faire rentrer le second cas dans le premier : c'est de considérer comme acquittables les accusés coupables pour lesquels la chance v_2 d'une voix de condamnation tombe au-dessous de $\frac{1}{2}$, et pareillement de considérer comme condamnables les accusés innocents (vaisemblablement et heureusement en fort petit nombre) pour lesquels les chances d'une voix d'acquittement tomberaient aussi au-dessous de $\frac{1}{2}$. Par suite de cette convention, et en changeant la signification primitive des lettres v_1, v_2; en concevant que v_1 est la chance d'une voix de condamnation pour les accusés condamnables, que v_2 est la chance d'une voix d'acquittement pour les accusés acquittables, les nombres v_1, v_2 ne peuvent, par la définition même, tomber au-dessous de $\frac{1}{2}$ pour aucune catégorie d'accusés; et quand, dans une première approximation, on applique les équations (31) à la série générale des accusés, on doit nécessairement prendre pour v_1, v_2, dans les couples de valeurs données par le calcul, celles qui surpassent $\frac{1}{2}$.

25. Ces explications ont l'avantage de fournir une définition précise et mathématique du sens qui s'attache aux mots *condamnables* et *non condamnables* : elles font voir avec netteté comment la classification des accusés en condamnables et noncondamnables se rapporte à l'état

des lumières, aux prédispositions morales qui règnent dans la classe de citoyens au sein de laquelle on prend les jurés ou les juges criminels; de manière que les juges venant à être pris dans une autre classe, ou à subir dans la même classe de nouvelles influences, telles catégories d'accusés pourront passer de la classe des accusés condamnables à celle des accusés noncondamnables, ou réciproquement.

Ainsi le rapport du nombre des condamnés au nombre total des accusés, qui atteignait en Belgique la valeur 0,83 quand les crimes étaient jugés par des tribunaux permanents, s'est abaissé à 0,60 quand on a rétabli dans ce pays l'institution du jury français; et de là on conclut, suivant l'intéressante remarque de M. Poisson, que la proportion des accusés condamnables (dans le sens que nous donnons à cette expression) a décru brusquement par le rétablissement de l'institution du jury, quoique les formes de l'instruction préliminaire soient restées les mêmes et que par conséquent la proportion des accusés réellement coupables n'ait pas dû varier sensiblement. En effet, les jurés étant plus enclins à l'indulgence que des magistats permanents, il y a de nombreuses catégories d'accusés coupables pour lesquels la chance v_1 d'un vote de condamnation surpasse $\frac{1}{2}$ quand il s'agit de magistrats, et tombe au-dessous de $\frac{1}{2}$ quand le vote doit être émis par des jurés. Les accusés compris dans ces catégories appartiennent à la classe des accusés condamnables lorsqu'on applique les formules (31) ou leurs analogues à des jugements rendus par une magistrature permanente, et passent dans la classe des accusés non condamnables lorsqu'on applique les mêmes formules à des jugements par jurés.

Cette théorie nous met aussi à même de prévoir dans quel sens les résultats du calcul se modifieront, selon la nature des variations survenus dans la législation criminelle ou dans d'autres circonstances qui influent sur les votes des jurés. Tout ce qui tend à augmenter les lumières des jurés doit augmenter les valeurs de v_1, v_2; ainsi toutes circonstances égales d'ailleurs, on trouvera v_1, v_2 moindres pour des jurés qui votent sans communication entre eux que pour des jurés qui délibèrent en commun et peuvent s'éclairer mutuellement. Au contraire, un adoucissement de la législation pénale, qui amène un plus grand nombre de condamnations méritées, par suite une répression plus efficace de certains désordres, et que l'on doit regarder en conséquence comme une incontestable amélioration, peut bien faire baisser les valeurs de ν_1, ν_2, qui se rapportent à la classification en condamnables et non condamnables. Il y avait une catégorie d'accusés presque sûrs de l'acquittement, ou pour lesquels ν_2 avait une très grande valeur. La cause constante et objective d'erreur, qui déterminait l'acquittement avec une presque certitude, étant soustraite, le sort de ces accusés reste soumis à l'influence des causes subjectives d'erreurs qui agissent irrégulièrement et indépendamment sur chaque juré. La chance ν_2 diminue pour les accusés de la catégorie dont il s'agit, et si elle diminue au point de tomber au-dessous de $\frac{1}{2}$, ces accusés passent dans la classe des accusés que nous qualifions de condamnables, mais pour lesquels ν_1 peut avoir une valeur très peu supérieure à $\frac{1}{2}$. Les valeurs moyennes de ν_1, ν_2 relatives à la série générale des condamnés, pourront donc baisser par suite de l'adoucissement de la législation pénale, quoiqu'il y ait un plus grand nombre de jugements vrais, d'une absolue vérité.

En général, l'ignorance est une cause d'erreur dont le mode d'action est irrégulier et variable d'un juré à l'autre. Tout ce qui tendra à accroître les lumières des jurés tendra à diminuer la part du hasard dans les verdicts des jurys, à accroître la proportion des verdicts rendus à l'unanimité ou à une forte majorité, à accroître en conséquence les valeurs assignées par le calcul aux rapports ν_1, ν_2. Au contraire, la soustraction des causes d'erreurs qui tiennent à des préjugés dominants, à des penchants naturels du cœur humain, tout en augmentant le nombre des jugements vrais, pourra accroître la part du hasard, diminuer la proportion des verdicts rendus à l'unanimité ou à une forte majorité; diminuer consécutivement les valeurs que le calcul en déduit pour les rapports ν_1, ν_2.

26. Maintenant que la signification de ces rapports et le sens des équations (31) nous semblent suffisamment éclaircis, nous allons passer à la résolution de ces mêmes équations. Si l'on pose

$$\nu_1 = \frac{1}{2} + z_1, \quad \nu_2 = \frac{1}{2} + z_2,$$

elles deviendront

$$\mu_1 z_1^3 - \mu_2 z_2^3 + \frac{3}{2}\mu_1 z_1^2 + \frac{3}{2}\mu_2 z_2^2 + \frac{3}{4}\mu_1 z_1 - \frac{3}{4}\mu_2 z_2 + \frac{1}{8} - c = 0, \quad (c)$$

$$-\mu_1 z_1^3 + \mu_2 z_2^3 - \frac{1}{2}\mu_1 z_1^2 - \frac{1}{2}\mu_2 z_2^2 + \frac{1}{4}\mu_1 z_1 - \frac{1}{4}\mu_2 z_2 + \frac{1}{8} - \frac{c'}{3} = 0, \quad (c')$$

$$-\mu_1 z_1^3 + \mu_2 z_2^3 + \frac{3}{2}\mu_1 z_1^2 + \frac{3}{2}\mu_2 z_2^2 - \frac{3}{4}\mu_1 z_1 + \frac{3}{4}\mu_2 z_2 + \frac{1}{8} - a = 0. \quad (a)$$

Nous les remplacerons par les trois suivantes qui s'en déduisent

$$(c) + (a) = 3\mu_1 z_1^2 + 3\mu_2 z_2^2 + \frac{1}{4} - c - a = 0, \quad (32)$$

$$(c) - (a) = 2\mu_1 z_1^3 - 2\mu_2 z_2^3 + \frac{3}{2}\mu_1 z_1 - \frac{3}{2}\mu_2 z_2 - c + a = 0, \quad (33)$$

$$(a) - 2(c) - 3(c') = -3\mu_1 z_1 + 3\mu_2 z_2 - \frac{1}{2} + 2c + c' - a = 0. \quad (34)$$

Faisant, pour simplifier,

$$-\frac{1}{2} + 2c + c' - a = \varepsilon,$$

il viendra par l'équation (34), et au moyen de ce que $\mu_1 + \mu_2 = 1$,

$$\mu_1 = \frac{3z_2 + \varepsilon}{3(z_1 + z_2)}, \quad \mu_2 = \frac{3z_1 - \varepsilon}{3(z_1 + z_2)}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans les équations (32) et (33), en posant, toujours pour motif de simplification,

$$\frac{1}{4} - c - a = \varepsilon',$$

$$\frac{3}{2}\varepsilon + 3(a - c) = \varepsilon'',$$

elles deviendront

$$(z_1 + z_2)\left[3z_1z_2 + \varepsilon(z_1 - z_2) + \varepsilon'\right] = 0,$$

$$(z_1 + z_2)\left[6z_1z_2(z_1 - z_2) + \varepsilon''\right] + 2\varepsilon(z_1^3 + z_2^3) = 0;$$

ou plus simplement, après avoir substitué dans la seconde la valeur de z_1z_2 tirée de la première, et supprimé le facteur commun $z_1 + z_2$:

$$3z_1z_2 + \varepsilon(z_1 - z_2) + \varepsilon' = 0, \quad (35)$$

$$2\varepsilon z_1z_2 - 2\varepsilon'(z_1 - z_2) + \varepsilon'' = 0:$$

enfin, si l'on pose

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3\varepsilon'' - 2\varepsilon\varepsilon'}{3\varepsilon' + \varepsilon^2} = 2S, \quad -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\varepsilon'^2 + \varepsilon\varepsilon''}{3\varepsilon' + \varepsilon^2} = \varpi,$$

on aura définitivement

$$z_1 = S \pm \sqrt{S^2 + \varpi},$$
$$z_2 = -S \pm \sqrt{S^2 + \varpi},$$
$$\mu_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\varepsilon - 3S}{6\sqrt{S^2 + \varpi}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \mp \frac{\varepsilon - 3S}{6\sqrt{S^2 + \varpi}}.$$

La probabilité de la condamnation de l'accusé par le tribunal a pour valeur, si l'accusé est condamnable,

$$V_1 = v_1^3 + 3v_1^2(1 - v_1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z_1 - 2z_1^3;$$

et la probabilité de l'acquittement de l'accusé, s'il n'est pas condamnable, a pour valeur

$$V_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z_2 - 2z_2^3;$$

d'où

$$V_1 - V_2 = (z_1 - z_2)\left[\frac{3}{2} - 2(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)\right].$$

Le signe de $V_1 - V_2$ sera le même que celui de $z_1 - z_2$; car $z_1 - z_2$ ne pouvant dépasser $\frac{1}{2}$, il est facile de voir que le coefficient de $z_1 - z_2$ dans l'équation précédente est toujours positif.

La probabilité qu'un accusé pris au hasard sera condamné, ou le rapport du nombre des condamnés au nombre total des accusés, a pour valeur

$$C = \mu_1 V_1 + \mu_2(1 - V_2),$$

et la valeur numérique de C devra coïncider avec la somme des nombres désignés plus haut par c, c'.

On trouve, en mettant pour V_1, V_2 leurs valeurs,

$$\mu_1 - C = \mu_1\left[1 - \frac{3}{2}(z_1 + z_2) + 2(z_1^3 + z_2^3)\right] - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}z_2 + 2z_2^3\right)$$

de sorte que μ_1 sera > ou < C (c'est-à-dire que le nombre des condamnés sera plus petit ou plus grand que celui des condamnables), selon qu'on aura

$$\mu_1 \gtrless \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}z_2 + 2z_2^3}{1 - \frac{3}{2}(z_1 + z_2) + 2(z_1^3 + z_2^3)}.$$

μ_1 doit être supposé notablement plus grand que $\frac{1}{2}$, sans quoi les garanties de l'instruction criminelle deviendraient illusoires; et cela admis, l'inégalité précédente nous montre que μ_1 surpassera certainement C, si l'on a

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}z_1 + 2z_1^3 > \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z_2 + 2z_2^3,$$

ou

$$(z_2 - z_1)\left[\frac{3}{2} - 2(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2)\right] > 0,$$

ou simplement, d'après l'observation déjà faite plus haut, $z_2 > z_1$.

Mais dans le cas où l'on aurait au contraire $z_1 > z_2$, il pourrait arriver que le nombre des condamnés surpassât celui des condamnables.

27. L'idée de déterminer *à posteriori*, par la statistique judiciaire, les coefficients μ_1, μ_2, ou le rapport du nombre des accusés condamnables au nombre total des accusés, est due entièrement à M. Poisson. Avant cet éminent géomètre, Condorcet qui avait traité laborieusement la même matière, et Laplace qui n'avait fait que l'effleurer, ne s'étaient point trouvés conduits par leurs recherches à envisager la question sous cette face, la seule qui se prête convenablement aux applications statistiques.

Mais la marche que suit M. Poisson pour y arriver, implique la supposition tacite que les rapports désignés ici par ν_1, ν_2 sont égaux entre eux; et l'on verra en effet que, sans cette supposition, la statistique judiciaire ne lui eût pas fourni tous les éléments nécessaires pour la solution numérique du problème qu'il avait principalement en vue. Nous passerons tout-à-l'heure à la discussion d'un autre problème, où une pareille supposition n'est plus indispensable, et conduirait même en général à des résultats qui répugnent. Si l'on fait dans l'équation (35) $z_1 = z_2 = z$, on en tirera

$$z = \pm\sqrt{\frac{-\varepsilon'}{3}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(c+a)-1}{3}};$$

et, en effet, $c+a$ étant le rapport du nombre des jugements rendus à l'unanimité au nombre total des jugements, cette formule coïncide avec l'équation (4) de l'art 5. On aurait aussi

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2c + c' - a - \frac{1}{2}}{\sqrt{3(c + a - \frac{1}{4})}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{2c + c' - a - \frac{1}{2}}{\sqrt{3(c + a - \frac{1}{4})}}.$$

Dans la même supposition, on n'aurait plus besoin d'employer la troisième équation (31), et le rapport désigné par a pourrait être inconnu. En faisant dans les deux premières équations $\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{2} + z$, on serait conduit à l'équation biquadratique

$$z^4 - z^2\left(\frac{1}{2} + c + \frac{1}{3}c'\right) + \frac{1}{4}\left(c - c' + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Il est assez remarquable que, pour ce cas particulier, la valeur de z dépende d'une équation du quatrième degré, et implique deux radicaux carrés, tandis que nous avons obtenu plus haut les valeurs générales de z_1, z_2, avec un seul radical, en employant à la vérité un troisième élément a, qui maintenant n'est pas censé connu.

28. Si la statistique judiciaire donnait pour nos tribunaux correctionnels, formés en général de trois juges, les valeurs des éléments c, c', a, on appliquerait les formules précédentes à la détermination des rapports μ_1, ν_1, ν_2; mais ces éléments ne sont pas donnés et ne peuvent l'être, d'après nos lois criminelles. Au contraire, la statistique judiciaire nous donne sur les appels de police correctionnelle tous les documents nécessaires pour déterminer les mêmes rapports à l'égard des prévenus qui subissent les deux degrés de juridiction.

Appelons N le nombre des prévenus jugés en appel par les tribunaux des chefs-lieux de départements; C le nombre des prévenus de cette catégorie condamnés en premier ressort; C′ le nombre des prévenus condamnés en appel; Q le nombre des prévenus condamnés en premier ressort et acquittés en appel; Q′ celui des prévenus acquittés en premier ressort et condamnés en appel, de sorte que $Q + Q'$ soit le nombre des prévenus pour lesquels il y a eu désaccord entre les tribunaux d'instance et d'appel sur la déclaration de culpabilité. Posons

$$\frac{C}{N} = c, \quad \frac{C'}{N} = c', \quad \frac{Q + Q'}{N} = q.$$

Désignons par u_1, u_2 les rapports du nombre des prévenus condamnables et du nombre des prévenus non condamnables au nombre N des prévenus ; par V_1, V_2 les probabilités que le tribunal jugeant en premier ressort, condamnera un accusé condamnable et acquittera un accusé non condamnable ; par V'_1, V'_2 les mêmes probabilités pour le tribunal d'appel : on aura d'abord

$$\left.\begin{array}{r} \mu_1 V_1 + \mu_2(1 - V_2) = c, \\ \mu_1 V'_1 + \mu_2(1 - V_2) = c', \\ \mu_1(V_1 + V'_1 - 2V_1V'_1) + \mu_2(V_2 + V'_2 - 2V_2V'_2) = q. \end{array}\right\} (36)$$

S'il était permis de supposer *à priori* $V_1 = V_2 = V, V'_1 = V_2 = V'$, ces trois équations suffiraient (à cause de la relation $\mu_1 + \mu_2 = 1$) pour déterminer les trois inconnues μ_1, V, V'. On trouverait ainsi

$$\left.\begin{array}{r} V = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2c-1}{2c'-1}}\cdot(1-2q), \\ V' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2c'-1}{2c-1}}\cdot(1-2q), \\ \mu_1 = \frac{V+c-1}{2V-1} = \frac{V'+c'-1}{2V'-1}. \end{array}\right\} (37)$$

D'après le tableau (*A*), art. 13, on a, pour la période décennale 1826 — 35,

$$N = 32015, \quad C = 20986, \quad C' = 22450, \quad Q = 3230, \quad Q' = 4693,$$

et par suite,

$$c = 0{,}6555, \quad c' = 0{,}7012, \quad q = 0{,}2475; \qquad (38)$$

d'où l'on tire, par les formules (37),

$$V = 0{,}812, \quad V' = 0{,}904, \quad \mu_1 = 0{,}749. \qquad (39)$$

Si l'on compare ces résultats avec ceux de l'article 14, on ne trouvera qu'une différence d'environ deux centièmes en moins sur la valeur de V, et d'environ deux centièmes en plus sur celle de V' ; ce qui est un accord assez remarquable, eu égard à la disparité des bases de l'un et de l'autre calcul.

40..

A l'égard des prévenus jugés en appels par les cours royales, on a

$$N = 46193, \quad C = 34420, \quad C' = 34436, \quad Q = 4816, \quad Q' = 4832;$$

ce qui donne

$$c = 0,7451, \quad c' = 0,7455, \quad q = 0,2089;$$

et par suite, d'après les équations (37), où V′ serait remplacé par V″,

$$V = 0,881, \quad V'' = 0,882, \quad \mu_1 = 0,821.$$

La valeur de μ_1 se trouve plus grande que pour la série des appels ressortant aux tribunaux de chefs-lieux, ce qui cadre parfaitement avec la remarque faite dans l'article 13 sur la plus grande facilité de l'appel, quand l'appel doit être porté devant les cours royales. D'un autre côté les valeurs précédentes de V, V″ sont sensiblement égales entre elles, ce qui, dans l'hypothèse, est une conséquence nécessaire de la presque égalité des rapports c, c', donnés par la statistique. Or, comme le nombre des juges est au moins de cinq en cour royale, il en résulterait que la chance d'erreur serait notablement plus grande pour le juge de cour royale que pour le juge de première instance; conséquence qui répugnerait, si le mot *erreur* était pris dans un sens absolu.

La difficulté se résout, si l'on observe que, par suite d'un penchant à l'indulgence, plus grand chez les juges de cours royales, et que la statistique a manifesté, il y a des prévenus qui doivent figurer, relativement aux juges de première instance, dans la catégorie des accusés non condamnables. On a donc, en désignant par μ_1'' la valeur que prend le rapport μ_1 devant les cours royales,

$$\mu_1 V + (1 - \mu_1)(1 - V) = c,$$
$$\mu_1'' V'' + (1 - \mu_1'')(1 - V'') = c'.$$

Au moyen de ce que la statistique donne, dans le cas actuel, $c' = c$, on déduit de ces deux équations

$$\mu_1 - \mu_1 = \frac{(2c - 1)(V'' - V)}{(2V - 1)(2V'' - 1)};$$

et comme les fractions c, V, V″ sont toutes trois plus grandes que $\frac{1}{2}$, il est clair que l'inégalité

$$\mu_1'' < \mu_1$$

entraînera celle

$$V'' > V,$$

et réciproquement. Si, par exemple, on attribuait à V et à V'' les valeurs de V et de V' données par les équations (39), lesquelles se réfèrent à la série des appels portés devant les tribunaux de chefs-lieux, il viendrait

$$\mu_1^{\text{a}} = 0{,}893, \quad \mu_1'' = 0{,}803.$$

29. Ces valeurs de V et de V' données par les équations (38) résultent, comme on l'a vu, de l'hypothèse

$$V_1 = V_2 = V, \quad V_1' = V_2' = V';$$

mais rien ne justifie *à priori* ces deux conditions; et en effet, si elles étaient nécessaires, il s'ensuivrait que les trois équations (37) détermineraient toutes les inconnues du problème, sans qu'on eût besoin d'aucune donnée sur la composition numérique de l'un et de l'autre tribunal. Or, quand on n'a que deux tribunaux ou deux personnes morales appelées à décider les mêmes questions, sans aucune raison de supposer que la chance d'erreur de l'une l'emporte sur la chance d'erreur de l'autre, quoiqu'on les suppose toutes deux plus petites que $\frac{1}{2}$, il répugne d'admettre que la simple comparaison des votes puisse déterminer laquelle des deux chances l'emporte, et à plus forte raison déterminer les valeurs de l'une et de l'autre chance.

Il est au contraire vraisemblable avant tout calcul que, pour un tribunal quelconque, la chance d'erreur doit être notablement moindre, quand cette erreur a pour résultat de condamner un accusé non condamnable, que quand elle a pour résultat d'acquitter un accusé condamnable.

En d'autres termes, par cela seul que l'acquittement est plus favorable que la condamnation, il y a lieu de présumer qu'à l'égard des accusés pour lesquels la chance d'acquittement surpasse $\frac{1}{2}$, la valeur moyenne de la chance d'acquittement approche plus de l'unité que n'en approche la valeur moyenne de la chance de condamnation, à l'égard des accusés pour lesquels cette chance surpasse $\frac{1}{2}$. Nous verrons tout-à-l'heure comment le calcul confirme cette prévision.

Quant à présent, nous pouvons considérer V_2, V'_2, V''_2 comme des quantités inconnues, ayant respectivement pour limites inférieures V_1, V'_1, V''_1 et pour limite supérieure l'unité. Afin de passer d'une supposition extrême à l'autre, nous ferons dans les équations (36) $V_2=1$, $V'_2=1$, ce qui les réduira à

$$\mu_1 V_1 = c, \quad \mu_1 V'_1 = c', \quad \mu_1 (V_1 + V'_1 - 2V_1V'_1) = q;$$

et, en y substituant pour c, c', q les valeurs (38), on en tirera

$$V_1 = 0{,}791, \quad V'_1 = 0{,}846, \quad \mu_1 = 0{,}829. \tag{40}$$

Si maintenant, dans les formules

$$\begin{aligned} V &= \mu_1 V_1 + (1-\mu_1) V_2, \\ V' &= \mu_1 V'_1 + (1-\mu_1) V'_2, \end{aligned}$$

on substitue les valeurs précédentes de V_1, V'_1, μ_1, en y faisant d'ailleurs $1 = V_2 = V'_2$, il viendra

$$V = 0{,}827, \quad V' = 0{,}872; \tag{41}$$

valeurs fort peu différentes de celles que nous avons trouvées pour V et V', dans l'art. 14, par une méthode qui ne permettait pas de distinguer la catégorie des accusés condamnables d'avec celle des accusés non condamnables.

Relativement aux appels portés devant les cours royales, nous trouvons dans la même supposition $V_2 = 1$, $V''_2 = 1$,

$$V_1 = 0{,}859, \quad V''_1 = 0{,}860, \quad \mu_1 = 0{,}867.$$

Mais il faut se ressouvenir que μ_1 désigne alors la proportion des prévenus condamnables pour les juges de premier ressort, parmi lesquels il s'en trouve qui passent, relativement aux juges de cours royales, dans la catégorie des accusés non condamnables, en raison du plus grand penchant à l'indulgence, reconnu chez les juges de cette classe.

30. Pour résoudre les équations (36) sans hypothèse arbitraire, et en parlant seulement de la connaissance que l'on a de la composition numérique des tribunaux d'instance et d'appel, il faudrait poser

$$\left.\begin{array}{ll} V_1 = v_1^3+3v_1^2(1-v_1), & V_1' = v_1^5+5v_1^4(1-v_1)+10v_1^3(1-v_1)^2, \\ V_2 = v_2^3+3v_2^2(1-v_2), & V_2' = v_2^5+5v_2^4(1-v_2)+10v_2^3(1-v_2)^2. \end{array}\right\} \quad (42)$$

Afin de simplifier les calculs on pourrait écrire

$$v_1 = \frac{1}{2}+z_1,\ v_2 = \frac{1}{2}+z_2,\ V_1 = \frac{1}{2}+Z_1,\ V_2 = \frac{1}{2}+Z_2,$$
$$V_1' = \frac{1}{2}+Z_1',\ V_2' = \frac{1}{2}+Z_2',\ c = \frac{1}{2}+\gamma,\ c' = \frac{1}{2}+\gamma',\ \frac{1}{4}-\frac{q}{2} = \varepsilon;$$

au moyen de quoi les équations (36) et (42) deviendraient

$$\left.\begin{array}{r} \mu_1(Z_1+Z_2) = Z_2+\gamma, \\ \mu_1(Z_1'+Z_2') = Z_2'+\gamma', \\ \mu_1(Z_2Z_2'-Z_1Z_1') = Z_2Z_2'-\varepsilon; \end{array}\right\} \quad (43)$$

$$\left.\begin{array}{ll} Z_1 = \frac{3}{2}z_1-2z_1^3, & Z_1' = \frac{15}{8}z_1-5z_1^3+6z_1^5, \\ Z_2 = \frac{3}{2}z_2-2z_2^3, & Z_2' = \frac{15}{8}z_2-5z_2^3+6z_2^5. \end{array}\right\} \quad (44)$$

On tire des équations (43), par l'élimination de μ_1,

$$(Z_1+Z_2)(Z_2'+\gamma')-(Z_1'+Z_2')(Z_2+\gamma) = 0,$$
$$(Z_2Z_2'-Z_1Z_1')(Z_2+\gamma)-(Z_2Z_2'-\varepsilon)(Z_1+Z_2) = 0.$$

On pourrait substituer dans celles-ci les valeurs de Z_1, Z_2, Z_1', Z_2', en fonction de z_1, z_2; puis, au lieu d'éliminer z_1 ou z_2 par les méthodes ordinaires (ce qui conduirait à une équation finale d'un degré trop élevé), déterminer par tâtonnements les valeurs de z_1, z_2 propres à satisfaire simultanément à ces deux équations.

Mais dans le cas particulier ce calcul laborieux peut être éludé. En effet, dans l'hypothèse $V_2 = 1$, $V'_2 = 1$, ou

$$Z_2 = \frac{1}{2}, \quad Z'_2 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{2},$$

nous avons trouvé $V_1 = 0{,}791$, $V'_1 = 0{,}846$; ou

$$Z_1 = 0{,}291, \quad Z'_1 = 0{,}346.$$

Si nous substituons ces valeurs de Z_1, Z'_1 dans les équations (44), on tirera de la première

$$z_1 = 0{,}2055,$$

et de la seconde

$$z_1 = 0{,}2069.$$

La différence entre ces deux valeurs de z_1 est d'un ordre de grandeur qui doit nous la faire négliger, eu égard au degré d'approximation que comporte la détermination des données. Ainsi le système de valeurs

$$z_1 = 0{,}206, \quad Z_1 = 0{,}291, \quad Z'_1 = 0{,}346,$$
$$z_2 = \frac{1}{2}, \quad Z_2 = \frac{1}{2}, \quad Z'_2 = \frac{1}{2}, \quad \mu_1 = 0{,}829,$$

satisfait aux équations (43) et (44); et quoiqu'on ne puisse admettre sans improbabilité que les quantités V_2, V'_2 sont précisément égales à 1, comme on l'a supposé dans l'article précédent, on voit qu'elles ne diffèrent de l'unité que de fractions négligeables, eu égard au degré de l'approximation que ce calcul comporte.

En conséquence, nous prendrons définitivement pour les valeurs numériques de μ_1, V_1, V'_1, celles que donnent les équations (40), et pour celles de V, V', celles que donnent les équations (41).

Pour la totalité des prévenus jugés en premier ressort par les tribunaux de police correctionnelle, le rapport γ prend la valeur 0,36 (art. 13). De là dérive l'impossibilité d'admettre que les chances V_1, V_2 conservent pour la totalité des prévenus les valeurs qu'elles ont pour ceux d'entre eux qui sont appelés à subir les deux degrés de juridiction, puisque la première équation (43) donnerait alors à μ_1 une valeur plus grande que l'unité. En effet, comme on l'a expliqué ci-dessus, la grande majorité des condamnations prononcées par les tribunaux de police correctionnelle, le sont pour des contraventions que constatent des procès-verbaux faisant foi en justice jusqu'à inscription de faux. Les prévenus contre lesquels existent de semblables preuves légales, appartiennent à la catégorie des prévenus condamnables, lors même qu'ils seraient réellement innocents et qu'il y aurait de la part de l'auteur du procès-verbal, prévarication ou erreur, mais non susceptible d'être prouvée par la voie périlleuse de l'inscription de faux. En outre, pour les prévenus en grand nombre qui se trouvent dans cette classe, et dont les causes ne vont point en appel, la valeur de V_1 se confond avec l'unité; ce qui doit élever beaucoup la valeur moyenne de V_1, quand, pour prendre cette moyenne, on étend la sommation à la masse des prévenus qui subissent le premier degré de juridiction.

31. On ne pourrait point appliquer aux jugements sur la fixation de la peine une analyse semblable à celle dont nous venons de faire usage, à l'égard des jugements qui ont pour objet la déclaration de culpabilité. Il serait même impossible de tenir compte mathématiquement de tous les éléments de la question, et l'on ne peut qu'imaginer une hypothèse pour représenter d'une manière approximative les faits observés.

Supposons que l'échelle de pénalité n'ait que deux degrés pour chaque délit, ou que la loi pénale ne laisse aux juges, après la déclaration de culpabilité, que l'option entre deux peines. Désignons par P la probabilité que le tribunal du premier ressort appliquera la peine la plus douce, par P′ la même probabilité pour le tribunal d'appel; par N_1 le nombre des prévenus déclarés coupables en premier ressort et en appel, par R celui des prévenus dont la peine a été aggravée en appel; par R′ celui des prévenus dont la peine a été atténuée en appel; par r, r' les rapports $\frac{R}{N_1}$, $\frac{R'}{N_1}$; on aura les deux équations

$$P(1 - P') = r,$$
$$P'(1 - P) = r';$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{1 + r - r'}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - r - r')^2 - 4rr'},$$

$$P' = \frac{1 - r + r'}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - r - r')^2 - 4rr'}.$$

L'observation donnant $r' > r$, il faut prendre le radical avec le signe positif, si l'on ne veut pas que la valeur de P tombe au-dessous de $\frac{1}{2}$; et en effet, il répugnerait d'admettre dans un tribunal une plus grande tendance à appliquer la peine la plus forte, entre deux dont la loi lui laisserait l'option.

Nous écrirons donc simplement :

$$P = \frac{1 + r - r'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - r - r')^2 - 4rr'},$$

$$P' = \frac{1 - r + r'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - r - r')^2 - 4rr'}.$$

Pour la série des appels portés devant les tribunaux de chefs-lieux, le tableau (A) nous donne

$$N_1 = 17757, \quad R = 2473, \quad R' = 4137;$$

d'où

$$\left.\begin{array}{ll} r = 0,1393, & r' = 0,2331, \\ P = 0,710, & P' = 0,804. \end{array}\right\} \qquad (45)$$

Pour la série des appels portés devant les cours royales, on a

$$N_1 = 29604, \quad R = 2889, \quad R' = 7679;$$

d'où

$$\left.\begin{array}{ll} r = 0,0976, & r' = 0,2594, \\ P = 0,698, & P'' = 0,860; \end{array}\right\} \qquad (46)$$

P'' désignant pour les cours royales l'analogue de P' pour les tribunaux de chefs-lieux.

Si l'on désigne par p, p', p'' la valeur moyenne de la chance d'option pour la peine la plus douce, en ce qui concerne le juge de premier ressort, le juge de chef-lieu et le juge de cour royale, on tirera des équations (45) et (46),

$$\begin{array}{ll} p = 0,644, & p' = 0,676, \\ p = 0,636, & p'' = 0,718. \end{array}$$

Nous trouvons une trop faible différence entre les deux valeurs de p, données par les deux séries d'appel, pour n'en pas conclure que l'hypothèse représente d'une manière plausible les faits observés. On ne peut pas ici se proposer d'autre but.

32. L'application la plus importante que l'on puisse faire de la théorie de la probabilité des jugements, est celle qui a pour objet les décisions rendues par nos jurys en matière criminelle. Une tradition qui remonte au moyen âge a fait porter à 12 le nombre des jurés, en France comme en Angleterre, quoique d'ailleurs l'institution du jury repose dans l'un et dans l'autre pays sur des bases essentiellement différentes. La législation française a varié plusieurs fois sur la fixation de la majorité exigée pour un verdict de culpabilité. D'après la loi actuellement en vigueur, la majorité simple, de sept voix contre cinq, suffit pour la déclaration de culpabilité.

Soient N le nombre total des accusés; M_1 celui des accusés condamnables, selon la définition que nous avons donnée du mot; M_2 le nombre des accusés non condamnables; C celui des accusés condamnés à la majorité de plus de sept voix; C′ celui des accusés condamnés à la majorité simple; A le nombre des accusés acquittés par suite du partage égal des voix; ν_1 la chance d'un vote de condamnation pour un accusé condamnable, ν_2 celle d'un vote d'acquittement pour un accusé non condamnable; V_1, V_2 les probabilités d'un verdict de condamnation ou d'acquittement, selon qu'il s'agit d'accusés condamnables ou d'accusés non condamnables. Posons de plus

$$\frac{M_1}{N} = \mu_1, \quad \frac{M_2}{N} = \mu_2, \quad \frac{C}{N} = c, \quad \frac{C'}{N} = c', \quad \frac{A}{N} = a;$$

on aura

$$\mu_1 + \mu_2 = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1[\nu_1^{12} + 12\nu_1^{11}(1-\nu_1) + 66\nu_1^{10}(1-\nu_1)^2 + 220\nu_1^9(1-\nu_1)^3 + 495\nu_1^8(1-\nu_1)^4] \\ +\mu_2[(1-\nu_2)^{12} + 12(1-\nu_2)^{11}\nu_2 + 66(1-\nu_2)^{10}\nu_2^2 + 220(1-\nu_2)^9\nu_2^3 + 495(1-\nu_2)^8\nu_2^4] \end{array}\right\} = c,$$

$$792\,[\mu_1\nu_1^7(1-\nu_1)^5 + \mu_2(1-\nu_2)^7\nu_2^5] = c',$$

$$924\,[\mu_1\nu_1^6(1-\nu_1)^6 + \mu_2(1-\nu_2)^6\nu_2^6] = a.$$

Si les nombres a, c, c' étaient donnés par la statistique judiciaire, les équations précédentes suffiraient pour déterminer μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, et par suite V_1, V_2.

Les documents statistiques fournissent immédiatement le nombre $c+c'$, et l'on peut en déduire la valeur au moins approchée du nombre c', à cause de l'obligation imposée aux jurés, tant sous la législation actuelle que sous l'une des législations antérieures, de faire connaître si leur verdict a été rendu à la majorité simple. Mais la législation s'est toujours opposée formellement à ce que les jurés fissent connaître à quelle majorité était rendu un verdict d'acquittement. En conséquence, ni le rapport a, ni aucun autre analogue ne peut être donné par la statistique judiciaire; et de là dérive la nécessité, pour arriver à des déterminations numériques, de réduire le nombre des inconnues, ainsi que l'a fait M. Poisson, en supposant tacitement dans sa méthode $v_1 = v_2$.

Cependant l'analyse que nous avons faite dans ce Mémoire, des données de la statistique judiciaire concernant les appels de police correctionnelle, s'accorde bien avec les considérations d'après lesquelles on doit présumer *à priori* que v_2, V_2 surpassent respectivement v_1, V_1, et même que v_2, V_2 diffèrent très peu de l'unité. Les causes qui amènent ce résultat avec des juges permanents, tels que ceux qui prononcent en matière de police correctionnelle, doivent à plus forte raison exercer leur influence sur les jurés. Néanmoins la constatation d'un tel résultat par l'observation directe aurait tant d'intérêt, que l'on doit désirer vivement l'adoption d'une mesure, laquelle, sans manifester le mode de partage des voix pour chaque acquittement en particulier, fournirait pour une longue série d'affaires l'élément qui manque à la statistique criminelle.

Si, par exemple, pour chaque accusé condamné ou acquitté, le chef du jury était tenu de déposer dans une boîte scellée autant de billets blancs qu'il y a eu de voix pour l'acquittement, et autant de billets noirs qu'il y a eu de voix pour la condamnation, le dépouillement des billets pourrait se faire à la fin de chaque année, dans l'intérêt de la statistique judiciaire, sans violer le secret des votes pour chaque affaire particulière. Il n'est pas difficile de montrer que l'inscription sur les tableaux statistiques du résultat de ce dépouillement, équivaudrait, pour l'objet que nous avons en vue, à la connaissance de l'élément désigné plus haut par a.

Dans l'ignorance où nous sommes de la valeur de cet élément, ayant d'ailleurs toute raison de croire que la valeur de ν_2 est comprise entre celle de ν_1 et l'unité, nous ne pouvons que faire successivement les deux hypothèses $\nu_2 = 1$, $\nu_2 = \nu_1$. Les vraies valeurs des inconnues μ_1, ν_1, V_1 devront se trouver comprises entre celles qui correspondent à ces suppositions extrêmes.

Dans l'hypothèse $\nu_2 = 1$, ν_1 sera donné par l'équation du 5^e degré,

$$\nu_1^5 + 12\nu_1^4(1-\nu_1) + 66\nu_1^3(1-\nu_1)^2 + 220\nu_1^2(1-\nu_1)^3 + 495\nu_1(1-\nu_1)^4 - 792\frac{c}{c'}\cdot(1-\nu_1)^5 = 0; \quad (47)$$

on aura ensuite

$$V_1 = \nu^7\left[\nu_1^5 + 12\nu_1^4(1-\nu_1) + 66\nu_1^3(1-\nu_1)^2 + 220\nu_1^2(1-\nu_1)^3 + 495\nu_1(1-\nu_1)^4 + 792(1-\nu_1)^5\right], \quad (48)$$

$$\mu_1 = \frac{c+c'}{V_1}. \quad (49)$$

Si l'on suppose au contraire

$$\nu_2 = \nu_1 = \nu,$$

il viendra

$$c' = 792\nu^5(1-\nu)^5[\mu_1\nu^2 + \mu_2(1-\nu)^2] = 792\nu^5(1-\nu)^5[\mu_1(2\nu-1) + (1-\nu)^2], \quad (50)$$

$$\left.\begin{aligned}
c+c' &= \mu_1[\nu^{12} + 12\nu^{11}(1-\nu) + 66\nu^{10}(1-\nu)^2 + 220\nu^9(1-\nu)^3 + 495\nu^8(1-\nu)^4 + 792\nu^7(1-\nu)^5] \\
&\quad + \mu_2[(1-\nu)^{12} + 12(1-\nu)^{11}\nu + 66(1-\nu)^{10}\nu^2 + 220(1-\nu)^9\nu^3 + 495(1-\nu)^8\nu^4 + 792(1-\nu)^7\nu^5] \\
&= \mu_1[1 - 924\nu^6(1-\nu)^6] + (\mu_2 - \mu_1)[(1-\nu)^{12} + 12(1-\nu)^{11}\nu + 66(1-\nu)^{10} \\
&\qquad \nu^2 + 220(1-\nu)^9\nu^3 + 495(1-\nu)^8\nu^4 + 792(1-\nu)^7\nu^5] \\
&= \mu_1[1 - 924\nu^6(1-\nu)^6] - (2\mu_1 - 1)(1-\nu)^7[(1-\nu)^5 + 12(1-\nu)^4\nu + 66(1-\nu)^3 \\
&\qquad \nu^2 + 220(1-\nu)^2\nu^3 + 495(1-\nu)\nu^4 + 792\nu^5].
\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

On pourrait éliminer μ_1 entre les équations (50) et (51), puis résoudre numériquement par les méthodes ordinaires l'équation finale en ν; mais la longueur du calcul le rendrait presque impraticable. Au lieu de cela, si l'on résout d'abord les équations (47) et (49), les racines de ces équations seront des valeurs assez approchées des racines des équations (50) et (51), pour qu'on puisse appliquer à celle-ci la méthode d'approximation de Newton, et arriver promptement au résultat cherché.

La valeur de V_1 sera toujours donnée par l'équation (48), où l'on pourra écrire ν au lieu de ν_1. Quoiqu'on ait supposé $\nu_2 = \nu_1$, la valeur de V_2 ne se confondra pas avec celle de V_1, comme dans le cas où la même majorité est requise pour l'acquittement et pour la condamnation. On aura

$$V_2 = V_1 + 924 v^6 (1 - v)^6.$$

Sur un nombre N d'accusés, le nombre des accusés acquittés, quoique condamnables, aura pour expression

$$P = \mu_1 (1 - V_1) N, \qquad (52)$$

et celui des accusés condamnés, quoique non condamnables, sera exprimé par

$$Q = (1 - \mu_1)(1 - V_2) N, \qquad (53)$$

cette expression devenant nulle, quand on suppose $V_2 = 1$.

33. A l'exemple de M. Poisson, nous appliquerons ces formules à la statistique criminelle des six années comprises depuis 1825 jusqu'en 1830 inclusivement, sous l'empire d'une législation qui admettait des verdicts de condamnation à la simple majorité, mais seulement lorsque la majorité des cinq magistrats formant alors la cour d'assises, s'était réunie à la majorité du jury. On a eu pendant cette période, $N = 42300$; le nombre des condamnés s'est élevé à 25777.

Il ne serait pas parfaitement exact de prendre pour $C + C'$ ce nombre 25777. En effet, les accusés pour lesquels la minorité de la cour s'est réunie à la majorité du jury, ne sont point compris dans le nombre 25777, et doivent l'être dans le nombre $C + C'$.

Malheureusement les *Comptes rendus* ne nous font point connaître pour quel nombre d'accusés, mais dans quel nombre d'affaires, la cour a eu à délibérer, et s'est réunie, soit à la majorité, soit à la minorité du jury.

On y voit que dans les cinq années écoulées de 1826 à 1830 inclusivement, le nombre total des affaires ayant été de 26883, la cour a eu à délibérer pour 1911 affaires; qu'elle s'est réunie 1597 fois à la majorité, et 314 fois à la minorité du jury.

En admettant que le rapport du nombre des accusés au nombre des affaires criminelles reste sensiblement le même pour la masse totale des affaires, et pour la masse de celles qui ont provoqué l'intervention de la cour, nous en conclurons que, sur 26883 accusés, 1911 environ ont été condamnés par le jury à la simple majorité; que parmi ceux-ci 1597 ayant été condamnés aussi par la majorité de la cour, figurent dans les *Comptes rendus* parmi les accusés condamnés; tandis que 314 figurent parmi les accusés acquittés.

Nous en conclurons par suite que, sur 42300 accusés, 3007 environ ont été condamnés par le jury à la simple majorité; que parmi ceux-ci 2513 ont été aussi condamnés par la majorité de la cour, tandis que 494 ont été définitivement acquittés par elle, et ne figurent point dans le nombre 25777 des accusés condamnés.

L'hypothèse sur laquelle reposent les proportions ci-dessus est tout-à-fait vraisemblable : l'erreur, si elle existe, tombe entre des limites qui permettent de la négliger.

En conséquence nous poserons $C + C' = 25777 + 494 = 26271$, $C' = 3007$; d'où $c + c' = 0,62106$, $c' = 0,07109$, $c = 0,54997$.

Tant qu'a duré la législation qui prescrivait l'intervention de la cour, pour le cas où la déclaration du jury n'était rendue qu'à la majorité simple, c'était un préjugé assez généralement répandu que les jurés, lorsqu'il y avait perplexité dans leurs esprits, *convenaient* de formuler leur déclaration *à la simple majorité,* pour obliger la cour à se prononcer, et rejeter sur elle la responsabilité du verdict. Le changement de législation est venu donner la preuve que ce préjugé n'avait pas de fondement.

En effet, en 1831 la loi ayant prescrit la majorité de 8 voix contre 4 pour un verdict de condamnation, sans que d'ailleurs la législation criminelle ait subi de modifications, on a eu $N = 7606$, $C = 4098$, d'où $c = 0,53878$. La différence entre cette valeur de c et celle trouvée ci-dessus, n'est que de 0,01119 (*), et tombe entre les limites des erreurs que comportent ces déterminations statistiques, eu égard surtout à ce que la dernière valeur de c n'est exclue que des nombres

(*) M. Poisson trouve pour cette différence 0,0005; mais cela provient de ce qu'il a négligé de comprendre dans le nombre désigné ci-dessus par $C + C'$ les accusés condamnés par le jury à la majorité simple, et définitivement acquittés par la cour. Au reste cette différence est insignifiante, eu égard au degré d'approximation que comporte la solution du problème.

donnés pour une seule année, dont les trois premiers mois ont même été régis par l'ancienne législation. Il en résulte que le prétendu penchant des jurés à s'entendre pour faire une déclaration fictive, sous l'empire de la législation abrogée par la loi du 4 mars 1831, n'a exercé sur la masse des affaires qu'une influence insensible.

Pendant les quatre années écoulées de 1832 à 1835 inclusivement, sous l'empire de la loi du 4 mars 1831, qui exigeait la majorité *de plus de sept voix* pour les déclarations de culpabilité, et du nouveau Code pénal qui permet au jury d'abaisser la peine par la déclaration des circonstances atténuantes, on a eu $N = 28702$, $C = 17116$, d'où $c = 0{,}59633$. On en doit conclure que la faculté accordée au jury de déclarer les circonstances atténuantes, et les autres adoucissements introduits dans la législation pénale, ont accru d'environ 0,046, le rapport du nombre des accusés condamnés à la majorité de plus de sept voix, au nombre total des accusés.

La loi du 9 septembre 1835 a introduit le vote secret, ou plutôt l'a rendu facultatif pour les jurés. Elle n'a plus exigé que la majorité simple pour un verdict de condamnation, mais en laissant à la majorité de la cour la faculté d'annuler d'office le verdict de condamnation rendu à la majorité simple, et en obligeant en conséquence les jurés à faire mention de cette dernière circonstance dans leurs déclarations. La publication des *Comptes rendus* pour les années 1836 et suivantes, apprendra donc : 1°. si la faculté du vote secret a changé le rapport c; 2°. quelles variations la faculté du vote secret, combinée avec les adoucissements de la législation pénale introduits en 1832, a pu apporter au rapport c', précédemment déterminé pour la période de 1825 à 1830.

34. Si l'on fait dans l'équation (47),

$$c = 0{,}550, \quad c' = 0{,}071,$$

on aura $v_1 = 0{,}750$, et par suite $u_1 = 0{,}657$. Ces valeurs sont relatives à l'hypothèse $v_2 = 1$. Elles donnent 0,946 pour la chance V_1 qu'un accusé condamnable avait de réunir contre lui la majorité des jurés, sous l'empire de la législation qui régnait de 1826 à 1830. Le nombre des accusés, pendant la période que nous considérons, étant de 42300, nous ferons dans l'équation (52), $N = 42300$, $V_1 = 0,946$, $\mu_1 = 0,657$, ce qui nous donnera $P = 1511$ pour le nombre des accusés acquittés par le jury durant cette période, quoique condamnables, le nombre total des accusés acquittés sans l'intervention de la cour, étant de 16029.

La seconde hypothèse $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ nous donnera encore $\nu = 0,750$, à l'ordre d'approximation auquel nous nous arrêtons: la valeur de μ_1 sera un peu plus faible que dans la première hypothèse, et se réduira à 0,650. On aura $V_1 = 0,946$, $V_2 = 0,986$; ce qui donne, sur 42300 accusés, $P = 1496$ accusés acquittés par les jurés, quoique condamnables, et $Q = 210$ accusés condamnés par la majorité des jurés, quoique non condamnables, le nombre total des accusés déclarés coupables par le jury étant 26271. Il faut observer que dans ce nombre Q doivent figurer des accusés condamnés par les jurés à la majorité simple, et acquittés ensuite par la cour d'assises. Il faut surtout ne pas perdre de vue la définition que nous avons donnée des mots condamnables et non condamnables : définition sur laquelle nous reviendrons encore à la fin de ce mémoire.

Si, durant le cours de la période dont il s'agit, la majorité de plus de sept voix eût été exigée pour la déclaration de culpabilité, comme elle l'a été par la loi du 4 mars 1831, le nombre des accusés condamnés se serait abaissé à 23264. On aurait eu, dans l'hypothèse $\nu_2 = 1$, $P = 4360$ accusés acquittés, quoique condamnables. Dans la seconde hypothèse $\nu_2 = \nu_1$, on aurait eu $P = 4317$, le nombre Q restant toujours nul, attendu que la probabilité de la condamnation d'un seul accusé non condamnable devient insensible pour les valeurs de ν et de μ_1.

35. Les résultats que l'on vient d'obtenir se rapportent à la série générale des accusés, sans distinction de catégories, et à l'hypothèse essentiellement fautive, où les causes d'erreur agissent d'une manière fortuite et indépendante sur chaque juré, en un mot à l'hypothèse où l'on fait abstraction de l'influence des causes objectives d'erreur. Nous avons vu dans les art. 19 et suivants, comment le perfectionnement de la statistique judiciaire, en permettant de subdiviser la série générale des jugements en catégories de plus en plus nombreuses,

donne aussi les moyens de s'affranchir de plus en plus de l'influence des causes objectives d'erreur. Cette théorie reçoit ici son application. Ainsi les *Comptes rendus* classent d'abord les accusés en deux grandes catégories, selon qu'il s'agit de crimes qualifiés *contre les personnes*, ou de crimes qualifiés *contre les propriétés*. Chacune de ces catégories se subdivise en plusieurs autres, d'après l'espèce du crime ; et une foule d'autres divisions peuvent encore être établies, selon le sexe, l'âge, le degré d'instruction des accusés, leur état de récidive, la nature des peines correspondantes aux crimes, etc.

Pour abréger, nous ne nous occuperons que de la division en deux catégories, celles des accusés de crimes contre les personnes et des accusés de crimes contre les propriétés ; nous désignerons par v', v'', u_1', u_1'', les valeurs de v, u_1, selon qu'elles se rapportent à la première ou à la seconde catégorie ; et nous prendrons ces valeurs, telles que M. Poisson les a calculées, bien qu'elles soient susceptibles de quelques corrections, analogues à celles que l'on a indiquées plus haut pour la série générale, mais qui se confondent sensiblement avec les erreurs inévitables, résultant de l'imperfection des données. Nous aurons ainsi :

$$v' = 0{,}6786,\quad u_1' = 0{,}5354,$$
$$v'' = 0{,}7771,\quad u_1'' = 0{,}6744;$$

ces valeurs se rapportant à l'hypothèse $v_2' = v_1' = v'$, $v_2'' = v_1'' = v''$, la seule que M. Poisson ait considérée.

Il est curieux de voir ce que deviennent, pour la série générale, les valeurs de v, u_1, calculées au moyen des valeurs précédentes, et des formules

$$v = \mu' v' + \mu'' v'',$$
$$u_1 = \mu' u_1' + \mu'' u_1'',$$

dans lesquelles μ' désigne le rapport du nombre des accusés de crimes contre les personnes au nombre total des accusés, et μ'' le rapport du nombre des accusés de crimes contre les propriétés au même nombre total des accusés, de sorte que $\mu' + \mu'' = 1$.

Sur les 42300 individus accusés pendant la période qui nous occupe, 11016 l'ont été pour des crimes contre les personnes, et 31284 pour des crimes contre les propriétés, ce qui donne

$$\mu' = 0{,}2598, \quad \mu'' = 0{,}7402.$$

Au moyen de ces valeurs on trouve

$$\nu = 0{,}751, \quad \mu_1 = 0{,}638,$$

ce qui diffère peu des valeurs assignées plus haut à ν et à μ_1. La différence est surtout insensible pour ce qui concerne la valeur de ν, et tombe tout-à-fait dans les limites de l'erreur que comporte l'imperfection des données.

Ainsi l'on peut regarder les valeurs moyennes des éléments ν, μ_1, pour la série générale, comme déterminées avec une approximation suffisante, d'après la nature des données, sans qu'il soit besoin de multiplier davantage le nombre des catégories.

Il n'en est pas de même à l'égard des nombres P, Q. Ainsi, en désignant par P', Q', P'', Q'' les valeurs de P et de Q pour chacune des deux catégories, on trouve,

$$\begin{aligned} P' &= 910, \quad Q' = 282, \\ P'' &= 681, \quad Q'' = 74; \end{aligned}$$

d'où $P' + P'' = 1591$, au lieu de 1496, nombre trouvé pour P, en appliquant les formules à la série générale, et $Q' + Q'' = 356$, au lieu de 210, nombre trouvé par Q, en vertu des mêmes formules.

On ne peut donc regarder les valeurs primitivement trouvées pour P et Q, et même celles que nous donne la division en deux catégories, que comme des limites inférieures des vraies valeurs de P et de Q, d'après la signification attachée à ces lettres.

Mais d'un autre côté ces valeurs de P et de Q sont obtenues dans l'hypothèse $\nu_2 = \nu_1$, tandis que vraisemblablement la valeur de ν_2 tombe entre ν_1 et l'unité; ce qui tend à augmenter la valeur de P et à diminuer la valeur de Q, ou même à la rendre insensible.

Dans tous les cas on peut affirmer qu'il n'y a pas eu, dans la période qui nous occupe, un accusé sur cent, condamné quoique non condamnable, c'est-à-dire d'après notre définition, quoique la chance d'un vote de condamnation tombât pour cet accusé au-dessous de $\frac{1}{2}$.

Dans ce petit nombre d'accusés condamnés, quoique non condamnables, il est légitime et consolant de croire que la plupart étaient coupables; mais nous n'avons aucun moyen d'évaluer, même approximativement, la probabilité de leur culpabilité réelle.

D'un autre côté cette catégorie d'accusés condamnés, quoique non condamnables, ne comprend pas nécessairement tous les accusés qui ont pu être condamnés quoique innocents. Il n'est malheureusement pas impossible que pour quelques accusés innocents la chance d'un vote de condamnation tombe au-dessus de $\frac{1}{2}$ et soit même très voisine de l'unité. Le calcul appliqué à la statistique judiciaire n'a aucun moyen d'atteindre cette éventualité et d'en assigner la chance.

36. En terminant ce mémoire, nous croyons utile d'ajouter encore quelques explications à celles qui ont déjà été données sur la signification des lettres v_1, v_2, et sur le sens de la distinction fondamentale établie entre les accusés condamnables et les accusés non condamnables.

Ne considérons d'abord pour simplifier que des accusés compris dans une même catégorie, pour lesquels l'influence des causes objectives d'erreur est constante, tandis que les causes subjectives d'erreur agissent d'une manière fortuite et variable d'un juge à l'autre. Admettons aussi qu'à l'égard de ces accusés on puisse ne faire qu'une seule catégorie de tous les citoyens appelés ou susceptibles d'être appelés à remplir les fonctions de jurés. Le rapport du nombre des votes de condamnation au nombre des votes d'acquittement, sera le même, soit que l'on fasse juger successivement, par un même juré pris au hasard un très grand nombre d'accusés, soit que l'on interroge sur le même accusé un très grand nombre de jurés. Dans l'un et dans l'autre cas, ce rapport sera $\frac{v_1}{v_2}$, v_1 désignant la chance d'un vote de condamnation, et v_2 la chance d'un vote d'acquittement, pour la catégorie d'accusés et pour la catégorie de jurés dont il s'agit.

Donc, puisque nous entendons et devons entendre par accusés condamnables ceux pour lesquels v_1 surpasse $\frac{1}{2}$ et par conséquent v_2, les accusés condamnables seront ceux qui seraient certainement condamnés, au moins à la majorité simple, si les débats avaient lieu devant un nombre très grand de jurés, pour chacun desquels les chances ν_1, ν_2 auraient la même valeur.

Cette conclusion subsiste encore, dans le cas où il n'est plus permis de supposer que les chances ν_1, ν_2 conservent les mêmes valeurs pour tous les citoyens parmi lesquels le sort désigne ceux qui doivent remplir les fonctions de jurés. En effet ν_1, ν_2 désignent alors des moyennes de la forme

$$\mu'\nu_1' + \mu''\nu_1'' + \mu'''\nu_1''' + \text{etc.}, \qquad (54)$$
$$\mu'\nu_2' + \mu''\nu_2'' + \mu'''\nu_2''' + \text{etc.}, \qquad (55)$$

ν_1, ν_1'', ... ν_2', ν_2'' ... étant les valeurs de ν_1, ν_2 pour chaque catégorie de jurés, et μ', μ_1 ... exprimant pour chaque catégorie le rapport du nombre des citoyens qui la composent au nombre total des citoyens compris sur la liste générale des jurés. Mais évidemment les quantités (54) et (55) expriment aussi les probabilités qu'un juré pris au hasard sur la liste générale condamnera ou acquittera l'accusé; et quand l'expression (54), qui est celle de ν_1, surpassera $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire quand l'accusé sera condamnable dans le sens de la définition), on sera certain que la condamnation aurait lieu, au moins à la majorité simple, si l'on pouvait convoquer aux débats un très grand nombre de jurés, pris au hasard sur la liste générale.

Selon cette manière de définir les quantités ν_1, ν_2 et leurs analogues, les questions qui font l'objet du présent mémoire prennent un sens purement arithmétique, facilement saisissable, même par les personnes étrangères à l'analyse mathématique; et l'on écarte ces considérations délicates qui se rattachent à l'emploi des mots *vérité* et *erreur*, quand il s'agit de jugements comme ceux que rendent les tribunaux, pour lesquels il n'y a pas en général de *criterium* de vérité. En conséquence, c'est sous ce dernier point de vue, abstraction faite de toute hypothèse sur la vérité ou l'erreur du jugement, que j'avais envisagé depuis long-temps l'application du calcul des chances à la statistique judiciaire: mais après avoir lu et étudié avec toute l'attention dont je suis capable l'important traité de M. Poisson sur la matière, j'ai trouvé bien préférable de rattacher mes recherches à celles de cet éminent géomètre, en insistant toutefois sur les explications qui démontrent à mon sens l'identité des résultats auxquels on est définitivement amené, en partant de l'une ou de l'autre base.

37. Bien loin que les dédains de certains légistes pour le calcul des chances judiciaires soit fondé, le point de vue sous lequel le législateur envisage l'organisation des tribunaux est au fond le même que celui du géomètre. Le législateur ne se préoccupe que des résultats moyens et généraux du système qu'il institue; et le géomètre sait que ses formules n'ont de valeur qu'autant qu'elles s'appliquent à de grands nombres, sans qu'elles puissent avoir de prise sur un cas particulier. Le législateur ne peut interroger que la statistique judiciaire, s'il veut trouver la confirmation authentique de ses prévisions; sans la statistique les formules du géomètre resteraient stériles, ou du moins on n'en pourrait tirer que quelques propositions générales et non des résultats numériques.

Le législateur sait ou doit savoir que les institutions judiciaires ne préviendront jamais ces méprises fatales qui chargent l'innocence de toutes les apparences du crime; qu'elles n'empêcheront pas en matière civile ces erreurs de jurisprudence qui prennent leur source dans un préjugé dominant; que leur unique destination est de garantir un jugement conforme à celui de la majorité des hommes impartiaux et éclairés pour l'époque; d'offrir même en matière criminelle une garantie suffisante que le jugement de condamnation aurait l'assentiment d'une grande majorité; de restreindre l'influence des anomalies du sort sur la destinée de l'accusé.

Tous les faits que le législateur ne peut atteindre par les combinaisons dont il dispose, le géomètre ne peut pas davantange les soumettre au calcul; et ce qui est saisissable pour l'un est saisissable pour l'autre, à l'aide des documents statistiques.

Note du Rédacteur. Pendant que M. Cournot travaillait à ce Mémoire, M. Bienaymé de son côté s'occupait des même questions. Ses recherches, dont il m'a communiqué à plusieurs reprises divers résultats, remontent à l'année 1835. J'aurais désiré pouvoir les faire imprimer ici; mais les occupations multipliées de l'auteur ne lui ont pas permis de les rédiger complétement. Il en a donné seulement à la Société Philomatique une analyse très succincte qui sera publiée dans le journal *l'Institut*. (J. LIOUVILLE.)

Addition au Mémoire de M. Théodore Olivier, *inséré dans le cahier de mai.*

Ajoutez à la page 252 de ce volume, ce qui suit :

Dans ce qui précède, nous n'avons résolu qu'un cas particulier, qui peut s'énoncer ainsi :

Lorsque deux surfaces du second degré ont en un point une osculation du troisième ordre, si ce point est sur une section principale de l'une des surfaces, il est nécessairement aussi sur une section principale de l'autre surface, et ces deux sections sont dans un même plan diamétral principal commun aux deux surfaces. C'est le cas où l'on suppose que

$$n = \mathrm{N} \quad \text{et} \quad p = \mathrm{P} = 0.$$

Cherchons maintenant les conditions auxquelles doivent satisfaire les deux surfaces, lorsque le point d'osculation est sur une section diamétrale quelconque.

Puisque les deux surfaces ξ et ξ_1 ont en un point une osculation du troisième ordre, il faut qu'un plan quelconque passant par le point d'osculation les coupe, ξ suivant une courbe $\mathcal{C}$, et ξ_1 suivant une courbe $\mathcal{C}'$, ces courbes étant telles qu'elles aient aussi une osculation du troisième ordre.

Or, si l'on conçoit une droite Z_1 passant par le point d'osculation et le centre de la surface ξ, un plan quelconque P passant par Z_1 ne pourra couper les deux surfaces suivant deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ayant une osculation du troisième ordre, qu'autant que les centres de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et le point d'osculation seront en ligne droite, car nous savons que cette propriété existe entre deux courbes du second degré, lorsque l'osculation est du troisième ordre, et qu'elle n'existe pas pour l'osculation du deuxième ordre.

Or, cette condition ne sera remplie, quelle que soit la direction du plan P, qu'autant 1°. que les centres des deux surfaces et leur point d'osculation seront en ligne droite ; 2°. que pour chaque plan P, le plan diamétral qui lui est conjugué, et qui passe par Z_1, sera le même pour les deux surfaces.

Ainsi, deux surfaces du second degré, ayant en un point une osculation du troisième ordre, ont nécessairement :

1°. Leurs centres et le point d'osculation en ligne droite ;

2°. Mêmes systèmes de plans diamétraux conjugués se croisant au point d'osculation.

Cette dernière discussion se rapporte au cas où l'on suppose que $n = N$ et $p = P$.

Errata.

Page 252,	ligne	3,	pair, *lisez* impair
ibid.,		7,	un plan diamétral commun, *lisez* deux plans diamétraux conjugués communs
253,		3,	sera, *ajoutez* représentée par l'équation
ibid.,		15,	courbe d'intersection, *lisez* courbe, projection de la courbe d'intersection.

Sur la Théorie des Équations transcendantes;

PAR J. LIOUVILLE.

Dans une note qu'un élève de M. Plana vient de m'adresser, mais qui n'a pas pu être insérée dans ce Journal, l'auteur arrive à l'équation du troisième degré

$$(1) \qquad \frac{a^2}{2(a^2 - v)} + \frac{b^2}{2(b^2 - v)} + \frac{c^2}{2(c^2 - v)} - 1 = 0,$$

où v est l'inconnue; et, pour démontrer la réalité de ses trois racines, il emploie un artifice que lui a communiqué l'habile professeur de Turin. Cet artifice (qui du reste se présente de lui-même et a été déjà mis en usage dans des cas semblables par d'autres géomètres) consiste à poser $v = p + q\sqrt{-1}$, hypothèse qui réduit la fraction

$$\frac{a^2}{a^2 - v}$$

à la forme

$$\frac{a^2(a^2 - p + q\sqrt{-1})}{(a^2 - p)^2 + q^2},$$

en sorte que l'équation (1) se décompose dans les deux suivantes

$$\frac{a^2(a^2 - p)}{(a^2 - p)^2 + q^2} + \frac{b^2(b^2 - p)}{(b^2 - p)^2 + q^2} + \frac{c^2(c^2 - p)}{(c^2 - p)^2 + q^2} = 2,$$

$$\frac{a^2 q}{(a^2 - p)^2 + q^2} + \frac{b^2 q}{(b^2 - p)^2 + q^2} + \frac{c^2 q}{(c^2 - p)^2 + q^2} = 0;$$

dont la seconde exige évidemment que l'on ait $q = 0$.

Pour prouver la réalité des racines de l'équation (1) dans laquelle nous supposerons $a^2 > b^2 > c^2$ on suit ordinairement une autre marche. En effet, si dans le premier membre de cette équation on pose $v = -a^2$, puis $v = 0$, on obtiendra évidemment deux résultats de signes contraires; et comme entre les limites citées ce premier membre est fonction continue de v, il faut en conclure qu'elles comprennent une racine de la proposée. En désignant par ε une quantité positive infiniment petite, et faisant $v = c^2 + \varepsilon$, $v = b^2 - \varepsilon$, on obtient également deux résultats de signes opposés. Une seconde racine est donc comprise entre c^2 et b^2 : il y en a de même une troisième entre b^2 et a^2. Or l'équation (1) étant du troisième degré ne peut avoir que trois racines : donc elle n'a ni racines égales, ni racines imaginaires, mais bien trois racines réelles, l'une négative, et les deux autres positives.

En général, soient B, A_1, $A_2, \ldots A_n$, a_1, $a_2, \ldots a_n$ des quantités réelles quelconques, telles que l'on ait

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots . < a_n.$$

Les n racines de l'équation

$$(2) \qquad \frac{A_1^2}{v - a_1} + \frac{A_2^2}{v - a_2} + \ldots + \frac{A_n^2}{v - a_n} - B = 0$$

seront réelles et inégales. Si B est > 0 leurs limites seront a_1 et a_2, a_2 et $a_3, \ldots a_{n-1}$ et a_n, a_n et $+\infty$; si B est < 0 leurs limites seront au contraire $-\infty$ et a_1, a_1 et $a_2, \ldots a_{n-1}$ et a_n. Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire successivement $v = -\infty$, $v = a_1 - \varepsilon$, $v = a_1 + \varepsilon$, $v = a_2 - \varepsilon, \ldots v = \infty$, ε désignant une quantité positive et infiniment petite, puis d'observer les signes que prend pour ces diverses valeurs de v le premier membre de l'équation (2).

Quand on a $B = 0$, l'équation (2) descend au degré $(n-1)$, et les limites de ses racines sont a_1 et $a_2 \ldots \ldots a_{n-1}$ et a_n.

La méthode précédente, qui est très familière aux géomètres, paraît plus simple que celle indiquée d'abord d'après M. Plana. J'ai donc cherché par quel motif M. Plana s'est trouvé conduit à accorder la préférence au procédé le plus compliqué; et j'ai cru voir que cet illustre géomètre a eu spécialement pour but de donner une méthode susceptible d'être étendue même aux équations transcendantes. Or, celle que je viens d'exposer en dernier lieu paraît difficilement se prêter à une telle extension, puisque, pour s'en servir, on a besoin de savoir *à priori* que l'équation (2) dont on s'occupe n'a jamais plus de n racines quand B est $\gtrless 0$, et plus de $(n-1)$ racines quand $B=0$. C'est donc à l'artifice de M. Plana qu'il conviendra de recourir si le nombre n est infini, c'est-à-dire si l'équation (2) est remplacée par une équation transcendante

$$(3) \qquad \frac{A_1^2}{v-a_1} + \frac{A_2^2}{v-a_2} + \text{etc.} = B,$$

ayant pour premier membre une série convergente. En écrivant cette équation ainsi

$$\Sigma\left(\frac{A_i^2}{v-a_i}\right) = B,$$

et faisant $v=p+q\sqrt{-1}$, on trouve sans difficulté

$$\Sigma\frac{A_i^2(p-a_i-q\sqrt{-1})}{(p-a_i)^2+q^2} = B,$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma\frac{A_i^2(p-a_i)}{(p-a_i)^2+q^2} = B, \quad q\Sigma\frac{A_i^2}{(p-a_i)^2+q^2} = 0,$$

égalités dont la seconde est absurde à moins que l'on n'ait $q=0$, c'est-à-dire à moins que la racine v ne soit supposée réelle. Donc l'équation (3) n'a pas de racines imaginaires. Pour prouver qu'elle n'a pas non plus de racines égales, il suffira d'ailleurs d'observer que l'existence d'une racine réelle multiple entraînerait celle de l'équation absurde

$$\Sigma\frac{A_i^2}{(v-a_i)^2} = 0.$$

La démonstration précédente pourrait encore se faire si l'équation (3) était remplacée par celle-ci

$$(4) \qquad \Sigma\left[\frac{A_i^2}{v-a_i}\right] = f(v),$$

$f(v)$ étant, non plus une simple constante, mais une fonction telle que la quantité $f(p+q\sqrt{-1})$ se réduise à la forme $P+qQ^2\sqrt{-1}$, P et Q désignant des quantités réelles. En effet, si l'on pose $v=p+q\sqrt{-1}$, cette équation (4) se décomposera en deux autres

$$\Sigma \frac{A_i^2(p-a_i)}{(p-a_i)^2+q^2} = P,$$
$$q\Sigma \frac{A_i^2}{(p-a_i^2)+q^2} = -qQ^2,$$

dont la seconde exige nécessairement que l'on ait $q=0$. Ainsi l'équation (4) n'a jamais dans ce cas de racines imaginaires. En prenant la différentielle des deux membres, on verra qu'elle n'a pas non plus de racines égales : la raison en est que, pour toute valeur réelle de v, la dérivée du premier membre est négative, tandis que celle du second est positive ou nulle, puisqu'elle se déduit évidemment de Q^2 en y remplaçant p par v et q par 0. On peut conclure de là que si $\varphi(v)$ est une fonction algébrique ou transcendante décomposable en facteurs simples sous la forme

$$\varphi(v) = A\left(1-\frac{v}{a_1}\right)^{\alpha_1}\left(1-\frac{v}{a_2}\right)^{\alpha_2}\left(1-\frac{v}{a_3}\right)^{\alpha_3}\cdots,$$

où A, a_1, a_2, a_3... désignent des constantes réelles quelconques et α_1, α_2, α_3... des exposants positifs, l'équation

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = f(v)$$

n'aura ni racines imaginaires, ni racines égales, tant que la fonction $f(v)$ remplira les conditions dont on a parlé ci-dessus. Cela résulte de ce que la fraction $\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}$ est égale à

$$\frac{\alpha_1}{v-a_1} + \frac{\alpha_2}{v-a_2} + \cdots$$

Posons par exemple $\varphi(v)=\cos v$, puis $f(v)=a$ ou $f(v)=a+b^2v$, a et b étant des constantes réelles : nous formerons ces deux équations

$$\operatorname{tang} v = -a, \quad \operatorname{tang} v = -a-b^2v,$$

que les géomètres ont déjà considérées et dont les racines sont nécessairement réelles et inégales.

En prenant $f(v) = 0$, l'équation

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = f(v)$$

se réduit à

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = 0.$$

Quand $\varphi(v)$ a la forme indiquée plus haut, l'équation $\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = 0$ a donc toutes ses racines réelles et n'a pas de racines égales. De là il est aisé de conclure que l'équation $\varphi'(v) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles, quoiqu'elle puisse avoir des racines multiples.

Bien que cette note (qui n'est qu'un développement de l'idée de M. Plana) ajoute très peu de chose ou même n'ajoute rien à ce que l'on connaissait sur la théorie des équations transcendantes, j'ai pensé qu'il pouvait être bon de la publier ici afin d'attirer l'attention des géomètres sur un point de la science qui est à la fois très important et très délicat.

NOTE

Sur la Théorie de la Variation des constantes arbitraires ;

PAR J. LIOUVILLE.

Soient n un nombre entier positif, x une fonction de t dont nous désignerons par x', x'',.... $x^{(n)}$ les dérivées successives, prises par rapport à t, et P une fonction quelconque de t, x, x',... $x^{(n-1)}$. Si l'on sait intégrer l'équation différentielle de l'ordre n,

$$x^{(n)} = \mathrm{P}, \tag{1}$$

il sera facile d'intégrer ensuite par approximation l'équation nouvelle

$$x^{(n)} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}, \tag{2}$$

dans laquelle on suppose que le terme Q reste toujours très petit. Et même si Q désigne une fonction donnée quelconque de t, et que l'équation (1) soit linéaire, on parvient à intégrer complétement l'équation (2). La méthode que les géomètres suivent ordinairement pour atteindre ce but consiste à faire varier les constantes arbitraires contenues dans l'intégrale complète $x = f(t, a, b, \ldots c)$ de l'équation (1), de telle sorte que l'équation (2) soit satisfaite aussi par $x = f(t, a, b, \ldots c)$. Cela revient au fond à remplacer l'inconnue x par n inconnues $a, b, \ldots c$, entre lesquelles on pourra d'ailleurs établir à volonté $(n-1)$ relations. Les relations dont nous parlons deviennent très simples quand on assujétit les valeurs de $dx, d^2x, \ldots d^{n-1}x$ à conserver la même forme dans le cas de l'équation (2) et dans le cas de l'équation (1).

Pour déterminer $a, b, \ldots c$ en fonction de t, on obtient dans cette hypothèse les équations suivantes :

$$\frac{dx}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = 0,$$
$$\frac{dx'}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx'}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx^{(n-2)}}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx^{(n-2)}}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx^{(n-2)}}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = 0,$$
$$\frac{dx^{(n-1)}}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx^{(n-1)}}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx^{(n-1)}}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = Q.$$

Il s'agit d'en tirer les valeurs de $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots \frac{dc}{dt}$, et c'est ce qu'on peut toujours faire à l'aide de la règle donnée par Laplace pour résoudre les équations du premier degré, quel que soit le nombre des inconnues.

D'après cette règle on formera d'abord le dénominateur commun des inconnues $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots \frac{dc}{dt}$, à l'aide des coefficients $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}$, etc., de ces inconnues. On aura ensuite le numérateur de la fraction qui exprime $\frac{da}{—}$, par exemple, en remplaçant dans le dénominateur commun $\frac{dx^{(n-1)}}{da}$ par Q, et $\frac{dx^{(n-2)}}{da}, \ldots \frac{dx'}{da}, \frac{dx}{da}$ par zéro.

On peut simplifier le calcul toutes les fois que la fonction P est indépendante de $x^{(n-1)}$, c'est-à-dire toutes les fois que $\frac{dP}{dx^{(n-1)}} = 0$. Je me propose dans cette Note de prouver qu'alors le dénominateur commun des quantités $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots \frac{dc}{dt}$, ne contient pas t explicitement et n'est fonction que de $a, b, \ldots c$; on verra même qu'il se réduit à l'unité lorsque $a, b, \ldots c$ représentent les valeurs de x, $x', \ldots x^{(n-1)}$, relatives à une valeur particulière de t, telle que $t = 0$.

Pour donner de ce théorème une démonstration générale, je représente par u le dénominateur commun et je cherche sa dérivée $\frac{du}{dt}$ prise par rapport à t, en tant que cette lettre entre explicitement dans u, sans que l'on fasse varier les constantes $a, b, \ldots c$. La valeur de u se compose d'une série de termes, les uns positifs, les autres négatifs : le premier de ces termes est par exemple

$$\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdots \frac{dx^{(n-1)}}{dc}.$$

D'après un théorème connu, la valeur de u doit devenir nulle si l'on rend égaux entre eux les coefficients de $\frac{da}{dt}$, ceux de $\frac{db}{dt}$, ... ceux de $\frac{dc}{dt}$, dans deux des équations du problème. Si donc on remplace partout dans l'expression de u une des dérivées $x^{(i)}$ par une autre dérivée ayant un indice différent de i et compris dans la série $0, 1, 2, \ldots (n-1)$, il faudra que u se réduise à zéro après ce changement effectué.

Cela posé j'observe que, pour trouver $\frac{du}{dt}$, on peut différencier dans u successivement $x, x', \ldots x^{(n-2)}, x^{(n-1)}$, et ajouter les résultats partiels ainsi obtenus. Or, différencier x, c'est remplacer x par x', et par ce changement u devient zéro; de même différencier $x' \ldots$ ou $x^{(n-2)}$, c'est remplacer $x' \ldots$ ou $x^{(n-2)}$ par $x'' \ldots$ ou $x^{(n-1)}$, ce qui donne encore zéro pour résultat. Quant à la différenciation qui porte sur $x^{(n-1)}$, on l'effectuera en remplaçant $x^{(n-1)}$ par $x^{(n)}$ ou par P. Donc finalement la valeur de $\frac{du}{dt}$ se composera de termes de la forme

$$\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdots \frac{dP}{dc}.$$

Mais P étant fonction de $t, x, x', \ldots x^{(n-1)}$, on a

$$\frac{dP}{dc} = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} + \frac{dP}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dc} + \ldots + \frac{dP}{dx^{(n-1)}} \cdot \frac{dx^{(n-1)}}{dc}.$$

On trouve des valeurs semblables pour les dérivées $\frac{dP}{da}$, $\frac{dP}{db}$, ... En les substituant dans l'expression de $\frac{du}{dt}$, celle-ci se décompose en plusieurs parties qui ont pour facteurs respectifs $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP}{dx'}$, ... $\frac{dP}{dx^{(n-1)}}$ et qui sont nulles d'elles-mêmes, comme il est aisé de le voir d'après ce que l'on a expliqué plus haut.

Donc enfin l'on a $\frac{du}{dt} = 0$, en sorte que le dénominateur u ne contient pas t explicitement, et se réduit à une simple fonction de $a, b, \ldots c$. Ainsi la valeur de u ne changera pas si l'on pose $t = 0$. Mais quand $a, b, \ldots c$ représentent les valeurs initiales de $x, x', \ldots x^{(n-1)}$, le premier terme de u, savoir $\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdots \frac{dx^{(n-1)}}{dc}$, se réduit à l'unité pour $t = 0$, et les autres deviennent nuls dans la même hypothèse : on a par suite alors $u = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

L'analyse précédente exige que P ne contienne pas la dérivée $x^{(n-1)}$, mais seulement les dérivées d'ordre inférieur à $(n - 1)$. Si P contenait $x^{(n-1)}$, on trouverait de la même manière

$$\frac{du}{dt} = u \frac{dP}{dx^{(n-1)}}.$$

Ces considérations générales deviennent beaucoup plus claires lorsqu'on les applique au cas particulier où $n = 3$.

On a alors

$$\begin{aligned} u = & \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dx''}{dc} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dx''}{db} \\ & + \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dx''}{db} - \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dx''}{dc} \\ & + \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dx''}{da} - \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dx}{da}; \end{aligned}$$

et par le calcul direct, on trouve, en omettant les termes qui se détruisent, et en remplaçant x''' par P,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dP}{dc} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dP}{db} \\ & + \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dP}{db} - \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dP}{dc} \\ & + \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dP}{da} - \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dP}{da}, \end{aligned}$$

expression qui devient nulle en effet, lorsqu'on met au lieu de $\frac{dP}{da}, \frac{dP}{db}, \frac{dP}{dc}$ leurs valeurs respectives

$$\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{dP}{dx'}\cdot\frac{dx'}{da},$$
$$\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{dP}{dx'}\cdot\frac{dx'}{db},$$
$$\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{dP}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dc},$$

qui sont exactes dès que P est une fonction de t, x, x' indépendante de x''. Mais ces valeurs devraient être augmentées des termes suivants $\frac{dP}{dx''}\cdot\frac{dx''}{da}$, $\frac{dP}{dx''}\cdot\frac{dx''}{db}$, $\frac{dP}{dx''}\cdot\frac{dx''}{dc}$, si P contenait x''. Aussi dans ce cas $\frac{du}{dt}$ est $= u\frac{dP}{dx''}$ et non plus $= 0$.

En supposant P indépendant de $x^{(n-1)}$, et admettant que a, b, etc., soient les valeurs initiales de x, x', etc., on a

$$\frac{da}{dt} = -Q\frac{dx}{db},$$
$$\frac{db}{dt} = Q\frac{dx}{da},$$

pour $n=2$; puis

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{dx}{db}\cdot\frac{dx'}{dc}-\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dx'}{db}\right)Q,$$
$$\frac{db}{dt} = \left(\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dx'}{da}-\frac{dx}{da}\cdot\frac{dx'}{dc}\right)Q,$$
$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dx}{da}\cdot\frac{dx'}{db}-\frac{dx}{db}\cdot\frac{dx'}{da}\right)Q,$$

pour $n=3$; et ainsi de suite.

Lorsque $n=2$, si Q est de la forme $-\frac{dR}{dx}$, R étant une fonction de t et x seulement, il vient

$$\frac{da}{dt} = \frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{db} = \frac{dR}{db},$$
$$\frac{db}{dt} = -\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{da} = -\frac{dR}{da},$$

ce qui s'accorde avec les formules connues.

Les résultats que nous venons d'obtenir s'étendent de la manière suivante à un nombre quelconque d'équations différentielles simultanées. On peut toujours supposer que ces équations sont du premier ordre; car si elles contiennent des différentielles d'ordre supérieur, il suffira de représenter les intégrales de ces différentielles par des lettres particulières, que l'on traitera comme de nouvelles variables, pour rabaisser au premier ordre les équations proposées : par exemple l'équation

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = x_1^2 + t^2$$

peut être remplacée par ces trois équations du premier ordre

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1^2 + t^2.$$

Soient donc en général $x_1, x_2, \ldots x_n$, n fonctions de t liées entre elles par n équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathrm{P}_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \mathrm{P}_2, \ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = \mathrm{P}_n,$$

où $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots \mathrm{P}_n$ désignent des fonctions de $t, x_1, x_2, \ldots x_n$. Désignons par $a, b, \ldots c$ les constantes arbitraires qui entreront dans les expressions de $x_1, x_2, \ldots x_n$, fournies par l'intégration des équations différentielles proposées. Enfin considérons les n équations

$$\begin{array}{l}
\frac{dx_1}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx_1}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx_n}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = \mathrm{Q}_1, \\
\frac{dx_2}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx_2}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx_n}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = \mathrm{Q}_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dx_n}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx_n}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx_n}{} \cdot \frac{dc}{dt} = \mathrm{Q}_n,
\end{array}$$

où nous prenons pour inconnues $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots \frac{dc}{dt}$. Je dis qu'il est toujours facile de calculer *à priori* le dénominateur commun des fractions qui expriment ces inconnues. En effet, soit u ce dénominateur. D'après la règle de Laplace, il est formé d'une série de termes de la forme $\frac{dx_1}{da}\cdot\frac{dx_2}{db}\ldots\frac{dx_n}{dc}$, pris avec des signes convenables. C'est pourquoi nous écrirons

$$u = \Sigma\left(\pm\frac{dx_1}{da}\cdot\frac{dx_2}{db}\ldots\frac{dx_n}{dc}\right).$$

Cherchons maintenant $\frac{du}{dt}$. Il faudra pour cela différencier successivement $x_1, x_2, \ldots x_n$, par rapport à t : or la différenciation relative à x revient à remplacer x_1 par P_1, d'où résulte la quantité

$$\Sigma\left(\pm\frac{dP_1}{da}\cdot\frac{dx_2}{db}\ldots\frac{dx_n}{dc}\right),$$

qui, développée, devient

$$\begin{aligned}&\frac{dP_1}{dx_1}\Sigma\left(\pm\frac{dx_1}{da}\cdot\frac{dx_2}{db}\ldots\frac{dx_n}{dc}\right)\\ &+\frac{dP_1}{dx_2}\Sigma\left(\pm\frac{dx_2}{da}\cdot\frac{dx_2}{db}\ldots\frac{dx_n}{dc}\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{dP_1}{dx_n}\Sigma\left(\pm\frac{dx_n}{da}\cdot\frac{dx_2}{db}\ldots\frac{dx_n}{dc}\right),\end{aligned}$$

et se réduit simplement à

$$u\,\frac{dP_1}{dx_1},$$

parce que les sommes

$$\Sigma\left(\pm\frac{dx_2}{da}\cdot\frac{dx_2}{db}\ldots\frac{dx_n}{dc}\right),\ldots\ \Sigma\left(\pm\frac{dx_n}{da}\cdot\frac{dx_2}{db}\ldots\frac{dx_n}{dc}\right)$$

sont nulles en vertu d'une propriété bien connue. La valeur complète de $\frac{du}{dt}$ est donc

$$\frac{du}{dt} = u\left(\frac{dP_1}{dx_1}+\frac{dP_2}{dx_2}+\ldots+\frac{dP_n}{dx_n}\right).$$

Toutes les fois que la somme

$$\frac{dP_1}{dx_1} + \frac{dP_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dP_n}{dx_n}$$

se réduit à zéro, on a

$$\frac{du}{dt} = 0,$$

en sorte que le dénominateur u est alors indépendant de t. Si donc on suppose que $a, b, \ldots c$ représentent les valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_n$ pour $t = 0$, et si l'on prend positivement le terme $\frac{dx_1}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}$ de l'expression de u, on aura toujours $u = 1$. Mais quand, en adoptant cette dernière hypothèse, on regarde la somme

$$\frac{dP_1}{dx_1} + \frac{dP_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dP_n}{dx_n}$$

comme ayant une certaine valeur φ différente de zéro, alors il vient

$$u = e^{\int_0^t \varphi dt}.$$

OBSERVATIONS

Sur un Mémoire de M. LIBRI, *relatif à la Théorie de la Chaleur;*

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

(Présentées à l'Académie des Sciences le 19 février 1838.)

Je me suis occupé depuis quelque temps de la recherche des lois générales du mouvement de la chaleur dans une armille, en supposant la chaleur spécifique, la conductibilité intérieure et le pouvoir émissif variables d'un point à l'autre, et même variables pour chaque point déterminé en raison des températures différentes que ce point doit prendre successivement. J'espère être en mesure de soumettre bientôt au jugement de l'Académie les résultats de mon travail. Mais, avant de le terminer, j'ai dû lire les Mémoires que l'on a déjà publiés sur ce sujet et spécialement celui que M. Libri a fait imprimer à Florence en 1829 et à Berlin en 1831, dans le Journal de M. Crelle (t. VII, p. 116). Cette double (*) publication étant à mes yeux une garantie du soin que l'auteur a mis à revoir son analyse, présentée plusieurs années auparavant à cette Académie, j'ai dû l'examiner avec attention. M. Libri annonce d'ailleurs dans sa préface qu'il a trouvé et qu'il développera une méthode nouvelle d'approximation, et l'on sent quelle importance les géomètres doivent attacher aux méthodes de ce genre

(*) C'est *triple* qu'il faut lire, car une première édition du même mémoire a paru à Pise en 1827.

qui sont pour ainsi dire seules applicables dans les problèmes de Mécanique céleste et de Physique mathématique. Mais quel n'a pas été mon étonnement quand j'ai reconnu que les formules données par M. Libri sont inexactes et que le principe général sur lequel il s'appuie est inadmissible.

L'équation différentielle de M. Libri diffère de celle que Fourier a employée lorsqu'il a résolu pour la première fois le problème de l'armille. La raison en est simple. M. Libri rejette la loi de refroidissement connue sous le nom de *loi de Newton*, et il y substitue la loi exacte donnée par MM. Dulong et Petit. Outre les termes ordinaires, son équation contient ainsi un terme qui exprime la différence entre la loi de MM. Dulong et Petit et celle de Newton. Ce terme est multiplié par un très petit coefficient δ dont M. Libri néglige le carré et les puissances supérieures, au moins à une première approximation.

Cela étant, la valeur complète de la température doit être composée de deux parties, l'une indépendante de δ, l'autre multipliée par δ. L'équation du problème se décompose en effet en deux autres qui doivent servir à déterminer ces deux parties. L'intégration dont elles dépendent étant effectuée, il faut ensuite, à l'aide des constantes arbitraires que cette intégration introduit, représenter l'état initial des températures, c'est-à-dire l'état des températures des points de l'armille à l'époque où le refroidissement commence : cet état initial ne dépend en aucune manière du petit coefficient δ par rapport auquel on ordonne l'approximation; il resterait encore le même si δ était nul et la loi de Newton rigoureuse. Par conséquent l'état initial doit s'exprimer à l'aide de la partie de la température qui est indépendante de δ : celle que δ multiplie doit se réduire à zéro à l'origine du refroidissement.

Les raisonnements précédents nous font connaître la valeur initiale de chacune des deux parties dont la température se compose, et tous ceux qui ont l'habitude de l'analyse sentent bien que le problème n'offre plus maintenant aucune difficulté. La méthode que nous venons d'indiquer est d'ailleurs familière aux géomètres. C'est d'elle, par exemple, qu'ils font usage pour résoudre le problème du pendule qui se meut dans un milieu résistant comme le carré de la vitesse. Nous n'avons pas besoin d'ajouter ici que l'équation différentielle qui détermine la partie de la température indépendante de δ doit être intégrée complétement, puisqu'elle doit servir seule à représenter l'état initial des températures qui est tout à-fait arbitraire

La solution que je viens d'indiquer n'est pas celle de M. Libri. Celle que M. Libri a donnée diffère précisément de la nôtre en ce que l'auteur juge suffisant de prendre *une valeur particulière* de la partie indépendante de δ. Pour représenter l'état initial, il se sert des constantes arbitraires contenues dans les termes multipliés par δ. Nous ne pensons pas qu'aucun géomètre puisse jamais admettre cette théorie. Si M. Libri ordonne l'approximation par rapport aux puissances de δ, en négligeant le carré et les puissances supérieures de δ, cela tient sans doute à ce qu'il regarde les termes de la série en δ comme décroissant très rapidement, en sorte que chacun d'eux est très petit par rapport aux précédents. Comment donc peut-il espérer de représenter l'état initial, qui est arbitraire et indépendant de δ, à l'aide des termes très petits qui ont δ pour coefficient ? N'est-ce pas à peu près comme si les astronomes essayaient de représenter le mouvement elliptique des planètes à l'aide des seuls effets produits par leurs perturbations ?

Voici les propres paroles de l'auteur : il est nécessaire de les faire connaître avant d'aller plus loin.

« Cependant, si au lieu d'intégrer complétement la première des » équations linéaires que nous avons obtenues, pour prendre des inté- » grales particulières des autres, comme on le fait pour les équations » différentielles ordinaires, on commence par prendre des intégrales » particulières des premières équations que l'on veut considérer, et » que l'on n'intègre complétement que celle à laquelle on veut arrêter » l'approximation, on obtiendra le nombre de fonctions arbitraires » qui est nécessaire pour satisfaire à toutes les conditions du problème, » et on sera assuré, comme on le démontre directement, de pouvoir » éviter toujours les arcs de cercle. Nous avons effectué le calcul que » nous venons d'indiquer, sur les deux premières équations linéaires » que fournit le problème, et nous avons trouvé une formule qui se » compose de celle que M. Fourier avait déjà donnée, et d'un terme » de correction multiplié par une petite quantité. En embrassant » un plus grand nombre d'équations, on trouverait la même expres- » sion, plus des termes multipliés par les puissances ascendantes de la

» petite quantité par rapport à laquelle on a développé. La méthode
» que nous venons d'exposer peut s'appliquer à l'intégration par
» approximation d'une classe assez étendue d'équations aux différen-
» tielles partielles; mais ces recherches ne sauraient trouver place ici,
» et elles formeront le sujet d'un mémoire particulier. »

A la lecture de ce passage on va sans doute demander comment, après avoir négligé, à l'exception d'un seul, tous les termes indépendants de δ, l'auteur finit par retrouver la formule même de Fourier augmentée seulement d'une petite quantité qui la corrige. Cela tient à une nouvelle faute qui s'est glissée dans son analyse. Ne pouvant en effet représenter à l'aide de termes qui ont δ pour facteur l'état initial où δ n'entre pas, l'auteur a supprimé ce facteur δ en le fondant pour ainsi dire dans les constantes arbitraires introduites par l'intégration. Mais par là il a détruit la subordination établie entre les deux parties dont l'ensemble compose la valeur de la température; il a fait rentrer dans la première une portion de la seconde dont il négligeait tout-à-l'heure le carré : en un mot sa formule ne peut devenir propre à représenter l'état initial sans cesser en même temps de satisfaire à l'équation différentielle du problème.

Au reste, sans pousser plus loin une discussion que la double erreur commise par M. Libri rendrait à la fin trop minutieuse, je dirai qu'au premier coup d'œil jeté sur la formule on peut reconnaître qu'elle est inexacte. Son terme de correction est en effet une exponentielle dont l'exposant n'est pas déterminé (*). Cet exposant peut prendre différentes valeurs suivant qu'il a plu à l'auteur de choisir pour la

(*) En omettant un facteur fonction de l'abscisse seulement, l'exponentielle dont nous parlons est de la forme $e^{-2\left(b+\frac{am^2}{r^2}\right)t}$, où t désigne le temps et r le rayon de l'armille : a et b sont des quantités connues, tandis que m représente un nombre entier dont la valeur n'est pas déterminée par l'analyse de l'auteur. Toutefois M. Libri dit de prendre pour m le plus petit nombre entier qui ne satisfasse pas à l'équation $br^2 \pm 2am^2 = 0$; mais ce choix du plus petit nombre ne dérive nullement de ses calculs et paraît tout-à-fait arbitraire. Qu'on adopte au reste cette valeur de m ou telle autre valeur particulière qu'on voudra, la formule de M. Libri n'en deviendra pas plus exacte. Nous citerons en passant un théorème bizarre que l'auteur énonce. « Lorsque les conditions du problème permettront, dit-il, de faire » $m = 0$, le terme de correction, pour la première approximation, se réduira à partie indépendante de δ telle ou telle intégrale particulière; et de là résultent autant d'expressions diverses de la température en fonction du temps et de l'abscisse. Or, le problème du mouvement de la chaleur dans une armille étant déterminé par sa nature, la formule que l'on donne pour le résoudre doit être aussi déterminée. Nous avons donc eu raison d'annoncer que la solution de M. Libri est inadmissible.

J'adresse avec confiance ces réflexions à l'Académie. Ni dans les mots, ni dans les choses, je n'ai, je crois, blessé les convenances. On doit être indulgent pour ces fautes légères qui échappent aux meilleurs auteurs et même pour certaines fautes graves produites par la rapidité de la composition. Mais comment ne pas relever une erreur que l'on fait servir de base à une théorie fondamentale, et dont l'auteur, à la fin de son Mémoire publié après de longues méditations, annonce devoir donner bientôt des applications nouvelles.

P. S. M. Libri n'ayant fait aucune réponse aux objections contenues dans la Note qui précède, la discussion soulevée entre nous se trouve jugée par cela même. Mais, je dois dire que l'honneur d'avoir reconnu le premier l'inexactitude de ses formules ne m'appartient pas. Cette inexactitude a été en effet signalée d'abord par M. Kelland qui, dans un ouvrage sur la Théorie de la Chaleur publié à Cambridge l'année dernière et que l'on m'a communiqué depuis quelques jours seulement, s'exprime à ce sujet de la manière la plus positive (page 69). Néanmoins comme M. Kelland ne développe pas les motifs de son opinion, j'ai pensé qu'il pouvait encore être utile de publier ici l'article qu'on vient de lire.

» $-\frac{\delta}{2}e^{-2bt}$, et on trouvera qu'il est indépendant des coordonnées et qu'il ne dépend » que du temps. » Je laisse aux géomètres le soin d'apprécier ce singulier résultat. J'ajouterai seulement que si M. Libri fait ici $m = 0$, cela ne l'empêche pas, trois pages plus loin, de regarder l'exponentielle $e^{-2\left(b+\frac{am^2}{r^2}\right)t}$ comme étant toujours infiniment plus petite que $e^{-\left(b+\frac{a}{r^2}\right)t}$ pour des valeurs de t infiniment grandes, quel que soit le rapport $\frac{a}{b}$.

Détermination de l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx\,;$$

Par Ch. DELAUNAY,

Élève-ingénieur des Mines.

M. Poisson a donné la valeur de cette intégrale dans son Mémoire sur les intégrales définies, inséré dans le XVII[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*: il trouve

1°. Lorsque $a<1$, $\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = 0$;

2°. Lorsque $a>1$, $\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = \pi\log(a^2)$.

Ces formules se déduisent très simplement du théorème de Côtes, comme nous allons le voir.

Ce théorème consiste dans la relation

$$\left(1-2a\cos\frac{\pi}{2n}+a^2\right)\left(1-2a\cos\frac{3\pi}{2n}+a^2\right)\ldots\left(1-2a\cos\frac{2n-1}{n}\pi+a^2\right)=a^{2n}+1.$$

Chaque facteur du premier membre est compris dans la formule générale $1 - 2a\cos.\frac{2i+1}{2n}\pi + a^2$, dans laquelle il faut donner à i successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$; pour passer d'un facteur au suivant, il faut augmenter i de l'unité, ou, ce qui revient au même, augmenter l'arc compris sous le signe *cos* de la quantité constante $\omega = \frac{\pi}{n}$. Si nous élevons les deux membres de l'équation à une puissance marquée par ω, nous aurons

$$\left(1-2a\cos\frac{\pi}{2n}+a^2\right)^\omega\left(1-2a\cos\frac{3\pi}{2n}+a^2\right)^\omega\ldots\left(1-2a\cos\frac{2n-1}{2n}\pi+a^2\right)^\omega=(a^{2n}+1)^{\frac{\pi}{n}}.$$

Prenant les logarithmes, il viendra

$$\Sigma\omega \log\left(1 - 2a\cos.\frac{2i+1}{2n}\pi + a^2\right) = \log.(a^{2n}+1)^{\frac{\pi}{n}}$$

ou bien, en posant $\frac{2i+1}{2}\pi = x$,

$$\Sigma\omega \log(1 - 2a\cos x + a^2) = \log.(a^{2n}+1)^{\frac{\pi}{n}};$$

le signe Σ indique une somme prise relativement à la variable x, qui croît depuis $x = \frac{\pi}{2n}$ jusqu'à $x = \frac{2n-1}{2n}\pi$ par différences constantes et égales à ω.

Si nous supposons maintenant que n devienne infini, ω deviendra dx, la somme Σ se changera en une intégrale définie prise entre les limites $x = 0$, $x = \pi$, et le premier membre de l'équation deviendra

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx.$$

Pour savoir ce que devient le second membre, il faut distinguer deux cas :

1°. Si $a < 1$, $(a^{2n}+1)^{\frac{\pi}{n}}$ se réduit à 1, et l'on a

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx = 0;$$

2°. Si $a > 1$, $(a^{2n}+1)^{\frac{\pi}{n}}$ devient $a^{2\pi}$, et l'on a

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx = \pi \log(a^2).$$

MÉMOIRE SUR L'OPTIQUE;

PAR C. STURM.

I.

Lorsque des rayons lumineux homogènes émanés d'un point éprouvent une suite de réfractions ou de réflexions, ils se trouvent après chaque réfraction ou réflexion, constamment normaux à une certaine suite de surfaces, d'où il résulte qu'ils forment toujours deux séries de surfaces développables qui se coupent partout à angles droits suivant chaque rayon.

Cette propriété remarquable des faisceaux lumineux a été d'abord reconnue par Malus pour le cas d'une seule réfraction ou réflexion; M. Dupin et d'autres géomètres après lui l'ont démontrée dans toute sa généralité, et en ont tiré quelques conséquences. M. Hamilton a aussi publié sur ce sujet plusieurs mémoires très étendus dans *les Transactions* de l'Académie d'Irlande; il a considéré la marche des rayons, soit ordinaires, soit extraordinaires.

Mais on n'a pas, à ma connaissance, cherché à déterminer d'une manière précise les surfaces caustiques formées par les intersections successives des rayons, et qui ne sont autre chose que le lieu des centres de courbure de celles auxquelles ces rayons sont normaux, ou le lieu des arêtes de rebroussement des surfaces développables dans lesquelles le faisceau se décompose. La résolution de cette question est l'objet du mémoire suivant.

On y trouvera des formules propres à la construction des surfaces caustiques par points. Quand les rayons sont dirigés dans un même plan, ces formules se réduisent à celle que Jacques Bernouilli a donnée pour les caustiques planes, et que Petit a reproduite avec quelques développements dans la *Correspondance de l'École Polytechnique*.

Concevons un faisceau de rayons lumineux qui passent d'un milieu homogène dans un autre séparé du premier par une surface quelconque S, en suivant la loi de la réfraction ordinaire. Considérons un rayon incident quelconque qui rencontre la surface séparatrice S en un point O; soit NOn la normale à cette surface au point O. Sur la direction du rayon incident que nous supposerons prolongée indéfiniment de part et d'autre du point O, prenons à volonté un point K, et sur celle du rayon réfracté correspondant un point K', qui soit situé du même côté que le point K par rapport à la normale NOn. Rapportons ces points à un système quelconque d'axes rectangulaires; soient X, Y, Z, les coordonnées du point d'incidence O; x, y, z, celles du point K, et x', y', z' celles du point K' : désignons par a, b, c, les cosinus des angles que la partie ON de la normale fait avec les trois axes rectangulaires; par α, β, γ et α', β', γ', les cosinus des angles que font avec les mêmes axes les deux droites OK et OK' qu'on suppose dirigées du point O vers les points K et K'.

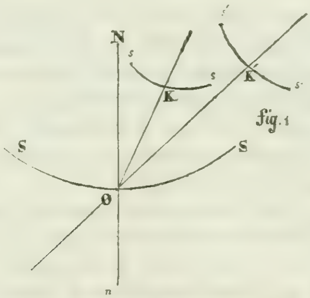


fig. 1

Il faut d'abord exprimer que la normale ON et les droites OK et OK', suivant lesquelles sont dirigés le rayon incident et le rayon réfracté, se trouvent dans un même plan, ou que les deux plans NOK et NOK' coïncident.

Or, la perpendiculaire au plan NOK, élevée par le point O d'un côté de ce plan, fait avec les trois axes rectangulaires des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{b\gamma - c\beta}{\sin \mathrm{NOK}}, \quad \frac{\alpha c - a\gamma}{\sin \mathrm{NOK}}, \quad \frac{a\beta - b\alpha}{\sin \mathrm{NOK}}.$$

De même les cosinus des angles que la perpendiculaire au plan NOK′ fait avec les axes, sont

$$\frac{b\gamma'-c\beta'}{\sin \mathrm{NOK}'},\quad \frac{c\alpha'-a\gamma'}{\sin \mathrm{NOK}'},\quad \frac{a\beta'-b\alpha'}{\sin \mathrm{NOK}'}.$$

On exprime que ces deux perpendiculaires coïncident et sont en outre situées d'un même côté du plan qui contient les deux angles NOK et NOK′, en posant

$$\frac{b\gamma-c\beta}{\sin \mathrm{NOK}}=\frac{b\gamma'-c\beta'}{\sin \mathrm{NOK}'},\quad \frac{c\alpha-a\gamma}{\sin \mathrm{NOK}}=\frac{c\alpha'-a\gamma'}{\sin \mathrm{NOK}'},\quad \frac{a\beta-b\alpha}{\sin \mathrm{NOK}}=\frac{a\beta'-b\alpha'}{\sin \mathrm{NOK}'}. \quad (1)$$

De plus, en représentant par $\frac{\lambda}{\lambda'}$ le rapport constant du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction, on a

$$\frac{\sin \mathrm{NOK}}{\sin \mathrm{NOK}'}=\frac{\lambda}{\lambda'}, \quad (2)$$

puisque ces deux angles sont NOK et NOK′ ou leurs suppléments. Ces équations donnent les suivantes

$$\frac{b\gamma-c\beta}{\lambda}=\frac{b\gamma'-c\beta'}{\lambda'},\quad \frac{c\alpha-a\gamma}{\lambda}=\frac{c\alpha'-a\gamma'}{\lambda'},\quad \frac{a\beta-b\alpha}{\lambda}=\frac{a\beta'-b\alpha'}{\lambda'}. \quad (3)$$

En regardant comme connues les directions de la normale ON et du rayon incident OK ou les valeurs de a, b, c et de α, β, γ, deux quelconques de ces dernières équations (3) auxquelles on joindra celle-ci $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$, suffisent pour déterminer α', β', γ' et conséquemment pour faire connaître la direction du rayon réfracté OK′. On en conclut que deux des équations (3) doivent donner la troisième comme conséquence, et peuvent être substituées aux équations (1) et (2). C'est ce qu'on peut aussi vérifier directement. Car d'abord en multipliant la première des équations (3) par a, la seconde par b, et ajoutant, on obtient la troisième; ensuite, en élevant au carré ces trois équations et ajoutant, on a

$$\frac{1}{\lambda^2}\left[(b\gamma-c\beta)^2+(c\alpha-a\gamma)^2+(a\beta-b\alpha)^2\right]=\frac{1}{\lambda'^2}\left[(b\gamma'-c\beta')^2+(c\alpha'-a\gamma')^2+(a\beta'-b\alpha')^2\right]$$

ou

$$\frac{\sin^2 \mathrm{NOK}}{\lambda^2}=\frac{\sin^2 \mathrm{NOK}'}{\lambda'^2},$$

d'où

$$\frac{\sin \mathrm{NOK}}{\lambda} = \frac{\sin \mathrm{NOK}'}{\lambda'},$$

(les sinus étant positifs). On peut donc remplacer dans les équations (5) le rapport de λ à λ' par celui de ces sinus; on est ainsi ramené aux formules (1) et (2).

Les relations qui existent entre les directions de la normale ON et des rayons OK, OK', sont donc toutes exprimées par les deux premières équations (3), qu'on peut écrire comme il suit :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathcal{C} - \frac{b}{c}\gamma}{\lambda} &= \frac{\mathcal{C}' - \frac{b}{c}\gamma'}{\lambda'}, \\ \frac{\alpha - \frac{a}{c}\gamma}{\lambda} &= \frac{\alpha' - \frac{a}{c}\alpha}{\lambda'}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

En désignant par k et k' les distances OK et OK', on a

$$\alpha = \frac{x - \mathrm{X}}{k}, \quad \mathcal{C} = \frac{y - \mathrm{Y}}{k}, \quad \gamma = \frac{z - \mathrm{Z}}{k},$$
$$k = \sqrt{(x - \mathrm{X})^2 + (y - \mathrm{Y})^2 + (z - \mathrm{Z})^2}.$$

et de même

$$\alpha' = \frac{x' - \mathrm{X}}{k'}, \text{ etc.}$$

Les coordonnées X, Y, Z du point O sont liées entre elles par une équation qui est celle de la surface séparatrice S. On peut la différentier soit par rapport à X, soit par rapport à Y, en regardant Z comme fonction de ces deux variables. Nous poserons, suivant les notations usitées,

$$\frac{d\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{P}, \ \frac{d\mathrm{Z}}{d\mathrm{Y}} = \mathrm{Q}, \ \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{R}, \ \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{Y}} = \mathrm{S} = \frac{d\mathrm{Q}}{d\mathrm{X}}, \ \frac{d\mathrm{Q}}{d\mathrm{Y}} = \mathrm{T}.$$

Ayant désigné par a, b, c les cosinus des angles que la normale ON à la surface S fait avec les axes, nous avons, d'après les formules connues

$$-\frac{a}{c} = \mathrm{P}, \quad -\frac{b}{c} = \mathrm{Q}.$$

En substituant ces valeurs de $-\frac{a}{c}$, $-\frac{b}{c}$ et celles de α, α', β, etc., dans les équations (4), on obtient

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - X + P(z - Z)}{\lambda k} &= \frac{x' - X + P(z' - Z)}{\lambda' k}, \\ \frac{y - Y + Q(z - Z)}{\lambda k} &= \frac{y' - Y + Q(z' - Z)}{\lambda' k}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

En supposant qu'on ait pris à volonté le point K (x, y, z) sur la direction du rayon incident, ces deux équations (5) qui remplacent les équations (1) et (2), laissent indéterminées les coordonnées x', y', z' du point K', puisqu'elles n'établissent entre elles que deux relations. Ce sont proprement les équations de la ligne droite que suit le rayon réfracté.

Supposons maintenant que les rayons incidents soient tous normaux à une surface quelconque s et que le point K soit celui où le rayon incident que nous considérons rencontre cette surface. Ses coordonnées x, y, z sont alors celles d'un point quelconque de la surface s dont l'équation différentiée par rapport à x et à y donnera

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{dp}{dx} = r, \text{ etc.}$$

Nous exprimerons que le rayon incident OK est normal à la surface s en son point K par les deux équations

$$\left.\begin{aligned} x - X + p(z - Z) &= 0, \\ y - Y + q(z - Z) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Pour achever de fixer la position du point K' qui est jusqu'ici un point quelconque du rayon réfracté, il nous est permis d'établir entre ses coordonnées x', y', z' une nouvelle relation tout-à-fait arbitraire. En faisant attention à la forme des équations (5) et (6), on est conduit à prendre l'équation suivante

$$\frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}+C\right] = \frac{1}{\lambda'}\sqrt{(x'-X)^2+(y'-Y)^2+(z'-Z)^2}, \quad (7)$$

dans laquelle C est une constante arbitraire, positive, négative ou nulle.

Cette équation exprime simplement que la distance OK′ du point K′ au point d'incidence O est à la distance OK augmentée ou diminuée d'une quantité constante dans le rapport donné du sinus de réfraction au sinus d'incidence. On remarquera que cette équation (7) abstraction faite des deux autres (5), est celle d'une sphère qui a pour centre le point d'incidence O et pour rayon $\frac{\lambda'}{\lambda}(k + C)$. Le point $K'(x', y', z')$ déterminé par les trois équations (5) et (7), est l'un des points où cette sphère est rencontrée par le rayon réfracté.

Les neuf coordonnées X, Y, Z, x, y, z et x', y', z' sont donc liées entre elles par sept équations, savoir les équations (5), (6) et (7); et celles des deux surfaces S et s. Ainsi deux de ces coordonnées peuvent être prises à volonté, et les autres en seront des fonctions déterminées. En éliminant X, Y, Z et x, y, z entre ces sept équations, on aurait en x', y', z' l'équation de la surface s' qui est le lieu géométrique de tous les points K′.

Nous allons démontrer que tous les rayons réfractés OK′ sont normaux à cette surface s'.

Supposons qu'en différentiant son équation par rapport à x' et à y', on en tire

$$\frac{dz'}{dx'} = p', \quad \frac{dz'}{dy'} = q', \text{ etc.}$$

Nous pouvons considérer les neuf coordonnées X, Y, Z, x, etc., comme fonctions de deux variables indépendantes et différentier par rapport à l'une de ces variables, l'équation (7) que nous avons établie entre x', y', z'. En observant qu'on a

$$dZ = PdX + QdY, \quad dz = pdx + qdy, \quad dz' = p'dx' + q'dy',$$

on trouvera

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{x-X+p(z-Z)}{k}dx + \frac{y-Y+q(z-Z)}{k}dy - \frac{x-X+P(z-Z)}{k}dX - \frac{y-Y+Q(z-Z)}{k}dY\right]$$
$$= \frac{1}{\lambda'}\left[\frac{x'-X+p'(z'-Z)}{k'}dx' + \frac{y'-Y+q'(z'-Z)}{k'}dy' - \frac{x'-X+P(z'-Z)}{k'}dX - \frac{y'-Y+Q(z'-Z)}{k'}dY\right],$$

équation qui se réduit en vertu des précédentes (5) et (6) à celle-ci :

$$\frac{x' - X + p'(z' - Z)}{k'}\, dx' + \frac{y' - Y + q'(z' - Z)}{k'}\, dy' = 0.$$

Comme on peut supposer que x' et y' sont les deux variables indépendantes, et qu'on a différentié par rapport à l'une d'elles, cette dernière équation se partage en deux autres, savoir

$$\left.\begin{aligned} x' - X + p'(z' - Z) &= 0, \\ y' - Y + q'(z' - Z) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Celles-ci expriment que la direction du rayon réfracté OK′ est normale à la surface s' en son point K′ (x', y', z').

Mais ce même rayon est aussi normal à la sphère représentée par l'équation

$$\sqrt{(x' - X)^2 + (y' - Y)^2 + (z' - Z)^2} = \frac{\lambda'}{\lambda}(k + C),$$

laquelle a pour centre le point d'incidence et passe par le point (x', y', z'), son rayon étant $k' = \frac{\lambda'}{\lambda}(k + C)$.

Donc la surface s' à laquelle tous les rayons réfractés sont normaux, est l'enveloppe de toutes les sphères décrites d'après les mêmes conditions. Chaque point K′ (x', y', z') est le point de contact de quelqu'une de ces sphères, avec la surface s' qui les enveloppe toutes. Cette enveloppe est visiblement composée de deux nappes situées des deux côtés de la surface séparatrice S ; mais ici l'on ne doit considérer qu'une seule de ces nappes.

Comme on peut dans l'équation (7) donner à la constante arbitraire C une valeur quelconque, on voit qu'il existe une infinité de surfaces telles que s' ayant toutes à la fois pour normales ces rayons réfractés; deux quelconques de ces surfaces interceptent des longueurs égales sur toutes ces normales communes, de sorte qu'il suffit de connaître une seule de ces surfaces pour avoir toutes les autres. On voit qu'elles ont toutes les mêmes centres de courbure, et que les plans des deux sections principales passant par chaque normale, sont aussi les mêmes.

Pareillement, les rayons incidents qu'on a supposés normaux à la surface s sont aussi normaux à une infinité d'autres surfaces, puisqu'on peut considérer les rayons réfractés comme incidents *et vice versâ*. On sait d'ailleurs et l'on démontre aisément que si l'on porte sur les normales d'une surface à partir de ses différents points et d'un même côté, une longueur constante arbitraire, on forme une autre surface qui a les mêmes normales que la première.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'on prenait les deux points K et K' d'un même côté de la normale NOn. S'ils n'étaient pas d'un même côté, on verrait en suivant la même analyse, qu'il suffisait de changer k' en $-k'$ ou λ' en $-\lambda'$ dans les formules précédentes. Alors au lieu d'avoir la relation (7) qui donnait

$$\frac{k}{\lambda} - \frac{k'}{\lambda'} = \text{constante},$$

on aurait entre k et k' celle-ci

$$\frac{k}{\lambda} + \frac{k'}{\lambda'} = \text{constante}.$$

En continuant à supposer les points K et K' situés d'un même côté de la normale NOn, nous ferons pour plus de simplicité $C = 0$, dans l'équation (7), ce qui la réduit à $\frac{k}{\lambda} = \frac{k'}{\lambda'}$, c'est-à-dire que les distances de chaque point d'incidence aux deux surfaces s et s' mesurées sur le rayon incident normal à s et sur le rayon réfracté normal à s' sont toujours entre elles dans le rapport constant des sinus des angles d'incidence de réfraction. Ainsi l'on a le théorème suivant :

Lorsque des rayons lumineux normaux à une surface passent d'un milieu homogène dans un autre séparé du premier par une surface quelconque, les rayons réfractés se trouvent normaux à une autre surface telle que les distances normales des différents points d'incidence à cette nouvelle surface sont aux distances des mêmes points à la première surface à laquelle les rayons incidents sont normaux, dans le rapport constant du sinus de l'angle de réfraction au sinus de l'angle d'incidence. En outre ces deux surfaces en fournissent une infinité d'autres auxquelles les rayons soit incidents, soit réfractés, sont aussi normaux et qui ont entre elles deux à deux la même corrélation.

M. Dupin est arrivé le premier à ce théorème remarquable par des considérations purement géométriques, en généralisant les résultats de Malus; d'autres géomètres en ont donné ensuite de nouvelles démonstrations géométriques ou analytiques.

Si l'on conçoit d'une part toutes les surfaces s auxquelles les rayons incidents sont normaux, de l'autre toutes les surfaces s' auxquelles les rayons réfractés sont normaux, les surfaces correspondantes des deux séries se couperont deux à deux suivant une suite de courbes placées sur la surface séparatrice S. Chacune de ces courbes a pour normales les rayons incidents et réfractés qui aboutissent sur elle, d'où il suit que le plan normal à une telle courbe pour l'un quelconque de ses points est celui qui contient le rayon incident, le rayon réfracté et la normale à la surface séparatrice en ce point-là.

Des rayons lumineux qui partent d'un même point sont normaux à toutes les sphères qui ont ce point pour centre, et des rayons parallèles à une même droite sont normaux à tous les plans perpendiculaires à cette droite. Donc en vertu du théorème énoncé, si des rayons émanés d'un même point ou parallèles à une même droite, éprouvent une première réfraction, ils deviendront normaux à une certaine série de surfaces; s'ils éprouvent une seconde réfraction, ils deviendront normaux à une nouvelle série de surfaces, et ainsi de suite; en sorte que ces rayons après avoir subi autant de réfractions qu'on voudra en traversant différents milieux séparés par des surfaces quelconques, se trouveront toujours normaux à certaines surfaces.

On déduit aisément de ce qui précède la proposition que voici. Concevons que des rayons d'abord normaux à une surface s éprouvent une suite de réfractions. Désignons par k la portion d'un rayon quelconque comprise dans le premier milieu entre la surface s à laquelle ce rayon est normal, et la surface qui sépare le premier milieu du second, par l' la partie de ce rayon comprise dans le second milieu, par l'' sa partie comprise dans le troisième milieu, et ainsi de suite, puis par $k^{(n)}$, la portion de ce rayon comprise dans le dernier milieu entre la dernière surface séparatrice et l'une des surfaces auxquelles les rayons deviennent normaux dans le dernier milieu. Supposons enfin que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, soit celui de λ à λ' en passant du premier milieu dans le second de λ' à λ'' en passant du second dans le troisième, et ainsi de suite. Cela posé, la somme

$$\frac{k}{\lambda} + \frac{l'}{\lambda'} + \frac{l''}{\lambda''} + \ldots + \frac{k^{(n)}}{\lambda^{(n)}},$$

sera constante, quel que soit le rayon que l'on considère.

Il faudrait dans cette expression changer $\frac{k}{\lambda}$ en $-\frac{k}{\lambda}$, si la portion k du rayon ne se trouvait pas dans le premier milieu ; la même remarque s'applique à $k^{(n)}$.

Au surplus, on peut déduire directement cette proposition et les précédentes du principe de la moindre action, comme l'a fait M. Hamilton.

Ces propriétés relatives à la réfraction ont également lieu pour la réflexion qui n'est sous le point de vue géométrique, qu'un cas particulier de la réfraction. Car pour exprimer que la réfraction se change en réflexion, il suffit de faire $\lambda = \lambda'$ dans les formules précédentes, en supposant comme plus haut, les points K et K' situés d'un même côté de la normale $\mathrm{NO}n$. On peut vérifier qu'on a alors $\cos \mathrm{NOK}' = -\cos \mathrm{NOK}$. Si l'on prenait les points K et K' des deux côtés de cette normale, il faudrait encore changer k' en $-k'$ et l'on aurait $\cos \mathrm{NOK}' = \cos \mathrm{NOK}$.

Puisque des rayons qui ont subi un nombre quelconque de réfractions ou réflexions, sont toujours normaux à une certaine surface, on en conclut d'après la théorie connue de la courbure des surfaces, qu'ils forment deux séries de surfaces développables, qui se coupent deux à deux à angles droits. Pour connaître plus particulièrement la nature de ce faisceau, il faut d'abord en considérant l'un quelconque des rayons qui le composent, déterminer les deux points où il est rencontré par les rayons infiniment voisins susceptibles de le couper. Ces points, qui appartiennent à la surface caustique, sont pour le rayon dont il s'agit, les centres du plus grand et du plus petit cercle de courbure de la surface à laquelle les rayons sont normaux. Il faut encore connaître les deux plans qui contiennent ce rayon et les rayons infiniment voisins qui le coupent, ou, ce qui revient au même, les tangentes aux deux lignes de courbure de la surface à laquelle les rayons sont normaux pour le point où elle est rencontrée par le rayon que l'on considère. C'est là l'objet des recherches suivantes.

II.

En supposant nulle dans l'équation (7) la constante arbitraire C, on a

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}=\frac{1}{\lambda'}\sqrt{(x'-X)^2+(y'-Y)^2+(z'-Z)^2},$$

ce qui revient à

$$\frac{k}{\lambda}=\frac{k'}{\lambda'},$$

en sorte qu'on peut poser

$$k=\lambda h,\quad k'=\lambda' h,$$

h étant une certaine ligne qui disparaîtra du calcul.

Si l'on met ces valeurs de k et k' dans les équations (5), elles deviennent

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\lambda^2}[x-X+P(z-Z)]&=\frac{1}{\lambda'^2}[x'-X+P(z'-Z)],\\ \frac{1}{\lambda^2}[y-Y+Q(z-Z)]&=\frac{1}{\lambda'^2}[y'-Y+Q(z'-Z)].\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Nous avons encore les équations (6) et (8),

$$\left.\begin{aligned}x-X+p(z-Z)&=0,\\ y-Y+q(z-Z)&=0,\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

et

$$\left.\begin{aligned}x'-X+p'(z'-Z)&=0,\\ y'-Y+q'(z'-Z)&=0.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Nous avons déjà dit qu'on peut considérer toutes les coordonnées $X, Y, Z, x, y, z, x', y', z'$ comme fonctions de deux variables indépendantes, en sorte qu'on peut différentier par rapport à l'une quelconque de ces variables, les six équations (9), (6), (8), que nous venons d'écrire.

Dans ce calcul on aura suivant les notations usitées

$$
\begin{aligned}
&dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,\\
&dZ = \mathrm{P}d\mathrm{X} + \mathrm{Q}d\mathrm{Y}, \text{ etc.},\\
&dz' = p'dx' + q'dy', \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

En effectuant la différentiation des six équations (9), (6), (8), on obtient les suivantes (10),

$$
\left.
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\lambda}\left[dx - d\mathrm{X} + \mathrm{P}(dz - d\mathrm{Z}) + (z - \mathrm{Z})(\mathrm{R}d\mathrm{X} + \mathrm{S}d\mathrm{Y})\right]\\
&= \tfrac{1}{\lambda'}\left[dx' - d\mathrm{X} + \mathrm{P}(dz' - d\mathrm{Z}) + (z' - \mathrm{Z})(\mathrm{R}d\mathrm{X} + \mathrm{S}d\mathrm{Y})\right],\\
&\tfrac{1}{\lambda}\left[dy - d\mathrm{Y} + \mathrm{Q}(dz - d\mathrm{Z}) + (z - \mathrm{X})(\mathrm{S}d\mathrm{X} + \mathrm{T}d\mathrm{Y})\right]\\
&= \tfrac{1}{\lambda'}\left[dy' - d\mathrm{Y} + \mathrm{Q}(dz' - d\mathrm{Z}) + (z' - \mathrm{Z})(\mathrm{S}d\mathrm{X} + \mathrm{T}d\mathrm{Y})\right],\\
&dx - d\mathrm{X} + p(pdx + qdy - \mathrm{P}d\mathrm{X} - \mathrm{Q}d\mathrm{Y}) + (z - \mathrm{Z})(rdx + sdy) = 0,\\
&dy - d\mathrm{Y} + q(pdx + qdy - \mathrm{P}d\mathrm{X} - \mathrm{Q}d\mathrm{Y}) + (z - \mathrm{Z})(sdx + tdy) = 0,\\
&dx' - d\mathrm{X} + p'(p'dx' + q'dy' - \mathrm{P}d\mathrm{X} - \mathrm{Q}d\mathrm{Y}) + (z' - \mathrm{Z})(r'dx' + s'dy') = 0,\\
&dy' - d\mathrm{Y} + q'(p'dx' + q'dy' - \mathrm{P}d\mathrm{X} - \mathrm{Q}d\mathrm{Y}) + (z' - \mathrm{Z})(s'dx' + t'dy') = 0.
\end{aligned}
\right\} (10)
$$

Les axes de coordonnées auxquels on a rapporté les trois surfaces S, s, s', ne sont assujétis qu'à la seule condition d'être rectangulaires et peuvent d'ailleurs avoir une situation quelconque dans l'espace. Les équations précédentes subsisteront toujours quelle que soit la position de ce système d'axes. Pour plus de simplicité, nous prendrons maintenant pour origine des coordonnées le point d'incidence O sur la surface séparatrice S, pour plan des xy le plan tangent à cette surface en ce point O, et conséquemment pour axe des z, la normale au même point, pour plan des xz et pour plan des yz, les plans du plus grand et du plus petit cercle de courbure de la surface S qui passent par cette normale, et sont perpendiculaires l'un à l'autre. D'après ces conventions, les quantités X, Y, Z, P, Q et S sont nulles, et les équations (10) deviennent

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\lambda^2}[dx+(z\mathrm{R}-1)d\mathrm{X}]&=\frac{1}{\lambda'^2}[dx'+(z'\mathrm{R}-1)d\mathrm{X}],\\ \frac{1}{\lambda^2}[dy+(z\mathrm{T}-1)d\mathrm{Y}]&=\frac{1}{\lambda'^2}[dy'+(z'\mathrm{T}-1)d\mathrm{Y}],\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}(1+p^2+zr)\,dx+(pq+zs)dy&=d\mathrm{X},\\ (1+q^2+zt)\,dy+(pq+zs)dx&=d\mathrm{Y},\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

$$\left.\begin{aligned}(1+p'^2+z'r')\,dx'+(p'q'+z's')\,dy'&=d\mathrm{X},\\ (1+q'^2+z't')\,dy'+(p'q'+z's')\,dx'&=d\mathrm{Y}.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

On tire des deux équations (12) les valeurs suivantes de dx

$$dx=\frac{(1+q^2+zt)\,d\mathrm{X}-(pq+zs)\,d\mathrm{Y}}{1+p^2+q^2+[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\,z+[rt-s^2]\,z^2},$$

$$dy=\frac{(1+p^2+zr)\,d\mathrm{Y}-(pq+zs)\,d\mathrm{X}}{1+p^2+q^2+[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\,z+[rt-s^2]\,z^2}.$$

Les équations (13) donnent des valeurs analogues pour dx' et dy'.

En substituant ces valeurs de dx, dy, dx', dy' dans les deux équations (11) on obtient deux équations qui contiennent $d\mathrm{X}$ ou $d\mathrm{Y}$ comme facteur dans leurs différents termes, et comme on peut supposer que X et Y étaient les deux variables indépendantes et qu'on a différentié par rapport à l'une d'elles, ces deux dernières équations se décomposeront en trois que voici :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda^2}\left[z\mathrm{R}-1+\frac{1+q^2+zt}{1+p^2+q^2+[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\,z+[rt-s^2]\,z^2}\right]\\ =&\frac{1}{\lambda'^2}\left[z'\mathrm{R}-1+\frac{1+q'^2+z't'}{1+p'^2+q'^2+[(1+p'^2)t'+(1+q'^2)r'-2p'q's']z'+[r't'-s'^2]z'^2}\right],\end{aligned}\right\}(14)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda^2}\left[z\mathrm{T}-1+\frac{1+p^2+zr}{1+p^2+q^2+[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\,z+[rt-s^2]\,z^2}\right]\\ =&\frac{1}{\lambda'^2}\left[z'\mathrm{T}-1+\frac{1+p'^2+z'r'}{1+p'^2+q'^2+[(1+p'^2)t'+(1+q'^2)r'-2p'q's']z'+[r't'-s'^2]z'^2}\right],\end{aligned}\right\}(15)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{pq+zs}{1+p^2+q^2+[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]z+[rt-s^2]z^2}\right]\\ =&\frac{1}{\lambda'^2}\left[\frac{p'q'+z's'}{1+p'^2+q'^2+[(1+p'^2)t'+(1+q'^2)r'-2p'q's']z'+[r't'-s'^2]z'^2}\right].\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

En joignant à celles-ci les deux équations (8), on a autant d'équations qu'il en faut pour déterminer les valeurs des cinq quantités inconnues

$p'q'r's't'$ relatives à la surface s' et par suite tous les éléments de la courbure de cette surface pour chacun de ses points, en supposant connues, les quantités analogues qui se rapportent aux deux surfaces S et s. Mais pour arriver à l'interprétation géométrique de ces équations, il faut leur faire subir quelques transformations.

III.

Un point quelconque de la surface s ayant pour coordonnées x, y, z, rapportons-le à un nouveau système de coordonnées rectangulaires $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ ayant la même origine que x, y, z. Si l'on désigne par A, B, C les cosinus des angles que l'axe des $x_{,}$ fait avec l'axe des x, y, z; par a, b, c et α, β, γ, les cosinus des angles que font avec les mêmes axes l'axe des $y_{,}$ et celui des $z_{,}$, on a pour la transformation des coordonnées les formules

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{A}x_{,} + ay_{,} + \alpha z_{,}, \\ y &= \mathrm{B}x_{,} + by_{,} + \beta z_{,}, \\ z &= \mathrm{C}x_{,} + cy_{,} + \gamma z_{,}, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

et réciproquement

$$\left.\begin{aligned} x_{,} &= \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z, \\ y_{,} &= ax + by + cz, \\ z_{,} &= \alpha x + \beta y + \gamma z. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

En mettant dans l'équation de la surface s les valeurs (17) de x, y, z, on aura l'équation de cette surface entre $x_{,}, y_{,}, z_{,}$,

$$z_{,} = f(x_{,}, y_{,}),$$

et l'on en pourra tirer par la différentiation

$$\frac{dz_{,}}{dx_{,}} = p_{,}, \quad \frac{dz_{,}}{dy_{,}} = q_{,}, \quad \frac{dp_{,}}{dx_{,}} = r_{,}, \quad \frac{dp_{,}}{dy_{,}} = \frac{dq_{,}}{dx_{,}} = s_{,}, \quad \frac{dq_{,}}{dy_{,}} = t_{,}.$$

Mais on peut aussi regarder $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ comme étant ainsi que z des fonctions de x et de y données par les formules (18).

Si l'on différentie sous ce point de vue l'équation $z_, = f(x_,, y_,)$ par rapport à x et à y, on aura

$$\frac{dz_,}{dx} = p_, \frac{dx_,}{dx} + q \frac{dy_,}{dx},$$
$$\frac{dz_,}{dy} = p_, \frac{dx_,}{dq} + q_, \frac{dy_,}{dy}.$$

Or, on tire des formules (18), en observant que $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$,

$$\frac{dx_,}{dx} = \mathrm{A} + \mathrm{C}p, \quad \frac{dy_,}{dx} = a + cp, \quad \frac{dz_,}{dx} = \alpha + \gamma p,$$
$$\frac{dx_,}{dy} = \mathrm{B} + \mathrm{C}q, \quad \frac{dy_,}{dy} = b + cq, \quad \frac{dz_,}{dy} = \beta + \gamma q,$$

de sorte que les deux équations précédentes deviennent

$$\alpha + \gamma p = p_, (\mathrm{A} + \mathrm{C}p) + q_, (a + cp), \qquad (19)$$
$$\beta + \gamma q = p' (\mathrm{B} + \mathrm{C}q) + q_, (b + cq), \qquad (20)$$

si l'on différentie encore l'équation (19) par rapport à x, il vient

$$\gamma \frac{dp}{dx} = \frac{dp_,}{dx} (\mathrm{A} + \mathrm{C}p) + \mathrm{C}p_, \frac{dp}{dx} + \frac{dq_,}{dx} (a + cp) + cq_, \frac{dp}{dx},$$

et comme on a

$$\frac{dp_,}{dx} = r_, \frac{dx_,}{dx} + s_, \frac{dy_,}{dx} = r_, (\mathrm{A} + \mathrm{C}p) + s_, (a + cp),$$
$$\frac{dq_,}{dx} = s_, \frac{dx_,}{dx} + t_, \frac{dy_,}{dx} = s_, (\mathrm{A} + \mathrm{C}p) + t_, (a + cp),$$

on obtient par la substitution

$$\gamma r = [r_, (\mathrm{A} + \mathrm{C}p) + s_, (a + cp)] (\mathrm{A} + \mathrm{C}p) + \mathrm{C}rp_, + [s' (\mathrm{A} + \mathrm{C}p) + t_, (a + cp)] (a + cp) + crq_,.$$

En différentiant l'équation (20) par rapport à y on trouve de même

$$\gamma t = [r_, (\mathrm{B} + \mathrm{C}q) + s_, (b + cq)] (\mathrm{B} + \mathrm{C}q) + \mathrm{C}tp_, + [s_, (\mathrm{B} + \mathrm{C}q) + t_, (b + cq)] (b + cq) + ctq'.$$

Enfin, en différentiant l'équation (19) par rapport à y, ou l'équation (20) par rapport à x, on trouve également

$$\gamma s = [r_{,}(\mathrm{B}+\mathrm{C}q)+s_{,}(b+cq)]\,(\mathrm{A}+\mathrm{C}p)+\mathrm{C}sp_{,}+[s(\mathrm{B}+\mathrm{C}q)+t_{,}(b+cq)]\,(a+cp)+cs_{,}q.$$

Supposons maintenant le plan des $x_{,}$, $y_{,}$, parallèle au plan tangent à la surface s pour le point que nous considérons sur cette surface et les plans des $x_{,}z_{,}$ et $y_{,}z_{,}$ parallèles aux plans des deux sections principales de cette surface pour le même point; ce qui donnera $p_{,}=0$, $q_{,}=0$, $s_{,}=0$.

Les équations précédentes se réduiront à celles-ci:

$$\begin{aligned}
\alpha + \gamma p &= 0,\\
\beta + \gamma q &= 0,\\
\gamma r &= r_{,}(\mathrm{A}+\mathrm{C}p)^2 + t_{,}(a+cp)^2,\\
\gamma t &= r_{,}(\mathrm{B}+\mathrm{C}q)^2 + t_{,}(b+cq)^2,\\
\gamma s &= r_{,}(\mathrm{A}+\mathrm{C}p)(\mathrm{B}+\mathrm{C}q) + t_{,}(a+cp)(b+cq).
\end{aligned}$$

Les deux premières donnent

$$p = -\frac{\alpha}{\gamma},\quad q = -\frac{\beta}{\gamma}, \tag{21}$$

d'où résulte

$$\mathrm{A}+\mathrm{C}p = \mathrm{A} - \frac{\mathrm{C}\alpha}{\gamma} = \frac{\mathrm{A}\gamma - \mathrm{C}\alpha}{\gamma} = \frac{\pm b}{\gamma},$$

car on sait que

$$\mathrm{A}\gamma - \mathrm{C}\alpha = \pm b.$$

On a de même

$$\mathrm{B}+\mathrm{C}q = \frac{\mp b}{\gamma};$$

$$a + cp = \frac{\mp \mathrm{B}}{\gamma},$$

$$b + cq = \frac{\pm \mathrm{A}}{\gamma},$$

et les trois autres équations deviennent

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{b^2 r_{,} + B^2 t_{,}}{\gamma^3}, \\ t &= \frac{a^2 r_{,} + A^2 t_{,}}{\gamma^3}, \\ s &= -\frac{abr_{,} + ABt_{,}}{\gamma^3}. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Il convient de rappeler ici la signification géométrique des quantités $r_{,}$, $t_{,}$, quand on suppose $p_{,}=0$, $q_{,}=0$, $s_{,}=0$.

L'équation qui donne les deux rayons de courbure de la surface s rapportée aux axes des x, y, z, dont la position est quelconque à l'égard de cette surface est, comme on sait

$$(rt - s^2)\rho^2 - [(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs]\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\rho + (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

Relativement aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ pour lesquels on a $p_{,}=0$, $q_{,}=0$, $s_{,}=0$; cette équation devient

$$r_{,}t_{,}\rho^2 - (r_{,} + t_{,})\rho + 1 = 0.$$

Les racines de celle-ci sont $\frac{1}{r_{,}}$ et $\frac{1}{t_{,}}$; ce sont les valeurs des deux rayons de courbure, et comme elles doivent être aussi données par l'équation générale, on en conclut

$$\left.\begin{aligned} rt - s^2 &= (1+p^2+q^2)^2\cdot r_{,}t_{,} \\ [(1+p^2)t+(1+q^2)s-2pqs]\sqrt{1+p^2+q^2} &= (1+p^2+q^2)^2\cdot(r_{,}+t_{,}), \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

résultat qu'on obtiendrait également, mais d'une manière moins simple, par la substitution des valeurs (21) et (22) trouvées pour p, q, r, s, t.

IV.

Supposons actuellement que le point que nous considérons sur la surface s, soit le point K d'où part le rayon incident qui tombe sur la surface S au point O pris pour origine des coordonnées. Alors l'axe des $z_{,}$ coïncide avec la direction de ce rayon incident OK, le plan des $x_{,}$, $y_{,}$ lui est perpendiculaire, et les plans des $x_{,}z_{,}$ et $y_{,}z_{,}$, sont ceux des sections principales de la surface s pour le point K dont il s'agit. De là résulte

$$x_{,} = 0, \quad y_{,} = 0, \quad z_{,} = k = \lambda h, \qquad (\text{n}^{\circ}\ \text{II}),$$

et comme on avait en général

$$z = Cx_{,} + cy_{,} + \gamma z_{,},$$

on a maintenant

$$z = \gamma\lambda h.$$

Substituons dans le premier membre de l'équation (14), cette valeur de z et les valeurs (21), (22) et (23), que nous avons trouvées n° III, pour p, q, r, s, t et pour les deux fonctions

$$rt - s^2, \quad (1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs.$$

Nous trouverons successivement

$$\left.\begin{aligned}
&zR - 1 + \frac{1 + q^2 + zt}{1 + p^2 + q^2 + [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]z + [rt - s^2]z^2} \\
&= \gamma\lambda h R - 1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 + \lambda h(a^2 r_{,} + A^2 t_{,})}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (r_{,} + t_{,})\lambda h + r_{,}t_{,}\lambda^2 h^2} \\
&= \gamma\lambda h R - 1 + \frac{1 - \alpha^2 + \lambda h(a^2 r_{,} + A^2 t_{,})}{(1 + \lambda h r_{,})(1 + \lambda h t_{,})} \\
&= \gamma\lambda h R - 1 + \frac{\dfrac{1 - \alpha^2}{r_{,}t_{,}} + \lambda h\left(\dfrac{A^2}{r_{,}} + \dfrac{a^2}{t_{,}}\right)}{\left(\dfrac{1}{r_{,}} + \lambda h\right)\left(\dfrac{1}{t_{,}} + \lambda h\right)}.
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Nous avons dit plus haut que $\frac{1}{r_{,}}$ et $\frac{1}{t_{,}}$ sont les deux rayons de courbure de la surface s en son point K $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ pour lequel on a $p_{,} = 0$, $q_{,} = 0$, $s_{,} = 0$. Pareillement $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{T}$ sont les deux rayons de courbure de la surface séparatrice S au point d'incidence O pour lequel on a par hypothèse $P = 0$, $Q = 0$, $S = 0$.

Comme nous n'aurons plus besoin des lettres R et r pour représenter les dérivées partielles $\frac{d^2Z}{dX^2}$ et $\frac{d^2z}{dx^2}$, nous désignerons les deux rayons de courbure de la surface S par R et r; de sorte que nous remplacerons dans nos formules les dérivées R et T par $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{r}$.

Nous conviendrons de prendre pour la direction des z positives, celle du plus grand rayon de courbure R à partir de l'origine O, ou s'il est infini, celle du plus petit rayon r. Nous prendrons pour l'angle des coordonnées positives, celui qui contient la partie du rayon incident qui fait un angle aigu avec la direction des z positives.

Remarquons encore qu'on peut toujours faire passer la surface s par un point K pris à volonté sur la direction du rayon incident. On peut donc prendre ce point K aussi près qu'on voudra du point O, sur la partie du rayon incident qui est dans l'angle des coordonnées positives; et alors le point correspondant K' de la surface s' se trouvera aussi sur la partie positive du rayon réfracté à une petite distance de l'origine O.

Cela posé, si l'on désigne par D et d les distances du point d'incidence O aux deux centres de courbure de la surface S situés sur la direction du rayon incident OK qui lui est normal, en supposant que ces deux centres se trouvent sur la partie positive de ce rayon, on aura évidemment

$$\frac{1}{r_{,}} = D - \lambda h, \quad \frac{1}{t_{,}} = d - \lambda h.$$

Les distances D, d, changeront de signe quand elles tomberont sur la partie négative du rayon incident.

En mettant ces valeurs de $\frac{1}{r_{,}}$ et $\frac{1}{t_{,}}$ dans l'expression (24) et y remplaçant comme nous l'avons dit R par $\frac{1}{R}$, elle devient

$$\frac{\gamma\lambda h}{R} - 1 + \frac{(1-\alpha^2)(D-\lambda h)(d-\lambda h) + \lambda h A^2 (D-\lambda h) + \lambda h a^2 (d-\lambda h)}{Dd},$$

et se réduit à

$$-\alpha^2 + \lambda h\left(\frac{\gamma}{R} - \frac{A^2}{D} - \frac{a^2}{d}\right),$$

en ayant égard à la relation

$$A^2 + a^2 + \alpha^2 = 1.$$

Le premier membre de l'équation (14) se trouve donc transformé dans l'expression

$$-\frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{h}{\lambda}\left(\frac{\gamma}{R} - \frac{A^2}{D} - \frac{a^2}{d}\right),$$

son second membre deviendra pareillement

$$-\frac{\alpha'^2}{\lambda'^2} + \frac{h}{\lambda'}\left(\frac{\gamma'}{R} - \frac{A'^2}{D'} - \frac{a'^2}{d'}\right).$$

On représente par D' et d' les distances du point d'incidence O aux deux centres de courbure de la surface s' situés sur la direction du rayon réfracté OK'; ces centres sont les points où OK' touche les deux nappes de la surface caustique formée par les intersections successives des rayons réfractés (les distances D', d' sont censées positives, lorsqu'elles sont comptées sur la partie de la droite OK' qui est dans l'angle des coordonnées positives, et négatives dans la direction opposée). On désigne par A'B'C' et $a'b'c'$ les cosinus des angles que font avec les axes des x, y, z positives les deux droites menées par le point O perpendiculairement au rayon réfracté OK' dans les plans des deux sections principales de la surface s' passant par ce rayon OK'; enfin, α', β', γ' sont les cosinus des angles que fait ce rayon avec les mêmes axes.

L'équation (14) sera donc remplacée par celle-ci

$$-\frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{h}{\lambda}\left(\frac{\gamma}{R} - \frac{A^2}{D} - \frac{a^2}{d}\right) = -\frac{\alpha'^2}{\lambda'^2} + \frac{h}{\lambda'}\left(\frac{\gamma'}{R} - \frac{A'^2}{D'} - \frac{a'^2}{d'}\right)$$

qui devant avoir lieu, quelle que soit h, se partage en deux autres

$$\frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha'^2}{\lambda'^2}, \quad \frac{1}{\lambda}\left(\frac{A^2}{D} + \frac{a^2}{d} - \frac{\gamma}{R}\right) = \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{A'^2}{D'} + \frac{a'^2}{d'} - \frac{\gamma'}{R}\right).$$

On peut faire subir des transformations analogues aux deux autres équations (15) et (16).

Voici le résultat de tout ce calcul.

On a d'abord les équations

$$\frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha'^2}{\lambda'^2}, \quad \frac{\mathcal{C}^2}{\lambda^2} = \frac{\mathcal{C}'^2}{\lambda'^2}, \quad \frac{\alpha\mathcal{C}}{\lambda^2} = \frac{\alpha'\mathcal{C}'}{\lambda'^2}$$

qui se réduisent à

$$\alpha' = \frac{\alpha\lambda'}{\lambda}, \quad \mathcal{C}' = \frac{\mathcal{C}\lambda'}{\lambda}, \qquad (25)$$

elles expriment simplement, comme il est aisé de s'en assurer, que le rayon incident et le rayon réfracté sont dans un même plan passant par l'axe des z, c'est-à-dire par la normale à la surface S au point O et que le rapport des sinus des angles qu'ils font avec cette normale est $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

On a ensuite les trois équations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}\left(\frac{A^2}{D} + \frac{a^2}{d} - \frac{\gamma}{R}\right) &= \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{A'^2}{D'} + \frac{a'^2}{d'} - \frac{\gamma'}{R}\right),\\
\frac{1}{\lambda}\left(\frac{B^2}{D} + \frac{b^2}{d} - \frac{\gamma}{r}\right) &= \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{B'^2}{D'} + \frac{b'^2}{d'} - \frac{\gamma'}{r}\right),\\
\frac{1}{\lambda}\left(\frac{AB}{D} + \frac{ab}{d}\right) &= \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{A'B'}{D'} + \frac{a'b'}{d}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Celles-ci renferment toutes les relations qui existent entre les courbures des trois surfaces S, s et s'. Nous allons en développer les conséquences.

V.

Pour plus de simplicité, nous pouvons actuellement faire passer les deux surfaces s et s' par le point d'incidence O. Alors D et d, D' et d' deviennent précisément les rayons de courbure des deux surfaces s, s' pour ce point-là, tandis que A, B, C et a, b, c, A', B', C' et a', b', c' sont les cosinus des angles que les tangentes aux lignes de courbure de ces surfaces passant par le point O font avec les tangentes aux deux lignes de courbure de la surface séparatrice S et avec sa normale au point O; α, $\mathcal{C}$, γ et α', $\mathcal{C}'$, γ' sont les cosinus des angles que le rayon incident et le rayon réfracté font avec les mêmes axes. Il s'agit maintenant de déterminer par le moyen des équations (26) les quantités D' et d', A', B', C' et a', b', c' relatives à la surface s', en supposant connues les quantités R et r, D et d, A, B, C et a, b, c, relatives aux deux premières surfaces S et s qui sont données.

On tire d'abord des équations (2)

$$\left.\begin{aligned} \frac{A'^2}{D'} + \frac{a'^2}{d'} &= f, \\ \frac{B'^2}{D'} + \frac{b'^2}{d'} &= g, \\ \frac{A'B'}{D'} + \frac{a'b'}{d'} &= e, \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

en posant, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{\gamma'}{R} + \frac{\lambda'}{\lambda}\left(\frac{A^2}{D} + \frac{a^2}{d} - \frac{\gamma}{R}\right), \\ g &= \frac{\gamma'}{r} + \frac{\lambda'}{\lambda}\left(\frac{B^2}{D} + \frac{b^2}{d} - \frac{\gamma}{r}\right), \\ e &= \frac{\lambda'}{\lambda}\left(\frac{AB}{D} + \frac{ab}{d}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

f, g, e ne se composent que de quantités connues.

On peut résoudre facilement les équations (27), en remarquant l'analogie qui existe entre elles et les formules (22) et la liaison de celles-ci avec les équations (23). Ainsi, en multipliant d'abord les équations (27) par $1 + \frac{\alpha'^2}{\gamma'^2}$, $1 + \frac{\beta'^2}{\gamma'^2}$, $\frac{2\alpha'\beta'}{\gamma'^2}$ respectivement et ajoutant, on trouve

$$\frac{A'^2+B'^2}{D'} + \frac{A'^2\alpha'^2+B'^2\beta'^2+2A'\alpha'B'\beta'}{D'\gamma'^2} + \frac{a'^2+b'^2}{d'} + \frac{a'^2\alpha'^2+b'^2\beta'^2+2a'\alpha'b'\beta'}{d'\gamma'^2}$$
$$= \frac{(\gamma'^2+\alpha'^2)f+(\gamma'^2+\beta'^2)g+2\alpha'\beta' e}{\gamma'^2}$$

et en réduisant (à cause de $A'\alpha' + B'\beta' = -C'\gamma'$),

$$\frac{1}{D'} + \frac{1}{d'} = \frac{(\gamma'^2+\alpha'^2)f+(\gamma'^2+\beta'^2)g+2\alpha'\beta'.e}{\gamma'^2}. \qquad (29)$$

En retranchant du produit des deux premières équations (27) le carré de la troisième et observant que $A'b' - B'a' = \pm\gamma'$, on obtient

$$\frac{1}{D'd'} = \frac{fg - e^2}{\gamma'^2}. \qquad (29)$$

On connaît donc la somme et le produit des deux quantités $\frac{1}{D'}$ et $\frac{1}{d'}$, et par conséquent, on aura les valeurs de D' et d' par la résolution d'une équation du second degré qu'il est inutile d'écrire.

Connaissant D' et d' on pourra déterminer A' et a' par le moyen des deux équations

$$\frac{A'^2}{D'} + \frac{a'^2}{d'} = f, \quad A'^2 + a'^2 = 1 - \alpha'^2, \quad \left(\alpha' = \frac{\alpha\lambda'}{\lambda}\right)$$

et l'on aura de même B' et b'.

On peut aussi trouver ces dernières inconnues, indépendamment de D' et d'. Car on tire des équations (27) après quelques réductions

$$\frac{\alpha'\mathcal{C}'f + (\gamma'^2 + \mathcal{C}'^2)e}{\gamma'} = A'a'\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d'}\right)$$

$$-\frac{\alpha'\mathcal{C}'g + (\gamma'^2 + \alpha'^2)e}{\gamma'} = B'b'\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d'}\right)$$

$$\frac{(\gamma'^2 + \alpha'^2)f - (\gamma'^2 + \mathcal{C}'^2)g}{\gamma'} = (A'b' + B'a')\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d'}\right),$$

d'où résulte

$$\left.\begin{aligned} \frac{B'b'}{A'a'} &= -\frac{\alpha'\mathcal{C}'g + (\gamma'^2 + \alpha'^2)e}{\alpha'\mathcal{C}'f + (\gamma'^2 + \mathcal{C}'^2)e}, \\ \frac{B'}{A'} + \frac{b'}{a'} &= \frac{(\gamma'^2 + \alpha'^2)f - (\gamma'^2 + \mathcal{C}'^2)g}{\alpha'\mathcal{C}'f + (\gamma'^2 + \mathcal{C}'^2)g}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

On connaîtra donc $\frac{B'}{A'}$ et $\frac{b'}{a'}$, ce qui suffit pour déterminer les directions des tangentes aux deux lignes de courbure de la surface s', car $\frac{B'}{A'}$ et $\frac{b'}{a'}$ sont les tangentes trigonométriques des angles que leurs projections sur le plan des xy font avec l'axe des x, ou bien $-\frac{a'}{b'}$ et $-\frac{A'}{B'}$ sont les tangentes des angles que font avec l'axe des x les traces sur le plan des xy des plans des sections principales de la surface s' pour le point O.

Il est à remarquer que si deux rayons incidents infiniment voisins se coupent, les deux rayons réfractés correspondants ne se coupent pas généralement. Car s'ils se coupaient, le plan contenant les deux rayons incidents et le plan contenant les deux rayons réfractés, se couperaient suivant la droite qui joint les deux points d'incidence infiniment voisins, c'est-à-dire suivant une tangente à la surface S; et comme ces plans déterminent des sections principales dans les surfaces s et s', le rapport $\frac{a}{b}$ ou $\frac{A}{B}$ serait égal à $\frac{a'}{b'}$ ou $\frac{A'}{B'}$, ce qui n'a pas lieu généralement.

Lorsqu'on a $d = D$, ce qui arrive en particulier quand les rayons incidents partent tous d'un même point, les quantités $\frac{A^2}{D} + \frac{a^2}{d}$, $\frac{B^2}{D} + \frac{b^2}{d}$, $\frac{AB}{D} + \frac{ab}{d}$, dans les formules précédentes se réduisent à $\frac{1-\alpha^2}{D}$, $\frac{1-\beta^2}{D}$ et $-\frac{\alpha\beta}{D}$ respectivement. Une simplification semblable a lieu quand on a $d' = D'$.

Ces formules s'appliqueront à la réflexion, en y faisant $\lambda' = \lambda$ et $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = -\gamma$. Si l'on a de plus $d = D$, on verra d'après les formules (30) que les plans des sections principales de la surface s' sont toujours les mêmes, quelle que soit la grandeur de D, ce que M. Dupin avait déjà remarqué.

VI.

On peut encore déterminer la courbure de toute section faite dans la surface s' par un plan mené à volonté par sa normale qui n'est autre que le rayon réfracté. Soient OZ la normale à la surface séparatrice S pour le point O, XOY son plan tangent, XOZ et YOZ les plans de ses courbures principales; ces trois plans sont pris pour ceux des coordonnées x, y, z. Soient OK la direction du rayon incident normale à la surface s, OK' celle du rayon réfracté normale à s', $x_{,}Oy_{,}$ le plan tangent à s et $Ox_{,}$, $Oy_{,}$ les tangentes à ses lignes de cour-

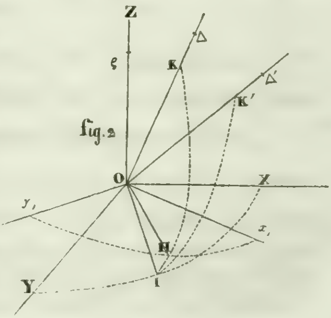


fig. 2

bure. Traçons dans le plan XOY tangent à S une ligne droite OI et faisons passer par cette droite et par les lignes OK, OK', deux plans IOK, IOK'; soient Δ et Δ' les rayons de courbure des sections normales faites par ces deux plans dans les surfaces s, s', et ρ le rayon de courbure de la section normale faite dans la surface S par le plan IOZ.

Cela posé, en multipliant les trois équations (26) par $\cos^2 \mathrm{IOX}$, $\cos^2 \mathrm{IOY}$ et $2\cos \mathrm{IOX} \cos \mathrm{IOY}$, puis ajoutant, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\left[\frac{A^2\cos^2\mathrm{IOX}+B^2\cos^2\mathrm{IOY}+2AB\cos\mathrm{IOX}\cos\mathrm{IOY}}{D}+\frac{a^2\cos^2\mathrm{IOX}+b^2\cos^2\mathrm{IOY}+2ab\cos\mathrm{IOX}\cos\mathrm{IOY}}{d}\right.\\
&\qquad\left.-\gamma\left(\frac{\cos^2\mathrm{IOX}}{R}+\frac{\cos^2\mathrm{IOY}}{r}\right)\right]\\
=&\frac{1}{\lambda'}\left[\frac{A'^2\cos^2\mathrm{IOX}+B'^2\cos^2\mathrm{IOY}+2A'B'\cos\mathrm{IOX}\cos\mathrm{IOY}}{D'}+\frac{a'^2\cos^2\mathrm{IOX}+b'^2\cos^2\mathrm{IOY}+2a'b'\cos\mathrm{IOX}\cos\mathrm{IOY}}{d'}\right.\\
&\qquad\left.-\gamma'\left(\frac{\cos^2\mathrm{IOX}}{R}+\frac{\cos^2\mathrm{IOY}}{r}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Mais la formule connue d'Euler donne

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \mathrm{IOX}}{R} + \frac{\cos^2 \mathrm{IOY}}{r};$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}
\cos.\mathrm{IO}x_{,} &= A\cos\mathrm{IOX} + B\cos\mathrm{IOY},\\
\cos.\mathrm{IO}y_{,} &= a\cos\mathrm{IOX} + b\cos\mathrm{IOY};
\end{aligned}$$

et en supposant que le plan IOK coupe le plan $x_{,}Oy_{,}$ tangent à la surface s suivant OH,

$$\begin{aligned}
\cos\mathrm{IO}x_{,} &= \cos\mathrm{IOH}\cos\mathrm{HO}x_{,} = \sin\mathrm{IOK}\cos\mathrm{HO}x_{,},\\
\cos\mathrm{IO}y_{,} &= \cos\mathrm{IOH}\cos\mathrm{HO}y_{,} = \sin.\mathrm{IOK}\cos\mathrm{HO}y_{,}.
\end{aligned}$$

Donc le premier membre de l'équation (31) devient

$$\frac{1}{\lambda}\left[\sin^2.\mathrm{IOK}\left(\frac{\cos^2\mathrm{HO}x_{,}}{D}+\frac{\cos^2\mathrm{HO}y_{,}}{d}\right)-\frac{\gamma}{\rho}\right],$$

ou bien encore,

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\sin^2\mathrm{IOK}}{\Delta}-\frac{\gamma}{\rho}\right),$$

car la formule d'Euler donne

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\cos^2 \mathrm{HO}x}{\mathrm{D}} + \frac{\cos^2 \mathrm{HO}y}{d}.$$

Le second membre de l'équation (31) se transforme de même, de sorte que cette équation devient la suivante

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\sin^2 \mathrm{IOK}}{\Delta} - \frac{\gamma}{\varrho}\right) = \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{\sin^2 \mathrm{IOK}'}{\Delta'} - \frac{\gamma'}{\varrho}\right). \qquad (32)$$

Telle est la relation très simple qui existe entre les rayons de courbure des sections normales faites dans les trois surfaces S, s, s', par les trois plans IOZ, IOK, IOK′ dont la ligne de commune intersection OI est prise à volonté sur le plan tangent à la première surface S. On aura donc le rayon Δ' quand on connaîtra ρ et Δ.

En particulier, si l'on prend OI perpendiculaire au plan qui contient la normale OZ et les rayons incident et réfracté OK, OK′, on aura

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\gamma}{\varrho}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\Delta'} - \frac{\gamma'}{\varrho}\right), \qquad (33)$$

d'où l'on peut conclure que les trois centres de courbure correspondants sont en ligne droite; et si OI est la trace de ce même plan ZOK sur le plan tangent à S, on aura

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\gamma^2}{\Delta} - \frac{\gamma}{\varrho}\right) = \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{\gamma'^2}{\Delta'} - \frac{\gamma'}{\varrho}\right). \qquad (34)$$

Ici ρ, Δ et Δ' sont les rayons de courbure des sections faites dans les trois surfaces S, s, s' par le plan dont il s'agit. Cette dernière formule suffit pour la construction des surfaces caustiques lorsque les trois surfaces S, s, s' sont des surfaces cylindriques dont les génératrices sont perpendiculaires à un même plan, ou des surfaces de révolution autour d'un même axe; dans ce dernier cas l'une des deux nappes de chaque surface caustique se réduit à une portion de ligne droite placée sur l'axe, et la formule (34) détermine les points de l'autre nappe. Les deux surfaces développables qui passent par un rayon quelconque, sont l'une un plan passant par l'axe, l'autre un cône droit de révolution autour de ce même axe. Ces cas reviennent à celui où l'on ne considère qu'un faisceau de rayons lumineux dirigés dans un seul et même plan suivant les normales à une courbe tracée sur ce plan et réfractés ou réfléchis à la rencontre d'une autre courbe sur le même plan. Alors la formule (34) coïncide avec celle que Bernouilli a donnée pour les caustiques planes et qu'il est très facile d'établir directement.

VII.

La détermination des quantités D', d', Δ', A', B', C' et a', b', c', qui se rapportent à la courbure de la surface s' pour le point O, peut encore être ramenée à la construction de la courbe que M. Dupin a nommée *indicatrice*.

On sait que si l'on prend sur une surface un point quelconque O, et si l'on coupe cette surface par un plan parallèle à son plan tangent au point O, et qui en soit infiniment voisin, la section est une ellipse ou une hyperbole dont les diamètres sont proportionnels à la racine carrée des rayons de courbure des sections faites dans la surface par des plans normaux passant par ces diamètres. Si l'on imagine que ces diamètres grandissent dans un rapport infini, on aura alors une ellipse ou une hyperbole s'éloignant à distance finie du centre O, et qui sera *l'indicatrice* de la surface pour le point O. Les carrés des demi-axes de cette courbe sont proportionnels aux deux rayons de courbure principaux de la surface et ont les mêmes signes que ces rayons; les deux plans normaux passant par les axes de la courbe, sont ceux des sections principales de la surface.

Ainsi, en supposant la surface S rapportée aux axes des x, y, z, que nous avons adoptés précédemment, l'indicatrice de cette surface S pour le point O, tracée sur son plan tangent, qui est le plan des xy, pourra être représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{r} = 1. \qquad (C)$$

En supposant la surface s rapportée aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, qui ont été définis plus haut, nous prendrons pour son indicatrice sur son plan tangent $x_{,}Oy_{,}$ la courbe donnée par l'équation

$$\frac{x_{,}^2}{\gamma D} + \frac{y_{,}^2}{\gamma d} = 1.$$

Cette équation représente aussi le cylindre droit qui a pour base cette indicatrice, et dont les génératrices sont parallèles à la direction du rayon incident OK qui est l'axe des z_i. L'équation de ce cylindre rapporté aux axes des x, y, z, est

$$\frac{(Ax+By+Cz)^2}{\gamma D}+\frac{(ax+by+cz)^2}{\gamma d}=1.$$

en y faisant $z=0$, on aura pour l'équation de sa trace sur le plan XOY tangent à la surface S,

$$\left(\frac{A^2}{D}+\frac{a^2}{d}\right)x^2+\left(\frac{B^2}{D}+\frac{b^2}{d}\right)y^2+2\left(\frac{AB}{D}+\frac{ab}{d}\right)xy=\gamma. \quad (c)$$

De même, en prenant les carrés des demi-axes de l'indicatrice de la surface s' égaux à $\gamma'D'$ et $\gamma'd'$, le cylindre droit qui a pour base cette indicatrice et ses génératrices parallèles au rayon réfracté OK′, coupera le plan des xy tangent à S suivant la courbe représentée par l'équation

$$\left(\frac{A'^2}{D'}+\frac{a'^2}{d'}\right)x^2+\left(\frac{B'^2}{D'}+\frac{b'^2}{d'}\right)y^2+2\left(\frac{A'B'}{D'}+\frac{a'b'}{d'}\right)xy=\gamma'. \quad (c')$$

Cela posé, si l'on ajoute l'équation (C), multipliée par $\frac{\gamma'}{\lambda'}-\frac{\gamma}{\lambda}$, à l'equation (c) multipliée par $\frac{1}{\lambda}$, et si l'on a égard aux formules (26), on obtiendra l'équation (c'). Ainsi, connaissant les courbes (C) et (c) ou leurs équations, il est facile d'obtenir comme on voit, l'équation de la courbe (c'), ou seulement trois points de cette courbe, dont la projection sur un plan perpendiculaire au rayon réfracté OK′ sera l'indicatrice de la surface s' pour le point O. On voit aussi que ces trois courbes C, c, c', se coupent aux quatre mêmes points, aux extrémités de deux diamètres communs; donc si l'on construit les deux premières courbes ou seulement leurs points d'intersection, la courbe c' devra passer par ces points, si toutefois ils sont réels, et il suffira pour achever de déterminer cette courbe, d'en connaître un autre point quelconque; par exemple l'un de ceux où elle rencontre, soit la trace du plan ZOK sur le plan XOY tangent à S, soit la perpendiculaire à cette trace, ce qui est facile d'après les formules (33) et (34).

Ces constructions peuvent être effectuées par la géométrie descriptive.

MÉMOIRE

Sur les lignes conjointes dans les coniques;

PAR M. CHASLES.

§ I. *Considérations préliminaires. Définition des lignes conjointes.*

1. M. Terquem a appelé *lignes conjointes* deux droites tracées dans le plan d'une conique, de manière que si on les prend pour axes coordonnés, les coefficients des carrés des deux coordonnées dans l'équation de la courbe soient égaux. (Voir *Journal de Mathématiques*, 3ᵉ volume, p. 17.)

Ainsi l'équation d'une conique, rapportée à deux axes obliques, étant

$$A(x^2 + y^2) + Bxy + Cx + Dy + 1 = 0,$$

les deux axes sont deux *lignes conjointes*.

La courbe rencontre l'axe des x en deux points dont les distances à l'origine sont les racines de l'équation

$$Ax^2 + Cx + 1 = 0.$$

Le produit de ces deux distances est $\frac{1}{A}$. Le produit des distances de l'origine aux points où la courbe rencontre l'axe des y, est le même. Cela prouve que les quatre points de rencontre de la conique par les deux axes coordonnés sont sur une circonférence de cercle, ainsi que l'a remarqué M. Terquem.

Réciproquement, si quatre points d'une conique sont sur une circonférence de cercle, les deux droites qui passent par ces quatre points sont deux *lignes conjointes;* c'est-à-dire que si on les prend pour axes coordonnés, les coefficients de x^2 et de y^2 dans l'équation de la courbe seront égaux.

Car soit

$$Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cx + Dy + 1 = 0$$

l'équation de la courbe, rapportée à ces deux droites prises pour axes coordonnés. Les produits des distances de l'origine aux points où la courbe rencontre ces droites ont pour expressions $\frac{1}{A'}$ et $\frac{1}{A}$. Ces produits doivent être égaux, puisque les quatre points sont sur un cercle; on a donc $A = A'$.

Ainsi cette propriété des *lignes conjointes,* de rencontrer la conique en quatre points situés sur une circonférence de cercle, est caractéristique et suffit pour définir ces lignes complétement d'une manière purement géométrique C'est cette définition que nous adopterons et dont nous allons nous servir pour démontrer différentes propriétés des lignes conjointes.

2. La première définition, employée par M. Terquem et fondée sur la forme de l'équation de la conique, convient particulièrement quand on veut traiter cette théorie par l'analyse; elle paraît aussi, au premier abord, offrir l'avantage d'une plus grande généralité, parce qu'elle s'applique au cas où les deux lignes conjointes ne rencontrent pas la conique, comme au cas où elles la rencontrent; tandis que la seconde définition, d'après son énoncé, paraît impliquer la condition de *réalité* des quatre points de rencontre. Mais nous observerons que, dans le plan de deux coniques situées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre, il existe toujours un système de deux droites qui représente une des coniques, en nombre infini, qu'on peut faire passer par les quatre points d'intersection, réels ou imaginaires, des deux courbes proposées. Ces deux droites jouissent de deux sortes de propriétés, dont les unes sont *permanentes*, c'est-à-dire subsistent toujours, quelle que soit la figure proposée, et dont les autres existent dans certains cas et n'existent pas dans d'autres cas; celles-ci sont les propriétés *contingentes* de la figure. Cette circonstance, que, dans le cas où les coniques se coupent, les deux droites en question passent par

leurs points d'intersection, offre une de leurs propriétés *contingentes*. Pour donner un exemple d'une propriété *permanente*, nous dirons que : *si d'un point quelconque pris sur l'une de ces droites, on mène quatre tangentes aux deux coniques, les droites qui joindront les points de contact sur la première aux points de contact sur la seconde, concourront deux à deux en deux points fixes* (*). Quand les deux coniques sont des cercles, une des deux droites est située à l'infini, et l'autre est celle qu'on a appelée *axe radical*. Cette définition, fondée sur une propriété où entre une expression radicale, ne pouvait convenir aux deux droites relatives à deux coniques quelconques. J'ai appelé celles-ci *axes de symptose* des deux coniques. Ainsi deux *lignes conjointes* dans une conique sont les *axes de symptose* communs à cette courbe et à un cercle. Je conserverai la dénomination de *lignes conjointes* pour le cas spécial d'une conique et d'un cercle ; et j'appellerai ce cercle le *cercle conjoint* relatif à ces deux droites, ainsi que l'a fait M. Terquem.

Je ferai usage, dans ce qui va suivre, d'un principe que j'ai développé dans mon *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, sous le nom de *Principe des relations contingentes*, et qui consiste en ce que les propriétés d'une figure qu'on a démontrées en s'appuyant sur des relations contingentes de la figure, ont lieu encore dans le cas où ces relations contingentes ont disparu et n'offrent plus leur secours pour la démonstration des propriétés en question.

D'après ce principe, les propriétés des *lignes conjointes*, que nous aurons démontrées pour le cas où le cercle rencontre la conique en quatre points, subsisteront dans les cas où deux de ces points, ou tous les quatre, seront imaginaires.

Deux lignes conjointes étant toujours les *axes de symptose* de la conique et d'un cercle, on conçoit de suite que les propriétés générales des axes de symptose de deux coniques leur seront applicables. Nous ne démontrerons ici que celles de ces propriétés qui auront quelque chose de particulier au cercle.

(*) J'ai démontré cette proposition dans le tome XVIII des *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne, p. 284.

Nous ferons usage exclusivement de considérations géométriques. On verra peut-être dans le nombre et la variété des propositions auxquelles cette méthode va nous conduire, une preuve de la facilité qu'elle peut procurer dans une foule de questions.

§ II. *Propriétés des lignes conjointes relatives à un cercle.*

3. On sait que si par un point quelconque S pris dans le plan d'une conique, on mène deux transversales qui la rencontrent en A, A', et B, B'; et si l'on appelle Oa, Ob les deux demi-diamètres de la courbe qui sont parallèles à ces deux transversales, on aura

$$\frac{SA.SA'}{SB.SB'} = \frac{\overline{Oa}^2}{\overline{Ob}^2}.$$

Si les deux transversales sont deux lignes conjointes, les quatre points A, A', B, B', seront sur un cercle; on aura donc.... $SA.SA' = SB.SB'$, et par suite $Oa = Ob$. Réciproquement, quand les deux demi-diamètres Oa, Ob sont égaux, les deux tranversales sont deux lignes conjointes; or deux diamètres égaux d'une conique font des angles égaux avec l'un de ses axes principaux; donc

Deux lignes conjointes, dans une conique, font des angles égaux avec l'un des axes principaux de la courbe.

Et réciproquement, *deux droites qui font des angles égaux avec un axe principal d'une conique sont deux lignes conjointes.*

4. Il suit de là, que *la droite qui divise en deux également l'angle de deux lignes conjointes, et la droite qui divise en deux également le supplément de cet angle, sont parallèles aux deux axes principaux de la conique.*

5. Quand un cercle rencontre une conique en quatre points réels, il y a trois systèmes de deux lignes conjointes qui sont deux côtés opposés, ou les deux diagonales du quadrilatère qui a pour sommets ces quatre points. Il suit donc de la proposition ci-dessus, que :

Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, les droites dont chacune divise en deux également l'angle ou le supplément de l'angle *de deux côtés opposés, ou des deux diagonales, sont parallèles, trois à trois, à deux droites rectangulaires.*

6. Concevons deux droites également inclinées sur un axe fixe, et deux autres droites également inclinées aussi sur cet axe; ces deux dernières rencontreront les deux premières en quatre points qui seront sur un cercle.

Car soient A, B, C, D ces quatre points; si le cercle mené par les trois premiers ne passait pas par le quatrième, il rencontrerait CD en un point D′, et l'on conclurait de l'hypothèse et de la proposition précédente que les deux droites AD′ et AD sont parallèles. Donc le point D′ coïncide avec le point D.

Il suit de là que :

Deux lignes conjointes quelconques rencontrent deux autres lignes conjointes en quatre points qui sont sur un cercle.

Nous verrons plus loin (19), comme corollaire d'une proposition beaucoup plus générale, que ce cercle passe par les points d'intersection des deux cercles conjoints.

7. *Le point de rencontre de deux lignes conjointes a la même polaire dans la conique et dans le cercle conjoint.*

Car soient A, B, C, D les points de rencontre de la conique et du cercle, et E le point de concours des deux lignes conjointes AB, CD. La polaire du point E, par rapport à l'une des deux courbes est la droite qui coupe harmoniquement les deux côtés AB, CD du quadrilatère, c'est-à-dire en deux points m, n tels que l'on a

$$\frac{EA}{EB} = \frac{mA}{mB}, \quad \frac{EC}{ED} = \frac{nC}{nD}.$$

Ainsi cette polaire est la même dans les deux courbes. Cette droite, d'après une propriété connue du quadrilatère (*), passe par le point de concours des deux autres côtés opposés BC, AD du quadrilatère ABCD, et par le point de rencontre de ses deux diagonales AC, BD.

8. La polaire d'un point, par rapport à un cercle, est perpendiculaire au rayon qui passe par ce point. On conclut de là que :

(*) *Géométrie de position*, page 282. — *Essai sur la théorie des Transversales*, page 74.

Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, la perpendiculaire abaissée du point de rencontre des deux diagonales sur la droite qui joint les points de concours des côtés opposés, passe par le centre du cercle.

9. Il suit de là que :

Étant données deux lignes conjointes, le centre du cercle conjoint est sur la droite menée par leur point de rencontre perpendiculairement à la polaire de ce point prise par rapport à la conique.

Ce théorème est un de ceux qu'a démontrés M. Terquem (*Voyez* p. 18 du tome III de ce Journal).

Si le point d'intersection des deux lignes conjointes est sur la conique, la polaire de ce point sera la tangente à la conique; le centre du cercle sera donc sur la normale.

Cela se démontre directement. Car si deux des quatre points d'intersection d'une conique par deux lignes conjointes sont infiniment voisins, le cercle qui passera par ces quatre points sera tangent à la conique. Son centre sera donc sur la normale.

10. On peut prendre aussi pour les deux lignes conjointes, la tangente à la courbe, qui joint les deux points infiniment voisins, et la droite qui joint les deux autres points. De sorte que,

Quand un cercle est tangent à une conique, la tangente au point de contact, et la droite qui joint les deux points d'intersection du cercle et de la courbe, sont également inclinées sur l'un des axes principaux de la conique.

11. Si le cercle est osculateur, les deux lignes conjointes seront la tangente et la droite menées du point de contact au point de rencontre du cercle et de la courbe. Donc

Le cercle osculateur en un point d'une conique, passe par un deuxième point de cette courbe, qui est à l'extrémité de la corde menée du point de contact, et faisant avec l'un des axes principaux un angle égal à celui que la tangente au point de contact fait avec cet axe.

Ce théorème offre une construction très simple du cercle osculateur en un point d'une conique.

12. *Si l'on a dans une parabole plusieurs cordes parallèles entre elles, la somme des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de chacune d'elles sur l'axe de la courbe sera constante.*

En effet, la somme des perpendiculaires abaissées des extrémités d'une même corde sur l'axe de la parabole sera égale à deux fois la perpendiculaire abaissée du point milieu de cette corde sur cet axe. Mais les milieux de toutes les cordes sont sur une même droite parallèle à l'axe; donc ils sont tous également éloignés de cet axe. Ce qui démontre le théorème énoncé.

13. Une corde étant menée dans une parabole, son milieu est situé sur la parallèle à l'axe, menée par le point de contact de la parabole et de sa tangente parallèle à la corde. Il s'ensuit que si l'on a deux lignes conjointes relatives à un cercle quelconque, comme ce sont deux cordes également inclinées sur l'axe, les tangentes qui leur seront parallèles toucheront la parabole en deux points situés de part et d'autre, et à égale distance, de l'axe de la courbe. Les milieux des deux cordes seront donc aussi situés de part et d'autre et à égale distance de l'axe. D'où l'on conclut, que les sommes des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de chaque corde sur l'axe sont égales et de signes contraires. On a donc ce théorème :

Étant menées deux lignes conjointes dans la parabole, la somme algébrique des perpendiculaires abaissées des points où elles rencontrent la courbe, sur son axe, est nulle.

Ou, en d'autres termes,

Un cercle quelconque étant tracé dans le plan d'une parabole; la somme des perpendiculaires abaissées sur l'axe de la courbe, des quatre points où le cercle la rencontre, est toujours égale à zéro.

Ce théorème est connu, et paraît dû à J. Gregory, qui l'a démontré par d'autres considérations. (Voir *Geometriæ pars universalis*, etc.; Patavii, 1668, in-4°, page 130.)

14. On conclut de ce théorème, que :

Le cercle osculateur en un point d'une parabole la rencontre en un autre point dont la distance à l'axe de la courbe est triple de la distance du point de contact à cet axe.

15. *Deux lignes conjointes étant menées dans le plan d'une conique, toute autre conique qui passera par leurs quatre points d'intersection aura ses axes principaux parallèles à ceux de la première.*

Car soient A, A′ et B, B′ les points où les deux lignes conjointes rencontrent la conique, et S leur point de concours, on aura

$$SA.SA' = SB.SB'.$$

Puisque la seconde conique passe aussi par les quatre points A, A′, B, B′, cette équation prouve que les deux droites AA′, BB′ sont aussi des lignes conjointes par rapport à elle. C. Q. F. D.

16. Réciproquement, *Quand deux coniques ont leurs axes principaux parallèles entre eux, un à un respectivement, leurs quatre points d'intersection sont sur un cercle.*

En effet, soient A, A′, B, B′, les quatre points d'intersection; soit S le point de concours des deux droites AA′, BB′. Soient Oa, Ob et $O'a'$, $O'b'$ les demi-diamètres des deux coniques parallèles aux deux droites AA′, BB′. On aura

$$\frac{SA.SA'}{SB.SB'} = \frac{\overline{Oa}^2}{\overline{Ob}^2} = \frac{\overline{O'a'}^2}{\overline{O'b'}^2},$$

d'où

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{O'a'}{O'b'}.$$

Concevons que par le point a' on fasse passer une troisième conique semblable à la première, et qui ait ses axes principaux dirigés suivant ceux de la seconde. Cette équation fait voir que cette courbe passera aussi par le point b'; donc $O'a'$ et $O'b'$ seront deux demi-diamètres communs à la seconde et à la troisième conique; et puisque ces deux courbes ont les mêmes axes principaux en direction, ces deux demi-diamètres sont également inclinés sur l'un de ces axes, parce que dans l'intersection des deux courbes, tout est égal de part et d'autre de chacun de ces axes principaux. Ainsi les deux demi-diamètres $O'a'$, $O'b'$ sont également inclinés sur un axe principal de la seconde conique.

Ce qui prouve que les deux droites AA', BB', sont des lignes conjointes par rapport à cette conique Il en est de même par rapport à l'autre courbe. Le théorème est donc démontré.

17. Il suit de là que : *Quand deux paraboles ont leurs axes perpendiculaires entre eux, elles se coupent en quatre points qui sont sur un cercle.*

18. Il suit encore du théorème, que : *Quand une hyperbole a pour asymptotes deux lignes conjointes d'une conique, elle rencontre cette courbe en quatre points qui sont sur un cercle.*

Nous verrons (art. 65) que ce cercle est concentrique au cercle conjoint relatif aux deux lignes conjointes.

19. *Si dans le plan d'une conique* U *on décrit deux cercles quelconques* A, A' *et deux coniques* B, B' *dont la première passe par les quatre points d'intersection (réels ou imaginaires) du premier cercle et de la conique* U, *et la seconde par les quatre points d'intersection du second cercle et de cette courbe* U;

1°. *Les deux coniques* B, B' *se couperont en quatre points qui seront sur un cercle ;*

Et 2°. *Ce cercle passera par les points d'intersection des deux cercles proposés.*

En effet, d'après le théorème (15), les deux coniques B, B', auront leurs axes principaux parallèles à ceux de la conique U, et conséquemment parallèles entre eux, un à un. Ces deux coniques se couperont donc en quatre points situés sur un cercle (16).

Il reste à prouver que ce cercle passera par les points d'intersection des deux cercles proposés.

Que l'on fasse la perspective de la figure sur un plan; les deux cercles proposés seront remplacés, en perspective par deux coniques quelconques ayant deux points d'intersection imaginaires sur la droite qui correspondra en perspective à l'infini de la première figure ; et le troisième cercle deviendra une conique passant par ces deux mêmes points imaginaires. D'après le principe des relations *contingentes*, nous pouvons raisonner comme si ces points étaient réels. Nous en conclurons donc ce théorème général :

Étant données trois coniques quelconques U, A, A′ *sur un plan, si l'on en décrit deux autres* B, B′, *dont la première passe par les points d'intersection des deux courbes* U *et* A, *et la seconde par les points d'intersection des deux courbes* U *et* A′; *par les quatre points d'intersection de ces deux nouvelles coniques* B, B′, *et par deux des quatre points d'intersection des deux premières* A, A′, *on pourra faire passer une conique.*

Or les quatre points d'intersection des deux coniques B, B′, et un seul des quatre points d'intersection des deux courbes A, A′ suffisent pour déterminer une conique. Cette courbe passe donc par chacun des trois autres points d'intersection de A et A′; c'est-à-dire que

Par les quatre points d'intersection des deux coniques B, B′, *on peut mener une conique qui passe par les quatre points d'intersection des deux premières* A, A′ (*).

Cette conique sera un cercle si ces deux A et A′ sont des cercles.
Le théorème est donc démontré.

20. Si les deux cercles A, A′ sont concentriques, pour qu'un troisième cercle ait les mêmes points d'intersection avec eux, il faut qu'il leur soit concentrique. On a donc ce théorème :

(*) Voici une seconde démonstration de ce théorème qui est important à cause des nombreux corollaires qui en découlent. Soient

$$F = 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{et} \quad \varphi' = 0,$$

les équations des trois coniques U, A, A′ Celles des deux coniques B, B′ seront de la forme

$$F + \lambda\varphi = 0, \quad \text{et} \quad F + \lambda'\varphi' = 0;$$

λ et λ' étant des constantes.
De ces deux équations, on tire

$$\lambda\varphi - \lambda'\varphi' = 0,$$

qui représente une troisième conique passant par les points d'intersection des deux B, B′. Mais on satisfait à cette équation en faisant $\varphi = 0$ et $\varphi' = 0$; donc la conique qu'elle représente passe aussi par les points d'intersection des deux premières coniques A, A′. Ce qui démontre le théorème.

Si dans le plan d'une conique U *on décrit deux cercles qui aient le même centre, et qu'on mène deux autres coniques quelconques dont la première passe par les points d'intersection du premier cercle et de la conique* U, *et l'autre par les points d'intersection de cette même courbe et du second cercle, ces deux coniques se couperont en quatre points situés sur un même cercle concentrique aux deux premiers.*

Dans le théorème (19), on peut prendre pour les deux coniques B, B′ les deux systèmes de lignes conjointes relatives aux deux cercles A, A′. Alors on en conclut que

Deux cercles quelconques étant tracés dans le plan d'une conique, les lignes conjointes du premier rencontrent les lignes conjointes du second en quatre points qui sont situés sur un troisième cercle qui passe par les points d'intersection des deux premiers.

Et si ces deux cercles sont concentriques, le troisième aura le même centre qu'eux.

22. Il existe, en général, trois systèmes de *deux lignes conjointes* relatives à une conique et à un cercle décrit dans son plan. Chaque système est formé de deux côtés opposés, ou des deux diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection du cercle et de la conique. Le point de concours de deux lignes conjointes a la même polaire dans ces deux courbes. Cette polaire est la droite qui joint les points de concours des deux autres systèmes de lignes conjointes (7). De sorte qu'*il existe en général, trois points dont l'un quelconque a la même polaire par rapport au cercle et à la conique.* Nous disons, *en général*, parce que deux de ces points peuvent être imaginaires : c'est ce qui a lieu quand le cercle ne rencontre la conique qu'en deux points réels; alors il n'y a qu'un seul système de deux lignes conjointes; les deux autres sont imaginaires, ainsi que les deux points de concours auxquels ils donnaient lieu dans le premier cas. Si le cercle et la conique n'ont aucun point d'intersection réel, alors il n'y a encore qu'un système de deux lignes conjointes dont le point de concours a la même polaire dans les deux courbes; mais dans ce cas les deux autres points qui jouissent de cette propriété sont toujours réels (*).

(*) Ce sont là des propriétés générales du système de deux coniques quelcon-

Ainsi, en général, une conique et un cercle étant décrits dans un même plan, il existe trois points qui jouissent de cette propriété, que l'un d'eux quelconque a la même polaire dans les deux courbes; cette polaire est la droite qui joint les deux autres points.

Pour un second cercle, on aura un pareil système de trois points dont chacun aura la même polaire dans ce second cercle et dans la conique.

Par ces trois points et les trois premiers, relatifs au premier cercle, on peut faire passer une conique.

Je vais démontrer ce théorème sous cet énoncé plus général :

23. *Si dans le plan d'une conique on prend deux systèmes de trois points tels que chacun d'eux ait pour polaire la droite qui joint les deux autres, on a six points par lesquels on peut faire passer une seconde conique.*

Soient a, b, c, les trois points du premier système, et a', b', c' ceux du second. Il faut démontrer que ces six points sont sur une conique.

Menons la droite ca'; son pôle sera le point d'intersection des polaires des deux points c, a', lesquelles sont les deux droites ab, $b'c'$; soit β ce point d'intersection. Pareillement, le pôle de la droite cb' est le point d'intersection des deux droites ab, $a'c'$; soit α ce point.

Les quatre droites ca, cb, ca', cb', issues du même point c, ont donc pour pôles les quatre points, b, a, β, α.

On a donc, d'après une propriété générale que j'ai démontrée pour

---

ques, pour lesquelles on peut consulter le *Traité des propriétés projectives* de M. Poncelet (section 3, chap. II) et un Mémoire sur les systèmes de coniques décrites dans un même plan, que j'ai publié dans les *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne (t. XVIII et XIX, année 1828).

Quand deux coniques n'ont aucun point d'intersection réel, on a coutume de dire que deux des trois points en question sont les points de concours de sécantes imaginaires. On peut, dans ce cas, éviter la considération des imaginaires, en disant que ces deux points sont des coniques infiniment petites, ou dont les axes sont nuls, et qui satisfont à la condition analytique de passer par les points d'intersection des deux coniques proposées. Je reviendrai sur cette matière et sur la théorie des *axes de symptose* de deux coniques, dans un article spécial les surfaces du second degré (*), et qui s'applique aux coniques, l'équation

$$\frac{\sin a'ca}{\sin a'cb} : \frac{\sin b'ca}{\sin b'cb} = \frac{\beta b}{\beta a} : \frac{\alpha b}{\alpha a}.$$

Or les quatre droites $c'a$, $c'b$, $c'a'$, $c'b'$ étant issues d'un même point c', et passant respectivement par les quatre points a, b, α, β qui sont en ligne droite, on a l'équation

$$\frac{\sin b'c'b}{\sin b'c'a} : \frac{\sin a'c'b}{\sin a'c'a} = \frac{\beta b}{\beta a} : \frac{\alpha b}{\alpha a} \text{ (**)}.$$

De ces deux équations résulte celle-ci :

$$\frac{\sin a'ca}{\sin a'cb} : \frac{\sin b'ca}{\sin b'cb} = \frac{\sin a'c'a}{\sin a'c'b} : \frac{\sin b'c'a}{\sin b'c'b};$$

équation qui signifie que le rapport *anharmonique* (***) des quatre droites ca, cb, ca', cb' est égal à celui des quatre droites $c'a$, $c'b$, $c'a'$, $c'b'$. D'où il suit, par une propriété générale des sections coniques, que les quatre points, a, b, a', b', où ces droites se coupent

---

(*) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes géométriques*, page 687.

(**) *Ibidem*, page 302.

(***) Quand quatre droites A, B, C, D situées dans un même plan sont issues d'un même point, j'ai appelé l'expression $\frac{\sin C,A}{\sin C,B} : \frac{\sin D,A}{\sin D,B}$, *rapport anharmonique* des quatre droites.

Pareillement, quand quatre points a, b, c, d sont en ligne droite ; l'expression $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$ est leur *rapport anharmonique*.

Les nombreux usages que j'ai eu à faire de ces *rapports* qui se représenteront désormais dans une foule de recherches géométriques, m'ont obligé à leur consacrer une dénomination particulière. Voir *Aperçu historique*, etc., pages 34 et 302. Le Mémoire sur les deux principes de Dualité et d'Homographie qui fait suite à l'*Aperçu historique* offre des applications continuelles de ces *rapports anharmoniques*.

deux à deux respectivement, sont sur une conique qui passe par les deux points c, c' (*). Ce qu'il fallait démontrer.

24. Quand un quadrilatère est inscrit, ou bien circonscrit à une conique, on sait que les points de concours de ses côtés opposés, et le point de rencontre de ses deux diagonales sont trois points qui jouissent de la propriété que chacun d'eux a pour polaire la droite qui joint les deux autres; on conclut donc du théorème précédent, que :

Si deux quadrilatères sont inscrits ou circonscrits à une conique, ou bien si l'un est inscrit et l'autre circonscrit à la courbe, par les trois points de concours des côtés opposés et des diagonales du premier, et les trois points de concours des côtés opposés et des diagonales du second on peut faire passer une conique (**).

§ III. *Suite du précédent. — Propriétés d'un autre genre des lignes conjointes relatives à un cercle.*

25. Concevons un cône du second degré, deux cercles sous-contraires c, c' tracés sur sa surface, et une sphère passant par ces deux cercles. Qu'on mène un plan transversal; il coupera le cône suivant une conique; la sphère suivant un cercle Σ et les plans des deux cercles c, c' suivant deux droites qui seront les lignes conjointes relatives à la conique et à ce cercle Σ. Ces deux lignes seront toujours réelles, quoique le cercle Σ puisse n'avoir aucun point d'intersection réel avec la conique.

Que d'un point de la conique on abaisse des perpendiculaires $m\pi$, $m\pi'$ sur les deux lignes conjointes, et des perpendiculaires mp, mp'

(*) *Aperçu historique, etc.*, page 334.

(**) Le théorème (23) peut donner lieu à quelques propriétés des surfaces du second degré; par exemple, on en conclut que *deux systèmes de diamètres conjugués d'une surface du second degré forment six droites situées sur un même cône du second degré.*

Conséquemment, *quand deux angles trièdres trirectangles ont un même sommet, leurs six arêtes sont toujours sur un cône du second degré.*

sur les deux plans des cercles c, c'. Soient ν, ν' les angles que ces plans font avec le plan transversal, on aura

$$m\pi = \frac{mp}{\sin\nu}, \quad m\pi' = \frac{mp'}{\sin\nu'}.$$

et

$$m\pi . m\pi' = \frac{mp . mp'}{\sin\nu . \sin\nu'}.$$

Soient r, r' les points où l'arète Sm du cône rencontre les plans des deux cercles c, c'; et soient α, α' les angles de cette arète avec ces plans, on aura

$$mp = mr \sin\alpha,$$
$$mp' = mr' \sin\alpha'.$$

Donc

$$m\pi . m\pi' = mr . mr' . \frac{\sin\alpha . \sin\alpha'}{\sin\nu . \sin\nu'}.$$

Or la sphère passe par les deux points r, r'; conséquemment le produit $mr.mr'$ est égal au carré d'une tangente menée du point m à cette sphère; supposons que la tangente touche la sphère au point situé dans le plan transversal sur le cercle Σ; et soit mt la longueur de cette tangente. On aura

$$\frac{m\pi . m\pi'}{mt^2} = \frac{\sin\alpha . \sin\alpha'}{\sin\nu . \sin\nu'}.$$

Or ν et ν' sont constants, quelle que soit la position du point m sur le plan transversal. Le produit $\sin\alpha . \sin\alpha'$ est constant aussi, car les sinus des angles α, α' que l'arète Sm fait avec les plans des deux cercles c, c' sont égaux, respectivement, aux perpendiculaires abaissées du sommet du cône sur ces plans, divisées par les parties Sr, Sr' de l'arète Sm; et le produit Sr.Sr' est constant puisque les deux points r, r' sont sur la sphère.

Ainsi l'on a

$$\frac{m\pi . m\pi'}{\overline{mt}^2} = \text{constante},$$

quel que soit le point m pris sur la conique; et la *constante* est la même quels que soient les deux cercles sous-contraires c, c' tracés sur le cône, et conséquemment quelles que soient les deux lignes conjointes prises dans le plan de la conique, pourvu toutefois que ces deux lignes soient toujours parallèles à elles-mêmes respectivement; car les plans des deux cercles étant toujours parallèles à deux plans fixes, leurs intersections par le plan transversal, qui sont les deux lignes conjointes, sont toujours parallèles à deux droites fixes.

On conclut de là ce théorème :

Un cercle quelconque étant tracé dans le plan d'une conique; le carré de la tangente à ce cercle menée par un point quelconque de la conique, sera au produit des perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux lignes conjointes, dans un rapport constant;

La valeur de ce rapport constant sera la même pour tous les systèmes de deux lignes conjointes qui feront entre elles un angle de grandeur constante.

Il faut remarquer que c'est pour faciliter l'énoncé du théorème, que nous y introduisons la considération de la *tangente* au cercle, mais qu'il s'applique aux cas où cette tangente est imaginaire; dans lesquels cas on substituera au carré de la tangente, le produit des segments faits par le cercle sur une transversale quelconque issue du point pris sur la conique.

26. Le cercle peut se réduire à un point, ce qui a lieu quand le plan de la conique est tangent à la sphère qui passe par les deux sections sous-contraires c, c' du cône.

Ainsi, *le cercle relatif à deux lignes conjointes peut être un point.* On considère alors ce point comme un cercle infiniment petit; et ce point peut être situé en un lieu quelconque du plan de la conique.

27. Si le plan de la conique ne rencontre pas la sphère, il y aura encore deux lignes conjointes, et *le cercle conjoint sera imaginaire.* Le théorème s'applique encore à ce cas; car le produit des segments qu'un cercle fait sur une droite issue d'un point fixe m est réel, bien que ce cercle soit imaginaire. Soit O le centre du cercle, R son rayon; ce produit est égal à $\overline{mO}^2 - R^2$; dans le cas actuel, le rayon du cercle

est imaginaire; son carré est négatif, et cette expression devient $\overline{mO}^2 + R^2$, quelle que soit la position du point m.

Ainsi l'on voit comment le théorème ci-dessus s'applique aux cas où la tangente au cercle, et le cercle lui-même deviennent imaginaires.

Si le plan transversal est parallèle à la droite d'intersection des plans des deux cercles c, c', les deux lignes conjointes, dans la conique, seront parallèles entre elles; et si le plan transversal passe par cette droite d'intersection, les deux lignes conjointes se confondront en une seule, et le cercle conjoint aura un double contact avec la conique sur cette droite. Ce cercle peut être imaginaire, ce qui aura lieu si le plan transversal ne rencontre pas la sphère; et il peut se réduire à un point, ce qui a lieu si le plan transversal est tangent à la sphère. Le point représente alors un cercle conjoint infiniment petit: c'est le point de contact de la sphère par le plan; et la ligne conjointe unique, sur laquelle ce cercle infiniment petit a un double contact avec la conique, est la droite d'intersection des plans des deux cercles C, C'. Ce point est le *foyer* de la conique, et cette droite est la *directrice;* car d'après le théorème général (25), les distances de chaque point de la conique à ce point fixe et à la droite, sont entre elles dans un rapport constant : ce qui est la propriété caractéristique du foyer.

28. Ces considérations offrent, comme on voit, un moyen de découvrir les foyers des coniques dans le cône oblique; ce que n'ont pas fait les Anciens qui n'ont traité de ces points que sur le plan, sans dire comment ils y ont été conduits. J'ai déjà indiqué ailleurs d'autres manières de considérer les foyers dans le cône oblique. (*Voir* le tome II de ce Journal, page 396; et mon *Aperçu historique*, etc., p. 132 et 285.)

29. Reprenons le théorème général (25), et supposons que le cercle ait un double contact avec la conique; le théorème prendra cet énoncé :

Quand un cercle a un double contact (réel ou imaginaire) avec une conique, si de chaque point de cette courbe on mène une tan-

gente au cercle, et une perpendiculaire à la droite de contact, le rapport de la tangente à cette perpendiculaire sera constant;

Et la valeur de ce rapport sera la même, quelle que soit le cercle, pourvu que son centre soit toujours sur le même axe principal de la courbe.

Le cercle sera *inscrit* dans la courbe si son centre est situé sur son axe majeur; et il lui sera circonscrit si son centre est situé sur l'axe mineur. Dans le premier cas on pourra mener une tangente au cercle, par chaque point de la conique; et dans le second cas on n'en pourra pas mener. Alors pour appliquer le théorème, on substituera à la tangente son expression que nous avons donnée ci-dessus (27).

30. Supposons deux cercles inscrits dans la conique; leurs droites de contact avec la courbe seront parallèles; conséquemment le rapport constant relatif à chacun des deux cercles aura la même valeur. On en conclut donc que la somme ou la différence des tangentes menées de chaque point de la conique aux deux cercles, est à la somme ou à la différence des distances de ce point aux deux lignes de contact, dans un rapport constant, lequel est le même quels que soient les deux cercles.

Pour chaque point de la conique compris entre les deux cordes de contact, la somme des distances de ce point à ces deux droites est constante et égale à la distance de ces deux droites; et pour chaque point de la conique situé au dehors de l'espace compris entre ces deux droites, la différence des distances de ce point à ces droites est égale à leur propre distance. On peut donc énoncer ce théorème :

Quand deux cercles sont inscrits dans une conique, la somme ou la différence des tangentes menées à ces cercles par chaque point de la courbe a une valeur constante;

Cette valeur est égale à la distance des cordes de contact des deux cercles avec la conique, multipliée par un coefficient constant, quels que soient les deux cercles inscrits.

31. Chacun des cercles peut se réduire à un point qui sera l'un des foyers de la conique, la corde de contact étant la directrice correspondante. Chacun des cercles peut aussi être imaginaire. Tous ces cas

seront compris sous l'énoncé général suivant, auquel nous donnons la forme des Porismes d'Euclide ;

Étant pris sur l'un des axes principaux d'une conique deux points fixes o, o', on pourra déterminer trois constantes λ, λ' *et* μ *telles que l'on ait entre elles et les distances de chaque point de la conique aux deux points fixes o, o', la relation constante*

$$\sqrt{\overline{mo}^2 + \lambda^2} \pm \sqrt{\overline{mo'}^2 + \lambda'^2} = \mu.$$

Ce théorème est une généralisation nouvelle de la propriété des foyers, que nous avons déjà généralisée ailleurs sous d'autres points de vue. (*Voir* t. II, p. 396 de ce Journal, et *Aperçu historique*, etc., p. 670 et 801) (*).

32. Chaque point d'un des axes principaux d'une conique est le centre d'un cercle qui a un double contact avec la courbe; les points de contact sont les pieds des perpendiculaires abaissées du point donné sur la conique; et la droite qui joint ces deux points est la *corde de contact*. Le contact peut être imaginaire; néanmoins cette droite est toujours réelle, de même que le cercle qui a le double contact avec la courbe. Voici comment on déterminera ce cercle et cette droite; le centre du cercle étant donné.

(*) Je citerai particulièrement les deux théorèmes suivants qui sont susceptibles d'un grand nombre de corollaires concernant les foyers des coniques :

1°. *Si, autour du foyer d'une conique, on fait tourner une rose des vents de* m *rayons,*

n *étant un nombre plus petit que* m,

La somme des puissances n *des distances des* m *points où ces rayons rencontreront la conique, à une droite fixe quelconque, divisées respectivement par les puissances* n *des distances de ces points au foyer de la courbe, sera constante.*

2°. *Si, autour du foyer d'une conique, on fait tourner une rose des vents de* m *rayons, et que par les* m *points où ils rencontrent la courbe, on lui mène ses tangentes,*

n *étant un nombre plus petit que* m, *la somme des puissances* n *des distances de ces tangentes à un point fixe, divisées par les puissances* n *de leurs distances au foyer, sera une quantité constante.*

La normale et la tangente en un même point m d'une conique divisent en deux également l'angle des deux rayons vecteurs qui aboutissent à ce point, et le supplément de cet angle. Il s'ensuit que ces deux droites et les deux rayons forment un faisceau harmonique ; et par conséquent la normale et la tangente rencontrent le grand axe de la courbe en deux points n, t qui sont conjugués harmoniques par rapport aux deux foyers. Cette propriété sert pour déterminer l'un de ces points, quand l'autre est donné.

Maintenant, si du premier point, qui est le pied de la normale, on mène une seconde normale à la courbe en m', la droite mm' sera la corde de contact du cercle qui a son centre au point n. Or, cette droite est la polaire du point t, puisque les deux droites tm, tm' sont tangentes à la conique; on a donc ce théorème :

Un point situé sur le grand axe d'une conique étant pris pour le centre d'un cercle qui doit avoir un double contact avec la courbe, la corde de contact sera la polaire d'un second point qui est conjugué harmonique du point proposé par rapport aux deux foyers de la courbe.

Si l'on considère qu'il existe sur le petit axe d'une conique deux *foyers imaginaires*, et que l'on peut prendre deux points conjugués harmoniques par rapport à deux points imaginaires, on verra que le théorème et la construction qu'il indique s'appliquent aux points situés sur le petit axe de la courbe, comme à ceux situés sur le grand axe.

33. Ce théorème servira pour résoudre ce problème :

Par un point pris sur un axe principal d'une conique, mener les normales à cette courbe.

On prendra le point conjugué harmonique du point donné, par rapport aux deux foyers (réels ou imaginaires) situés sur l'axe de la courbe, et la polaire de ce point par rapport à la courbe. Les pieds des normales cherchées seront sur cette droite ; de sorte que si cette droite rencontre la conique, il y aura deux normales; et si elle ne la rencontre pas, les normales seront imaginaires.

Nous donnerons ci-dessous (35) une autre construction de ce problème.

34. Considérons deux cercles ayant leurs centres sur un des axes principaux d'une conique, et prenons pour les lignes conjointes dans chaque cercle les perpendiculaires à cet axe qui joignent les points d'intersection de la conique et du cercle. Les carrés des tangentes menées d'un point de la conique aux deux cercles seront entre eux comme les produits des distances de ce point aux lignes conjointes des deux cercles (25). Prenons le point de la conique sur l'axe de symptose (ou axe radical) des deux cercles; alors on sait que les deux tangentes seront égales; on en conclut donc que les produits des distances de ce point aux lignes conjointes des deux cercles seront égaux. Donc,

Quand deux cercles ont leurs centres sur un diamètre principal d'une conique, si l'on considère les lignes conjointes perpendiculaires à cet axe, le produit des distances de l'axe radical des deux cercles aux deux lignes conjointes du premier, sera égal au produit des distances de cet axe aux deux lignes conjointes du second.

35. Par conséquent, toute droite transversale rencontre les lignes conjointes et l'axe radical en cinq points dont le dernier aura le produit de ses distances aux deux premiers, égal au produit de ses distances aux deux autres; c'est-à-dire que ces cinq points appartiendront à une involution de six points, dont le sixième, conjugué du cinquième, sera à l'infini. (Voir *Théorie de l'involution de six points*, page 312 de l'*Aperçu historique*, etc.)

Or, deux points conjugués, dans une involution, peuvent se confondre; ils forment alors un des deux points *doubles* de l'involution, qui jouissent de la propriété de diviser harmoniquement le segment compris entre deux points conjugués quelconques. Si l'un de ces points doubles est situé à l'infini, l'autre sera le milieu de chacun de ces segments.

Ici, quand les deux cercles sont concentriques, leur axe radical est à l'infini; conséquemment le cinquième et le sixième point, dans l'involution que nous avons considérée, se confondent; ils forment un point double; et par suite il existe un second point double qui est le milieu de chaque segment compris entre deux points conjugués. De là on conclut ce théorème :

Si d'un point pris sur l'un des axes principaux d'une conique, comme centre, on décrit plusieurs cercles, les lignes conjointes de chacun d'eux, perpendiculaires à l'axe de la courbe, seront également éloignées d'une même droite fixe; et celui des cercles qui aura un double contact avec la conique, la touchera sur cette droite.

Ce théorème donne une construction nouvelle du problème ci-dessus (33), où il s'agit de mener les normales à une conique, par un point pris sur un axe principal de la courbe.

Nous résoudrons plus loin (86) ce problème pour un point pris arbitrairement dans le plan de la conique; et nous aurons occasion alors de donner une seconde démonstration du théorème précédent.

36. Chaque cercle, dans ce théorème, indépendamment des deux lignes conjointes perpendiculaires à l'axe de la conique, les seules qui seront toujours réelles, pourra avoir deux autres systèmes de lignes conjointes; ce qui aura lieu quand le cercle rencontrera la conique en quatre points. Il est clair que chacune de ces lignes aura son milieu situé sur la droite fixe que nous venons de trouver. Or, la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur cette ligne passe par son milieu, puisqu'elle est une corde du cercle. Il s'ensuit que cette ligne est une tangente d'une parabole qui a son foyer au centre du cercle, et qui est tangente à cette droite fixe. Donc,

Quand plusieurs cercles ont un centre commun situé sur un axe principal d'une conique, leurs lignes conjointes non perpendiculaires à cet axe, enveloppent une parabole qui a son foyer au centre commun des cercles.

§ IV. *Propriétés générales d'un système de coniques circonscrites à un quadrilatère.*

37. Les propriétés des lignes conjointes que nous allons démontrer maintenant résultent de quelques propriétés générales d'un système de coniques circonscrites à un quadrilatère. Nous allons présenter d'abord ces propriétés générales

Quand trois coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, *une transversale quelconque les rencontre en six points qui sont en involution.*

Ainsi, soient A, A′, les points de la première conique, B, B′ ceux de la seconde, et C, C′ ceux de la troisième, on aura

$$\frac{CA \,.\, CA'}{C'A \,.\, C'A'} = \frac{CB \,.\, CB'}{C'B \,.\, C'B'}.$$

En effet, la transversale rencontre deux côtés opposés du quadrilatère en deux points P, P′ et les deux autres côtés en deux points Q, Q′. Le quadrilatère étant inscrit dans la première conique, les six points A, A′, P, P′, Q, Q′ sont en involution. (Théorème de Desargues; Voir *Aperçu historique*, etc., p. 77 et 335.) Pareillement, le quadrilatère étant inscrit dans chacune des deux autres coniques, les six points B, B′, P, P′, Q, Q′, forment une involution, et il en est de même des six points C, C′, P, P′, Q, Q′. Il suit de là, par une propriété générale de l'involution, que j'ai démontrée dans l'*Aperçu historique*, etc., p. 310, que les six points A, A′, B, B′, C, C′ sont en involution. C. Q. F. D.

38. *Quand plusieurs coniques sont circonscrites à un quadrilatère, les polaires d'un point quelconque, prises dans ces courbes, passent par un même point.*

Soit O un point quelconque et O′ le point de concours de ses polaires prises dans les deux premières courbes. Que la droite OO′ rencontre ces courbes aux points A, A′, et B, B′; les deux points O, O′ seront conjugués harmoniques par rapport aux points A, A′, et par rapport aux points B, B′. Ces deux points sont donc les points *doubles* relatifs à une involution de six points à laquelle appartiennent les quatre points A, A′, B, B′. Or les points C, C′, où la droite OO′ rencontre une troisième conique, complètent avec ces quatre premiers une involution. Donc les deux points O, O′ sont conjugués harmoniques par rapport à ces deux points C, C′ (*). Donc le point O′

(*) Voir, pour cette propriété des points *doubles* dans une involution, l'*Aperçu historique*, etc., p. 313.

est sur la polaire du point O, prise dans la troisième conique. Donc les polaires du point O, relatives à toutes les coniques, passent par un même point O′. C. Q. F. D.

39. *Étant données deux coniques quelconques, si l'on prend les polaires d'un même point, par rapport à ces courbes, et que ce point se meuve sur une ligne droite, le point d'intersection de ses polaires engendrera une conique, qui passera par les pôles de la droite, et par les points de concours des diagonales et des côtés opposés du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection des deux coniques.*

En effet, soit L la droite sur laquelle se meut le point dont on prend les polaires dans les deux coniques. Soient a, b, c, d quatre positions de ce point; les polaires de ces quatre points, prises dans la première courbe, passeront par un point fixe qui sera le pôle de la droite L, et auront leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points. (*Aperçu historique*, p. 687). Pareillement, les polaires de ces points, prises dans la seconde courbe, passeront par un point fixe qui est le pôle de la droite L pris dans cette courbe, et auront leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points, et égal, par conséquent, à celui des quatre premières polaires. Donc ces droites se coupent une à une, respectivement, en quatre points qui sont sur une conique Σ qui passe par les deux pôles de la droite L. (*Aperçu historique*, etc., p. 335.)

Si l'on conçoit une troisième conique passant par les points d'intersection des deux premières, la polaire du point mobile, par rapport à cette troisième courbe, passera par le point d'intersection de ses polaires par rapport aux deux premières (38); il s'ensuit que la conique Σ passe par le pôle de la droite L pris dans la troisième courbe.

Si cette troisième conique est l'ensemble de deux côtés opposés du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection des premières, les polaires des différents points de la droite L, prises par rapport à ces deux droites, passeront par leur point de concours, qui, par conséquent, représente le pôle de la droite L. Donc la conique Σ passe par ce point de concours. Ainsi le théorème est démontré.

40. Maintenant, la troisième conique étant quelconque, et le pôle

de la droite L par rapport à cette courbe étant situé sur la conique Σ, on en conclut ce théorème :

Quand plusieurs coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, les pôles d'une même droite, pris dans ces courbes, sont sur une conique qui passe par les points de concours des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère.

41. Si la droite est à l'infini, ses pôles seront les centres des coniques ; donc

Quand plusieurs coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, leurs centres sont sur une conique qui passe par les points de concours des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère.

42. Dans le même cas, où la droite L est à l'infini, le théorème ci-dessus (39) prend cet énoncé :

Étant données deux coniques quelconques, si l'on mène dans ces courbes deux diamètres parallèles entre eux, mais d'une direction quelconque, leurs conjugués se couperont en un point qui aura pour lieu géométrique une conique passant par les points d'intersection des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection des deux courbes ;

Et cette conique sera le lieu des centres de toutes les coniques qu'on pourra faire passer par ces quatre points.

43. Ces diverses propriétés des coniques ne sont pas nouvelles; mais on les a démontrées jusqu'ici par des méthodes différentes. Les démonstrations que nous venons d'en donner sont uniformes, et ne reposent que sur les propriétés les plus connues des sections coniques.

44. Pour appliquer le dernier théorème au cas où l'une des coniques, ou toutes les deux sont des paraboles, nous considérerons, au lieu de deux diamètres parallèles entre eux, deux tangentes parallèles entre elles; et nous énoncerons ainsi le théorème :

Étant données deux coniques quelconques, si on leur mène deux tangentes parallèles, sous une direction quelconque, leurs diamètres aboutissants aux points de contact se couperont en un point qui aura *pour lieu géométrique une conique qui passera par les points de concours des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection des deux courbes ;*

Et cette conique sera le lieu aussi des centres de toutes les coniques qu'on peut faire passer par ces quatre points.

45. S'il existe dans l'une des coniques un système de diamètres conjugués parallèles à deux diamètres conjugués de la seconde courbe, alors il est clair que la conique en question est une hyperbole qui a ses asymptotes parallèles à ces deux diamètres conjugués. Dans le cas contraire la conique sera une ellipse.

§ V. *Propriétés des lignes conjointes relatives à une conique et à plusieurs cercles concentriques.*

46. Supposons que dans le théorème (44) une des coniques soit un cercle, nous aurons ce théorème :

Quand un cercle est tracé dans le plan d'une conique, si par son centre on mène une perpendiculaire sur chaque tangente à cette courbe, cette droite rencontrera le diamètre de la conique aboutissant au point de contact, en un point qui aura pour lieu géométrique une hyperbole équilatère dont les asymptotes seront parallèles aux deux axes principaux de la conique ;

Cette hyperbole passera par le point d'intersection des lignes conjointes relatives au cercle,

Et elle sera le lieu des centres de toutes les coniques menées par les quatre points d'intersection du cercle et de la conique proposée.

47. Pour chaque point où l'hyperbole rencontre la conique proposée, la tangente en ce point est perpendiculaire à la droite menée de ce point au centre du cercle. Cette droite est donc la normale abaissée du centre du cercle sur la conique. Donc

L'hyperbole passe par les pieds des quatre normales qu'on peut abaisser du centre du cercle sur la conique proposée.

48. Le théorème précédent est susceptible de nombreuses conséquences que nous allons développer.

D'abord, l'hyperbole est la même quelle que soit la conique menée par quatre points fixes pris sur le cercle, puisqu'elle est le lieu des centres de toutes les coniques qu'on peut faire passer par ces quatre points; on conclut de là que :

Si par quatre points pris sur un cercle on fait passer plusieurs coniques, leurs centres et les pieds des normales abaissées du centre du cercle sur ces courbes seront sur une même hyperbole équilatère ; et les diamètres principaux de chacune des coniques seront parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

49. Ne considérons qu'une conique; l'hyperbole est déterminée par la condition de passer par les pieds des normales abaissées du centre du cercle sur cette courbe, quel que soit le rayon du cercle ; on a donc ce théorème :

Si plusieurs cercles concentriques sont décrits dans le plan d'une conique, les lignes conjointes relatives à chaque cercle auront leurs points de concours sur une hyperbole équilatère qui passera par les pieds des normales abaissées du centre des cercles sur la conique.

Ce théorème offre une construction de l'hyperbole par points.

50. Étant donné un quadrilatère quelconque ABCD, on peut prendre le point milieu d'un de ses côtés AB pour le centre d'une conique qui passera par ses quatre sommets; car par trois points on peut mener une conique qui ait son centre en un point donné. Que ces trois points soient les sommets B, C, D, et que le centre de la conique soit le point milieu du côté AB, elle passera nécessairement par le quatrième sommet A.

Ce que nous disons de deux côtés opposés, s'entend des deux diagonales.

Il suit de là que l'*hyperbole équilatère*, dans le théorème (46), *passe par les points milieux des côtés et des diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les points d'intersection du cercle et de la conique.*

51. Dans un quadrilatère, les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales passent par un même point où chacune d'elles est divisée en deux parties égales. Ce point

52..

est donc le centre d'une conique passant par les milieux des quatre côtés et des trois diagonales ; car par les milieux de deux côtés contigus et d'une diagonale, on pourra mener une conique qui ait son centre au point en question ; et cette conique passera par les milieux des deux autres côtés et de la seconde diagonale.

On conclut donc du théorème (46) et du précédent, celui-ci :

Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, les points de concours de ses côtés opposés et de ses diagonales, les milieux de ces six droites et le centre du cercle sont dix points situés sur une même hyperbole équilatère qui a son centre au centre de gravité des quatre sommets du quadrilatère supposés de même masse, et ses asymptotes parallèles aux droites qui divisent en deux également l'angle de deux côtés opposés et son supplément.

52. On conclut encore du théorème 50, que :

Étant donnée une conique, si d'un point fixe quelconque, comme centre, on décrit plusieurs circonférences de cercles, les cordes qu'elles intercepteront dans la conique auront leurs milieux situés sur une hyperbole équilatère.

Cette hyperbole passe par les pieds des normales à la conique, menées par le centre commun des cercles (49).

53. On peut encore dire que

Si l'on a une conique, et qu'on prenne ses lignes conjointes relatives à plusieurs cercles décrits d'un même centre, les pieds des perpendiculaires abaissées de ce centre sur ces lignes seront sur une hyperbole équilatère qui passera par ce point et par le centre de la conique ;

Et la droite qui joindra les pieds des perpendiculaires abaissées sur deux lignes conjointes relatives à un même cercle, passera par le centre de l'hyperbole (51).

54. Si le centre commun des cercles est pris sur un des axes principaux de la conique, deux lignes conjointes de chaque cercle seront perpendiculaires à cet axe ; et si le cercle rencontre la conique en quatre points, il y aura deux autres systèmes de deux lignes conjointes qui se couperont sur ce même axe. L'hyperbole équilatère deviendra donc,

dans ce cas, l'ensemble de deux droites rectangulaires, dont l'une sera l'axe de la conique, et l'autre sera le lieu des perpendiculaires abaissées du centre commun des cercles sur les lignes conjointes inclinées sur l'axe. Les milieux de ces lignes seront les pieds de ces perpendiculaires; ce qui donne une nouvelle démonstration des deux théorèmes 35 et 36.

55. Il suit du théorème 51, que :

Étant donnée une conique, si d'un point fixe, comme centre, avec un rayon quelconque, on décrit un cercle qui la rencontre en quatre points, ces quatre points, supposés de même masse, auront leurs centre de gravité en un point fixe, quel que soit le rayon du cercle.

56. Que dans ce théorème et dans celui de l'article 52, on suppose que la conique soit l'ensemble de deux droites, il s'ensuivra que :

Si dans le plan d'un angle on décrit plusieurs cercles concentriques, dont chacun rencontre les deux côtés de l'angle en quatre points :

1°. *Ces quatre points, supposés de même masse, auront pour centre de gravité un même point fixe;*

2°. *Les droites qui joindront deux à deux ces quatre points auront leurs milieux sur une hyperbole équilatère ayant son centre en ce point fixe.*

Nous verrons plus loin (art. 81), que *ces droites enveloppent une courbe du quatrième degré qui a deux branches paraboliques.*

Si le centre commun des cercles est pris sur la droite qui divise l'angle donné en deux également, l'hyperbole se réduira à une ligne droite (54), et par conséquent, *les cordes interceptées dans les cercles, entre les côtés de l'angle, envelopperont une parabole.*

57. Le théorème 53 peut être généralisé de cette manière :

Si dans une conique on prend les lignes conjointes relatives à plusieurs cercles décrits d'un même centre, et que l'on abaisse de ce point, sous un angle de grandeur donnée, des obliques sur ces droites :

1°. *Les pieds de ces obliques seront sur une hyperbole équilatère passant par le centre commun des cercles;*

2°. *La droite qui joindra les pieds des obliques abaissées sur deux lignes conjointes relatives à un même cercle passera par le centre de l'hyperbole.*

En effet, chaque oblique est proportionnelle à la perpendiculaire abaissée sur la même ligne, puisque cette oblique et cette perpendiculaire font entre elles un angle de grandeur constante. Donc si l'on fait éprouver à toutes les obliques un mouvement de rotation autour du point fixe, égal à cet angle, elles viendront se superposer sur les perpendiculaires, et leurs extrémités formeront une courbe semblable à celle sur laquelle se trouvent les pieds des perpendiculaires; mais celle-ci est une hyperbole équilatère: le lieu des extrémités des obliques sera donc aussi une hyperbole équilatère. Ce qui démontre la première partie du théorème.

La droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées sur deux lignes conjointes passe par le centre de la première hyperbole; donc la droite qui joindra les extrémités des deux obliques superposées sur ces perpendiculaires passera aussi par le centre de la seconde hyperbole. Ce qui aura lieu encore quand les obliques auront repris leur véritable position.

Ainsi le théorème est démontré.

§ VI. *Propriétés des lignes conjointes considérées dans un système de coniques concentriques et homothétiques, et relatives à plusieurs cercles concentriques.*

58. Si d'un point fixe on abaisse des normales sur une conique E, leurs pieds sont sur une hyperbole équilatère qui passe par le point fixe et par le centre de la conique, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes principaux de cette courbe. On forme cette hyperbole en abaissant du point fixe, une perpendiculaire sur chaque tangente à la conique, et en prenant le point d'intersection de cette perpendiculaire et du diamètre conjugué à la tangente. Ce point appartient à l'hyperbole (46 et 47). Cette courbe sera donc la même pour une autre conique E′ concentrique et homothétique à la proposée E; on a donc ce théorème :

Quand plusieurs coniques sont concentriques et homothétiques, si d'un point fixe quelconque on abaisse sur ces courbes des normales, leurs pieds seront sur une hyperbole équilatère.

59. Si l'on conçoit un cercle décrit du point fixe comme centre, ses cordes communes avec l'une des coniques auront leurs milieux situés sur l'hyperbole équilatère (52); ces milieux sont les pieds des normales abaissées du centre du cercle sur ces cordes; donc

Quand plusieurs coniques sont concentriques et homothétiques, si l'on décrit un cercle quelconque, les pieds des perpendiculaires abaissées de son centre sur ses lignes conjointes relatives à ces courbes seront tous sur l'hyperbole équilatère lieu des pieds des normales abaissées du centre du cercle sur les coniques.

60. Si du point fixe, comme centre, on décrit plusieurs cercles C, C′,..., chacun d'eux rencontrera l'une quelconque E′ des coniques homothétiques et concentriques, en quatre points par lesquels on pourra faire passer une infinité de coniques; toutes ces courbes auront leurs centres sur l'hyperbole équilatère; car cette hyperbole est déterminée par la condition de passer par les pieds des normales abaissées du centre des cercles sur la conique E′. Conséquemment, d'une part, elle sera la même quel que soit le rayon du cercle C, et, et d'autre part, quelle que soit la conique E′, puisque les pieds des normales abaissées sur toutes les coniques E, E′,... sont sur la même hyperbole (58). Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Quand on a plusieurs coniques E, E′,.... *concentriques et homothétiques entre elles, et plusieurs cercles décrits d'un même centre quelconque, si par les points d'intersection d'un des cercles et d'une des coniques* E, *on fait passer d'autres coniques, leurs centres seront sur une même hyperbole équilatère, quels que soient ce cercle et la conique* E.

61. Donc un point de cette hyperbole sera le centre d'une infinité de coniques, dont chacune passera par les quatre points d'intersection d'une des coniques E, E′,... par un des cercles C, C′,.... Je dis que *toutes ces coniques concentriques sont homothétiques entre elles.*

En effet, considérons l'une des coniques E, et l'un des cercles C;

prenons sur l'hyperbole un point m; ce point sera le centre d'une conique U passant par les quatre points d'intersection de la conique E et du cercle C. Il faut prouver que cette conique U est déterminée d'espèce, quels que soient la conique E et le cercle C.

Soit a l'un des points où l'hyperbole rencontre la conique E; menons en ce point la tangente à cette courbe E, et menons par le point m une parallèle mb à cette tangente. Cette parallèle et la droite ma seront deux diamètres conjugués de la conique U; car, cette courbe U, la conique E et le cercle C passant par quatre mêmes points, si l'on prend dans ces trois courbes les diamètres conjugués à une même direction quelconque, ils concourront en un même point de l'hyperbole (38). Or, si cette direction est celle de la tangente à la conique E au point a, ce point a sera le point de concours des trois diamètres. Donc, la droite ma est le diamètre de la conique U conjugué à la droite mb menée parallèlement à la tangente en a à la conique E.

Pour chacun des autres points d'intersection de la conique E et de l'hyperbole, on aura pareillement un système de deux diamètres conjugués de la conique U. Cette courbe est donc déterminée d'espèce; mais ces diamètres conjugués sont les mêmes, quel que soit le cercle : donc *si deux cercles concentriques rencontrent une même conique, et si par les points d'intersection du premier cercle, d'une part, et par les points d'intersection du second cercle, d'autre part, on fait passer deux coniques qui aient le même centre, ces deux courbes seront homothétiques.*

La démonstration que nous venons de donner de ce théorème s'applique au cas où l'on considère deux coniques homothétiques E, E', et un cercle C'; et l'on en conclut que si par les quatre points d'intersection de la première conique et du cercle, d'une part, et par les quatre points d'intersection de la seconde conique et du cercle, d'autre part, on fait passer deux coniques concentriques, elles seront homothétiques.

Ainsi, en considérant deux coniques E, E' et deux cercles C, C', si l'on décrit trois coniques qui aient pour centre commun un point m de l'hyperbole équilatère, dont la première passe par les points d'intersection de E et C, la deuxième par les points d'intersection de E et C', et la troisième par les points d'intersection de C' et E', la première et la deuxième seront homothétiques entre elles; la deuxième et la troisième seront aussi homothétiques entre elles; donc la troisième sera homothétique à la première.

62. On a donc ce théorème :

Quand plusieurs coniques E, E′,... *sont concentriques et homothétiques entre elles, et que plusieurs cercles* C, C′,... *sont décrits d'un même centre quelconque, si l'on conçoit l'hyperbole équilatère lieu des pieds des normales abaissées de ce point sur les coniques, chacun des points de cette courbe sera le centre commun d'une infinité de coniques homothétiques entre elles, dont chacune passera par les quatre points d'intersection d'une des coniques* E, E′,... *par l'un des cercles* C, C′,...

63. Il résulte de ce théorème, que

Quand deux coniques se coupent en quatre points situés sur un cercle, deux autres coniques, concentriques et homothétiques aux deux premières, respectivement, se couperont en quatre points situés sur un second cercle concentrique au premier.

Soient E, U les deux coniques proposées, et C le cercle sur lequel elles se coupent; soient E′, U′ les deux coniques qui leur sont homothétiques et concentriques, une à une respectivement; il faut prouver qne ces deux courbes se couperont sur un cercle concentrique au cercle C. Or, on peut considérer le centre de la conique U comme le centre d'une seconde conique U″ homothétique à U et qui passera par les points d'intersection de la conique E′ et d'un cercle quelconque C′ concentrique à C (62). Prenons pour ce cercle C′ celui qui passe par un des quatre points d'intersection des deux coniques E′, U′; la conique U″ se confondra avec la conique U′, puisqu'elles seront concentriques et homothétiques, et qu'elles auront un point commun. Donc, les deux coniques E′, U′ se coupent sur un cercle concentrique au cercle C.

C. Q. F. D.

64. Si l'on suppose que les deux coniques U, U′ se confondent, on en conclura ce théorème :

Quand deux coniques se rencontrent en quatre points situés sur un cercle, toute conique concentrique et homothétique à l'une d'elles *rencontrera l'autre en quatre points qui seront sur un second cercle concentrique au premier.*

65. L'une des deux coniques peut être l'ensemble de deux lignes conjointes; la conique homothétique sera une hyperbole ayant ces deux lignes pour asymptotes. Donc

Deux lignes conjointes d'une conique étant prises pour asymptotes d'une hyperbole, les quatre points d'intersection de la conique et de l'hyperbole seront sur un cercle concentrique au cercle conjoint relatif aux deux lignes conjointes.

66. Concevons un quadrilatère inscrit dans un cercle; on peut regarder deux côtés opposés comme une conique, et les deux autres côtés opposés comme les deux lignes conjointes; donc si l'on décrit une hyperbole qui ait ces deux côtés pour asymptotes, *elle rencontrera les deux premiers côtés en quatre points qui seront sur un cercle concentrique au premier.*

Donc

Étant donnée une hyperbole, si l'on tire deux droites qui rencontrent ses asymptotes en quatre points situés sur un cercle, elles rencontreront l'hyperbole en quatre autres points qui seront sur un second cercle concentrique au premier.

67. Plus généralement,

Étant données deux coniques concentriques et homothétiques, si l'on tire deux droites qui rencontrent la première en quatre points situés sur un cercle, ces deux droites rencontreront la seconde courbe en quatre points qui seront sur un second cercle concentrique au premier.

Cela est évident; car les deux droites seront des lignes conjointes par rapport à la seconde conique, comme par rapport à la première; ensuite les milieux des segments compris sur chaque droite dans les deux coniques, se confondront; d'où il suit que les cercles auront le même centre.

§ VII. *Propriétés d'un système de coniques inscrites dans un même quadrilatère, et au nombre desquelles se trouve un cercle.*

68. Nous avons été conduit aux théorèmes contenus dans les deux paragraphes précédents, par la considération d'un système de coniques circonscrites à un même quadrilatère, et au nombre desquelles se trouve un cercle. Si maintenant on considère un système de coniques inscrites dans un même quadrilatère, et au nombre desquelles se trouve un cercle, on parviendra par une marche semblable à divers autres théorèmes. Mais on peut aussi déduire ces théorèmes de ceux qui précèdent, par une transformation polaire faite au moyen d'un cercle auxiliaire concentrique au cercle de la figure. C'est la marche que nous allons suivre, comme étant la plus expéditive.

69. Du théorème 5, on conclut que

Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, les trois angles au centre soutendus respectivement par les deux diagonales et par la droite qui joint les points de concours des côtés opposés, sont divisés chacun en deux également par une même droite.

70. On voit, soit par le théorème de l'article 4, soit par celui de l'article 48, que, quand plusieurs coniques sont circonscrites à un quadrilatère, et que parmi elles se trouve un cercle, les diamètres principaux de ces courbes sont parallèles à deux droites fixes. Faisant la transformation polaire par rapport à un cercle auxiliaire concentrique à celui de la figure, on obtient ce théorème :

Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un quadrilatère, et que parmi elles se trouve un cercle, l'angle formé par les tangentes menées du centre de ce cercle à l'une quelconque des coniques sera divisé en deux également par une droite fixe.

Le théorème précédent n'est qu'un corollaire de celui-ci, parce que chaque diagonale du quadrilatère peut être considérée comme une conique inscrite dans le quadrilatère.

71. Reprenons le théorème 48; faisons la transformation polaire,

comme nous l'avons dit; l'hyperbole passe par le centre du cercle auxiliaire; par conséquent elle deviendra une parabole; et, ses asymptotes étant à angle droit, les tangentes menées du centre du cercle à cette parabole seront à angle droit; de sorte que sa *directrice* passera par ce point. On a donc ce théorème :

Si dans un quadrilatère circonscrit à un cercle on inscrit plusieurs coniques, les polaires du centre du cercle, prises dans ces courbes, envelopperont une parabole dont la directrice passera par le centre du cercle ; et si de ce point on abaisse des normales sur les coniques et que par leurs pieds on mène les tangentes à ces courbes, toutes ces droites seront tangentes à la parabole.

72. Du théorème 49, on conclut que

Si plusieurs cercles sont décrits d'un même centre dans le plan d'une conique, et qu'on prenne les lignes conjointes relatives à chaque cercle, et la polaire de leur point de concours par rapport à la conique, toutes ces polaires envelopperont une parabole, dont la directrice passera par le centre commun des cercles, et qui sera inscrite dans le quadrilatère formé par les tangentes à la conique menées par les pieds de ses normales abaissées de ce centre.

73. Du théorème 51, on conclut le suivant :

Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, si l'on tire les rayons du cercle qui aboutissent aux sommets et aux points de concours des côtés opposés et des diagonales, et que par ces sept points on mène des perpendiculaires à ces rayons respectivement, ces perpendiculaires, la droite qui joint les points de concours des côtés opposés, et les deux diagonales, seront dix droites tangentes à une même parabole dont la directrice passera par le centre du cercle.

74. Du théorème 53, on conclut le suivant :

Plusieurs cercles concentriques étant situés dans le plan d'une conique, si par le point de concours des tangentes communes à la conique et à chaque cercle, on mène une droite perpendiculaire au rayon du cercle qui aboutit à ce point, toutes ces droites envelopperont une parabole dont la directrice passera par le centre commun des cercles.

75. Cette parabole, dont les théorèmes précédents apprennent à construire les tangentes de différentes manières, donne lieu à une solution de ce problème :

D'un point donné, abaisser les normales sur une section conique.

En effet, la parabole étant construite, il suffira de mener les tangentes communes à cette courbe et à la conique proposée; leurs points de contact sur cette conique seront les pieds des normales demandées.

Nous donnerons dans le § VIII, (art. 86), une autre solution de ce problème.

76. Si la conique a l'un de ses axes nul, de manière qu'elle se réduise à une droite terminée à deux points fixes, ce théorème prendra l'énoncé suivant qui résulte aussi, par une transformation polaire, du théorème 56.

Si l'on a plusieurs cercles concentriques, et que l'on circonscrive à chacun d'eux un quadrilatère qui ait pour points de concours de ses côtés opposés deux points fixes pris arbitrairement, les droites menées par les sommets de ces quadrilatères perpendiculairement aux droites issues du centre commun des cercles et qui aboutissent à ces sommets, envelopperont une parabole dont la directrice passera par le centre des cercles.

77. On sait que les perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une parabole sont sur une courbe du troisième degré qui a un point double, ou conjugué, situé au point fixe (*). Cette courbe

(*) Cela est facile à démontrer. Il suffit de faire voir qu'une droite quelconque ne rencontrera la courbe qu'en trois points. Or, que l'on conçoive un angle droit dont le sommet parcourre cette droite et dont un côté glisse sur le point fixe; le deuxième côté enveloppera une parabole. Quand le sommet de l'angle sera situé en l'un des points où la droite rencontre la courbe en question, son deuxième côté sera tangent à la parabole proposée. Donc à chaque point de rencontre de la droite avec la courbe en question correspond une tangente commune à deux paraboles. Or, deux paraboles ne peuvent avoir que trois tangentes communes, parce qu'elles en ont une quatrième située à l'infini ; donc la droite ne rencontre est la cissoïde de Dioclès quand le point fixe est le sommet de la parabole ; et elle est une *focale* à nœud quand le point fixe est situé sur la directrice. Cette *focale* a été ainsi nommée par M. Quetelet, parce que c'est dans le cône qu'elle s'est d'abord présentée. Elle est le lieu des foyers des sections faites dans un cône droit à base circulaire, par des plans menés par une tangente à ce cercle. Cette courbe jouit de plusieurs propriétés assez remarquables qui s'appliquent, par une projection, à toutes les courbes du troisième degré qui ont un point double ou conjugué.

78. D'après cela, on conclut du théorème 71, que :

Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un quadrilatère, et que parmi elles se trouve un cercle, les pieds des perpendiculaires abaissées du centre du cercle sur les polaires de ce point prises par rapport aux coniques, et les pieds des normales abaissées du même point sur ces courbes, sont tous situés sur une focale qui a son nœud en ce point.

Les foyers des coniques, et les pieds des perpendiculaires abaissées du point fixe sur les axes principaux de ces courbes sont aussi sur la focale.

Je démontrerai ce théorème ailleurs, avec plusieurs autres propriétés des focales, qui ne peuvent trouver place ici.

79. Du théorème 74, on conclut que :

Plusieurs cercles étant décrits d'un même centre dans le plan d'une

---

la courbe en question qu'en trois points ; donc cette courbe est du troisième degré. Elle a un point double au point fixe, parce que par ce point on peut mener deux tangentes à la parabole proposée, et que ce point est lui-même le pied des normales abaissées sur ces tangentes. Quand ces tangentes sont imaginaires, le point double se change en un point conjugué.

On prouve par le même raisonnement que les pieds des normales abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une ellipse ou d'une hyperbole, sont sur une courbe du quatrième degré qui a un point double, ou conjugué, situé au point fixe.

Pour le cercle, cette courbe du quatrième degré est le limaçon de Pascal, qui est, comme on sait, une épicycloïde et, en même temps, une conchoïde du cercle.

conique, les points de concours des tangentes communes à la conique et à chaque cercle sont situés sur une focale qui a son nœud au centre commun des cercles.

80. Le théorème 76 donne le suivant :

Plusieurs cercles étant décrits d'un même centre, si l'on circonscrit à chacun d'eux un quadrilatère dont les côtés opposés aient pour points de concours deux points fixes, les sommets de tous ces quadrilatères seront sur une focale à nœud dont le nœud sera au centre commun des cercles.

81. La focale étant une courbe du troisième degré qui a un point double, par un point pris au-dehors de cette courbe, on peut lui mener, en général, et au plus, quatre tangentes. Il s'ensuit que sa polaire est une courbe du quatrième degré qui a une tangente double, c'est-à-dire qu'une certaine droite la touche en deux points. Si la transformation polaire est faite par rapport à un cercle auxiliaire ayant son centre au nœud de la focale, la tangente double de la courbe du quatrième degré sera située à l'infini. Cette courbe aura donc deux branches paraboliques. On conclut donc du théorème 79, le suivant :

Les lignes conjointes d'une conique, relatives à plusieurs cercles concentriques, enveloppent une courbe du quatrième degré qui a une tangente double située à l'infini; c'est-à-dire qui a deux branches paraboliques.

Quand la conique est l'ensemble de deux droites, on en conclut la propriété que nous avons énoncée précédemment sans démonstration (art. 56).

§ VIII. *Problèmes divers sur les lignes conjointes, ou qui s'y rapportent.*

82. Problème. *Étant données deux lignes conjointes dans une conique, on demande de déterminer le cercle conjoint.*

Si les deux lignes conjointes rencontrent la conique, elles seront deux cordes de cette courbe; par les milieux de ces cordes on leur mènera des perpendiculaires dont le point de concours sera le centre du cercle cherché. Son rayon sera la distance de ce point à l'une des extrémités des deux cordes.

Si l'une des deux lignes conjointes ne rencontre pas la conique, on considérera que ses deux points d'intersection avec la courbe, et avec le cercle, sont imaginaires, mais que leur milieu est toujours réel; c'est le point où le diamètre de la conique, conjugué à la direction de cette droite, la rencontre. Par ce point on élèvera une perpendiculaire sur cette droite; elle passera par le centre du cercle cherché, qui dès-lors sera déterminé, puisque ce cercle doit passer par les deux points d'intersection réels de l'autre ligne conjointe avec la conique.

Si aucune des deux lignes conjointes ne rencontre la conique, on déterminera, comme nous venons de le dire, les points *milieux* de ces deux droites, et par ces points on leur mènera des perpendiculaires dont le point de concours sera le centre du cercle cherché.

Il reste à déterminer le rayon de ce cercle. Pour cela nous nous servirons d'une propriété de l'involution des six points que nous avons démontrée dans l'*Aperçu historique*, etc., p. 321; et dont voici l'énoncé :

« Quand six points A et A′, B et B′, C et C′ situés en ligne » droite, forment une involution, on a, en appelant α, β, γ » les points milieux des segments AA′, BB′, CC′, l'équation

$$\overline{\alpha A}^2.\beta\gamma - \overline{\beta B}^2.\gamma\alpha + \overline{\gamma C}^2.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha. »$$

Une conique, un cercle et leurs deux lignes conjointes sont rencontrés par une transversale quelconque en six points qui sont en involution. Supposons donc que dans cette équation les points A, A′, appartiennent à la conique, les points B, B′ aux deux lignes conjointes, et les points C, C′ au cercle cherché; les points α, β seront connus; le point γ le sera aussi, parce que ce sera le pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la transversale; l'équation fera donc connaître immédiatement le segment γC et par suite le point C qui appartient au cercle. Si l'on mène la transversale par le centre du cercle, γC sera son rayon.

Supposons que les deux lignes conjointes se confondent en une seule, qui sera perpendiculaire à l'un des axes principaux de la conique. Si cette droite rencontre la conique, la construction du cercle conjoint n'offre point de difficulté. Si la droite ne rencontre pas la conique, on déterminera le centre du cercle de cette manière : on prendra le pôle de la droite par rapport à la courbe, et le point conjugué harmonique de ce pôle par rapport aux deux foyers situés sur l'axe principal; ce point sera le centre du cercle. Cette construction résulte de ce qui a été démontré (32). Quant au rayon du cercle, on le déterminera par la relation d'involution ci-dessus, qui se simplifie, parce que le segment $\mathcal{E}$B est égal à zéro.

Ainsi le problème est résolu dans tous les cas qu'il peut présenter.

83. Problème. *Étant donnés une conique et un cercle, on demande de déterminer leurs lignes conjointes.*

Ce problème est l'inverse du précédent, dont cependant il diffère essentiellement par sa nature; car le premier n'admettait qu'une solution, et devait se résoudre sans difficulté par les seuls principes de la Géométrie élémentaire, c'est-à-dire avec la ligne droite et le cercle. La nouvelle question, au contraire, admet trois solutions, puisqu'il y a en général trois systèmes de deux lignes conjointes; par conséquent elle exige la construction de sections coniques ou d'autres courbes d'un ordre supérieur, et elle n'est pas sans quelque difficulté.

Si le cercle rencontre la conique en quatre points, les trois systèmes de deux lignes conjointes seront déterminés par cela même. Si le cercle rencontre la conique en deux points seulement, la droite qui joindra ces deux points sera l'une des lignes conjointes cherchées; on déterminera l'autre par cette proposition, qu'une transversale quelconque rencontre la conique, le cercle et les deux lignes conjointes, en six points qui forment une involution.

Enfin, supposons que le cercle ne rencontre pas la conique, ce qui est le cas qui offre quelque difficulté et qui exige l'emploi des sections coniques.

Nous déterminerons d'abord le point de concours des deux lignes conjointes.

Pour cela, il suffit de rappeler le théorème 39 d'après lequel, si l'on tire arbitrairement une transversale, et qu'on prenne les polaires de chacun de ses points, par rapport à la conique et au cercle, ces polaires se couperont en un point dont le lieu sera une conique qui passera par le point de concours des deux lignes conjointes.

On décrira ainsi deux coniques, qui feront connaître ce point de concours.

Les deux coniques se couperont en quatre points dont l'un sera étranger à la question; ce sera le point d'intersection des polaires du point où les deux transversales qui ont servi pour décrire les deux coniques, se rencontrent. Les trois autres points d'intersection des deux coniques appartiendront aux trois systèmes de deux lignes conjointes. Dans deux de ces systèmes les lignes conjointes seront imaginaires, mais leur point de concours néanmoins sera réel. De sorte que les trois points d'intersection des deux coniques seront réels. Nous ne savons pas encore quel est celui de ces trois points qui appartient aux deux lignes conjointes réelles.

Prenons pour l'une des deux coniques, l'hyperbole équilatère qui répond au cas où la transversale est située à l'infini. Nous avons vu que cette hyperbole passe par les pieds des perpendiculaires abaissées du centre du cercle sur les deux lignes conjointes (53). Il faudra donc mener une droite, de ce centre à chacun des trois points trouvés, et décrire sur cette droite, comme diamètre, une circonférence de cercle. Celle de ces trois circonférences qui rencontrera l'hyperbole en deux points, autres que les extrémités de son diamètre, déterminera les deux lignes conjointes cherchées; car elles passeront par ces deux points.

Ainsi le problème est résolu.

84. Nous avons vu qu'un cercle peut se réduire à un point et même devenir imaginaire, et que, dans l'un et l'autre cas, il y a toujours deux lignes conjointes (26 et 27). La solution que nous venons de donner pour déterminer ces lignes s'applique d'elle-même à ces deux cas. Il nous faut seulement dire ce que devient alors la polaire d'un point. Quand le cercle a son rayon nul, et se réduit à un point O, la polaire d'un point quelconque m passe par ce point O et est perpendiculaire à la droite menée du point m à ce point O. Quand le cercle est imaginaire, le carré de son rayon est négatif et a une valeur don-

née. La polaire d'un point m est toujours perpendiculaire à la droite menée de ce point au centre du cercle, et la rencontre en un point m', tel que le produit $Om.Om'$ est égal au carré du rayon. Ce produit est donc négatif; ce qui indique que le point m', au lieu d'être situé sur la droite Om, comme dans le cas d'un cercle réel, est situé sur le prolongement de cette droite au-delà du point O.

Ainsi il sera facile de déterminer la polaire d'un point quelconque, et par conséquent de décrire deux coniques qui passeront par les points de concours des lignes conjointes. L'une de ces coniques sera l'hyperbole équilatère, et l'on achèvera la solution comme dans le cas d'un cercle réel.

85. Cette construction des points de concours des lignes conjointes d'une conique relative à un cercle imaginaire, s'applique naturellement à un autre problème qui, au premier abord, peut paraître très différent de celui que nous venons de résoudre, mais qui s'y ramène aisément. Ce problème est celui-ci :

Problème. *Étant donné un cône du second degré, dont on connaît la base et le sommet; on demande de déterminer ses axes principaux.*

Les trois axes principaux du cône forment un système de trois axes conjugués; et un tel système jouit de cette propriété que les points où les trois axes rencontrent la base du cône sont tels que chacun d'eux a pour polaire la droite qui joint les deux autres. Ce qui caractérise les trois axes principaux, c'est que chacun d'eux est perpendiculaire au plan des deux autres. Il faut donc trouver dans le plan de la conique qui sert de base au cône un système de trois points dont chacun soit le pôle de la droite qui joint les deux autres, par rapport à cette conique, et qui soient tels que la droite menée du sommet du cône à chacun de ces points soit perpendiculaire au plan mené par sa polaire.

Du sommet S du cône abaissons la perpendiculaire sur le plan de sa base; soit O son pied, et supposons que ce point soit le centre d'un cercle imaginaire dont le carré du rayon soit égal, avec le signe *moins*, au carré de la perpendiculaire. Si l'on prend la polaire d'un point quelconque m par rapport à ce cercle, elle rencontrera le prolongement de la droite mO en un point m', tel qu'on aura $Om.Om' = \overline{OS}^2$: ce qui prouve que le triangle mSm' est rectangle en S. De sorte que la droite Om est perpendiculaire au plan mené par le sommet du cône et par la polaire du point m prise par rapport au cercle imaginaire. On conclut de là ce théorème :

Si autour d'un point fixe de l'espace, comme sommet, on fait tourner un angle trièdre trirectangle, ses arètes rencontreront un plan fixe en trois points dont chacun sera le pôle de la droite qui joint les deux autres, par rapport à un certain cercle imaginaire.

Le centre de ce cercle sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe sur le plan, et le carré de son rayon sera égal au carré de cette perpendiculaire pris avec le signe *moins*.

D'après cela, la solution du problème proposé se réduira à la recherche des points de concours des lignes conjointes relatives à ce cercle imaginaire et à la conique qui est la base du cône ; et nous avons appris dans la question précédente à construire ces points de concours par les intersections de deux coniques dont une peut être une hyperbole équilatère.

Ainsi le problème est résolu.

J'ai déjà donné deux solutions générales de ce problème, très différentes de celle qui précède. (Voir *Aperçu historique*, etc., page 82.) J'aurai encore occasion ailleurs d'en donner d'autres.

86. Problème. *Un point étant pris arbitrairement dans le plan d'une conique, on demande de mener les normales à cette courbe, qui passent par ce point.*

Nous avons déjà résolu ce problème d'une manière générale, au moyen d'une parabole (75) ; mais dans la pratique on se servira de l'hyperbole équilatère dont nous avons donné plusieurs constructions différentes (46, 49 et 52), et dont les points d'intersection avec la conique proposée sont les pieds des normales cherchées.

Le problème admet, en général, quatre solutions. Deux pourront être imaginaires; mais les deux autres seront toujours réelles. Car si la conique proposée est une ellipse, comme l'hyperbole passe par son centre, elle rencontrera nécessairement l'ellipse, au moins en deux points ; et si la conique est une hyperbole, comme les asymptotes de l'hyperbole équilatère sont parallèles aux axes principaux de cette hyperbole, celle-ci rencontrera l'une au moins de ces asymptotes, celle qui est parallèle à son axe transverse, et par conséquent elle rencontrera la branche de l'hyperbole équilatère, correspondante à cette asymptote.

Si la conique proposée est une parabole, l'un de ses points d'intersection avec l'hyperbole équilatère sera situé à l'infini, puisqu'une asymptote de l'hyperbole est parallèle à l'axe de la parabole (46). Dans ce cas le problème n'admet plus que trois solutions dont deux peuvent être imaginaires.

C'est cette hyperbole équilatère dont Apollonius s'est servi pour résoudre le même problème dans les propositions 58,... 63 du cinquième livre de ses *Coniques*, qui traite, comme on sait, des *maxima* et *minima*, spéculations difficiles pour le temps et qui étaient entièrement dues au génie d'Apollonius. Viviani, qui, avant qu'on eût retrouvé ce cinquième livre, l'avait rétabli sur les faibles indications laissées par Pappus dans le septième livre de ses *Collections mathématiques*, a aussi traité le problème en question, et s'est servi de la même hyperbole équilatère pour le résoudre. (Voir *De maximis et minimis Geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii adhuc desideratum*, in-fol., Florentiæ, 1659; propositions 20, 22 et 23 du second livre) (*).

(*) Dans le cas particulier de la parabole, Viviani démontre ce théorème : *Quand plusieurs paraboles ont le même sommet et le même axe, les pieds des perpendiculaires abaissées sur ces courbes d'un point de leur axe, sont sur une ellipse.* (Liv. II, propos. 21.) Cette propriété des paraboles a encore lieu quand le point par lequel on leur mène des normales est pris en dehors de leur axe. Cette remarque est due à Sluze. (*Voir* chap. VI de ses *Miscellanea*, in-4°, 1668.) L'ellipse, lieu des pieds des normales aux paraboles, passe par le sommet de ces courbes et a l'un de ses axes principaux perpendiculaire à leur axe commun. Il suit de là, par notre proposition (16), que *les pieds des trois normales abaissées d'un même point sur une parabole, et le sommet de cette courbe, sont quatre points situés sur un même cercle.* Sluze a déterminé par l'analyse l'équation de ce cercle.

Ce géomètre fut l'un des premiers et des plus célèbres promoteurs de l'*analyse*

Pour construire l'hyperbole, Apollonius et Viviani déterminent ses asymptotes; ce qui suffit, puisqu'elle doit passer par le point par lequel on veut mener les normales à la conique proposée.

Cette solution a été reproduite par de la Hire, dans son grand *Traité des Coniques* (livre 7, propositions 18,...23), et ensuite par plusieurs autres auteurs. Notre construction de l'hyperbole par points, qui résulte du théorème 52, offre une solution plus facile et plus expéditive que celle-là. Du point donné, comme centre, on décrira plusieurs cercles, et l'on prendra les milieux des cordes qu'ils soutendront dans la conique; ces points appartiendront à l'hyperbole.

Si l'on voulait déterminer directement et *à priori* le centre de l'hyperbole, on le ferait par la seconde partie du théorème 53.

87. Cette solution s'applique au problème suivant, qui est plus général, et qu'on aurait pu regarder comme plus difficile :

Problème. *D'un point donné, on demande d'abaisser sur une conique des obliques dont chacune fasse avec la courbe, au point d'incidence, un angle de grandeur donnée.*

Du point donné, comme centre, on décrira des cercles, et l'on abaissera sur les cordes qu'ils intercepteront dans la conique, des obliques faisant avec elles des angles égaux à l'angle donné. Les pieds de ces obliques seront sur une hyperbole équilatère, dont les points d'intersection avec la conique seront les pieds des obliques demandées. Cela résulte du théorème 57.

88. On peut encore construire l'hyperbole de cette manière, qui correspond au théorème 46.

Du point donné, on abaissera sur chaque tangente à la conique une oblique faisant avec elle, dans un sens déterminé, l'angle donné. Cette oblique rencontrera en un point le diamètre de la conique qui aboutit au point de contact de la tangente; ce point se trouvera sur l'hyperbole équilatère en question, dont les points d'intersection avec la conique seront les pieds des obliques cherchées.

---

appliquée à la Géométrie que venait de créer Descartes. Il excellait aussi dans cette autre partie de la Géométrie, cultivée dans le même temps par Pascal à la manière des Anciens, et qui traite des dimensions des figures.

En effet, supposons que la conique proposée ait un centre, il faudra abaisser du point donné une oblique sur chaque diamètre D de cette courbe et prendre le point de rencontre de cette oblique avec le diamètre conjugué Δ. Les obliques abaissées sur deux diamètres D, D′ font avec eux, respectivement, des angles égaux à l'angle donné; conséquemment elles font entre elles un angle égal à celui des deux diamètres. Donc le rapport *anharmonique* de quatre obliques est égal à celui des quatre diamètres correspondants D, D′, etc.; or celui-ci est égal à celui des quatre diamètres Δ, Δ', etc., conjugués à ceux-là; donc le rapport anharmonique des quatre obliques est égal à celui des quatre diamètres Δ, Δ', etc.; donc ces obliques rencontrent ces diamètres respectivement, en quatre points situés sur une conique qui passe par le point de concours de ces diamètres et par celui des obliques (*Aperçu historique*, etc., p. 335). On reconnaît aisément que cette conique passera par les pieds des obliques abaissées sur la conique proposée. Ce qui démontre la proposition.

§ IX. *Sur les cônes conjoints dans les surfaces du second degré.*

89. Aux *lignes conjointes* dans les coniques, correspondent dans la Géométrie à trois dimensions, les cônes qui passent par la courbe à double courbure provenant de l'intersection d'une surface du second degré par une sphère. La considération de ces cônes peut donner lieu à de nombreux théorèmes analogues à ceux qui se présentent dans la théorie des lignes conjointes.

Pour abréviation, on peut appeler ces cônes, *cônes conjoints* relatifs aux sphères auxquelles ils correspondent.

M. Terquem, dans son intéressant article sur les *lignes conjointes* des coniques, avait annoncé que les mêmes considérations avaient lieu dans les surfaces du second degré. En effet, ce savant géomètre, dans un des derniers numéros de ce *Journal* (tome III, p. 100), a fait connaître déjà quelques résultats curieux de cette théorie qui l'a conduit particulièrement à une construction élégante des deux centres de courbure d'une surface du second degré, en chacun de ses points.

M. Terquem définit les cônes en question par cette condition que : *le produit des segments compris sur chaque arète d'un cône, entre la surface du second degré et le sommet du cône, doit être constant.* En effet le cône déterminé par cette condition rencontre la surface du second degré suivant une courbe à double courbure par laquelle on peut faire passer une sphère.

Je me propose de traiter, dans un autre écrit, des propriétés générales de ces cônes. Je vais me borner ici à en énoncer quelques-unes qui feront voir que la matière est féconde, et qui pourront engager quelques lecteurs à s'en occuper.

90. *Un cône conjoint relatif à une surface du second degré quelconque, a toujours ses axes principaux parallèles à ceux de la surface, et les plans de ses sections circulaires parallèles aussi à ceux de la surface.*

Cette propriété admet un grand nombre de corollaires ; car elle fait voir qu'une série de cônes conjoints qui ont un sommet commun jouissent de toutes les propriétés que nous avons trouvées relativement aux *plans cycliques* des cônes du second degré (*). Nous ne les rapporterons pas ici ; nous nous bornerons à énoncer seulement le théorème suivant, qui peut servir comme moyen de description des cônes conjoints :

La somme des angles que chaque plan tangent à un même cône conjoint, fait avec les plans des sections circulaires de la surface du second degré, est constante.

91. Chacun de ces plans tangents coupe la surface suivant une conique dont un des axes principaux est parallèle à l'arète de contact de ce plan tangent.

Il suit de là que le plan tangent commun à deux cônes conjoints qui ont le même sommet, les touche suivant deux arètes qui font entre elles un angle droit.

(*) Voir *Mémoire de Géométrie sur les propriétés générales des cônes du second degré*, in-4°, Bachelier. — *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. VI.

92. Deux cônes conjoints quelconques ont leur courbe d'intersection située sur une sphère qui passe par le cercle d'intersection des deux sphères relatives à ces cônes.

93. Il y a, en général, quatre cônes conjoints répondant à une même sphère; il ne peut y en avoir plus de quatre; mais ils peuvent être imaginaires.

94. Les sommets de ces quatre cônes, le centre de la sphère et le centre de la surface du second degré sont six points qui suffisent pour déterminer une courbe à double courbure du troisième ordre, c'est-à-dire qui n'est rencontrée par un plan transversal quelconque qu'en trois points.

95. Cette courbe rencontre la surface du second degré en six points qui sont les pieds des normales abaissées du centre de la sphère sur cette surface.

96. Il suit de là que, d'un point de l'espace on ne peut abaisser que six normales sur une surface du second degré; et que ces six droites sont les arètes d'un même cône du second degré.

97. Les droites menées par le point fixe parallèlement aux axes principaux de la surface; la droite qui aboutit au centre de cette surface, et les trois axes principaux du cône qui lui est circonscrit et qui a pour sommet le point fixe, sont sept autres génératrices du même cône du second degré.

98. Ce cône passe par les sommets des cônes conjoints relatifs à la surface du second degré et à une sphère d'un rayon quelconque, et ayant pour centre le point d'où l'on a abaissé les normales.

99. Quand plusieurs surfaces du second degré sont homothétiques et concentriques, si par un point fixe quelconque on leur mène des normales, toutes ces droites formeront un cône du second degré, et leurs pieds sur les surfaces seront sur une courbe à double courbure du troisième ordre.

Les axes principaux des cônes circonscrits aux surfaces et ayant pour sommet commun le point fixe, seront des arètes du même cône du second degré.

100. Quand plusieurs surfaces du second degré sont concentriques, si des différents points d'une ligne droite prise arbitrairement dans l'espace, on abaisse des normales sur ces surfaces, leurs pieds seront sur une hyperboloïde à une nappe.

101. Quand par la courbe d'intersection d'une surface du second degré et d'une sphère on fait passer une infinité d'autres surfaces du second degré, les normales abaissées du centre de la sphère sur ces surfaces, formeront un cône du second degré, et leurs pieds sur les surfaces seront sur une courbe à double courbure du troisième ordre;

Cette courbe sera aussi le lieu des centres de toutes les surfaces.

Note sur l'intégration d'une équation aux différentielles partielles qui se présente dans la théorie du son;

PAR J. LIOUVILLE (*).

Dans les nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences (année 1818), M. Poisson a donné l'intégrale de l'équation

$$(a) \qquad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right).$$

En désignant par $F(x, y, z)$, $a^2\psi(x, y, z)$ les valeurs de λ et $\frac{d\lambda}{dt}$ pour $t=0$, il a trouvé

$$(b) \qquad \lambda = \frac{a^2}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \psi(x+at\cos\theta, y+at\sin\theta\sin\omega, z+at\sin\theta\cos\omega)t\sin\theta\, d\theta d\omega$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F(x+at\cos\theta, y+at\sin\theta\sin\omega, z+at\sin\theta\cos\omega)t\sin\theta\, d\theta\, d\omega.$$

Les deux méthodes qui le conduisent à ce résultat sont assez simples, surtout la seconde; d'ailleurs, il montre que l'on peut aisément en vérifier *à posteriori* l'exactitude.

Mais, dans un autre Mémoire *sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques* (**), l'illustre géomètre considère, au lieu de l'équation (a), l'équation suivante:

$$(c) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \psi(x, y, z)\right],$$

(*) Cette Note a déjà paru dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences* (séance du 23 juillet 1838).

(**) *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome X.

à laquelle on doit joindre les conditions définies que voici :

$$\varphi = 0,\ \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z) \text{ pour } t = 0,$$

$\psi(x, y, z)$, $\mathrm{F}(x, y, z)$ étant deux fonctions connues de x, y, z. Et le procédé qu'il emploie pour ramener l'intégration de l'équation (c) à celle de l'équation a, ou plutôt pour simplifier l'intégrale de l'équation (c), exige d'assez longs calculs. Or, on peut éviter ces calculs en adoptant la marche que je vais indiquer.

Je différencie l'équation (c) par rapport à t, et je pose $\frac{d\varphi}{dt} = \lambda$; je trouve ainsi que λ doit satisfaire précisément à l'équation (a); de plus pour $t = 0$, il vient

$$\lambda = \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z),$$

puis

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \psi(x, y, z)\right],$$

ou simplement

$$\frac{d\lambda}{dt} = a^2\psi(x, y, z),$$

puisque φ s'évanouit en même temps que t. La valeur de λ ou $\frac{d\varphi}{dt}$ est donc celle écrite ci-dessus et fournie par la formule (b); pour en déduire φ il suffit d'intégrer à partir de $t = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x + \varrho\cos\theta,\ y + \varrho\sin\theta\sin\omega, z + \varrho\sin\theta\cos\omega)\,\varrho\sin\theta\, d\varrho\, d\theta\, d\omega.\end{aligned}$$

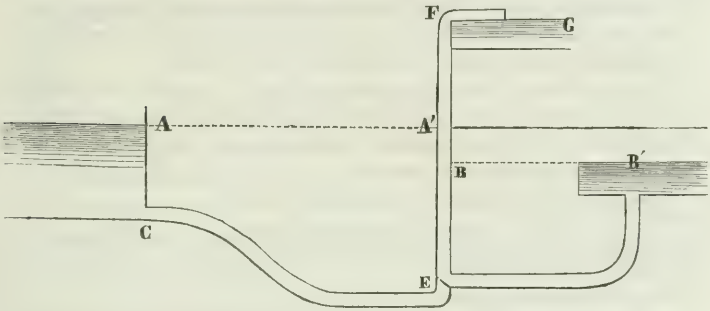
C'est la formule de M. Poisson, telle qu'on la lit au n° 5 de son Mémoire.

Calcul des effets de la Machine à élever de l'eau, au moyen des oscillations, de l'invention de M. de Caligny;

Par G. CORIOLIS (*).

Voici sommairement en quoi consiste la machine de M. de Caligny:

L'eau d'une source ou réservoir en A communique avec un tuyau CE et se trouve d'abord arrêtée en E par un clapet fermé. On ouvre ce clapet et l'eau monte de E en F. Arrivé à ce dernier point, à une



(*) Le Mémoire de M. de Caligny a été l'objet d'un rapport de M. Coriolis que l'on trouvera dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences* (20 août 1838). L'auteur lui-même s'était occupé du calcul des effets que sa machine peut produire. A l'aide de considérations purement géométriques, il a obtenu des résultats semblables à ceux que M. Coriolis déduit aujourd'hui de l'analyse. La Note que M. de Caligny nous a remise et que nous imprimons dans ce cahier fera suffisamment connaître l'esprit de la méthode qu'il a suivie dans son Mémoire.

J. L.

hauteur A′F moindre que A′E, le liquide se verse pendant un certain temps dans un bassin G tant qu'il continue à avoir une vitesse ascensionnelle. Quand cette vitesse est devenue nulle et que l'orifice F cesse de verser de l'eau, le clapet en E referme l'issue de communication avec le tuyau EC et ouvre celle qui établit la communication de la colonne EF avec le tuyau EB′. Alors la colonne EF redescend et fait une oscillation pendant laquelle le tuyau EB′ verse dans un bassin ou bief B′ dont le niveau est inférieur au niveau AA′ du bief supérieur.

La hauteur du point F est prise de telle sorte que BF soit un peu plus grand que BE; le petit excès est seulement destiné à compenser le frottement et la perte de force vive de sortie en B′ qui empêcherait l'oscillation descendante de la colonne EF d'abaisser l'eau du tuyau vertical jusqu'en E. Les choses étant ainsi disposées; après le versement en F, l'eau ayant perdu sa vitesse dans la colonne EF, le clapet E ferme l'issue avec le tuyau EC, la colonne EF doit descendre jusqu'en E et verser dans le bassin B′ un volume qui lui est égal. Le même jeu recommence quand le clapet E ferme de nouveau la communication avec le tuyau EB′, et l'ouvre entre les tuyaux CE et EF.

Le jeu du clapet qui est fortement aidé par le mouvement même de l'eau, pourrait être assuré par une queue portant un vase qui se remplirait et se viderait alternativement et qui prendrait ainsi un mouvement alternatif de bascule.

Nous poserons les notations suivantes :

l, longueur du tuyau CE depuis le bassin supérieur jusqu'au point E, où l'on veut élever l'eau;

H, la chute A′B entre les deux bassins;

$\varkappa$, la hauteur A′F à laquelle le tuyau ascensionnel verse l'eau au-dessus du niveau AA′ du bassin supérieur;

h, la profondeur A′E à laquelle se trouve le tuyau de conduite, c'est-à-dire le pied du tuyau ascensionnel EF au-dessous du niveau AA′ de l'eau dans le bassin supérieur.

Examinons quelles relations il y aurait entre les hauteurs h, H et $\varkappa$ suivant qu'on voudra élever une quantité plus ou moins grande d'eau au point F; et cela en négligeant d'abord les frottements dans les tuyaux.

Nous supposerons que l'eau est reçue en F dans un réservoir où elle arrive par un petit coude horizontal situé à fleur d'eau de ce réservoir, le tuyau horizontal étant assez long pour contenir à chaque oscillation l'eau qu'elle peut y amener. De telle sorte que la vitesse dans ce bout du tuyau soit la même que dans le tuyau vertical qui le précède.

Nous désignerons par x_1 la longueur de la colonne horizontale du fluide qui est amené dans le tube horizontal et qui passe ainsi par le coude en F.

Nous aurons, par le principe de la transmission de travail ou quantité d'action

$$x_1\eta + \frac{\eta^2}{2} = \frac{h^2}{2}, \quad \text{ou} \quad 2x_1\eta = (h + \eta)(h - \eta).$$

Si m désigne le rapport entre l'eau élevée et l'eau qui doit se rendre dans le bassin inférieur, on aura

$$\frac{x_1}{h + \eta} = m.$$

En éliminant x_1 entre cette équation et la précédente, on trouve

$$2m\eta = h - \eta,$$

ou

$$h = \eta(1 + 2m).$$

Tel est le rapport entre la hauteur η où l'eau est élevée par la machine et la hauteur h de l'oscillation.

En négligeant toujours les frottements, on pourra faire écouler la colonne EF dont la hauteur est $h+\eta$, en la faisant arriver à la superficie d'un bassin inférieur dont le niveau sera à une hauteur $\frac{h + \eta}{2}$ au-dessus du point E. Ainsi H étant la différence de niveau entre les superficies dans les deux bassins, on aura

$$h - \mathrm{H} = \frac{h + \eta}{2}$$

ou

$$h = 2\mathrm{H} + \eta.$$

En combinant cette équation avec la précédente, il vient

$$\eta = \frac{\mathrm{H}}{m}$$

et
$$h = \left(2 + \frac{1}{m}\right) H.$$

Telles sont les formules qui donnent les relations entre la hauteur H de la chute, la profondeur h d'où il faut faire partir l'oscillation, et la hauteur n à laquelle on élève l'eau au-dessus du niveau du bassin supérieur.

Si l'on prend $m = 1$, on a

$$n = \mathrm{H}, \quad \text{et} \quad h = 3\mathrm{H}.$$

Si l'on prend $m = \frac{1}{2}$, on a

$$n = 2\mathrm{H} \quad \text{et} \quad h = 4\mathrm{H}.$$

En général, plus m sera petit, c'est-à-dire moins on voudra élever d'eau comparativement à celle qui se rend dans le bassin inférieur, plus on l'élèvera haut et plus il faudra que la profondeur h du tuyau de conduite au-dessous de la source supérieure devienne considérable.

Tels sont les calculs à faire sur cette machine quand on néglige les frottements et qu'on suppose que les diamètres de tous les tuyaux sont les mêmes.

Si l'on suppose, toujours dans l'hypothèse où l'on néglige les frottements, que le tuyau d'ascension, à partir du niveau du bassin supérieur, c'est-à-dire après la hauteur h et dans la hauteur égale à n, n'ait qu'un rayon r, tandis que celui qui sert de conduite de C en E et de E en A′ ait un rayon R; en admettant un raccordement qui empêche la perte de force vive au passage d'un diamètre $2\mathrm{R}$ au diamètre $2r$, on fera les calculs suivants.

La force vive de la colonne fluide au moment où elle atteint le coude en F, est

$$\frac{\pi}{2}(\mathrm{R}^2 h^2 - r^2 n^2).$$

Si V est le volume versé, c'est-à-dire amené dans le tuyau horizontal adapté au coude en F, il viendra

$$\mathrm{V}n = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{R}^2 h^2 - r^2 n^2\right).$$

Si V′ est le volume qui se verse ensuite dans le bassin inférieur, on a

$$V' = \pi(R^2h + r^2\eta).$$

Donnerons-nous, comme précédemment, le rapport m de ces volumes; nous trouverons

$$\frac{V}{V'} = m = \frac{\frac{R^2}{r^2}h^2 - \eta^2}{2\left(\frac{R^2}{r^2}h\eta + \eta^2\right)},$$

ou bien

$$\frac{\eta^2}{h^2} + \frac{2m}{1+2m}\frac{R^2}{r^2}\frac{\eta}{h} = \frac{1}{1+2m}\cdot\frac{R^2}{r^2};$$

de là on tire

$$\frac{\eta}{h} = \frac{R}{r}\left[\frac{\sqrt{\left(1+2m+m^2\frac{R^2}{r^2}\right)} - m\frac{R}{r}}{1+2m}\right].$$

Pour obtenir la relation avec la hauteur H de la chute, on posera la condition que le niveau du bassin inférieur soit à la hauteur du centre de gravité de la colonne d'eau comprise entre E et F dont la hauteur est $h+\eta$; ce qui donnera, en égalant les moments en-dessus et en-dessous du niveau BB′,

$$\frac{R^2(h-H)^2}{2} = \frac{R^2H^2}{2} + r^2\left(H + \frac{\eta}{2}\right)\eta,$$

ou bien

$$\eta^2 + 2\eta H = \frac{R^2}{r^2}(h^2 - 2hH).$$

En posant pour abréger

$$K = \frac{R}{r}\left[\frac{\left(1+2m+m^2\frac{R^2}{r^2}\right) - m\frac{R}{r}}{1+2m}\right],$$

on a

$$\eta = Kh.$$

Mettant cette valeur dans l'équation précédente, elle donne

$$h = \frac{\left(\frac{R^2}{r^2} + K\right)}{\frac{R^2}{r} - K^2}2H,$$

et

$$n = \mathrm{K} \frac{\left(\frac{\mathrm{R}^2}{r^2} + \mathrm{K}\right)}{\left(\frac{\mathrm{R}^2}{r^4} - \mathrm{K}^2\right)} 2\mathrm{H}.$$

Ces valeurs, quand on fait $\mathrm{R} = r$, reviennent à celles qu'on avait trouvées précédemment.

Pour discuter la marche de K et de h et n avec le rapport $\frac{\mathrm{R}^2}{r^2}$, désignons celui-ci par x et K par y. Nous aurons entre les coordonnées x et y la relation

$$y^2 + \frac{2m}{1 + 2m} xy = \frac{1}{1 + 2m} x.$$

Cette équation appartient à une hyperbole passant par l'origine, et dont le centre a pour abscisse

$$-\frac{1}{2m}\left(\frac{1 + 2m}{m}\right),$$

et pour ordonnée

$$\frac{1}{2m}.$$

Elle a pour asymptote une parallèle à l'axe des x et une droite inclinée vers les x négatifs, d'un angle dont la tangente est $\frac{(1 + 2m)}{2m^2}$. La quantité y ou K croît donc assez peu avec $\frac{\mathrm{R}^2}{r^2}$. Elle ne varie, quand on rétrécit le tuyau depuis $\frac{\mathrm{R}^2}{r^2} = 1$ jusqu'à $\frac{\mathrm{R}^2}{r^2} = \frac{1}{0}$, que de

$$\mathrm{K} = \frac{1}{1 + 2m}$$

à

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2m}.$$

Ainsi h et n croissent toujours avec H et avec $\frac{\mathrm{R}^2}{r^2}$ pour une même valeur de m.

En laissant h, η et H les mêmes, le rapport m qui est donné par

$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{R^2}{r^2}h^2 - \eta^2}{\frac{R^2}{r^2}h\eta + \eta^2}\right),$$

deviendra plus grand quand r deviendra plus petit; ainsi, comme on devait s'y attendre, on versera plus d'eau dans une même machine lorsque r sera plus petit.

Occupons-nous maintenant de la durée des oscillations, en restant toujours dans l'hypothèse où l'on néglige les frottements.

En désignant par l la longueur du tuyau de C en E, et par x la hauteur variable en-dessus du point E, où est la tête de la colonne liquide à un instant quelconque, l'équation du mouvement, depuis l'instant où l'eau commence à s'élever en E jusqu'à l'instant où elle commence à verser en F, est évidemment

$$(l + x)\frac{v^2}{2g} = x\left(h - \frac{x}{2}\right),$$

en négligeant toutefois la force vive de l'eau contenue dans le bassin supérieur. De là on tire

$$t = \int_0^{h+\eta} \frac{\sqrt{l+x}\,dx}{\sqrt{gx(2h-x)}}.$$

Comme on peut négliger $h - x$ devant $l + h$ sans grande erreur, on a pour le temps qu'emploie l'eau à passer de E en F,

$$t = \sqrt{\frac{l+h}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\eta}{h}\right)\right].$$

Pour la seconde partie du mouvement, lorsque l'eau sort par l'orifice F et qu'elle coule comme nous l'avons supposé dans un tuyau horizontal, faisant suite à un coude placé en E; on aura pour l'équation du mouvement, en désignant par x la longueur du prisme d'eau qui est sortie à un instant quelconque du coude F, et par x_1 la longueur du prisme total,

$$(l + h + \eta + x)\frac{v^2}{2g} = \frac{h^2}{2} - \frac{\eta^2}{2} - \eta x,$$

d'où

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{l + h + \eta + x}\, dx}{\sqrt{(h^2 - \eta^2 - 2\eta x)}}.$$

En négligeant encore ici x devant $l+h+\eta$, on aura pour le temps t' de l'écoulement

$$t' = \frac{\sqrt{l + h + \eta}}{g}\left(\frac{\sqrt{h^2 - \eta^2} - \sqrt{h^2 - \eta^2 - 2\eta x_1}}{\eta}\right).$$

Enfin, si l'on veut le temps de l'écoulement de la colonne EF pour qu'elle se rende dans le bassin inférieur, on l'obtiendra par une formule tout analogue à celle qui a donné la durée de l'oscillation de E en F. On aura pour cette troisième durée t'' ou période de mouvement de la machine

$$t'' = \pi \sqrt{\frac{l'' + \frac{h + \eta}{2}}{g}},$$

où l'' désigne la longueur du tuyau de décharge depuis le point E jusqu'à son entrée dans le bassin inférieur.

Ainsi, pendant une durée égale à $t + t' + t''$, la machine, si l'on négligeait les frottements, aurait élevé un volume d'eau égal à

$$\pi R^2 \frac{(h^2 - \eta^2)}{2\eta}.$$

Cette expression ne peut être regardée comme une valeur approchée, lorsqu'on considère les frottements, parce qu'ils ont une influence sensible sur le volume versé dans le cas où ce volume est petit.

Nous allons maintenant revenir sur la considération des frottements pour calculer les effets de la machine. En conservant les notations précédentes, nous y ajouterons les suivantes: nous désignerons par

x la hauteur verticale à laquelle se trouve la tête de la colonne oscillante, dans le tube vertical au-dessus du niveau du bassin supérieur, en sorte que x croîtrait de $-h$ à $+h$ s'il n'y avait pas de frottement;

R le rayon du tuyau et du tube vertical qui a la même section que ce tuyau;

v la vitesse de la colonne à un instant quelconque;

g la gravité;

β un coefficient tel que le frottement dans un tuyau d'une longueur l et d'un rayon R, soit représenté par $2\pi R l \beta \frac{v^2}{g}$.

Nous admettrons avec M. de Caligny, que l'on puisse négliger le terme des frottements qui est proportionnel à la vitesse, son coefficient étant comme on sait très petit, par rapport à celui qui affecte le carré de cette vitesse.

On pourra négliger la force vive de l'eau dans le bassin supérieur, qui a ordinairement une grande capacité; dès-lors l'équation des forces vives donnera

$$\pi R^2 (l + h + x) \frac{v^2}{2g} = \pi R^2 \left(\frac{h^2 - x^2}{2}\right) - 4\pi\beta R \int (l + h + x) \frac{v^2}{2g}\, dx.$$

Si l'on pose pour abréger

$$(l + h + x) \frac{v^2}{2g} = y,$$

on aura en différentiant l'équation ci-dessus,

$$dy = -\, xdx - \frac{4\beta}{R} ydx,$$

ou, en posant pour abréger $\frac{4\beta}{R} = \alpha$,

$$dy + \alpha ydx = -\, xdx.$$

L'intégrale de cette équation est

$$ye^{\alpha x} = -\int e^{\alpha x} xdx + c,$$

c désignant la constante arbitraire.

Intégrant par partie, on trouve

$$ye^{\alpha x} = -\frac{e^{\alpha x} x}{\alpha} + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + c.$$

On déterminera la constante par la condition que $y=0$ pour $x=-h$; on aura ainsi

$$ye^{\alpha x} = \frac{-e^{\alpha x}x - e^{-\alpha h}h}{\alpha} + \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha h}}{\alpha^2},$$

ou bien

$$y = \frac{-\alpha x + 1 - e^{-\alpha(h+x)}(\alpha h + 1)}{\alpha^2}.$$

Cette valeur redonne, comme cela doit être,

$$y = \frac{h^2 - x^2}{2},$$

quand on y fait $\alpha = 0$.

Si l'on veut la force vive à l'instant où la colonne est arrivée au haut du tube, on fera $x = \eta$ dans la valeur de y, et l'on aura, en la désignant par y_0,

$$y_0 = (l + h + \eta)\frac{v_0^2}{2g} = \frac{-\alpha\eta + 1 - (1 + \alpha h)e^{-\alpha(h+\eta)}}{\alpha^2}.$$

Pour avoir la perte par frottement dans le mouvement, jusqu'au moment où la colonne ascendante arrive à l'orifice, on devra calculer l'intégrale

$$\alpha\pi R^2 \int y\,dx,$$

en la prenant de

$$x = -h \quad \text{à} \quad x = \eta.$$

Cette expression s'obtient simplement en remarquant que l'on a par l'équation même du mouvement,

$$\alpha\pi R^2 \int y\,dx = \pi R^2 \left[\frac{(h^2 - x^2)}{2} - y\right]:$$

ainsi la perte deviendra

$$\pi R^2 \left[\frac{(h^2 - \eta^2)}{2} - y_0\right].$$

Si l'on veut seulement calculer à quelle hauteur la colonne peut s'élever sous l'influence des frottements, il faut prendre la valeur de x qui correspond à $y = 0$.

En posant pour cette valeur de x, $h - x = x'$, on déterminera x' ou la perte de hauteur d'oscillation qui est due au frottement, par l'équation

$$-\alpha(h - x') + 1 - (1 + \alpha h) e^{-\alpha(2h - x')} = 0,$$

ou bien

$$\alpha x' + 1 - \alpha h = \frac{(1 + \alpha h) e^{\alpha x'}}{e^{2\alpha h}}.$$

Cette équation ne peut se résoudre que par approximation; on sait qu'elle n'a que deux racines réelles qui peuvent se construire par l'intersection d'une droite et d'une courbe exponentielle. La racine qui répond à la question est celle qui devient zéro pour $\alpha = 0$.

Ayant une fois la valeur de x' on trouvera facilement la perte par les frottements dans une oscillation entière; il suffira dans l'expression précédente de la perte, de remplacer y_0 par zéro et x par $h - x'$: elle sera donc

$$\pi R^2 x' \left(h - \frac{x}{2}\right).$$

Pour avoir x' par approximation, on remplacera $e^{\alpha x'}$ par $1 + \alpha x'$, et l'on aura alors pour une valeur approchée un peu plus petite que la valeur exacte,

$$x' = \frac{(1 + \alpha h) e^{-2\alpha h} + \alpha h - 1}{\alpha\left[1 - (1 + \alpha h) e^{-2\alpha h}\right]}.$$

Si l'on voulait une valeur plus exacte, on remplacerait $e^{\alpha x'}$ par $1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x'^2}{2}$, et il viendrait, en posant pour abréger

$$H = (1 + \alpha h) e^{-2\alpha h},$$

$$\alpha x' + 1 - \alpha h = H\left(1 + \alpha x' + \frac{\alpha^2 x'^2}{2}\right),$$

$$x'^2 - \frac{2x'}{\alpha}\left(\frac{1 - H}{H}\right) = \frac{-2(H + \alpha h - 1)}{\alpha^2 H}.$$

Si l'on néglige x'^2, on a seulement, comme ci-dessus,

$$x' = \frac{H + \alpha h - 1}{\alpha(1 - H)},$$

et en ne négligeant pas x'^2, on a

$$x' = \frac{1 - H - \sqrt{(1 - H^2 - 2\alpha h H)}}{\alpha H}.$$

Dans le cas où αh est une quantité petite devant l'unité, on pourra simplifier beaucoup le calcul de x'. Pour cela on développera par rapport aux puissances de α la valeur de x' trouvée ci-dessus en négligeant x'^2; on a ainsi

$$H = e^{-2\alpha h}(1 + \alpha h) = (1 + \alpha h)\left(1 - 2\alpha h + \frac{4\alpha^2 h^2}{2} - \frac{8\alpha^3 h^3}{2.3} + \frac{16\alpha^4 h^4}{2.3.4}\right).$$

Substituant dans x', on trouve

$$x' = \frac{\frac{2}{3}\alpha^3 h^3 - \frac{2}{3}\alpha^4 h^4 + \frac{4}{15}\alpha^5 h^5 - \text{etc.}}{\alpha^2 h - \frac{2}{3}\alpha^4 h^3 + \frac{2}{3}\alpha^5 h^4 - \text{etc.}},$$

ou bien

$$x' = \frac{2}{3}\alpha h\left(\frac{1 - \alpha h + \frac{2}{5}\alpha^2 h^2 - \text{etc.}}{1 - \frac{2}{3}\alpha^2 h^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 h^3 - \text{etc.}}\right).$$

En négligeant αh devant l'unité, on a donc

$$\frac{x'}{h} = \frac{2}{3}\alpha h.$$

La formule d'où cette valeur de x' est déduite, est déjà approximative et donne une expression trop petite. Comme celle-ci comporte une seconde erreur en sens contraire, il s'ensuit que la valeur précédente doit être très approchée; néanmoins elle reste toujours un peu trop grande, parce que la différence en moins résultant de la première formule qui donne x', est moins considérable que celle de cette dernière formule où nous négligeons αh devant l'unité : dans la première formule nous n'avions négligé que $\frac{\alpha^2 x'^2}{2}$.

Pour obtenir α, rappelons-nous qu'on a

$$\alpha = \frac{4\beta}{R},$$

et que β est un coefficient tel que la résistance d'un tuyau d'une longueur l et d'un rayon R est exprimée par

$$\beta . 2\pi R l \frac{v^2}{g};$$

on aura donc, en partant de la valeur numérique de β prise par M. de Prony,

$$\beta = 0,0034162.$$

Si l'on introduit le diamètre $D = 2R$ pour comparer notre résultat avec une formule de M. de Caligny, on aura

$$\alpha = \frac{0,027328}{D},$$

ainsi tant que αh ou

$$0,027328 \frac{h}{D},$$

sera petit devant l'unité, on pourra prendre

$$\frac{x'}{h} = \frac{2}{3}\alpha h = 0,0182 \frac{h}{D} = \frac{1}{51} \frac{h}{D}.$$

Cette valeur de x' sera un peu grande, puisque nous avons négligé le terme négatif $-\alpha h$ qui détermine le signe du reste de la série.

Cette valeur de x' diffère peu de celle que M. de Caligny a donnée, car sa formule est

$$\frac{h - x'}{h} = \frac{1}{1 + \frac{1}{60} \frac{h}{D}},$$

ce qui revient à très peu près à poser

$$\frac{x'}{h} = \frac{1}{60}\frac{h}{D}.$$

Comme notre valeur de x' est un peu trop grande, il n'est pas étonnant que M. de Caligny ait trouvé par expérience $\frac{1}{60}$ au lieu de $\frac{1}{51}$, que nous a donné le calcul pour le coefficient constant de $\frac{h}{D}$.

Revenons maintenant à la recherche du mouvement pendant le versement de l'eau par l'orifice supérieur. Nous supposerons que le liquide arrivé à la bouche de sortie en F reste dans un tube sensiblement horizontal, d'où une très légère pente peut le faire sortir une fois que l'oscillation ascendante est terminée : cette manière de considérer le mouvement diffère très peu de celle qu'il faudrait prendre, c'est-à-dire de celle où l'on supposerait que l'eau sort par un orifice en F pour tomber dans un réservoir très peu en dessous ; elle donne plus de facilité pour l'équation des forces vives. En désignant par x la longueur de la colonne fluide sortie à un instant quelconque par l'orifice F, par v_0 la vitesse au commencement du versement ; l'équation des forces vives devient

$$\pi R\,(l+h+\eta+x)\frac{v^2}{2g} - \pi R^2(l+h+\eta)\frac{v_0^2}{2g} = -\pi R^2 x\eta - 4\pi R\,(l+h+\eta)\int\beta\frac{v^2}{2g}\,dx.$$

Nous poserons pour abréger

$$l+h+\eta = L \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{2g} = z;$$

on aura, en divisant par πR^2,

$$(L+x)z - Lz_0 + \frac{4\beta}{R}Lzdx + \eta x = 0.$$

En différentiant l'équation ci-dessus, on trouve

$$(L+x)dz + zdx + \frac{2\beta}{R}Lzdx + \eta dx = 0,$$

ou en posant
$$\frac{4\beta}{R} = \alpha,$$

$$(L + x)\, dz + (1 + \alpha L)\, z dx = - n dx.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $(L + x)^{\alpha L}$, on aura

$$(L + x)^{1+\alpha L} dz + (1 + \alpha L)(L + x)^{\alpha L} z dx = - n (L + x)^{\alpha L} dx.$$

Les deux membres sont des différentielles exactes; en les intégrant, on trouve

$$(L + x)^{1+\alpha L} z = - n \frac{(L + x)^{1+\alpha L}}{1 + \alpha L} + C,$$

ou bien

$$(L + x)^{1+\alpha L} [n + z(1 + \alpha L)] = C.$$

On déterminera C par la condition que pour $x = 0$ on ait $z = z_0$; cette valeur z_0 étant celle de $\frac{y_0}{L}$, dans le problème précédent.

On aura donc

$$\frac{z(1 + \alpha L) + n}{z_0(1 + \alpha L) + n} = \left(\frac{L}{L + x}\right)^{1+\alpha L}.$$

La valeur de x qui répond à $z = 0$, sera la longueur de la colonne qui sortira par l'orifice supérieur en F. En désignant cette longueur par $x_{,}$, on aura

$$\left(1 + \frac{x_{,}}{L}\right)^{1+\alpha L} = \frac{z_0}{n}(1 + \alpha L) + 1,$$

d'où

$$\frac{x_{,}}{L} = \left[\frac{z_0}{n}(1 + \alpha L) + 1\right]^{\frac{1}{1+\alpha L}} - 1.$$

On voit que si $\alpha = 0$, on retombe sur

$$\frac{x_{,}}{L} = \frac{z_0}{n},$$

ou

$$n x_0 = L z_0 = y_0,$$

résultat qu'il est facile de vérifier directement.

Si L est très grand, on peut remplacer la valeur de $x_{,}$ par la suivante

$$x_{,} = \log \frac{\left[1 + \frac{y_0}{\eta}\left(\alpha + \frac{1}{L}\right)\right]}{\alpha + \frac{1}{L}}.$$

Pour avoir maintenant le travail perdu en frottement pendant la période de mouvement que nous venons de considérer, il faudra calculer l'intégrale

$$\pi R^2 \int \alpha L y dx.$$

Cette expression s'obtient simplement en remarquant qu'on a, entre les limites o et x_1,

$$\pi R^2 \alpha L \int z dx = \pi R^2 (y_0 - x_1 \eta).$$

Si l'on veut maintenant la perte totale pour les deux périodes de mouvement précédentes, c'est-à-dire pour l'ascension dans le tube et le versement, on ajoutera à l'expression ci-dessus celle qui donne la perte pour l'ascension, ce qui donnera

$$\pi R^2 \left(\frac{h^2 - \eta^2}{2} - \eta x_1\right).$$

Il nous reste à calculer maintenant les pertes par frottements pendant que le tube d'ascension se vide, et que la colonne de liquide de E en F passe dans le bassin inférieur.

En négligeant la force vive de l'eau une fois qu'elle est arrivée dans le réservoir inférieur, comme nous avons négligé dans l'oscillation ascendante celle du liquide dans le réservoir supérieur, nous aurons les mêmes formules pour l'oscillation de décharge que pour l'oscillation ascendante.

Pour que le tube d'ascension se vide en totalité jusqu'en E, il faudra qu'il y ait entre les hauteurs BE et BF, c'est-à-dire $h - \text{H}$ et $\text{H} + \eta$, les relations que les formules de l'oscillation ascendante nous ont données pour $h - x'$ et h. Ainsi h et x' devront être remplacés par

$$\text{H} + \eta \quad \text{et} \quad 2\text{H} + \eta - h.$$

En négligeant le terme en $\alpha x'$ devant l'unité, on a trouvé

$$x' = \frac{(1 + \alpha h)\, e^{-2\alpha h} + \alpha h - 1}{\alpha[1 - (1 + \alpha h)]\, e^{-2\alpha h}}\,;$$

on devra changer, dans cette expression,

$$h \quad \text{en} \quad \mathrm{H} + \eta \quad \text{et} \quad x' \quad \text{en} \quad 2\mathrm{H} + \eta - h.$$

En posant, pour abréger, $\mathrm{H} + \eta = h'$, on aura

$$h = 2\mathrm{H} + \eta - \left\{\frac{(1 + \alpha h')\, e^{-2\alpha h'} + \alpha h' - 1}{\alpha\,[1 - (1 + \alpha h')]\, e^{-2\alpha h'}}\right\}.$$

A cette équation on joindra celle qui établit un rapport entre le volume élevé et celui qui s'écoule dans le bassin inférieur, c'est-à-dire

$$\frac{x_1}{h + \eta} = m,$$

ce qui fera pour deuxième relation entre H, η et h,

$$\mathrm{L}\left\{(1 + \alpha \mathrm{L})\left[\frac{1 - \alpha\eta - (1 + \alpha h)\, e^{-\alpha(h+\eta)}}{\alpha^2}\right] + 1\right\}^{\frac{1}{1 + \alpha h}} - \mathrm{L} = m\,(h + \eta).$$

Mais on sait déjà que

$$h = 2\mathrm{H} + \eta - \frac{(1 - \alpha h')\, e^{-2\alpha h'} + \alpha h' - 1}{\alpha[1 - (1 + \alpha h')\, e^{-2\alpha h'}]}.$$

On aura donc ainsi deux équations entre H, η, h et m, au moyen desquelles H et m étant donnés, on obtiendra η et h. On pourra encore se donner H et η, et en conclure h et m, ce qui sera le problème le plus simple pour les calculs, puisqu'en se servant de la première des deux dernières équations, on a immédiatement h, et que l'autre équation donne aussi m immédiatement.

La perte par le frottement pendant une oscillation complète a été exprimée par

$$\pi \mathrm{R}^2 \left(h - \frac{x'}{2}\right) x'.$$

Pour qu'elle s'applique à l'oscillation de décharge, il suffira de remplacer, comme nous venons de le faire, h par $H+\eta$, et x' par $2H+\eta-h$.

Cette perte sera donc

$$\pi R^2\left(\frac{h+\eta}{2}\right)(2H+\eta-h).$$

Ainsi, la perte totale pendant toute la période du mouvement de la machine est

$$\pi R^2\left\{\frac{h^2-\eta^2}{2}-\eta x'+(h+\eta)\left[H-\frac{(h-\eta)}{2}\right]\right\},$$

ou bien en réduisant

$$\pi R^2\,[H(h+\eta)-\eta x_1].$$

Dans cette expression x_1 est déterminé par l'équation

$$x_1 = L\left[\frac{y_0}{Ly}(1+\alpha L)+1\right]^{\frac{1}{1+\alpha L}} - L,$$

la force vive y_0, étant

$$y_0 = \frac{1-\alpha\eta-(1+\alpha h)e^{-\alpha(h+\eta)}}{\alpha^2}.$$

Le rapport entre le travail utile et le travail total sera

$$\frac{\eta x_1}{H(h+\eta)}.$$

D'après la valeur de x_1 qui est

$$x_1 = L\left\{\left[\frac{1-\alpha\eta-(1+\alpha h)e^{-\alpha(h+\eta)}}{L\alpha^2\eta}\right](1+\alpha L)+1\right\}^{\frac{1}{1+\alpha L}} - L,$$

et dans laquelle on a

$$h = 2H+\eta-\frac{[1+\alpha(H+\eta)]e^{-2\alpha(H+\eta)}+\alpha(H+\eta)-1}{\alpha[1-(1+\alpha)(H+\eta)e^{-2\alpha(H+\eta)}]},$$

on voit que le rapport ci-dessus est susceptible d'un maximum; car si η est très grand, x_1 devient nul, et si η devient zéro, ce rapport devient zéro aussi.

Pour avoir la perte inhérente seulement à l'élévation de l'eau ; il faut retrancher de la perte ci-dessus, celle qui serait nécessaire pour conduire le volume $\pi R^2(x_1 + h + \eta)$ à la distance l dans le temps d'une oscillation, et le volume $\pi R^2(h + \eta)$ à la distance l'' également dans le même temps, en se servant de tuyaux de même diamètre.

Il y aurait impossibilité à calculer les durées des oscillations en ayant égard au frottement, mais on pourra par approximation les calculer, en négligeant les frottements.

On sait, par la théorie du mouvement du pendule, en ayant égard à la résistance de l'air qui agit comme les frottements dans notre question que cette résistance n'altère pas sensiblement la durée des oscillations totales quand elles sont très petites, c'est-à-dire quand les équations qui les déterminent coïncident avec celles des oscillations dont nous nous occupons.

La durée du versement que nous avons appelée t', est exprimée par

$$t' = \sqrt{\frac{l + h + \eta}{g}} \left(\sqrt{\frac{h^2 - \eta^2 - \sqrt{h^2 - \eta^2 - 2\eta x_1}}{\eta}}\right):$$

on prendra avec ce temps ceux des deux autres périodes de l'oscillation, savoir

$$t = \sqrt{\frac{l + h}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\eta}{h}\right)\right],$$

et

$$t'' = \pi \sqrt{\frac{l'' + \frac{h + \eta}{2}}{g}}.$$

Ainsi, on prendra le temps $t + t' + t''$ pour la durée d'une oscillation totale pendant laquelle la machine amène les volumes exprimées précédemment.

La vitesse que devrait prendre l'eau dans le tuyau pour que le même débit s'opéràt étant assez petite, on ne peut pas ici négliger le terme de la résistance qui dépend de la première puissance de la vitesse. Le coefficient de ce terme étant représenté par a, on a

$$a = 0{,}000\,17$$

et

$$\frac{a}{g} = 0{,}00001735.$$

La vitesse pour amener le volume $\pi R^2 (x_1 + h + \eta)$ est

$$\frac{(x_1 + h + \eta)}{(t + t' + t'')},$$

et pour le volume $\pi R^2 (h + \eta)$, elle est

$$\frac{h + \eta}{(t + t' + t'')}.$$

Ainsi, la perte en frottements dans un mouvement uniforme sera exprimée par

$$\pi R^2 \frac{8\beta}{2gD} \left[\frac{(x_1 + h + \eta)^3 \; l + l''(h + \eta)^3}{(t + t' + t'')^2}\right] + \pi R^2 \frac{4a}{gD} \left[\frac{l(x_1 + h + \eta)^2 + l''(h + \eta)^2}{(t + t' + t'')^2}\right].$$

Si la machine a deux tubes d'ascension, alors le temps du jeu total ne sera que $t + t'$ et l'on aura, pour la perte inhérente au seul transport de l'eau,

$$\pi R^2 \frac{8\beta^2}{2gD} \left[\frac{l(x_1 + h + \eta)^3 + l''(h + \eta)^3}{(t + t')^2}\right] + \pi R^2 \frac{4a}{gD} \left[\frac{l(x_1 + h + \eta)^2 + l''(h + \eta)^2}{(t + t')}\right].$$

Si l'on désigne par T cette quantité, on aura pour le rapport entre le travail utile employé à élever de l'eau et celui qui a été consommé pour ce seul effet,

$$\frac{\pi R^2 \eta x_1}{\pi R^2 H(\eta + h) - T}.$$

Appliquons ces formules à un exemple.

Supposons qu'on ait

$$\begin{aligned} H &= 2{,}00, \\ \eta &= 2{,}50, \\ D &= 0{,}40, \end{aligned}$$

on trouvera

$$a = \frac{0{,}0272}{D} = 0{,}06800;$$

et par suite,
$$x_1 = 2^m,94,$$
$$nx_1 = 7,35,$$
$$H(n+h) = 16,70.$$

Ainsi, en comptant les frottements dans les tuyaux comme pertes de la machine élévatoire, on aura, pour le rapport entre le travail de la chute et le travail utile de l'élévation de l'eau,

$$\frac{7,35}{16,70} = 0,44;$$

L'effet devient bien plus avantageux si l'on a besoin de faire le transport de l'eau par les tuyaux, et que le travail que ce transport exige doive être déduit de celui de la chute.

Nous supposerons que la machine a deux tubes d'ascension et que la longueur du tuyau de décharge n'est pas assez grande pour que la durée de cette décharge ne dépasse pas celle de l'ascension qui réglera ainsi toute la période d'effet de la machine.

En prenant les longueurs l et l'' de 1000^m, on trouve que

$$t + t' = 33'',$$

et par suite, on arrive à

$$T = \pi R^2 \times 7^m,40.$$

Ainsi le rapport entre l'effet utile et le travail de la chute, déduction faite de celui qui est nécessaire au transport de l'eau, est

$$\frac{7,35}{9,30} = 0,79.$$

La machine élève ainsi un volume égal à $\pi R^2 \times 2,94$ par période ou par seconde

$$\pi R^2 \cdot \frac{2 \cdot 94}{33} = 0^m,011,$$

et par jour
$$962^m.$$

Pour deuxième exemple, supposons qu'on prenne

$$H = 2{,}00,$$
$$n = 2{,}70,$$
$$D = 0{,}50,$$

on trouve

$$\alpha = \frac{0{,}0272}{D} = 0{,}0544$$

et $$h = 6^{m},11.$$

En prenant $$L = 500^{m},$$

on trouve $$x_1 = 3^{m},39,$$

et $$x_1 n = 9{,}15,$$

d'où $$H(h + n) = 17{,}62.$$

Ainsi, le rapport entre l'effet utile et le travail de la chute est

$$\frac{9{,}15}{17{,}62} = 0{,}52.$$

Déduisons maintenant du travail de la chute celui qu'exige le transport de l'eau.

Nous pouvons, sans erreur sensible, prendre le temps de l'ascension de la colonne et du versement comme le temps d'une ascension complète : on aura pour ce temps,

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 22'',$$

d'où

$$\frac{h + n}{22} = 0{,}40. \quad \text{et} \quad \frac{h + n + x_1}{22} = 0{,}55.$$

Si le tuyau de décharge a aussi 500^{m} de long et qu'il y ait deux tubes d'ascension, alors on aura pour le travail employé au transport

$$\pi R^2 \frac{8{,}3}{2g}\left[l(0{,}55)^3 + l''(0{,}40)^3\right] + \pi R^2 \frac{4a}{gD}\left[l(0{,}55) + l''(0{,}40)\right].$$

En réduisant en nombre, on trouve, en ôtant le facteur πR^2 commun à toutes ces quantités,

$$7,87.$$

Le travail qui reste pour l'élévation est donc

$$9,75.$$

Ainsi le rapport entre l'effet utile et ce travail est

$$\frac{9,15}{9,75} = 0,93.$$

La machine élève par oscillation un volume de	0,66,
par seconde	0,030,
et par jour............................	2592^{mc}.

NOTE

Sur le calcul des effets de la Machine précédente et les dispositions essentielles de ses tuyaux d'ascension. — Coup d'œil historique sur quelques machines à élever l'eau;

Par Anatole de CALIGNY.

1. La présente Note ayant simplement pour but l'exposition d'une méthode de calcul, je n'ai rien à ajouter à la description que M. Coriolis a donnée de ma machine. Peu importe pour le moment la forme des emmanchements et de la soupape, ou la manière dont celle-ci fonctionne. Les tuyaux horizontaux sont supposés très longs, et les résistances locales à un coude ou à un rétrécissement sont supposées peu de chose relativement au frottement dans tout le système. Je ferai d'abord abstraction du travail nécessaire pour faire fonctionner la soupape ou le régulateur quelconque.

Pour bien comprendre ce qui va suivre, il est cependant essentiel de savoir comment, en termes de praticien, on *amorce* la machine au moyen d'oscillations, dont les hauteurs successives au-dessus du niveau de la source augmenteraient comme les termes d'une progression arithmétique s'il n'y avait pas de résistance passive. Le système peut être présenté de la manière suivante :

2. Étant donné un réservoir à niveau constant, ou *réservoir de la source*, un tuyau de conduite dérivé par le fond se relève verticalement à une grande distance, je vais d'abord faire le calcul, comme si son diamètre était constant dans toute son étendue. Supposez d'abord l'eau en équilibre avec la source dans le tuyau vertical; j'interromps d'une manière quelconque la communication entre la source et le

tuyau vertical que je fais communiquer par le bas au moyen d'un autre tuyau avec un réservoir dont le niveau, moins élevé que la source, n'est point aussi bas que le sol, quand on a une fontaine à alimenter en ce point à une certaine hauteur. Je nomme cependant *hauteur de chute* la différence de hauteur des deux niveaux. L'eau du tuyau vertical que je nomme *tuyau d'ascension*, se trouvant ainsi en communication avec le tuyau et le réservoir que je nomme *tuyau et réservoir de décharge*, abstraction faite des pertes de force vive, les extrémités étant d'ailleurs évasées, l'eau descend au-dessous du niveau du réservoir de décharge à une profondeur égale à la *hauteur de chute* en vertu des lois de l'oscillation. Quand on remet les communications dans leur premier état, l'eau monte au-dessus du niveau de la source, au double de la *hauteur de chute*. En continuant une manœuvre semblable, on la fait descendre au-dessous du niveau du réservoir de décharge à une profondeur égale au triple de la *hauteur de chute*, monter ensuite au-dessus du niveau de la source, à une hauteur égale au quadruple de la *hauteur de chute* et ainsi de suite; on gagne à chaque période le double de la *hauteur de chute*, au-dessus du niveau de la source. Si donc la profondeur du tuyau vertical et de ses emmanchements avec les deux autres tuyaux était indéfinie, l'eau parviendrait à une hauteur indéfinie au-dessus de la source au moyen d'une chute quelconque, et la machine serait en train. Le jeu continuerait ensuite de la même manière indéfiniment. A chaque oscillation ascendante, au lieu de monter plus haut, l'eau verserait alors au sommet du tuyau d'ascension et fournirait l'effet utile. Nous allons maintenant tenir compte du frottement.

Dans un précédent article, *Cahier de mai* 1838, j'ai établi, au moyen de considérations géométriques vérifiées par l'expérience, une formule très simple pour déterminer dans un tuyau indéfiniment prolongé la hauteur obtenue par l'oscillation au-dessus du niveau d'un réservoir, ou la quantité vidée au-dessous par une oscillation descendante, en tenant compte des résistances passives. Cette formule a été retrouvée par M. Coriolis au moyen de l'analyse.

Je suppose le tuyau d'ascension plein et la colonne sur le point de redescendre; je détermine, au moyen de cette formule, la quantité de tuyau vidée par l'oscillation descendante. Cette quantité exprimera le volume d'eau versée au réservoir de décharge ou au bas de la chute.

Connaissant ainsi le point de départ inférieur de l'oscillation ascendante, je détermine par la même formule quelle serait la hauteur obtenue dans le tuyau vertical indéfiniment prolongé. Je coupe le tuyau au-dessus de la source à la hauteur d'où j'ai déjà supposé que devait partir l'oscillation descendante, et comme l'eau doit monter moins haut dans cette hypothèse, il passe par cette section plus d'eau que dans le cas où le tuyau était indéfiniment prolongé.

Pour déterminer la quantité versée, connaissant la quantité qui passerait, au-dessus du point où je coupe le tuyau, dans le cas où celui-ci serait indéfiniment prolongé, je la multiplie par le rapport de la hauteur de son centre de gravité au-dessus du niveau de la source, à la hauteur où je coupe le tuyau au-dessus de ce même niveau. La quantité ainsi obtenue est trop forte.

3. Il y a toujours quelque perte de force vive à la sortie du tuyau, on peut la diminuer au moyen d'un évasement et d'ailleurs elle est peu de chose quand la masse immobile au moment du départ est assez longue (*voy.* mon article précédent). Mais on ne peut négliger la quantité dont le travail résistant est augmenté par la raison même qu'il passe par la section où le tuyau est coupé une plus grande quantité d'eau à chaque oscillation, ce qui augmente le chemin parcouru par le frottement.

Si l'on coupait le tuyau très près du niveau, la différence dont il s'agit serait très considérable. Si le versement se faisait trop haut, cette différence serait très peu de chose, mais il faudrait tenir compte de ce que le déchet se reportant en entier au sommet de l'oscillation, se reporte précisément sur l'effet utile qui serait zéro à la limite de hauteur, quand même celle-ci serait peu diminuée par le frottement; Il sera donc convenable de couper le tuyau aux environs de la moitié de cette limite de hauteur.

J'ai fait diverses expériences pour déterminer dans ce cas la différence dont il s'agit, en y réunissant celle qui provient de la perte de force vive à la sortie du tuyau d'ascension. Pour évaluer avec plus de sûreté la perte totale, je n'avais pas évasé le sommet du tuyau. La quantité reçue était environ les $\frac{9}{10}$ de celle qui avait été calculée, comme au numéro précédent, sans tenir compte des deux surcroîts de perte dont il s'agit. Dans les circonstances où j'ai opéré, la hauteur moyenne du jet dans l'air était d'environ $\frac{1}{12}$ de la hauteur du versement au-dessus de la source. Ainsi, quand on évase le sommet du tuyau, le surcroît de perte que nous cherchons à évaluer et que je pourrais d'ailleurs donner par la Géométrie est peu de chose.

4. Nous savons, par ce qui précède, évaluer la quantité descendue au bas de la chute; nous savons donc déterminer le rapport de la qnantité élevée à la quantité descendue. Dans ses exemples numériques, M. Coriolis a retrouvé, par sa méthode, les résultats numériques que j'avais obtenus de cette manière et sur lesquels il est par conséquent inutile d'insister.

5. Pour calculer le travail résistant en frottement que l'on éprouverait en conduisant dans le même temps la même quantité d'eau par un mouvement uniforme depuis la source jusqu'au bas du tuyau d'ascension, je fais abstraction du frottement dans ce dernier très court par rapport aux autres. Je calcule la durée de l'oscillation ascendante, par un moyen qu'on verra plus loin; je divise par cette durée la longueur de la colonne passée par le pied du tuyau d'ascension à chaque oscillation, ou par l'orifice du réservoir de la source. J'ai ainsi la vitesse moyenne nécessaire pour amener la même quantité d'eau par un mouvement uniforme dans le même tuyau développé.

Par une opération d'arithmétique, je détermine, au moyen des expériences connues sur le frottement dans les grandes vitesses uniformes, quel devrait être dans le mouvement uniforme le rapport entre la longueur et le diamètre de mon tuyau, pour que, abstraction faite du terme de la résistance proportionnelle aux simples vitesses et des contractions ou déviations, le rapport entre une charge d'eau quelconque et la hauteur due à une vitesse moyenne uniforme effective fût une quantité donnée. Cette hauteur due, étant une fraction donnée de la hauteur de cette charge, il est très commode d'exprimer que la portion de charge absorbée est un certain nombre de fois cette hauteur due. En comparant la longueur de tuyau ainsi trouvée à la longueur du tuyau que l'on considère, on voit à l'instant la valeur de la portion de charge absorbée dans le mouvement uniforme pour une vitesse moyenne effective donnée. La perte est ainsi égale au produit de l'eau passée en un temps donné, par une certaine hauteur. *Voyez* mon précédent article.

Une opération du même genre donnera la perte qui serait éprouvée dans le tuyau de décharge, si l'on y conduisait aussi par un mouvement uniforme l'eau qu'il doit verser dans une fontaine ou réservoir de décharge.

Il y a toujours deux tuyaux d'ascension, dans le cas où la durée de chaque oscillation est réglée au moyen de la longueur des tuyaux de conduite et de décharge, de façon que l'eau ne se repose jamais dans les parties horizontales, une oscillation ascendante commençant quand l'autre finit. On prendra la somme des deux hauteurs absorbées dans le tuyau de conduite et le tuyau de décharge, et l'on opérera ainsi : Je suppose que la *hauteur de chute* soit de 2 mètres, et que dans un cas particulier l'effet utile ne fût que 0,50, si l'on n'avait pas à s'occuper du transport de l'eau. La perte serait dans ce cas le produit de la quantité d'eau descendue, par un mètre ; mais la perte que l'on ne pourrait se dispenser d'éprouver dans un mouvement permanent est égale au produit de la même masse d'eau par une hauteur que nous savons apprécier. La seule perte qui doive être imputée à la machine est la différence de ces deux pertes.

M. Coriolis ayant tenu compte du terme de la résistance proportionnel à la simple vitesse dans le mouvement permanent, a trouvé la perte réelle ou la différence des deux pertes dont il s'agit un peu moindre que je ne l'ai trouvée moi-même en négligeant ce terme par prudence.

6 La manière dont je calcule la durée de mes oscillations repose tout simplement sur les lois du pendule. Dans le cas où je n'ai pas à considérer de versement supérieur et où la colonne immobile au moment du départ est très longue par rapport à l'amplitude de l'oscillation, je trouve la durée de l'oscillation égale à celle d'un pendule de même longueur que la colonne. Cela résulte évidemment de ce que ma colonne oscillante n'est autre chose qu'une colonne oscillante dans un siphon dont une des branches droites est très large par rapport à l'autre. Les choses se passent alors comme si l'intensité de la pesanteur

était moitié moindre, puisque l'eau tombe de moitié moins haut que dans un siphon ordinaire où les oscillations ont, comme on sait, la durée de celles d'un pendule d'une longueur moitié de celle de la colonne liquide.

Dubuat a trouvé dans ses expériences sur les siphons, que la durée des oscillations n'était pas influencée par la résistance des parois. J'ai tiré la même conclusion des expériences que j'ai faites pour des oscillations de 2 à 3 mètres d'amplitude maximum sur une colonne de plus de 50 mètres de long, dont je ne peux donner ici le détail. Dans le calcul de la durée des oscillations, on peut donc se contenter des résultats de la théorie, comme s'il n'y avait pas de frottement. On le peut évidemment pour l'oscillation descendante, mais il n'en est pas tout-à-fait ainsi pour l'oscillation ascendante, lorsqu'il y a versement. Étudions d'abord le cas du versement où il n'y a pas de frottement.

7. Comme je l'ai dit dans mon premier article, *Cahier de mai* 1838, la colonne horizontale étant très longue, la vitesse varierait, abstraction faite du frottement, comme les ordonnées d'un cercle, s'il n'y a pas de versement.

Quand il y a versement, il passe plus d'eau dans le tuyau; or on va voir, qu'abstraction faite de toute perte de force vive, à partir du moment où l'eau commence à verser, la vitesse diminue comme les ordonnées d'une parabole.

Les choses se passent *en sens contraire* comme si la force vive s'emmagasinait dans un tuyau de conduite de même développement, sous une hauteur de pression constante égale à la hauteur du versement audessus du niveau de la source, depuis zéro de vitesse jusqu'à une vitesse égale à celle dont il s'agit, au commencement du versement supérieur. Or, la force vive augmenterait comme les quantités d'eau sorties, par hypothèse sans vitesse sensible à cause d'un évasement. Les carrés des vitesses augmenteraient donc dans le corps d'un bélier comme les éléments d'un triangle et par conséquent, les vitesses comme les ordonnées d'une parabole. C'est le contraire qui arrive pendant le versement supérieur.

Cela posé, au moyen des propriétés élémentaires du cercle et de la parabole, on détermine la durée totale de l'oscillation ascendante. Il n'y a qu'à faire une opération arithmétique au moyen de la mesure des surfaces des figures dont il s'agit.

Si le travail résistant en frottement était assez grand pour empêcher tout-à-fait le versement, on conçoit qu'il ne serait pas rigoureux de ne pas tenir compte du frottement dans le calcul de la durée. Mais en général on pourra s'en dispenser comme l'a fait M. Coriolis dans les applications, puisque l'on ne considère pas cette hypothèse. Comme il a obtenu les mêmes résultats numériques que moi, je crois inutile d'en donner le détail. Je remarquerai, seulement pour les praticiens, l'avantage de ma méthode de n'opérer que sur des nombres de très peu de chiffres.

8. Il y a un moyen général plus simple que ce qui précède, pour voir *à priori* quel doit être, dans les divers cas, l'effet de la machine en se débarrassant de la mesure du temps. Je prends la durée *quelconque* d'une révolution de la machine, pendant laquelle je suppose qu'un mouvement permanent conduise la même quantité d'eau que le mouvement oscillatoire.

Si l'on considère seulement la résistance proportionnelle au carré de la vitesse ou le coefficient β, dans le cas du mouvement oscillatoire, en supposant ce coefficient le même que dans le mouvement permanent, le travail résistant en frottement pour chaque tuyau dans chaque période est proportionnel au produit de la quantité d'eau qui y est passée dans une même période, par la moyenne des carrés des vitesses, pour chaque tuyau. Étant donné le déchet, abstraction faite du transport de l'eau, pour avoir le seul déchet qui doive être attribué à la machine, il faut le multiplier par le rapport entre la différence de la moyenne des carrés des vitesses dans le mouvement oscillatoire et du carré de la vitesse moyenne permanente dont il s'agit, à cette même moyenne des carrés des vitesses.

On sait, par la Géométrie, que la différence entre la moyenne des carrés des ordonnées d'une courbe et le carré de l'ordonnée moyenne est souvent peu de chose. Elle est au moins peu de chose pour le cercle.

D'après mon précédent article, *cahier de mai,* il faudrait que le travail en frottement fût assez considérable relativement au travail de la pesanteur, pour que la différence dont il s'agit fût aussi grande que si *la courbe des vitesses*, ou la courbe ayant pour abscisses les hauteurs parcourues dans le tuyau d'ascension et pour ordonnées les vitesses de la colonne horizontale, était formée de deux portions de parabole et à plus forte raison de deux triangles. Or, même dans ce dernier cas, il est facile de voir par les propriétés de la pyramide qu'un quart seulement du déchet devrait être imputé à la machine.

9. Les calculs précédents supposent le coefficient β aussi grand dans le mouvement oscillatoire que dans le mouvement permanent, ce qui n'est pas, comme je l'ai dit dans mon précédent article, et dans un Mémoire, *Annales des Mines*, tome XIII. L'effet utile paraît donc réellement plus grand ; mais comme je ne peux pas tenir compte d'une manière rigoureuse de la perte de travail nécessaire au jeu de la soupape, le mode de calcul précédent est assez exact. C'est à cause de cette différence quelconque, entre les coefficients β qu'il est rationnel de ne pas s'embarrasser du terme de la résistance proportionnelle aux simples vitesses, quand les vitesses ne sont pas excessivement petites. Si elles l'étaient, on serait conduit, dans le cas où l'on supposerait le coefficient α seul et le même que dans le mouvement uniforme, à un effet utile rigoureusement égal à l'unité, sauf le jeu de la soupape. En effet, on n'aurait plus à s'occuper de la différence entre le carré de la vitesse moyenne dans le mouvement uniforme et la moyenne des carrés des vitesses dans le mouvement oscillatoire.

Quant à la manière dont j'ai déduit le véritable coefficient β, dans le mouvement oscillatoire, en m'appuyant aussi sur quelques expériences de Dubuat, je crois devoir dire, en passant, que les formules du mouvement de l'eau dans le siphon sont tout-à-fait de la même forme que les formules du mouvement de nos colonnes oscillantes précédentes, sauf le versement supérieur ; cela résulte de l'identité énoncée n° 6, dans le cas où l'on ne tient compte que du coefficient β. Si la force vive est double dans le siphon, la résistance est double et le rapport de la puissance à la résistance est le même que dans mes oscillations.

10. On pourrait se demander si en employant la forme du bélier, il ne serait pas possible de faire une *machine à colonne oscillante*, sans autre choc que celui de la soupape d'arrêt sur son siége et dont

l'effet utile serait analogue à celui de la machine dont il s'agit, sauf les considérations relatives au transport de l'eau, puisqu'il y aurait alors un retour vers la source.

J'ai imaginé un appareil de ce genre *à une seule soupape*, en substituant au réservoir d'air et au matelas d'air du bélier un tuyau d'ascension d'une disposition particulière. Cet appareil repose sur des considérations trop délicates pour que je les expose ici. Je n'en parle en ce moment que pour insister sur une propriété tout-à-fait distinctive de la machine, objet de cet article, propriété qui la sépare de plus en plus du bélier, de la machine de Manoury (*) et de toutes celles où la force vive s'emmagasine dans une colonne liquide sous une charge constante ou même moindre que la chute naturelle.

11. Abstraction faite du frottement et des pertes de force vive, pour emmagasiner une quantité donnée de force vive, une puissance est obligée de parcourir un chemin d'autant plus long que cette puissance est moindre. Dans mon appareil où l'eau descend bien plus bas que le sol, la moyenne des pressions motrices est en général bien plus grande que la chute. Pour emmagasiner la même quantité de force vive que le bélier, etc., on a donc un espace bien moins long à parcourir. *Or cet espace est un des facteurs du travail en frottement.*

12. Je suppose maintenant que pour emmagasiner la même quantité de force vive, abstraction faite du frottement, on fasse partir de la moitié plus bas un tuyau d'ascension d'un diamètre moitié moindre. La quantité d'eau entrée dans une même fraction de la longueur plus considérable du tuyau d'ascension sera toujours moitié moindre pour une oscillation. Je veux dire que si $\frac{1}{m}$ de la hauteur est rempli, quand ce $\frac{1}{m}$ aura une longueur moitié plus grande et un diamètre moitié moindre, il contiendra la moitié moins d'eau; mais aussi elle sera tombée d'une hauteur moitié plus grande et il y aura compensation. Or, par la raison même que la quantité pénétrée ainsi sera moitié moindre, le chemin parcouru dans la conduite horizontale sera moitié moindre, cela diminuera le travail en frottement; mais la moyenne des vitesses serait la même sans ce frottement.

(*) *Essai sur la composition des Machines,* par Lantz et Bétancourt, p. 11 et 12.

On peut ainsi emmagasiner une même quantité donnée de force vive, en éprouvant diverses quantités de travail résistant à cause des différences dans les chemins parcourus.

Mais on pourrait se tromper dans les applications de cette idée à la machine. Ainsi sous une chute motrice donnée, je préviens qu'on ne peut pas à volonté, pour emmagasiner une même quantité de force vive, faire partir l'eau d'une plus grande profondeur; mais on peut diminuer le diamètre du tuyau d'ascension dont la longueur est à peu près déterminée d'avance. Dans ce cas, on diminue, comme on va voir, la durée de l'oscillation et cependant on diminue la quantité d'eau qui passe, en un temps donné, par le système. Abstraction faite du frottement, la quantité de force vive emmagasinée est proportionnelle à la section du tuyau d'ascension quand l'eau arrive à une hauteur donnée (*). On voit que la moyenne des vitesses, dans une même conduite horizontale, est à peu près proportionnelle à la racine carrée de cette section ou à son diamètre. Le chemin parcouru dans la conduite est en raison de cette section; la durée d'une oscillation est donc en raison de son diamètre.

Abstraction faite du transport de l'eau, on augmente l'effet utile de la machine en diminuant ainsi dans toute son étendue le diamètre du tuyau d'ascension. Le rapport du travail résistant en frottement au travail moteur est en raison de la section du tuyau d'ascension pour un même tuyau de conduite, abstraction faite du frottement dans le tuyau d'ascension. *Voyez* mon précédent article, *cahier de mai*, n° 33.

13. Or, il s'agit de voir, au moyen du n° 8, comment les choses se passent relativement au transport de l'eau. Nous savons déjà que l'effet utile est augmenté en vertu du rétrécissement, abstraction faite du transport. La courbe ayant pour ordonnées les vitesses dans la conduite, et pour abscisses les hauteurs obtenues dans le tuyau d'ascension, est donc moins déformée, et nous sommes plus près des limites pour lesquelles la différence entre le carré de l'ordonnée moyenne d'une courbe et la moyenne des carrés des ordonnées est peu de chose. Or, en la supposant aussi grande, le déchet déjà trouvé

(*) Il est essentiel de connaître mon premier article, pour bien saisir tous les détails de celui-ci.

étant moindre que dans l'autre cas, sa fraction, qui est le déchet définitif, sera également moindre.

Quoique l'on ait un effet utile plus grand, il faut avoir égard au volume débité par seconde relativement au diamètre des tuyaux. Si ce volume était trop petit, on ne se donnerait pas la peine de faire de gros tuyaux pour alimenter une petite fontaine. Il y a même des cas où la machine ne donnerait pas un débit assez grand, lors même que le tuyau d'ascension serait aussi large que la conduite. Or, il y a un moyen très simple d'y remédier en diminuant, il est vrai, l'effet utile. Il suffit d'*élargir le tuyau d'ascension, au lieu de le rétrécir*. L'augmentation du chemin parcouru par la pression motrice augmentera la force vive moyenne. Abstraction faite des pertes de force vive la moyenne des vitesses sera toujours comme le diamètre du tuyau d'ascension pour une même conduite, par la même raison qu'au n° 12 (*).

Étant donné, un tuyau de conduite d'un diamètre déterminé, on peut ainsi régler la quantité d'eau débitée par la machine selon les besoins de la localité. Je dois ajouter, d'après ce qui a été dit dans le premier article, que, sauf le frottement dans le tuyau d'ascension, la même formule servira à calculer le travail en frottement, au moyen du rapport entre le chemin parcouru dans la conduite horizontale au diamètre de cette conduite pour chaque oscillation.

Faisons abstraction encore, pour un moment, du frottement dans le tuyau d'ascension, afin de trouver la forme la plus avantageuse de ce tuyau.

14. Considérons l'oscillation ascendante, sans nous occuper d'abord de l'autre. Si le tuyau est indéfiniment prolongé, abstraction faite du frottement, on ne diminuera pas la hauteur de l'oscillation, en donnant au tuyau d'ascension la forme d'un sablier, engendré par la révolution d'une courbe dont les ordonnées varieraient symétriquement au-dessus et au-dessous du niveau de la source. On peut, sans diminuer la quantité versée par le sommet, rétrécir de cette ma-

---

(*) Ce tuyau supposé vertical devra quelquefois être incliné ou former une certaine courbe; je reviendrai dans un autre article, sur les détails utiles pour éviter les pertes de force vive dans les applications.

nière le milieu du tuyau d'ascension, au moins dans certaines limites, puisqu'on ne changera pas la hauteur du centre de gravité de l'eau.

Par des dispositions de ce genre, je resserre par son milieu, la *courbe des vitesses* dans la conduite. Si donc on rétablit l'hypothèse du frottement dans cette conduite horizontale, pour obtenir le même versement supérieur on aura moins de travail résistant à y surmonter. Le chemin parcouru et la moyenne des carrés des vitesses dans la conduite doivent être des minima pour chaque quantité d'eau versée au sommet du tuyau d'ascension. La forme de sablier, dont je viens de parler, remplit assez bien cette condition, puisque les vitesses sont d'autant plus grandes dans la conduite que la colonne approche plus des environs du milieu de sa course; or, c'est précisément alors que cette forme du tuyau d'ascension modifie le plus puissamment le chemin parcouru dans la conduite horizontale.

15. Il y a aussi des circonstances où l'on doit se proposer d'élever l'eau le plus haut possible avec une chute donnée. Comme je l'ai dit dans mon précédent article, c'est à partir d'une certaine quantité audessous du niveau de la source, qu'il faut commencer à rétrécir le tuyau d'ascension pour obtenir la hauteur maximum; quand il y a des résistances passives, cela est confirmé par l'expérience; le maximum de force vive a lieu avant que la colonne atteigne le niveau. Mais quand on est obligé de tenir compte à un certain point du frottement dans le tuyau d'ascension, si la conduite n'est pas très longue, la forme du tuyau d'ascension doit être modifiée d'après les principes suivants:

La partie basse du tuyau d'ascension frotte pendant toute la durée des oscillations ascendante et descendante. Il est donc important qu'elle ne soit pas rétrécie assez pour faire éprouver un frottement considérable. Il faut rétrécir le tuyau graduellement à partir du bas, et ne le rétrécir qu'à partir d'une certaine hauteur d'une manière très notable. Si la section du tuyau est déjà rétrécie de moitié, ce qu'il y a de plus important est fait relativement à la diminution du chemin du frottement dans la conduite. Or, le rétrécissement, aux environs du niveau, abstraction faite de la diminution du chemin parcouru, augmente peu la hauteur obtenue dans le tuyau d'ascension, puisque le produit de l'eau qui occupe le tuyau à ces environs, par la distance de son centre de gravité au-dessus ou au-dessous du niveau, est peu de chose. C'est vers le haut du tuyau d'ascension qu'il est le plus important de le rétrécir, pour obtenir la hauteur maximum du point de versement. Le sommet devra s'élargir ensuite graduellement, pour que le versement se fasse avec peu de vitesse.

On peut donc se représenter alors assez bien la forme du tuyau d'ascension par celle d'une fiole allongée, qui s'évase au sommet du goulot, pour faciliter le versement.

16. Il y a, comme on voit, deux circonstances essentielles qui doivent influer sur la détermination de la forme du tuyau d'ascension: 1°. celle où l'on peut négliger le frottement dans ce tuyau; 2°. celle où il ne peut être négligé et où l'on veut verser l'eau le plus haut possible.

17. Pour calculer le frottement dans les parties de ce tuyau dont le diamètre ne varie pas trop rapidement, on peut se servir de considérations relatives à la théorie des centres de gravité. Je suppose que l'on connût la loi de la variation des carrés des vitesses, le frottement serait à chaque instant proportionnel dans chaque portion de tuyau rétréci à la longueur qui en serait occupée, par le carré de la vitesse de l'eau qui s'y meut. Si donc nous connaissions *la courbe des carrés des vitesses*, dans chaque tuyau partiel, la résistance varierait dans chaque tuyau partiel, comme le moment de l'ordonnée correspondante par rapport à l'origine de ce tuyau partiel. Le travail total résistant dans l'intérieur de ce tuyau partiel jusqu'à ce qu'il soit rempli, sera donc proportionnel au produit de la surface de la courbe des carrés des vitesses relative à ce tuyau, par la hauteur du centre de gravité de cette courbe au-dessus de l'origine dont il s'agit.

Si, par exemple, on considérait le frottement dans toute l'étendue du tuyan d'ascension sans versement, et que son travail résistant fût peu de chose relativement à celui de la pesanteur, on trouverait que la longueur du tuyau d'ascension à laquelle on devrait avoir égard dans le calcul du frottement, serait environ la moitié de la longueur de ce tuyau d'ascension, les carrés des vitesses variant comme les cercles d'une sphère, puisque les tuyaux horizontaux sont toujours très longs. Quand le travail en frottement est considérable, et que la hauteur de l'ascension est assez considérablement diminuée, le point auquel la colonne arrive quand la vitesse est un maximum se trouvant baissé, on peut faire le calcul relativement au tuyau d'ascension, au moyen de principes analogues.

Au reste, il serait inutile d'insister en ce moment sur ce mode de calcul, pour la forme rigoureuse du tuyau d'ascension ; elle doit aussi être combinée en tenant compte du mouvement dans la décharge ; et d'ailleurs la nature du frottement d'une colone oscillante qui pénètre dans un tuyau d'ascension sans le trouver rempli d'avance, n'est pas assez connue dans l'état actuel de la science. J'en ai donné une idée dans les *Annales des Mines*, tome XIII, ainsi que dans mon précédent article, et je publierai sous peu un Mémoire à ce sujet ; il me suffit, pour le moment, de dire que le coefficient du frottement dans ce cas est bien moindre qu'on ne l'avait pensé jusqu'à ce jour; il est moindre que dans le mouvement permanent au moins quand le tuyau d'ascension n'est pas trop long relativement à son diamètre.

18 Pour achever de donner une idée des propriétés distinctives du système, revenons un moment au cas où faisant abstraction du frottement, on considérerait des oscillations d'une amplitude indéfinie. On a vu, dans mon précédent article, comment les pressions en un point donné dépendent de l'amplitude de l'oscillation, quand le tuyau horizontal est très long. Considérons un point situé aux environs du niveau du réservoir de décharge. Pendant une moitié environ de la durée des oscillations, ce point ne sera pas il est vrai pressé par la colonne. Mais si l'amplitude est très grande, par rapport à la hauteur de chute, la moyenne des pressions sera aussi très grande, relativement à cette hauteur, pendant l'autre moitié. Ainsi, quoique pendant une moitié du temps, la pression exercée par l'eau sur le point dont il s'agit soit nulle; cependant la moyenne des pressions supportées par ce point sera bien plus grande que dans le cas où la colonne serait en équilibre avec le réservoir de la source. Si donc nous plaçons au point dont il s'agit, un branchement qui d'ailleurs ne débite par trop d'eau relativement à celle qui passe dans le tuyau d'ascension, ce branchement débitera plus d'eau, même dans le cas où nous aurons à considérer quelque travail en frottement, que dans le cas où nous ne produirions pas d'oscillation. Il faudrait tenir compte de l'inertie de l'eau du branchement dans les mouve-

ments oscillatoires, s'il était long ; mais le principe est nouveau, comme celui de mon *jet d'eau oscillant dans l'air libre* (*voyez* mon premier article) sur lequel repose un appareil dont je ne peux parler ici, où ce jet oscillant distribue l'eau à plusieurs étages en passant sur des réservoirs superposés comme les marches d'un escalier.

19. Il est facile maintenant de voir en quoi mon principe diffère de ceux qui semblent d'abord analogues.

Les phénomènes de la percussion des liquides sont le principe du bélier de Montgolfier et de la colonne oscillante de Manoury. La machine de Manoury ne marche pas quand on supprime le diaphragme sur lequel sa colonne *s'écrase* dans la descente, comme toute veine liquide choquant un plan et conservant une vitesse horizontale sur le sol. D'après la description de Lantz et Bétancourt, reproduite par Navier, *quand même il n'y aurait pas de frottement*, l'eau ne pourrait monter au double de la hauteur de chute, si son tuyau d'ascension n'était pas rétréci par le haut (*).

La percussion des liquides est au contraire une des choses que j'évite dans mon système où l'eau entre sans choc, et d'où elle sort sans vitesse sensible. Lorsque j'aurai donné la description de mes autres appareils et de leurs modifications, on verra que cette propriété ne suffit pas pour particulariser le système principal.

S'il n'y avait pas de frottement, je pourrais verser l'eau à une *hauteur indéfinie*, sans être obligé de rétrécir le tuyau d'ascension, ni d'emmagasiner la force vive au moyen d'un écoulement extérieur pendant l'oscillation ascendante, ce dont on ne peut se dispenser dans le bélier, et je me procurerais, sur un branchement dans certaines circonstances, des pressions dont la moyenne serait indéfinie. Cette idée, distinctive comme principe, n'est cependant pas celle sur laquelle je dois le plus spécialement insister.

(*) *Essai sur la composition des Machines*, p. 11 et 12. Cette description est faite d'après les renseignements donnés par Manoury d'Ectot lui-même. On ne dit nulle part que l'on puisse augmenter ou diminuer la hauteur obtenue par sa colonne oscillante, en engageant l'orifice dans l'eau du bief inférieur. Sa colonne ascendante, en vertu de phénomènes peu connus, devant alors se *charger* d'une partie de l'eau du bief inférieur, on ne peut prévoir ni le retard qui en résultera ni l'ensemble des pertes de force vive dans la confusion des mouvements.

Au moyen de deux tuyaux d'ascension, l'eau est toujours en mouvement dans la conduite d'arrivée. Elle est aussi toujours en mouvement dans le tuyau de décharge, quand ce dernier a la longueur suffisante, et l'eau *ne revenant pas vers sa source*, n'éprouve guère d'autre résistance passive que celle qui ne pourrait être évitée dans son transport par un mouvement permanent dans de longs tuyaux. Il est facile de voir que si le tuyau de conduite de la machine de Manoury était d'une certaine longueur, au lieu de monter l'eau s'échapperait par la solution de continuité pratiquée au bas du tuyau d'ascension, à cause de son peu de vitesse ascensionnelle.

L'eau étant amenée avec des vitesses variables, le maximum de ces vitesses variables est plus grand que la vitesse moyenne permanente qui suffirait pour amener la même quantité d'eau dans le même temps; si donc il y avait quelque dépôt accidentel, on aurait périodiquement une *chasse* plus forte que dans le mouvement permanent dont il s'agit. La moyenne des carrés des vitesses étant d'ailleurs plus grande que le carré de la vitesse moyenne ne le serait dans le mouvement permanent, c'est une nouvelle raison pour compter sur une *chasse* plus forte.

Pour emmagasiner une même quantité de force vive, on a moins de travail en résistances passives à surmonter que dans le bélier et les autres machines; la pression motrice moyenne est plus grande et le chemin parcouru par ces résistances est moindre.

20. On pourrait aussi comparer ce système à la machine à colonne d'eau où le liquide ne revient point vers sa source. Il aura évidemment pour les cas où il est applicable, l'avantage d'éviter le frottement du piston de la machine à colonne d'eau ou la compression de l'air dans la machine de Schemnitz. Il débitera donc alors beaucoup beaucoup plus d'eau que ces machines. Dans un cas particulier qui n'est pas celui où il est le plus avantageux, M. Coriolis trouve, comme moi, qu'il élèvera environ 130 pouces d'eau avec un effet utile de 0,93 ; d'après les évaluations de M. Ducros, *Mémoire sur l'alimentation des Canaux*, c'est à peu près un dixième de ce qui suffit ordinairement au point du partage du canal du Languedoc pour alimenter un des versants. On voit même, par d'autres évaluations, que celui des deux qui exige le moins d'eau dépense ordinairement 18,000 mètres

cubes par jour. (Voyez *Histoire de la Navigation intérieure de la France*; par M. Dutens, tome I, p. 171.)

21. Héron d'Alexandrie inventa le premier une machine à élever l'eau où se présente le principe de l'oscillation des liquides.

En 1726, Denizard et de La Deuille ont inventé la machine à colonne d'eau où ce principe se retrouve.

En 1775, Witehurst a inventé un bélier hydraulique.

En 1797, Montgolfier en a présenté un tout différent.

En 1812, Manoury d'Ectot a inventé une machine à colonne oscillante.

On a toujours bien su qu'on pouvait élever de l'eau par une première oscillation dans un tuyau de conduite, cette idée ne mérite pas d'être réclamée; mais le problème consistait à recommencer en vidant le tuyau d'ascension d'une manière convenable.

Ces diverses solutions, la machine à colonne d'eau, le bélier et la colonne oscillante n'ont au fond d'autre rapport entre elles, et avec ma propre solution, que le principe de l'oscillation de l'eau, principe connu de toute antiquité. Personne ne peut s'en attribuer l'invention: car il nous est révélé par le jeu des vagues dans le creux de rochers, et l'on trouve même sur plusieurs côtes des corps de bélier naturels.

Dès l'année 1766, Borda avait publié, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, sur les oscillations de l'eau dans un tube vertical, une expérience d'un genre indiqué trente ans auparavant par Daniel Bernouilli. *Voyez* les expériences de ce dernier, *Hydrodynamicæ*, 1738, pages 141 — 143; il avait même employé des tubes *coniques*. Le fait suivant suffira d'ailleurs pour prouver que la difficulté des problèmes dont il s'agit, consistait uniquement à reproduire indéfiniment, d'une manière convenable, des effets connus et expliqués depuis long-temps. Bossut, qui a varié l'expérience de Borda, plus de vingt ans avant Montgolfier, avait lui-même expliqué pourquoi *quelquefois l'eau qui sort par un ajutage saillit plus haut que ne le demande la hauteur du réservoir.* On peut voir avec détail son explication, *Hydrodynamique*, tome II, p. 101, 1775.

Théorèmes sur les Polygones réguliers considérés dans le cercle et l'ellipse ;

PAR M. O. TERQUEM.

1$^{\text{er}}$ THÉORÈME. Si le nombre des côtés d'un polygone inscrit dans un cercle est un nombre premier, le rapport du périmètre de ce polygone au rayon est incommensurable.

Démonstration. Soit n le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est pris pour unité; soit p le périmètre; on aura

$$p = 2n \sin \frac{2\pi}{n}, \quad p^2 = 4n^2 \sin^2 \frac{2\pi}{n} = 2n^2\left(1 + \cos \frac{4\pi}{n}\right).$$

Or, le trinome $x^2 - 2x \cos m.\frac{4\pi}{n} + 1$, m étant un nombre entier quelconque, est facteur du binome $x^n - 1$, et lorsque n est un nombre premier plus grand que 3, ce facteur est irrationnel (Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ*, § 341, p. 599, édit. de 1801; ou Legendre, *Théorie des Nombres*, 2$^{\text{e}}$ édit., p. 439); donc $\cos \frac{4\pi}{n}$ est irrationnel; donc $\sin^2 \frac{2\pi}{n}$ est irrationnel, et à plus forte raison $\sin \frac{2\pi}{n}$; ainsi p est irrationnel lorsque n est un nombre premier. C. Q. F. D.

Première observation. Pour $n = 1$ ou $n = 2$, la valeur de $\sin \frac{2\pi}{n}$ devient rationnelle; ainsi le théorème n'a lieu qu'à partir de $n = 3$.

Deuxième observation. On a $\sin^2 \frac{2\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} = 1$; donc aussi $\cos^2 \frac{2\pi}{n}$ et par conséquent $\cos \frac{2\pi}{n}$ est irrationnel. (Euclide, liv. 10, prop. 21, lemme.)

2$^{\text{e}}$ THÉORÈME. Le périmètre de tout polygone régulier, l'hexagone excepté, inscrit dans une circonférence, est irrationnel; le rayon est pris pour unité.

Démonstration. Soit n un nombre premier au-dessus de 3; r un nombre entier quelconque, et rn le nombre des côtés du polygone dont p est le périmètre. On a

$$p = 2rn \sin \frac{2^q}{rn}, \quad p^2 = 2r^2n^2 \left(1 + \cos \frac{4^q}{rn}\right).$$

Soit

$$\frac{4^q}{rn} = x, \quad \frac{4^q}{n} = rx;$$

d'où

$$\cos \frac{4^q}{n} = \cos^r x - \frac{r(r-1)}{1.2} \cos^{r-2} x \sin^2 x + \text{etc.}$$

Or $\cos \frac{4^q}{n}$ est irrationnel (1^er^ théorème); donc $\cos x$ ou $\cos \frac{4^q}{rn}$ est irrationnel; donc p est irrationnel. C. Q. F. D.

Observation. On démontre de même que $\cos^2 \frac{4^q}{rn}$ et $\sin^2 \frac{4^q}{rn}$ sont irrationnels et aussi $\cos \frac{2^q}{rn}$; lorsque $n = 2$, $r = 4$, alors $\cos^2 \frac{4^q}{rn} = \frac{1}{2}$.

3^e^ Théorème. Le périmètre de tout polygone régulier, excepté le carré circonscrit au cercle, est irrationnel; le rayon du cercle est pris pour unité.

Démonstration. Soit, comme dessus, rn le nombre des côtés du polygone circonscrit; son périmètre est égal à $2rn \operatorname{tang} \frac{2^q}{rn}$; or $\cos^2 \frac{2^q}{rn}$ est irrationnel (excepté pour $r = n = 2$); donc $\dfrac{1}{\cos^2 \frac{2^q}{rn}}$ ou $1 + \operatorname{tang}^2 \frac{2^q}{rn}$ est irrationnel; de là on conclut que $\operatorname{tang} \frac{2^q}{n}$ est irrationnel. C. Q. F. D.

Première observation. On démontre de même que le carré est le seul polygone régulier inscrit et circonscrit dont l'aire divisée par le carré du rayon, donne un quotient rationnel.

Deuxième observation. On n'est pas en droit de conclure de ces trois théorèmes que la circonférence divisée par le diamètre ou le cercle divisé par le carré du rayon donnent des quotients irrationnels; car l'arc infiniment petit diffère toujours *essentiellement* de sa corde;

l'arc de cercle, même infiniment petit, n'est déterminé que par trois points, tandis que deux suffisent pour déterminer sa corde. De là résulte aussi qu'en mécanique un point matériel qui se meut sur un arc différentiel ne peut être considéré comme se mouvant sur la corde. Toutefois, on peut admettre que le rapport de leurs longueurs est égal à l'unité.

4^e THÉORÈME. Si dans une conique deux segments sont équivalents, les demi-diamètres qui passent par le milieu des cordes sont proportionnels aux flèches, c'est-à-dire aux parties de ces demi-diamètres interceptées entre la corde et l'arc; *et vice versa.*

Démonstration. Ellipse; $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, $\alpha =$ angles des axes, $A =$ aire de segment formé par la corde $2y$. On a

$$A = ab \sin\alpha \text{ arc cos} = \frac{x}{a} - xy \sin\alpha;$$

faisons $\qquad x = am; \quad$ alors $\quad y = b\sqrt{1 - m^2}$

et $\qquad A = ab \sin\alpha \cos = m - abm\sqrt{1 - m^2}.\sin\alpha:$

or, $ab \sin\alpha$ est une quantité constante; donc si m est constant, A l'est aussi. C. Q. F. D.

Observation. La propriété est évidente, en considérant l'ellipse comme une projection orthogonale du cercle.

Hyperbole : $xy = m^2$, équation d'une hyperbole équilatère;

x', y', x'', y'', coord. des extrémités du segment dont l'aire est A; on a

$$A = \frac{m^2}{2}\left(\frac{x''^2 - x'^2}{x'x''} - 2 \log \frac{x''}{x'}\right);$$ le logarithme est népérien.

Faisons $\quad x'' = nx', \quad$ d'où $\quad y'' = \frac{y'}{n}, \quad$ et $\quad A = \frac{m^2}{2}\left(\frac{n^2 - 1}{n} - 2 \log n\right).$

Le diamètre qui passe par le milieu de la corde a pour équation

$$y = \frac{y'}{nx'}x;$$

ce diamètre rencontre la courbe en un point dont les carrés des coordonnées sont

$$\frac{nm^2x'}{y'} \quad \text{et} \quad \frac{m^2y'}{nx'};$$

désignant par d la longueur du demi-diamètre, l'on trouve

$$d^2 = \frac{n^2x'^2 + y'^2}{n};$$

désignant par l la distance du centre au milieu de la corde, on a

$$l^2 = \left(\frac{1+n}{2n}\right)^2 (n^2x'^2 + y'^2); \quad \text{donc} \quad \frac{d^2}{l^2} = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

Ainsi, si $\frac{d}{l}$ est constant, n et par conséquent A sont constants. C. Q. F. D.

Observation. Si l'hyperbole n'est pas équilatère, α étant l'angle des asymptotes, il suffit de remplacer x', x'', m^2 par $x' \sin \alpha$, $x'' \sin \alpha$, $m^2 \sin \alpha$; les raisonnements et les calculs sont les mêmes.

Parabole : $y^2 = px$, $\alpha =$ angle des axes, $2y =$ corde du segment, on a

$$A = \frac{4}{3} x' \sin \alpha \sqrt{px'}.$$

Soient a, b les coordonnées de l'origine relativement aux axes principaux; p' le paramètre par rapport aux mêmes axes; on a

$$p = p' + 4a, \quad \sin^2 \alpha = \frac{p'}{p}, \quad \text{de là} \quad A = \frac{3}{4} x' \sqrt{p'x'};$$

donc si x' est constant, A l'est aussi. C. Q. F. T.

Première observation. En partant de l'équation générale...... $y^2 = mx + nx^2$, le calcul intégral fournit une démonstration applicable aux trois coniques.

Deuxième observation. Un trapèze étant inscrit dans une conique, les côtés non parallèles interceptent des segments équivalents.

Définition. Un polygone inscrit dans une ellipse est *régulier*, lorsque les côtés interceptent des segments équivalents.

5^e. Théorème. **Dans tout polygone régulier inscrit dans une ellipse, la somme des carrés des demi-diamètres passant par les sommets du polygone est égale au carré de la corde du cadran elliptique multiplié par la moitié du nombre des côtés.**

Démonstration. Soit n le nombre des côtés; a un demi-diamètre passant par un sommet; b le demi-diamètre conjugué à a; l^2 la somme des carrés des demi-diamètres, et $\varphi = \frac{4^1}{n}$; il est facile de voir que l'on a

$$l^2 = a^2 [1 + \cos^2 \varphi + \cos^2 2\varphi + \cos^2 3\varphi + \ldots \cos^2.(n-1)\varphi]$$
$$+ b^2 [\sin^2\varphi + \sin^2.2\varphi + \sin^2 3\varphi + \ldots\ldots \sin^2 (n-1)\varphi].$$

On sait que les coefficients de a^2 et de b^2 sont égaux chacun à $\frac{n}{2}$; donc

$$l^2 = \frac{n}{2}(a^2 + b^2). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

1[er] *Corollaire.* A étant l'aire du polygone, on a $A = \frac{1}{2} nab \sin\varphi$: a et b désignent ici, et dans ce qui suit, les demi-axes principaux.

2[e] *Corollaire.* Soit D^2 la somme des carrés des distances du centre aux milieux des côtés; on trouve

$$D^2 = \frac{n}{2}(a^2 + b^2)\cos^2 \frac{1}{2}\varphi.$$

3[e] *Corollaire.* Soit S^2 la somme des carrés des côtés du polygone, on trouve

$$S^2 = 2n(a^2 + b^2)\sin^2 \frac{1}{2}\varphi; \text{ d'où } S = 2D \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi.$$

4[e] *Corollaire.* Soit P^{-2} la somme des puissances -2 des perpendiculaires abaissées du centre sur les côtés, on trouve

$$P^{-2} = \frac{n(a^2 + b^2)}{a^2b^2(1 + \cos\varphi)} = \frac{n(a^2 + b^2)}{2a^2b^2 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi}.$$

5[e] *Corollaire.* Soient α, l'angle du premier demi-diamètre avec le second; α', l'angle du second demi-diamètre avec le troisième et ainsi de suite; on aura

$$\cot\alpha + \cot\alpha' + \cot\alpha'' + \ldots \cot\alpha^{(n-1)} = \frac{n(a^2 + b^2)}{2ab} \cot\varphi.$$

En effet, soient d, e deux demi-diamètres consécutifs; α l'angle qu'ils comprennent, et c le côté du polygone auquel ils aboutissent.

On a donc

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos\alpha\,;\quad \text{mais}\quad de = \frac{ab\sin\varphi}{\sin\alpha},$$

donc

$$d^2 + e^2 - c^2 = 2ab\sin\varphi\cot\alpha.$$

On a une équation semblable pour chaque côté; ajoutant toutes ces équations, membre à membre, il vient

$$n(a^2 + b^2) - S^2 = 2ab\sin\varphi[\cot.\alpha + \cot\alpha' + \ldots.\cot\alpha^{(n-1)}];$$

mais

$$S^2 = 2n(a^2 + b^2)\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,;\quad \text{donc etc.}$$

On prouve de même que la somme des cotangentes des angles extérieurs du polygone est une quantité constante égale à $\frac{n(a^2+b^2)}{2ab}\cot\varphi$, comme ci-dessus.

6e *Corollaire.* En menant par les sommets du polygone des tangentes à l'ellipse, on obtient un polygone régulier circonscrit, que l'on peut considérer comme inscrit dans une seconde ellipse, semblable à la première et semblablement placée. Toutes les formules qu'on vient de trouver sont donc applicables au polygone circonscrit, en remplaçant a et b par a séc $\frac{1}{2}\varphi$ et b séc $\frac{1}{2}\varphi$.

Première observation. Le centre de l'ellipse est évidemment le centre de gravité de l'aire de tout polygone régulier inscrit ou circonscrit.

Deuxième observation. Le parallélogramme inscrit est le seul polygone régulier dont les propriétés soient consignées dans les traités élémentaires.

Troisième observation. Le périmètre maximum ou minimum, entre tous les polygones réguliers homonymes, appartient à celui qui a un de ses sommets à l'extrémité d'un axe principal. Car ces axes doivent partager ces polygones en parties *égales*. Il est à désirer qu'on ait une démonstration directe de ce théorème: elle est facile lorsque le nombre des côtés est une puissance de deux.

Note sur la méthode de Calcul en usage dans le moyen âge pour les nombres fractionnaires;

Par M. GUÉRARD,

De l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres.

Un manuscrit du x^e^ siècle contient le problème suivant :

Civitas qui habet in giro pedes .$\overline{\text{VII}}$. *quantas casas ibidem capere debeant ut unaquaque in longo habeat pedes* xxx *in fronte pedes* xx?

Quarta de $\overline{\text{VII}}$ sunt D$\overline{\text{CC}}$.L. trecensima de mille DCCL. LVIIIƷƧ. vicensima de mille. DCC.L LXXXVIIS. octus trias XXVIŜ. septies quinquageni. CCCL septies octoini. L.VI. septies ƷƧIIƷƧII semus. LXXVS.VII.IIIIS ƷƧ Ʒ. sunt ibidem casas $\overline{\text{V}}$.C.IIII. et Ʒ.

C'est-à-dire, en complétant et en ponctuant :

Civitas qui habet in giro pedes 7000, *quantas casas ibidem capere debeant, ut unaquaque in longo habeat pedes* 30, *in fronte pedes* 20?

Quarta de 7000 sunt 1750; trece*n*sima de 1750, 58$\frac{1}{3}$; vice*n*sima de 1750, 87$\frac{1}{2}$; [*suppl.* octogies 50, 4000; octogies 8, 640]; oct*us* trias [leg. octogies $\frac{1}{3}$], 26$\frac{2}{3}$; septies quinquageni, 350; septies octo*i*ni [*leg.* octoni], 56; septies $\frac{1}{3}$, 2$\frac{1}{3}$; sem*us* 50, 25; semis 7[*leg.* 8], 4; semis $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. Sunt ibidem casa*s* 5104 et $\frac{1}{6}$.

Malgré le grand nombre et la grossièreté des fautes qui le déparent, le texte n'était pas difficile à rétablir.

Le problème à résoudre est celui-ci :

Une ville a 7000 *pieds de tour, combien peut-elle contenir de maisons qui auraient chacune* 30 *pieds de long, et* 20 *pieds de large?*

En suivant la méthode ordinaire, on commencera par calculer en pieds carrés la surface de la ville. Cette surface, devant nécessairement former un carré pour que les calculs de l'auteur puissent être justes, aura pour côté le quart de 7000 pieds, c'est-à-dire 1750 pieds, et contiendra par conséquent 1750 fois 1750 pieds, ou 30625 pieds carrés. Puis on calculera l'aire commune à chaque maison, en multipliant les 30 pieds de long par les 20 pieds de large; ce qui donnera 600 pieds carrés. Enfin on divisera les 30625 pieds carrés, que comprend l'enceinte de la ville, par 600, et l'on aura pour quotient $5104\frac{1}{6}$, qui est le nombre de maisons cherché.

L'auteur arrive au même résultat en employant une méthode un peu simplifiée. Comme les chiffres romains sont d'un usage difficile lorsqu'on opère sur des nombres élevés, il règle sa marche de manière à éviter, autant que possible, les grands calculs. Ainsi, au lieu de multiplier 1750 par 1750, et de diviser ensuite par 600, il commence par diviser le multiplicande 1750 par 30, et le multiplicateur par 20; ce qui revient à diviser par 600. Puis, pour faire la multiplication du premier quotient par le second, c'est-à-dire, pour multiplier $58\frac{1}{3}$ par $87\frac{1}{2}$, il procède de gauche à droite, et multiplie par 80 d'abord 50, puis 8, ensuite la fraction $\frac{1}{3}$. Après quoi, il multiplie successivement les mêmes chiffres du multiplicande par les unités et par la fraction du multiplicateur; et la somme de ces produits partiels donne pour produit total $5104\frac{1}{6}$. Cet exemple nous fait connaître, au moins en partie, comment les anciens s'y prenaient pour opérer sur les nombres fractionnaires.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

Par A. MIQUEL.

Théorème I. Lorsque trois circonférences de cercle A, O, C (Pl. II, fig. 1) se coupent en un même point I; si l'on joint un point F de l'une d'elles A, aux points N et R où cette même circonférence A rencontre de nouveau les deux autres O et C; les points D et E où les droites FN et FR couperont de nouveau les circonférences O et C, seront en ligne droite avec la seconde intersection M de ces deux circonférences O et C.

En effet, joignons DM et EM, ainsi que MI, NI, RI. En observant que les angles F, D, E sont supplémentaires des angles NIR, MIN, MIR, on aura

$$F + D + E = 6d - (NIR + MIN + MIR),$$

ou bien

$$F + D + E = 2d.$$

D'où l'on peut aisément conclure que la figure FDME est un triangle et que, par conséquent, DME est une ligne droite.

Scolie. Il est facile de s'assurer que la proposition précédente est vraie, quelle que soit la position des trois cercles A, O, C qui se coupent en un même point I; et quelle que soit la position du point F sur la circonférence A.

De cette proposition on déduit sans peine les deux réciproques suivantes :

Réciproque I. Lorsque trois circonférences de cercle se coupent en un même point I, si par la seconde intersection M de deux de ces circonférences, on mène une droite DME jusqu'à la rencontre de chacune de ces circonférences O et C aux points D et E; et si l'on joint respectivement chacun de ces points D et E aux points N et R où chacune des deux circonférences O et C coupe de nouveau la troisième circonférence A; les droites DN et ER, ainsi menées, se rencontreront en un point F de cette troisième circonférence A.

Réciproque 2. Trois points M, N, R étant pris respectivement sur chacun des côtés d'un triangle DEF; si l'on fait passer une circonférence de cercle par chaque sommet et par les deux points qui se trouvent sur les deux côtés qui aboutissent à ce sommet; les trois circonférences ainsi obtenues se couperont en un même point I.

Théorème II. Si l'on circonscrit des circonférences de cercle aux quatre triangles ADC, CBF, AEF, BDE (fig. 2) que forment les côtés d'un quadrilatère complet ADEFBC, les quatre circonférences ainsi obtenues se couperont en un même point I.

En effet, les trois points B, F, E appartenant respectivement à chacun des trois côtés du triangle ADC; d'après la réciproque 2, les trois circonférences CBF, DEB, AEF se coupent en un même point. On démontrerait de la même manière que les trois circonférences DEB, AEF, ADC se coupent en un même point : donc toutes les quatre se coupent en un même point.

Théorème III. Soit un pentagone quelconque ABCDE (fig. 3), dont on prolonge les côtés jusqu'à leur mutuelle intersection aux points I, K, F, G, H. Si l'on circonscrit des circonférences de cercle aux cinq triangles IAB, KBC. . . formés par un côté et par les prolongements des deux côtés qui lui sont adjacents, je dis que les cinq nouveaux points P, Q, M, N, R résultant de l'intersection de deux circonférences consécutives, se trouvent sur une même circonférence de cercle.

Par les trois points P, M, R je fais passer une circonférence de cercle, et je dis qu'elle passera par les points N et Q.

Afin de prouver qu'elle passe par le point N, je circonscris une circonférence de cercle au triangle ICG. En considérant successivement les quadrilatères complets IAGCKB, GEICFD, on voit, d'après le théorème précédent, que cette circonférence passe par les points P et M.

Maintenant les circonférences PMG, PMR, PAR se coupant en un même point P, et la droite IAG passant par l'intersection I des circonférences PMG, PAR, en joignant les points A et G aux intersections R et M de chacune de ces deux circonférences avec la troisième PMR, les droites RA et MG prolongées se couperont en un point L de cette dernière circonférence PMR. (*Réciproque* 1.)

Observant enfin que les trois points R, M, E sont situés respectivement sur chacun des côtés du triangle ALG, on voit que les trois circonférences ARE, LRM, GME se coupent en un même point. (*Réciproque* 2.) Donc la circonférence PMR passe par le point N d'intersection des circonférences HAE, GED.

On prouverait de la même manière qu'elle passe par le point Q. Donc les cinq points P, Q, M, N, R sont situés sur une même circonférence de cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

Applications d'un principe de Mécanique rationnelle à la résolution de quelques Problèmes de Géométrie;

Par M. Paul BRETON,

Élève - ingenieur des Ponts - et - Chaussées.

§ I. Le principe dont il s'agit peut être énoncé dans ces termes: *Tout mouvement infiniment petit d'un corps solide retenu par un point fixe, n'est autre qu'un mouvement de rotation autour d'une certaine droite passant par ce point.*

Quoique l'on en trouve la démonstration dans tous les traités de Mécanique rationnelle, et même dans ce recueil, nous croyons devoir le démontrer ici de nouveau, en suivant une marche conforme à l'esprit de cet article.

Nommons F le point fixe, A et B deux autres points pris à volonté, formant avec F les trois sommets d'un triangle de dimensions invariables. Concevons les plans normaux aux chemins infiniment petits décrits par A et B; leur intersection passera par le point F et pourra être prise pour l'axe commun de deux circonférences tangentes aux chemins décrits simultanément par les points A et B. Par conséquent il sera permis de regarder le mouvement infiniment petit qui a lieu, comme déterminé par la condition que les sommets A et B du triangle ABF demeurent sur deux circonférences dont l'axe commun passe en F. Or, il est évident que tout point C lié au triangle ABF par les distances invariables CA, CB, CF décrirait un élément de circonférence autour du même axe. Donc, tous les points d'un corps solide retenu par un point fixe, qui éprouve un mouvement infiniment petit, tournent en même temps autour d'un certain axe passant par le point fixe.

Celui-ci peut être pris en dehors du mobile, et si on le suppose infiniment éloigné, le mouvement de chaque point aura toujours lieu autour d'un certain axe ; mais dans le cas dont il s'agit, le corps sera assujéti à se mouvoir comme si trois de ses points devaient rester dans un plan fixe, perpendiculaire à la direction de l'axe de rotation.

On en conclut que toute figure plane qui prend un mouvement infiniment petit tourne autour d'un certain axe perpendiculaire à son plan, et par suite, que l'un des points de cette figure reste fixe pendant le mouvement.

Dans ce qui va suivre, nous parlerons plus spécialement du cas d'une figure plane. Nous appellerons *centre instantané de rotation* le point du plan de celle-ci qui reste immobile pendant chaque mouvement infiniment petit.

M. Chasles, qui a remarqué le premier l'existence du centre instantané de rotation, en a fait la base d'une méthode particulière pour construire la tangente de certaines courbes, méthode qui est une heureuse généralisation de celle appliquée par Descartes à la cycloïde. De ce que les normales menées simultanément aux trajectoires de tous les points d'un plan mobile, glissant sur lui-même, concourent en un point unique, il conclut ce théorème : *Lorsqu'une courbe est décrite par un point d'une figure en mouvement dans son plan, la normale à cette courbe s'obtient en joignant le point décrivant au centre instantané de rotation.*

Un grand nombre de courbes particulières se prêtent avantageusement à l'application de la méthode de M. Chasles; nous nous bornerons à citer la courbe à longue inflexion décrite par le point d'attache de la tige du piston dans le parallélogramme des machines à vapeur de Watt.

Comme deux points suffisent pour déterminer en général la position d'une figure plane, il suffira de deux conditions pour en régler le mouvement. Dans tous les cas, pour déterminer le centre instantané de rotation, il suffira de rappeler la démonstration du théorème qui est au commencement de cet article. On sera conduit ainsi à substituer aux courbes qui règlent le mouvement, le système de deux circonférences concentriques ayant pour centre commun le centre instantané de rotation. Lorsque la figure mobile contiendra des courbes assujéties à passer par des points fixes, on substituera à ces points des circonférences d'un rayon infiniment petit. Les exemples que nous citerons bientôt dissiperont les nuages que ces généralités peuvent laisser dans l'esprit du lecteur.

§ II. *Du centre instantané de rotation considéré dans ses rapports avec la théorie des enveloppes.*

L'enveloppe d'une courbe mobile étant la courbe qui la touche dans toutes ses positions, on en conclut que la trajectoire du point de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée est tangente elle-même à ces deux lignes. Par conséquent on obtiendra les points de contact de la courbe mobile avec son enveloppe en menant à celle-ci des normales par le centre instantané de rotation.

PREMIER EXEMPLE. *Construire l'enveloppe des positions successives d'une droite de longueur constante qui glisse sur les côtés d'un angle droit.*

Soit AB (Planche II, fig. 4) une position de l'enveloppée, yOx l'angle dans lequel elle se meut. Menons AC, BC perpendiculaires aux côtés Ox, Oy; le point C sera le centre instantané de rotation. Abaissons sur AB la perpendiculaire CM, le point M appartiendra à l'enveloppe.

Rien de plus facile que de trouver l'équation de cette courbe en la rapportant aux axes Ox, Oy. Soient $\mathrm{MP} = x$ et $\mathrm{MQ} = y$ l'abscisse et l'ordonnée du point M; posons $\mathrm{OA} = \mathrm{BC} = \alpha$, $\mathrm{OB} = \mathrm{AC} = \beta$; en ayant égard aux similitudes de triangles que présente la figure, on trouvera sans peine les relations

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{\mathrm{MB}} = \frac{\alpha}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MB}}{\alpha} = \frac{\alpha}{a},$$

la lettre a désignant la longueur constante AB. On a également

$$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\mathrm{MA}} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MA}}{\beta} = \frac{\beta}{a}.$$

On en déduit

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{a^2}, \quad y = \frac{\beta^2}{a^2}.$$

D'ailleurs, on a

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Éliminant α et β entre ces trois dernières équations, il vient

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

pour l'équation de l'enveloppe. Les procédés du calcul différentiel conduisent au même résultat.

Deuxième exemple. *Construire l'enveloppe des positions d'une ligne droite qui se meut en formant constamment le même angle avec une courbe donnée.*

Par le point de rencontre de la droite mobile avec la courbe directrice, menons la normale à celle-ci. Ces deux droites formeront un angle égal au complément de l'angle donné; et l'on pourra imaginer que ce dernier se meut de manière que son sommet restant sur la courbe, l'un des côtés lui soit constamment normal; les intersections successives de l'autre côté formeront l'enveloppe cherchée. Or le centre instantané de rotation de la figure n'est autre chose que celui de la normale, c'est-à-dire le centre de courbure de la directrice. Par conséquent, si l'on abaisse de ce point une perpendiculaire sur la droite mobile, leur point de rencontre sera sur l'enveloppe cherchée.

On voit combien il serait facile d'obtenir l'équation de cette courbe; mais pour éviter d'être trop long, nous ne faisons qu'indiquer ce détail.

Troisième exemple. *Étant donné un point fixe et une circonférence de cercle, on propose de construire l'enveloppe des positions successives de l'un des côtés d'un angle droit dont le sommet se meut sur la circonférence tandis que l'autre côté passe constamment par le point fixe.*

Soit FPM (fig. 5) une des positions de la figure mobile. Joignons le sommet P de l'angle droit au centre O de la circonférence APB; prolongeons le rayon OP jusqu'à sa rencontre en C avec FC perpendiculaire sur FP. Le point C, ainsi obtenu, est le centre instantané de rotation. Abaissons CM perpendiculaire sur PM : le point M appartient à la courbe cherchée.

En formant, ce qui est facile, l'équation de cette courbe, on arriverait à ce résultat, auquel M. de Prony parvient en employant la théorie des enveloppes, que les *courbes enveloppes* dont il s'agit sont des sections coniques. Nous verrons tout-à-l'heure que ce théorème est susceptible d'une démonstration très simple.

§ III. *Du centre instantané de rotation considéré comme moyen de démontrer certains théorèmes de Géométrie.*

Comme dans ce qui précède, nous présenterons des exemples choisis de manière à faire ressortir l'importance du centre instantané de rotation.

Reprenons d'abord le dernier exemple, ne changeons rien à la figure qui s'y rapporte. Prenons $OF' = OF$, joignons MF, MF'. La figure FPMC étant un rectangle, on a

$$PC = MF.$$

Ces deux diagonales se coupent mutuellement en I en parties égales, et l'on a

$$IP = IC = IM = IF.$$

Le point I étant le milieu de MF, et le point O celui de FF', on a

$$MF' = 2OI = 2(OP + IP) = AB + MF,$$

ou

$$MF' - MF = AB.$$

On en conclut que la courbe est une hyperbole dont les foyers sont en F et F', et dont l'axe transverse est égal au diamètre AB du cercle donné.

Si le point F (fig. 6) au lieu d'être placé hors du cercle, ainsi que nous l'avons supposé tacitement, était au contraire à l'intérieur, on ferait la même construction que pour le premier cas, et l'on aurait toujours

$$MF' = 2OI = 2(OP - IP) = AB - MF,$$

ou

$$MF' + MF = AB,$$

ce qui fait voir que, dans le cas dont il s'agit, l'enveloppe est une ellipse dont les foyers sont en F et F', et qui a pour diamètre maximum le diamètre AB du cercle donné.

Ainsi l'usage du centre instantané de rotation conduit non-seulement à la construction des enveloppes, mais encore elle en fait connaître la nature en mettant en évidence leurs propriétés caractéristiques.

Nous ne croyons pouvoir mieux terminer qu'en joignant à l'exemple qui vient d'être traité, un théorème élégant dû à Monge, dont on trouve la démonstration dans les traités de Géométrie analytiques.

Théorème. *Le sommet d'un angle trièdre trirectangle dont les faces restent tangentes à une surface du second ordre décrit une sphère.*

Concevons que l'un des points de contact étant fixe, on fasse varier les deux autres. Si l'on imagine un cylindre circonscrit à la surface donnée, dont les génératrices soient parallèles à l'intersection des deux plans tangents mobiles, les traces de ceux-ci sur le troisième, perpendiculaires entre elles, seront tangentes à la trace du cylindre sur le même plan, laquelle sera une section conique. Les normales à celle-ci menées par ses points de contact avec les deux arêtes de l'angle trièdre comprises dans son plan, détermineront, par leur section, le centre instantané de rotation du système de ces deux arêtes. Joignant ce point au sommet mobile, on aura la normale à la courbe plane qu'il décrit; mais les deux arêtes dont il s'agit, et les normales correspondantes forment un rectangle dont les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales : l'une d'elles étant normale au lieu plan du sommet mobile, passe par le milieu de la corde des contacts, et par conséquent est un diamètre de la conique (*). Il est facile d'en conclure que le plan perpendiculaire au plan fixe, et normal a l'élément décrit, est un plan diamétral de la surface proposée. On en

(*) Cette partie de la démonstration pourrait être adaptée à ce théorème de Géométrie plane : *le sommet d'un angle droit tangent à une section conique décrit une circonférence de cercle ;* car alors les normales vont toutes passer au centre de la conique.

conclut qu'il passe par le centre; et si l'on rend fixes chacun à leur tour les deux points de contact de l'angle trièdre avec la surface que nous avions d'abord supposés variables, on aura deux autres plans diamétraux de la surface qui se couperont suivant la ligne qui en joint le centre au sommet de l'angle mobile. Cette droite, normale aux éléments décrits sur la surface cherchée dans trois directions différentes (deux suffisent), est elle-même la normale à cette surface.

Telle est donc la nature de la surface dont il s'agit, que toutes ses normales concourent en un même point. Ce caractère suffit pour faire reconnaître la surface sphérique.

Discussion des surfaces du second degré, d'après la Méthode de M. Plucker;

Par M. FINCK,

Professeur au Collége et à l'École d'Artillerie de Strasbourg.

PROBLÈME.

Etant donnée une équation numérique du second degré à trois variables x, y, z, rapportées à des axes rectilignes quelconques, reconnaître la nature de la surface qu'elle représente.

L'équation du second degré présente deux cas principaux : ou elle renferme au moins un des carrés z^2, y^2, x^2, ou elle n'en renferme aucun.

PREMIER CAS.

Un des carrés au moins se trouve dans l'équation.

Supposons que ce soit z^2 et mettons l'équation sous la forme

$$(1)\quad z^2 + A'y^2 + A''x^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + 2Cz + 2C'y + 2C''x + D = 0.$$

Cette équation en général se transformera en toute autre qui renferme neuf coefficients ; ici nous décomposerons le premier membre en fonction du premier degré par rapport à x, y, z, parce que ces fonctions déterminent les distances des points de la surface à certains plans. Nous prendrons

$$(2)\quad (z + ay + bx + c)^2 + d(y + ex + f)(y + e'x + f') + g = 0.$$

Pour que les équations (1) et (2) soient identiques, il faut que

$$(3)\quad \begin{cases} A' = a^2 + d, \quad A'' = b^2 + dee', \quad 2B = 2ab + d(e+e'), \\ B' = b, \quad B'' = a, \quad C = c, \quad 2C' = 2ac + d(f+f'), \\ \qquad 2C'' = 2bc + d(ef'+e'f), \quad D = c^2 + dff' + g. \end{cases}$$

De là

$$(4)\quad \begin{cases} a = B'', \quad b = B', \quad c = C, \quad d = A' - B''^2, \\ e + e' = \dfrac{2(B - B'B'')}{A' - B''^2}, \quad ee' = \dfrac{A'' - B'^2}{A' - B''^2}, \\ f + f' = \dfrac{2(C' - B''C)}{A' - B''^2}, \quad ef' + e'f = \dfrac{2(C'' - B'C)}{A' - B''^2}, \\ \qquad g = D - C^2 - dff'. \end{cases}$$

On voit que le cas actuel se subdivise en deux, celui où $A' - B''^2$ n'est pas nul, et celui où ce binome est nul

$$(A)\qquad A' - B''^2 \gtrless 0.$$

Les valeurs de e, e' sont données par l'équation

$$(5)\qquad u^2 - 2 \cdot \frac{B - B'B''}{A' - B''^2}\, u + \frac{A'' - B'^2}{A' - B''^2} = 0.$$

a). Si les racines de cette équation sont réelles et inégales, la transformation est possible, d'une seule manière, en quantités réelles. Or le produit $(y + ex + f)(y + e'x + f')$ peut se mettre sous la forme

$$\left(y + \frac{e+e'}{2}\cdot x + \frac{f+f'}{2}\right)^2 - \left(\frac{e-e'}{2}\, x + \frac{f-f'}{2}\right)^2,$$

donc l'équation (2) devient

$$(6)\quad (z+ay+bx+c)^2 + d\left(y+\frac{e+e'}{2}x+\frac{f+f'}{2}\right)^2 - d\left(\frac{e-e'}{2}\cdot x+\frac{f-f'}{2}\right)^2 + g = 0.$$

Prenons pour plans coordonnés les trois plans

$$(7)\quad z+ay+bx+c=0, \quad y+\frac{e+e'}{2}\cdot x+\frac{f+f'}{2}=0, \quad \frac{e-e'}{2}\cdot x+\frac{f-f'}{2}=0$$

La fonction $z+ay+bx+c$, multipliée par un coefficient constant convenable m, représentera la distance du point z, y, x de la surface, à un point du premier de ces plans, distance dont la direction est arbitraire, et que nous supposerons parallèle à l'intersection des deux autres, même remarque sur $y+\frac{e+e'}{2}\cdot x+\frac{f+f'}{2}$, et $\frac{e-e'}{2}\cdot x+\frac{f-f'}{2}$.

Ainsi prenant le premier de ces plans pour plan $x'y'$, le second pour $x'z'$, le troisième pour $y'z'$, nommant m, n, p, trois constantes que nous déterminerons plus bas, nous poserons pour chaque point de notre surface

$$z+ay+bx+c=mz',\ y+\frac{e+e'}{2}x+\frac{f+f'}{2}=ny',\ \frac{e-e'}{2}.x+\frac{f-f'}{2}=pz,$$

et l'équation (6) devient

$$(8)\qquad m^2z'^2+dx^2y'^2-dp^2x'^2+g=0:$$

c'est une surface à centre, rapportée à ce point pour origine des coordonnées. Ce même centre est donc l'intersection des trois plans (7), intersection dont la forme des équations (7) permet facilement de calculer les coordonnées. De plus les plans coordonnés sont des plans diamétraux conjugués, leurs intersections sont des diamètres conjugués connus de position; si donc on cherche les intersections de ces diamètres avec la surface, au moyen des équations 6 et 7, on pourra calculer les distances du centre à ces points, et avoir ainsi les longueurs des diamètres, ce qui déterminera m^2, n^2, p^2. Remarquons du reste que cela se réduit à un seul calcul; car les trois équations suivantes

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} (z+ay+bx+c)^2+g' &= 0,\\ d\left(y+\frac{e+e'}{2}x+\frac{f+f'}{2}\right)^2+g'' &= 0,\\ -d\left(\frac{e-e'}{2}\cdot x+\frac{f-f'}{2}\right)^2+g''' &= 0,\end{aligned}\right.$$

étant résolues, si dans les valeurs de z, y, x on fait successivement chacune des trois quantités g', g'', g''' égale à g, et les deux autres nulles, on aura les extrémités des trois diamètres; si l'on fait nulle les trois quantités g', g'', g''', on aura le centre.

Revenons à l'équation (8),

I.	$d \gtrless 0$ et	$g > 0$	hyperboloïde à deux nappes,
II.	*id.*	$g = 0$	cône,
III.	*id.*	$h < 0$	hyperboloïde à une nappe.

(*b*). Si les racines de l'équation (5) sont imaginaires, on a des résultats de la forme

$$e = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad e' = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad f = \gamma + \delta\sqrt{-1}, \quad f' = \gamma - \delta\sqrt{-1},$$

d'où

$$e + e' = 2\alpha, \quad e - e' = 2\beta\sqrt{-1}, \quad f + f' = 2\gamma, \quad f - f' = 2\delta\sqrt{-1},$$

et l'équation (6) devient

$$(10) \qquad (z + ax + by + c)^2 + d(y + \alpha x + \gamma)^2 + d(\beta x + \delta)^2 + g = 0$$

Dans le cas où d est négatif, cette équation reproduit les trois surfaces déjà trouvées.

Examinons le cas où d est positif

IV	$g > 0$	ellipsoïde imaginaire,
V	$g = 0$	un point,
VI	$g < 0$	ellipsoïde réel.

Les trois plans diamétraux conjugués, et le centre se déduisent des équations (7) et (9).

(*c*). Si les racines de l'équation (5) sont égales, la troisième et la quatrième des équations (4) deviennent

$$f + f' = \frac{2(C' - B''C)}{A' - B''^2}, \quad f + f' = \frac{2(C' - B'C)}{e(A' - B''^2)};$$

elles sont ou indéterminées ou incompatibles. Dans ce cas le second terme de l'équation (2) se met sous la forme

$$d(y+ex)^2+d(f+f')y+de(f+f')x+ff',$$

et pour faire disparaître la particularité actuelle, il suffit d'ajouter un terme en x, c'est-à-dire de mettre l'équation sous la forme

$$(11)\quad (z+ay+bx+c)^2+d(y+ex)^2+fy+gx+h=0,$$

où f, g, ne signifient plus la même chose; et l'on a les conditions

$$a=B'',\quad b=B',\quad c=C,\quad d=A'-B''^2,\quad e^2=\frac{A''-B'^2}{A'-B''^2}.$$

$$(12)\qquad B'B''+de=B,$$

qui est identique en vertu de l'égalité des racines de l'équation (5)

$$f=2C'-2B''C,\quad g=2C''-2B'C,\quad h=D-C^2.$$

L'équation (11) présente deux cas : si f et g ne sont pas nuls tous les deux, on posera

$$z+ay+bx+c=mz',\quad y+ex=ny',\quad fy+gx+h=px',$$

et elle devient

$$(13)\qquad m^2z'^2+dn^2y'^2+px'=0.$$

VII. $d>0$, paraboloïde elliptique,
VIII. $d<0$, *idem* hyperbolique.

Si f et g sont nuls, l'équation se réduit à

$$(14)\qquad m^2z'^2+dn^2y'^2+h=0,$$

IX. $d>0$, $h>0$, cylindre elliptique imaginaire,
X. *idem*, $h=0$, une droite,
XI. *idem*, $h<0$, cylindre elliptique réel,
XII. $d<0$, $h\gtrless 0$, cylindre hyperbolique,
XIII. *idem*, $h=0$, deux plans qui se coupent.

$$\text{(B)} \qquad A' - B''^2 = 0.$$

La disparition de d prouve que la transformée ne doit pas contenir un second terme en y^2; on prendra donc

$$(15) \qquad (z + ay + bx + c)^2 + d(z + ex + f)(x + h) + g = 0.$$

Les lettres n'ayant pas la même signification que plus haut. On aura les conditions

$$a^2 = A', \quad a = B'' \text{ qui s'accordent, vu que } A' - B''^2 = 0.$$

$$(16) \quad \begin{cases} d = 2(B - B'B''), \quad e = \dfrac{A'' - B'^2}{d}, \quad c = C, \\ h = \dfrac{2(C' - B''C)}{d}, \quad f = \dfrac{2(C'' - B'C)}{d} - eh, \quad g = D - C^2 - dfh. \end{cases}$$

Tant que d ou $B - B'B''$ n'est pas nul, la transformation est possible d'une manière unique, et l'équation (15), donne

$$(17) \quad (z + ay + bx + c)^2 + d\left(\frac{1}{2}z + x\frac{e+1}{2} + \frac{f+h}{2}\right)^2 \\ - d\left(\frac{1}{2}z + x\frac{e-1}{2} + \frac{f-h}{2}\right)^2 + g = 0$$

qui rentre dans l'équation (8).

Si $d = 2(B - B'B'')$ est nul, il faut que le second terme en xy disparaisse également dans la transformée, que l'on prendra sous la forme

$$(18) \quad (z + ay + bx + c)^2 + d(x + e)(x + f) + hy + g = 0,$$

les coefficients désignant des valeurs autres que tout-à-l'heure.

Les conditions sont

$$a^2 = A', \quad b^2 + d = A'', \quad ab = B, \quad b = B', \quad a = B'',$$

équations qui donnent a, b, et $d = A'' - B'^2$, et s'accordent; d'ailleurs

$$c = C, \quad h = 2(C' - CB''), \quad e + f = 2.\frac{C'' - CB'}{d}, \quad ef = \frac{D - C^2 - g}{d}.$$

Toutes les fois que $d = A'' - B'^2$ n'est pas nul, on peut disposer de g, qui est arbitraire, de façon que e et f soient réels. Ainsi (18) devient

$$(19)\quad (z + ay + bx + c)^2 + d\left(x + \frac{e+f}{2}\right)^2 + hy + g - d\left(\frac{e-f}{2}\right)^2 = 0,$$

selon que h est nul ou non, cette équation rentre dans (14) ou dans (13). Si $d = A'' - B'^2$ est nul, l'équation ne doit pas contenir un second terme en x^2; vu que $A' = B''^2$, $B = B'B''$ et $A'' = B'^2$, on peut mettre (1) sous la forme

$$(20)\qquad (z + B''y + B'x)^2 + 2Cz + 2C'y + 2C''x + D = 0.$$

Tant que C, C', C'', ne sont pas nuls à la fois, elle se met sous la forme

$$m^2z'^2 + nx' = 0,$$

et représente

XIV un cylindre parabolique.

Si C, C', C'', sont tous nuls, et que

XV	$D < 0$,	deux plans parallèles réels,
XVI	$D = 0$,	un plan,
XVII	$D > 0$,	deux plans parallèles imaginaires.

SECOND CAS.

Les trois carrés manquent.

Supposons que yz ne manque pas, et mettons l'équation sous la forme

$$(21)\qquad Bxy + B'xz + yz + Cz + C'y + C''x + E = 0,$$

on la transformera en

$$(22)\quad (z + ax + b)(y + cx + d) + e(x + f)(x + g) + h = 0,$$

et l'on aura

$$c = \mathrm{B}', \quad a = \mathrm{B}, \quad d = \mathrm{C}, \quad b = \mathrm{C}', \quad e = -\mathrm{BB}',$$

$$(23) \qquad f + g = \frac{\mathrm{BC} + \mathrm{B'C'} - \mathrm{C''}}{\mathrm{BB'}}, \quad fg = \frac{h + \mathrm{CC'} - \mathrm{E}}{\mathrm{BB'}}.$$

Dans le cas où e n'est pas nul, on peut disposer de h de manière que f et g soient réels, et l'équation (22) devient

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} [z+y+(a+c)x+b+d]^2-[z-y+(a-c)x+b-d]^2 \\ \qquad + e(2x+f+g)^2+4h-e(f-g)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Le dernier terme ne contient h qu'en apparence, et l'équation représente l'un des deux hyperboloïdes ou le cône.

Si e est nul, B ou B′ l'est; soit $\mathrm{B} = 0$, l'équation (21) devient

$$(25) \qquad z(y + \mathrm{B}'x + \mathrm{C}) + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''x + \mathrm{E} = 0,$$

ou

$$(26) \quad (z+y+\mathrm{B}'x+\mathrm{C})^2-(z-y-\mathrm{B}'x-\mathrm{C})^2+4\mathrm{C}'y+4\mathrm{C}''x+4\mathrm{E} = 0.$$

Elle fournit un paraboloïde hyperbolique, ou un cylindre hyperbolique, ou deux plans qui se coupent, selon que C′, C″ ne sont pas nuls à la fois, ou qu'ils sont nuls tous les deux sans que E le soit, ou enfin que C′, C″, E, sont nuls.

Voici donc en résumé ce qu'il y a à faire pour discuter une équation numérique du second degré entre x, y, z.

PREMIER CAS.

L'équation renferme au moins un des carrés z^2.

L'équation étant sous la forme (1), on calcule $\mathrm{A}' - \mathrm{B}''^2$,

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{A}' - \mathrm{B}''^2 \gtrless 0.$$

On forme l'équation (5),

$$u^2 - 2 \cdot \frac{\mathrm{B} - \mathrm{B'B''}}{\mathrm{A}' - \mathrm{B}''^2} \cdot u + \frac{\mathrm{A}'' - \mathrm{B}'^2}{\mathrm{A}' - \mathrm{B}''^2} = 0.$$

Si cette équation a ses racines réelles inégales, au moyen des équations (4), on calcule g, qu'on trouve égal, inférieur ou supérieur à zéro.

Si $g > 0$, hyperboloïde à deux nappes; $g = 0$, cône; $g < 0$ hyperboloïde à une nappe.

L'équation (5) ayant ses racines imaginaires, on calcule encore g.

Si $A'' - B'^2$ est négatif, on a les mêmes surfaces, mais avec $g > 0$ l'hyperboloïde à une nappe et $g < 0$, l'autre.

Si $A'' - B'^2$ est > 0, on a l'ellipsoïde réel avec $g < 0$, le point avec $g = 0$, l'ellipsoïde imaginaire avec $g = 0$.

Du reste l'équation (5) a ses racines réelles et inégales, ou imaginaires selon que

$$(B - B'B'')^2 \quad \text{est} > \text{ou} < \quad (A'' - B'^2)(A' - B''^2),$$

c'est-à-dire selon que

$$B^2 + A'B'^2 + A''B''^2 \quad \text{est} > \text{ou} < \quad 2BB'B''.$$

Si le coefficient de z^2 était A, au lieu de 1, cette condition serait

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 \quad > \text{ou} < \quad 2BB'B''.$$

Dans le cas où l'équation (5) a ses racines égales, ces deux dernières quantités le sont aussi.

On a recours à la transformée (11), et l'on calcule $C' - B''C$, $C'' - B'C$. Ces deux quantités n'étant pas supposées nulles à la fois, selon que $A' - B''^2$ est $>$ ou < 0, on aura le paraboloïde elliptique, ou le paraboloïde hyperbolique.

Toutes les fois que $C' - B''C$, $C'' - B'C$ sont nuls, on calcule $D - C^2$, et l'on a cylindre elliptique imaginaire,

	si	$A' - B''^2 > 0$	et	$D - C^2 > 0$,
id. réduit à une droite	si	*id.*	et	$D - C^2 = 0$,
id. elliptique réel	si	*id.*	et	$D - C^2 < 0$,
cylindre hyperbolique		$A' - B''^2 < 0$		$D - C^2 \gtrless 0$,
deux plans qui se coupent		*id.*		$D - C^2 = 0$.

(B) $\qquad A' - B''^2 = 0.$

Si $B - B'B''$ n'est pas nul, l'équation représente un des deux hyperboloïdes ou un cône, le signe de $B - B'B''$ combiné avec la quantité g des équations (16), fera reconnaître l'espèce de la surface.

Si $B - B'B''$ est nul, mais que $A'' - B'^2$ ne le soit pas, ou aura le paraboloïde elliptique avec $C' - CB'' \gtrless 0$ et $A'' - B'^2 > 0$, le paraboloïde hyperbolique avec $C' - CB'' \gtrless 0$ et $A'' - B'^2 > 0$, l'un des cylindres ou la droite si $C' - CB'' = 0$.

Dans le cas où $A'' - B'^2 = 0$, sans que C, C', C'' soient nuls tous les trois, on a le cylindre parabolique.

Si de plus C, C', C'' sont nuls; avec $D < 0$, deux plans parallèles $D = 0$. un plan $D > 0$, deux plans parallèles imaginaires.

SECOND CAS.

Les trois carrés manquent.

Tous les fois que les trois rectangles sont dans l'équation, elle représente l'un des deux hyperboloïdes ou le cône. Dans l'équation (24), selon que e et $4h - e(f - g)^2$, sont de même signe ou de signes contraires, on aura l'hyperboloïde à deux nappes, ou l'hyperboloïde à une nappe. Si $4h - e(f - g)^2$ est nul, c'est le cône. Enfin si l'un des rectangles manque, on a un paraboloïde hyperbolique, toutes les fois que les termes du premier degré qui renferment les mêmes coordonnées que ce rectangle, ne manquent pas tous les deux; dans le cas contraire un cylindre hyperbolique, si l'équation n'est pas privée du dernier terme, et deux plans qui se coupent, si elle en est privée.

On remarquera du reste que la discussion ci-dessus fait connaître un système de coordonnées par rapport auquel l'équation des surfaces à centre prend la forme

$$Pz^2 + P'y^2 + P''x^2 = Q,$$

et celle des surfaces privées de centre,

$$Pz^2 + P'y^2 + 2Qx = 0.$$

Extrait d'une lettre de M. Lamé à M. Liouville sur cette question : *Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?* (*)

« La formule que vous m'avez communiquée hier, se déduit facilement de la comparaison de deux méthodes qui conduisent au même but.

» En effet, on peut, à l'aide de deux méthodes différentes, évaluer le nombre des décompositions en triangles d'un polygone : par la considération des côtés, ou par celle des sommets.

I.

» Soit ABCDEF... un polygone convexe de $n+1$ côtés, et soit désigné par le symbole P_k le nombre total des décompositions en triangles d'un polygone de k côtés. Un côté quelconque AB de ABCDEF... servira de base à un triangle, dans chacune des P_{n+1} décompositions de ce polygone, et ce triangle aura son sommet en C, ou D, ou E, ou F... ; au triangle CBA correspondront P_n décom-

(*) *Voyez* un Mémoire de Segner (*Novi Commentarii Acad. Petrop.*, t. VII, p. 203). L'auteur a trouvé l'équation (1) de M. Lamé ; mais la formule (3) offre une solution bien plus simple que la sienne. Cette formule (3) est due sans doute à Euler. Elle est indiquée sans démonstration à la page 14 du volume cité plus haut. L'identité des équations (1) et (3) n'est pas facile à établir. M. Terquem y étant parvenu à l'aide de quelques propriétés des factorielles, m'a proposé ce problème. Je l'ai communiqué ensuite à divers géomètres : aucun d'eux ne l'a résolu ; M. Lamé a été plus heureux : j'ignore si d'autres avaient obtenu avant lui une solution aussi élégante.

J. Liouville.

positions différentes; à DBA un autre groupe de décompositions, représenté par le produit P_3P_{n-1}; à EBA le groupe P_4P_{n-2}; à FBA, celui P_5P_{n-3}; et ainsi de suite, jusqu'au triangle ZAB, qui appartiendra à un dernier groupe P_n. Or, tous ces groupes sont essentiellement distincts: leur somme donnera donc P_{n+1}. Ainsi l'on a

$$(1)\quad P_{n+1} = P_n + P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + P_5P_{n-3} + \ldots + P_{n-3}P_5 + P_{n-2}P_4 + P_{n-1}P_3 + P_n.$$

II.

» Soit *abcde*... un polygone de n côtés. A chacune des $n - 3$ diagonales, qui aboutissent à l'un des sommets a, correspondra un groupe de décompositions, pour lesquelles cette diagonale servira de côté à deux triangles adjacents : à la première diagonale ac, le groupe P_3P_{n-1}; à la seconde ad, celui P_4P_{n-2}; à la troisième ac, P_5P_{n-3}, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ax qui sera active dans le groupe P_3P_{n-1}. Ces groupes ne sont pas totalement différents, car il est aisé de voir que quelques-unes des décompositions partielles, appartenant à l'un d'eux, se retrouvent dans les précédents. De plus ils ne comprennent pas les décompositions partielles de P_n pour lesquelles aucune des diagonales aboutissant en a n'est active.

» Mais si l'on fait la même opération à chacun des autres sommets du polygone et qu'on réunisse toutes les sommes de groupes de ces sommets, par leur somme totale $n(P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + \ldots + P_{n-2}P_4 + P_{n-1}P_3)$ on sera certain d'embrasser toutes les décompositions partielles de P_n; chacune d'elles s'y trouvera même répétée un certain nombre de fois.

» En effet, si l'on imagine une quelconque de ces décompositions, elle comprend $n - 2$ triangles, ayant en tout $3n - 6$ côtés; si l'on retranche de ce nombre les n côtés du polygone, et qu'on prenne la moitié du reste qui est $n - 3$, on aura le nombre des diagonales actives dans la décomposition dont il s'agit. Or, il est évident que cette décomposition partielle se trouvera répétée autant de fois, dans la somme totale qui précède, que ces $n - 3$ diagonales ont d'extrémités, c'est-à-dire $2n - 6$ fois : puisque chaque extrémité est un sommet du polygone, et qu'en évaluant les groupes de ce sommet, la diagonale a fourni un groupe, comprenant la décomposition partielle considérée.

» Ainsi, chacune des décompositions partielles du groupe total P_n, étant répétée $2n$-6 fois dans $n(P_3P_{n-1}+P_4P_{n-2}+..+P_{n-2}P_4+P_{n-1}P_3)$, on obtiendra P_n en divisant cette somme par $2n-6$. On a donc

$$(2)\quad P_n = \frac{n(P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + \ldots + P_{n-2}P_4 + P_{n-1}P_3)}{2n-6}.$$

III.

» La première formule (1) donne

$$P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + \ldots + P_{n-2}P_4 + P_{n-1}P_3 = P_{n+1} - 2P_n,$$

et la seconde (2)

$$P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + \ldots + P_{n-2}P_4 + P_{n+1}P_3 = \frac{2n-6}{n} P_n;$$

donc enfin

$$P_{n+1} - 2P_n = \frac{2n-6}{n} P_n,$$

ou bien

$$(3)\qquad P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n.$$

Ce qu'il fallait démontrer. »

Paris, 25 août 1838.

Note sur une Équation aux différences finies;

Par E. CATALAN.

M. *Lamé* a démontré que l'équation

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \ldots + P_4P_{n-2} + P_3P_{n-1} + P_n, \quad (1)$$

se ramène à l'équation linéaire très simple,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n. \quad (2)$$

Admettant donc la concordance de ces deux formules, je vais chercher à en déduire quelques conséquences.

I.

L'intégrale de l'équation (2) est

$$P_{n+1} = \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \ldots\ldots \frac{4n-6}{n} P_3;$$

et comme, dans la question de géométrie qui conduit à ces deux équations, on a $P_3 = 1$, nous prendrons simplement

$$P_{n+1} = \frac{2.6.10.14\ldots(4n-6)}{2.3.\ 4.\ 5\ldots\quad n}. \quad (3)$$

Le numérateur

$$2.6.10.14\ldots(4n-6) = 2^{n-1}.1.3.5.7\ldots(2n-3)$$
$$= \frac{2^{n-1}.1.2.3.4.5\ldots(2n-2)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)} = \frac{1.2.3.4\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Donc

$$P_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{2.3.4\ldots n}. \quad (4)$$

Si l'on désigne généralement par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises p à p; et si l'on change n en $n+1$, on aura

$$P_{n+2} = \frac{1}{n+1} C_{2n,n}, \qquad (5)$$

ou bien

$$P_{n+2} = C_{2n,n} - C_{2n,n-1}. \qquad (6)$$

II.

Les équations (1) et (5) donnent ce théorème sur les combinaisons :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n+1} C_{2n,n} = \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1} + \frac{1}{n-1} C_{2n-4,n-2} \times \frac{1}{2} C_{2,1} \\ + \frac{1}{n-2} C_{2n-6,n-3} \times \frac{1}{3} C_{4,2} + \ldots + \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

III.

On sait que le $(n+1)^e$ nombre figuré de l'ordre $n+1$, a pour expression, $C_{2n,n}$: si donc, dans la table des nombres figurés, on prend ceux qui occupent la diagonale ; savoir :

$$1, \quad 2, \quad 6, \quad 20, \quad 70, \quad 252, \quad 924 \ldots;$$

qu'on les divise respectivement par

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7 \ldots;$$

on obtiendra une nouvelle suite de nombres,

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 14, \quad 42, \quad 132 \ldots, \qquad (A)$$

lesquels jouiront de cette propriété :

Un terme quelconque de la suite (A) *est égal à la somme des produits que l'on obtient en écrivant au-dessous d'elle-même, et dans un ordre inverse, la série des termes précédents, et en multipliant les termes correspondants des deux séries.*

Par exemple,

$$132 = 1.42 + 1.14 + 2.5 + 5.2 + 14.1 + 42.1.$$

Les nombres qui composent cette suite, sont à commencer du second, les valeurs de P_3, P_4,...

IV.

En mettant pour les quantités C, leurs valeurs dans l'équation (7), il vient

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdots\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2n-2}{1}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{2n-4}{1}\cdot\frac{2n-5}{2}\cdots\frac{n-1}{n-2}$$
$$\times\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}+\frac{1}{n-2}\cdot\frac{2n-6}{1}\cdots\frac{n-2}{n-3}\times\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{2n-2}{1}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}.$$

Et en multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots n$:

$$\overline{2n}.\overline{2n-1}\ldots\overline{n+2}=\overline{2n-2}.\overline{2n-3}\ldots\overline{n}+\frac{n}{1}\overline{2n-4}\ldots\overline{n-1}.1+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,\overline{2n-6}$$
$$\ldots\overline{n-2}\times4+\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,.\overline{2n-8}\ldots\overline{n-3}\times6.5+\ldots+\overline{2n-2}\ldots\overline{n}. \qquad (8)$$

Dans ce développement, le terme qui en a i avant lui, a pour expression,

$$T_i=\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}(2n-2i-2)(2n-2i-3)\ldots(n-i)\times2i(2i-1)\ldots(i+2). \quad (9)$$

Cette quantité peut s'exprimer à l'aide des fonctions Γ, dont la définition est, comme on sait,

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1);$$

on a effectivement

$$T_i=\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\ldots\,\frac{n-i+1}{i}\,\frac{\Gamma(2n-2i-1)}{\Gamma(n-i)}\cdot\frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+2)};$$

ou

$$T_i=\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}\,\frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)}\,\frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i)}\cdot\frac{\Gamma(2i+2)}{\Gamma(i+1)}.$$

A l'aide de la relation

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}=\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

découverte par *Legendre*, nous transformerons les deux rapports

$$\frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i)}, \quad \frac{\Gamma(2i+2)}{\Gamma(i+1)},$$

en

$$\frac{2^{2n-2i-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n-i+\frac{1}{2}\right), \quad \frac{2^{2i+1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right);$$

alors le terme général devient

$$T_i = \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}\,\frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)}\cdot\frac{2^{2n}}{\pi}\,\Gamma\left(n-i+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right);$$

ou enfin

$$T_i = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i(i+1)}\cdot\frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\Gamma\left(n-i-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right). \quad (10)$$

Nous pouvons remplacer le produit des deux fonctions Γ par une intégrale eulérienne de première espèce, au moyen de la relation,

$$\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}\,d\theta;$$

et nous aurons

$$T_i = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots(i+1)}\cdot\frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\Gamma(n).\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta. \quad (11)$$

De même, si nous substituons au facteur

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots(i+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+2)\,\Gamma(n-i+1)},$$

la quantité

$$\Gamma(n+1) : \Gamma(n+3)\int_0^1 \theta^{i+1}(1-\theta)^{n-i}\,d\theta;$$

nous obtiendrons finalement

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)}\,\frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta}, \quad (12)$$

Au moyen de cette valeur de T_i, l'équation (8) devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)}\sum_0^{n-1}\frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta},$$

ou

$$\frac{n+2}{2^{2n-2}}\,\pi = \int_0^1 \theta^{n-1}(1-\theta)^n d\theta \sum_0^{n-1}\frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta}, \qquad (13)$$

V.

Le terme général de notre développement peut se mettre sous une forme différente de (12). Nous pouvons écrire

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\Gamma(n+1)\,\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)}\,\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+2)}.$$

Or

$$\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} = \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta,$$

et

$$\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+2)} = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta,$$

donc

$$T_i = \frac{2^{2n}}{\pi^2}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta. \qquad (14)$$

Les valeurs (12) et (14) devant être identiques, on aura

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta = \frac{4}{\pi}\,n(n+1)(n+2)\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta$$
$$\times \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta. \qquad (15)$$

Si l'on suppose $i = 1$, il vient

$$\pi = 4n\,(n+1)(n+2)\int_0^1 \theta^{n-1}(1-\theta)^2\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta. \quad (16)$$

D'ailleurs, ces deux dernières relations se vérifient immédiatement.

En mettant pour T_i sa nouvelle expression dans (8), cette équation devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n}}{\pi^2}\Gamma(n+1)\sum_0^{n-1}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta.$$

Et à cause de

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} = 2\,\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right);$$

puis de

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}}\,(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta;$$

nous aurons enfin

$$2\pi\int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta = \sum_0^{n-1}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta. \quad (17)$$

VI.

L'équation précédente exprime une propriété des fonctions Γ. Pour la mettre en évidence, remplaçons π par $2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$; puis chaque intégrale définie par sa valeur; il viendra

$$4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)} = \sum_0^{n-1}\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)}\cdot\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)};$$

ou, en changeant n en $n-1$ et i en $i-1$:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}\cdot\frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{4}\cdot\sum_1^{n-1}\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)}\cdot\frac{\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)}. \quad (18)$$

Ainsi, en posant

$$\frac{\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = A_i,$$

on a

$$A_1 . A_n = \frac{1}{4}\sum_1^{n-1} A_{n-i}A_i. \tag{19}$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus simple. Pour cela, remarquons d'abord qu'en posant $i=0$, la fonction A_i devient $\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$. Or, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$, et $\Gamma(1)=1$. Si donc, après avoir chassé le dénominateur de l'équation précédente, nous ajoutons $2A_0A_n$ aux deux membres, nous obtiendrons

$$4A_1A_n - 4\sqrt{\pi}\,.\,A_n = \sum_0^n A_{n-i}A_i;$$

ou simplement, à cause de $A_1=\sqrt{\pi}$:

$$\sum_0^n A_{n-i}A_i = 0. \tag{20}$$

Autrement dit, l'équation aux différences finies

$$P_0P_n + P_1P_{n-1} + P_2P_{n-2} + \ldots + P_{n-1}P_1 + P_nP_0 = 0,$$

est satisfaite par $P_n=\frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}$, pourvu que l'on prenne $P_0=-2\sqrt{\pi}$, $P_1=\sqrt{\pi}$.

Il est d'ailleurs évident que cette équation n'a lieu qu'à partir de $n=2$.

Il suit aussi, de ce qui précède, que l'intégrale générale de l'équation

$$4P_1P_n = P_1P_{n-1} + P_2P_{n-2} + \ldots + P_{n-1}P_1, \tag{21}$$

est

$$P_n = \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{P_1}{\sqrt{\pi}}. \tag{22}$$

VII.

Je terminerai cette note par la solution d'un problème qui a une liaison remarquable avec la question de Géométrie, traitée par M. *Lamé*.

PROBLÈME. *De combien de manières peut-on effectuer le produit de* n *facteurs différents.*

Désignons par Z_{n+1} ce nombre.

Supposons les n facteurs écrits dans l'ordre alphabétique.

$$abc\ldots ghkl\ldots qrs;$$

décomposons ce produit en deux groupes, l'un composé de i facteurs $abc\ldots gh$, l'autre composé des $n-i$ facteurs restants; désignons en outre par X_{n+1} le nombre de manières dont il est possible d'effectuer le produit ci-dessus, sans changer l'ordre des lettres : il est clair que l'un des éléments de cette somme sera $X_{i+1}X_{n-i+1}$. Et comme i peut varier depuis 1 jusqu'à $n-1$, nous aurons sans aucune *omission* ni *répétition* :

$$X_{n+1} = \sum_{0}^{n-1} X_{i+1}.X_{n-i+1}. \qquad (23)$$

On doit supposer $X_2 = 1$; d'ailleurs X_3 est aussi égal à 1 : il s'ensuit que l'équation (23) a la même intégrale que l'équation (1); savoir

$$X_{n+1} = P_{n+1}. \qquad (24)$$

Nous avons supposé que les n facteurs étaient disposés en ordre alphabétique : comme ils peuvent être pris dans un ordre quelconque, la quantité X_{n+1} doit être multipliée par le nombre des permutations de n lettres; donc

$$Z_{n+1} = P_{n+1}.\Gamma(n+1),$$

ou

$$Z_{n+1} = n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2). \qquad (25)$$

Si, dans l'équation (23), nous mettons au lieu des X leurs valeurs en Z, nous trouverons après avoir multiplié tous les termes par $\Gamma(n+1)$:

$$Z_{n+1} = \frac{n}{1} Z_2 Z_n + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} Z_3 Z_{n-1} + \ldots + \frac{n}{1} Z_n Z_2, \qquad (26)$$

et comme la formule (25) donne

$$Z_{n+1} = (4n - 6) Z_n. \qquad (27)$$

Il s'ensuit que ces deux dernières équations rentrent l'une dans l'autre. Ce résultat, auquel il serait peut-être difficile d'arriver directement, est assez remarquable.

L'équation (26) devient, en mettant pour Z_{n+1} sa valeur $\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)}$:

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{n}{1}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma(2n-5)}{\Gamma(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1}\frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)}.$$

A cause de

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{(2n-2)\,\Gamma(2n-2)}{(n-1)\,\Gamma(n-1)} = 2\frac{\Gamma(2n-2)}{\Gamma(n-1)} = \frac{2^{2n-2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right),$$

cette dernière équation se transforme facilement en

$$\left.\begin{aligned} 4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right) \\ + \ldots + \frac{n}{1}\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$\left.\begin{aligned} 4n\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{n-\frac{1}{2}}d\theta = \frac{n+1}{1}\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{n-\frac{3}{2}}d\theta + \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}\int_0^1 \theta^{-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\prime-\frac{1}{2}}d\theta \\ + \ldots + \frac{n+1}{1}\int_0^1 \theta^{n-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Les équations (28) ou (29) expriment une propriété des fonctions Γ, analogue à celle qui a été donnée plus haut.

THÉORÈMES

Sur les intersections des cercles et des sphères;

Par Aug. MIQUEL.

Théorème I.

« Lorsque quatre points A, B, C, D (fig. 1, planche III) sont situés » sur une même circonférence de cercle ABCD; si par les points » consécutifs A et B, B et C, C et D, D et A, on fait passer des » circonférences de cercle, les quatre secondes intersections A′, B′, » C′, D′ des circonférences consécutives se trouveront sur une même » circonférence de cercle A′B′C′D′. »

En effet, joignant AB, BC, CD, DA, A′B′, B′C′, C′D′, D′A′, AA′, BB′, CC′, DD′, on aura

$$A'AB = 2d - A'B'B, \qquad C'CB = 2d - C'B'B;$$

et par conséquent,

$$A'AB + C'CB = A'B'C'.$$

On obtiendrait de la même manière

$$A'AD + C'CD = A'D'C'.$$

En ajoutant terme à terme les deux égalités précédentes, il vient

$$BAD + DCB = C'B'A' + A'D'C'.$$

Or, on a

$$BAD + DCB = 2d.$$

Donc on aura

$$C'B'A' + A'D'C' = 2d\,;$$

ce qui nous apprend que les points A', B', C', D', sont situés sur une même circonférence de cercle.

Réciproque évidente. « Lorsque trois points C, B', D' sont situés » respectivement sur chacun des côtés d'un triangle curviligne DBA' » formé par trois arcs de cercle DB, BA', A'D qui se coupent tous » trois à un même point A ; si on fait passer une circonférence de » cercle par chacun des sommets de ce triangle, et par les deux des » trois points C, B', D', qui se trouvent sur les deux côtés qui abou- » tissent à ce sommet, les trois circonférences D'DC, CBB', B'A'D', » ainsi obtenues, se couperont en même point C'. »

Nota. Dans ce qui suit, il nous arrivera de désigner une circonférence de cercle par trois des points par lesquels elle passerait si elle était décrite ; et une sphère par quatre points de sa surface.

Théorème II.

» Lorsqu'un quadrilatère complet curviligne ABCDEF est (fig. 2) » formé par quatre arcs de cercle AB, BC, CD, DA, qui se coupent » tous quatre en un même point P, si l'on circonscrit des circonférences » de cercle à chacun des quatre triangles curvilignes que forment » les côtés de ce quadrilatère, les circonférences de cercle AFB, » EBC, DCF, DAE ainsi obtenues se couperont toutes quatre en un » même point G. »

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que trois quelconques AFB, EBC, DCF de ces quatre circonférences se coupent en un même point. Or, d'après la réciproque précédente, puisque les trois points B, C, F sont situés respectivement sur chacun des côtés du triangle curviligne AED formé par trois arcs de cercle qui se coupent en un même point P, les circonférences AFB, EAC, DCF, se coupent toutes trois en un certain point G. Donc les quatre circonférences AFB, EBC, DCF, DAF se coupent en ce même point G.

Théorème III.

« Lorsqu'un pentagone complet curviligne ABCDEHKLM (fig. 3)
» est formé par cinq arcs de cercle qui prolongés se couperaient
» tous en un même point que nous appellerons P; en prenant ces
» arcs de cercle quatre à quatre, on a évidemment cinq quadrila-
» tères complets curvilignes, qui, d'après le théorème précédent,
» sont tels que les circonférences de cercle circonscrites aux quatre
» triangles de chacun de ces quadrilatères se coupent en un même
» point. Je dis maintenant qu'on peut faire passer une circonférence
» de cercle par les cinq points A′, B′... en chacun desquels se
» rencontrent les quatre circonférences circonscrites aux quatre
» triangles de chacun des cinq quadrilatères complets ABKEMG,
» BCLAGH, etc. »

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que quatre quelconques B′, C′, D′, E′ de ces cinq points A′, B′, C′, D′, E′ se trouvent sur une même circonférence de cercle. Or, puisque les quatre points A, H, C, D sont situés sur une même circonférence de cercle AHCD, d'après le théorème I, les quatre points B′, C′, D′, E′ qu'on peut considérer comme les secondes intersections des circonférences consécutives LAH et HBC, HBC et CKD, CKD et DEL, DEL et LAH se trouvent sur une même circonférence de cercle. Donc les cinq points A′, B′, C′, D′, E′ se trouvent situés sur une même circonférence de cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

En supposant que le point P soit situé à une distance infinie des points A, B, C, D, E, les arcs AB, BC... ne sont autre chose que des lignes droites. D'où l'on voit que du théorème précédent se déduit le théorème relatif au pentagone que nous avons démontré à la page 486 de ce journal, et que nous avions déjà fait connaître, en 1836, dans le journal *le Géomètre*.

Nous allons faire voir maintenant que les trois théorèmes que nous venons de démontrer, sont également vrais lorsque les cercles sont tracés sur la surface d'une sphère. L'extension dont il s'agit se déduira facilement du théorème suivant.

Théorème IV.

« Soit abaissée du centre d'une sphère, que nous appellerons O, » sur un plan quelconque, que nous désignerons par O', une per- » pendiculaire indéfinie ; en prenant pour centre de projection un » des points S d'intersection de la surface de la sphère avec cette » perpendiculaire, la projection sur le plan O' de tout cercle tracé » sur la surface de la sphère O sera un cercle. »

Appelons P la seconde intersection de la perpendiculaire avec la sphère O, P' le pied de la perpendiculaire, et en général désignons par A, B, C... des points de la surface O, par A', B', C'.... leurs projections sur le plan O'. Il est évident que tout rayon projetant SAA' formera avec la perpendiculaire SPP' et les droites AP et A'P' deux triangles SAP, SA'P' rectangles l'un en A, l'autre en P'. Par conséquent, ces deux triangles semblables nous donneront

$$SA.SA' = SP.SP';$$

on obtiendrait de la même manière,

$$SB.SB' = SP.SP'.$$

Donc,

$$SA.SA' = SB.SB';$$

ce qui nous apprend que les quatre points A, A', B, B' sont sur une même circonférence de cercle.

Cela posé, soit a un cercle tracé sur la sphère O, a' sa projection sur le plan O'; considérons une surface de sphère V qui passe par la circonférence a et par un point D' de la courbe a'. Pour démontrer que la courbe a' est une circonférence de cercle, il suffira de faire voir que tous ses autres points se trouvent sur la sphère V. Or, E étant tout autre point de cette courbe a', les quatre points D, D', E, E' sont, d'après ce qui a été dit plus haut, sur une même circonférence, et cette circonférence n'est autre chose que l'intersection du plan des rayons projetants SDD', SEE' avec la sphère V, puisque cette sphère V passe par le point D' et par les points D et E de la circonférence a. Ainsi le point E' appartient à la sphère V. Donc la courbe a' est une circonférence de cercle.

On démontrerait absolument de la même manière que, réciproquement, toute courbe tracée sur la surface de la sphère O, qui a pour projection un cercle sur le plan O', est elle-même un cercle.

Il est maintenant facile de voir que le théorème I, par exemple, a lieu sur la surface d'une sphère, et que sa réciproque, le théorème II et le théorème III qui n'en sont que des conséquences, ont également lieu sur la surface d'une sphère.

Théorème V.

« Soit un tétraèdre curviligne ABCD (fig. 4) formé par quatre » surfaces sphériques PABC, PACD, PABD, PBCD, qui se coupent » toutes quatre en un même point P situé où l'on voudra dans » l'espace; soient pris six points E, F, G, H, I, K respectivement sur » chacune des six arètes AB, AC, AD, BC, CD, BD de ce tétraèdre. » Si l'on fait passer une surface de sphère par chacun des sommets du » tétraèdre et par les trois des six points E, F, G, H, I, K qui se » trouvent sur les arètes qui aboutissent à ce sommet : je dis » 1°. que les quatre sphères AEFG, BEHK, CHFI, DIKG, ainsi ob- » tenues se coupent trois à trois sur chacune des faces du tétraèdre; » 2°. qu'elles se coupent toutes quatre en un même point de l'espace. »

Car 1°. Les arcs de cercle AB, BC, CA se coupent en un même point P de la sphère PABC, sur laquelle ils sont tracés, et les points E, H, F appartenant respectivement à chacun des côtés du triangle curviligne ABC, d'après l'extension de la réciproque du théorème I, les trois circonférences AFE, BEH, CHF se coupent en un même point L de la sphère PABC. Or, ces circonférences AFE, BEH, CHF ne sont autre chose que les intersections de la sphère PABC avec chacune des trois sphères AEFG, BEHK, CHFI. Donc ces trois dernières sphères se coupent au point L de la sphère PABC.

On démontrerait de la même manière que trois autres des quatre sphères AEFG, BEHK, CHFI, DIKG se coupent en des points M, N, O qui appartiennent respectivement aux sphères PACD, PABD, PBCD.

2°. Les intersections des trois sphères PABC, PACD, PABD avec la sphère AEFG sont évidemment trois circonférences de cercle qui se coupent toutes trois en un même point A de la sphère PACD et deux à deux aux points E, F, G qui peuvent être considérés comme les sommets d'un triangle curviligne tracé sur cette dernière sphère, aux côtés duquel triangle appartiennent respectivement les points, L, M, N. Par conséquent, d'après l'extension de la réciproque du théorème I, les circonférences de cercle NEL, LFM, MGN se coupent toutes trois en un même point de cette sphère AEFG. Or, d'après ce qui a été dit dans la première partie de cette proposition-ci, chacune des sphères BEHK, CHFI, DIGK passe respectivement par les points N et L, L et M, M et N. Donc les trois circonférences NEL, LFM, MGN ne sont autre chose que les intersections de chacune des trois dernières sphères avec la sphère AEFG. Par conséquent ces trois mêmes sphères se coupent toutes trois en un même point de la sphère AEFG : ce qui revient à dire que les quatre sphères AEFG, BEHK, CHFI, DGIK se coupent toutes quatre en un même point. Ce qu'il fallait démontrer.

En supposant que le point P soit situé à une distance infinie des points A, B, C, D, le tétraèdre ABCD n'est autre chose qu'un tétraèdre ordinaire à faces planes. D'où l'on déduit le théorème suivant :

Théorème VI.

« Si après avoir pris un point sur chacune des six arètes d'un té-
» traèdre, on fait passer une surface de sphère par chacun des som-
» mets du tétraèdre et par les trois points pris sur les trois arètes qui
» aboutissent à ce sommet, les quatre sphères ainsi déterminées se
» couperont trois à trois sur chacune des faces du tétraèdre, et toutes
» quatre en un même point de l'espace. »

SUITE DU MÉMOIRE

Sur la classification des Transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients;

Par J. LIOUVILLE (*).

§ VI.

On prouve qu'il existe des fonctions finies explicites de toutes les espèces.

21. On peut demander si, quelque grand que soit le nombre entier positif m, il est toujours possible de trouver des transcendantes de m^{ieme} espèce. Pour répondre à cette question, il suffit de considérer les quantités successives $\log \log \log x$, $\log \log \log \log x$, etc.; car nous prouverons qu'elles sont respectivement de troisième, de quatrième espèce, etc., sans que jamais elles puissent s'abaisser.

Représentons par p la quantité $\log \log \ldots \log x$, et supposons que dans cette quantité il y ait un nombre $(m-1)$ de signes logarithmiques placés les uns sur les autres. Dans les cas particuliers où l'on aurait $m=2$ ou $m=3$, la transcendante p serait de $(m-1)^{ième}$ espèce, comme on l'a établi ci-dessus. Maintenant, quel que soit m, je dis que si p est une transcendante de $(m-1)^{ième}$ espèce, $\log p$ sera une transcendante de $m^{ième}$ espèce. Ce théorème une fois démontré, la proposition que nous avons en vue dans ce paragraphe se trouvera démontrée aussi.

(*) *Voyez* tome II de ce Journal, page 56.

La fonction p étant de $(m-1)^{ième}$ espèce et de forme logarithmique, il est aisé de s'assurer que p' ou $\frac{dp}{dx}$ est d'espèce inférieure à la $(m-1)^{ième}$. D'après cela $\frac{p'}{p}$ ou la dérivée de $\log p$ est de $(m-1)^{ième}$ espèce. Donc $\log p$ est au moins de $(m-1)^{ième}$ espèce et au plus de $m^{ième}$ espèce. En d'autres termes $\log p$ peut jusqu'ici appartenir à la $(m-1)^{ième}$ ou à la $m^{ième}$ espèce. Pour prouver que ce second cas est celui qui a lieu, il suffit de faire voir que le premier est impossible.

Supposons donc $\log p$ exprimable par une fonction φ de $(m-1)^{ième}$ espèce, et prouvons que cette hypothèse conduit à une absurdité. Pour cela réduisons à son *minimum* le nombre total n des transcendantes $\zeta, \eta, \ldots \theta$ de $(m-1)^{ième}$ espèce contenues dans φ. On pourra toujours admettre que p est une des quantités $\zeta, \eta, \ldots. \theta$. En effet, dans le cas contraire, l'équation

$$d\log p = d\varphi \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{p} = \varphi'$$

contiendra nécessairement dans son second membre une des transcendantes dont nous parlons puisque, si elles avaient toutes disparu, $\frac{p'}{p}$ serait exprimée par une fonction φ' d'espèce inférieure à la $(m-1)^{ième}$. L'équation $\frac{p'}{p} = \varphi'$ fournira donc la valeur de l'une des quantités $\zeta, \eta, \ldots \theta$, de θ par exemple, en fonction algébrique de p, de sorte qu'en substituant sa valeur dans φ, la transcendante θ se trouvera remplacée par p sans que le nombre n ait augmenté. Pour mettre p en évidence nous écrirons

$$\log p = \varphi(x, p),$$

et en différenciant, il viendra

$$\frac{p'}{p} = \varphi'_x(x, p) + \varphi'_p(x, p)\frac{p'}{p}.$$

Le nombre n étant réduit à son *minimum*, cette équation doit être identique par rapport à p; on peut donc remplacer p par $\mu + p$, μ

étant une constante arbitraire, ce qui donne

$$\frac{p'}{\mu+p} = \varphi'_x(x, \mu+p) + \varphi'_p(x, \mu+p)\frac{p'}{\mu+p},$$

c'est-à-dire

$$d\log(\mu+p) = d\varphi(x, \mu+p).$$

En intégrant, on a

$$\log(\mu+p) = \varphi(x, \mu+p) + \log(\mu+a) - \varphi(b, \mu+a):$$

b désigne une valeur particulière quelconque de x et a la valeur correspondante de p. A présent je différencie par rapport à μ, et posant $\mu=0$ après la différenciation, je trouve

$$\frac{1}{p} = \varphi'_p(x, p) + \frac{1}{a} - \varphi'_a(b, a).$$

Cette équation doit encore être identique par rapport à p et l'on peut y remplacer p par une indéterminée i. On a ainsi

$$\frac{1}{i} = \varphi'_i(x, i) + \frac{1}{a} - \varphi'_a(b, a),$$

équation qui, multipliée par di et intégrée, nous en donne une autre

$$\log i = \varphi(x, i) - \varphi(x, i_0) + \log i_0 + \left[\frac{1}{a} - \varphi'_a(b, a)\right](i-i_0),$$

dans laquelle i_0 est une valeur particulière de i, et qui doit être regardée comme absurde, puisqu'elle fournit pour $\log i$ une valeur algébrique en i. Donc on est conduit à une absurdité lorsqu'on suppose $\log p$ exprimable par une fonction finie explicite de $(m-1)^{\text{ième}}$ espèce: donc cette quantité $\log p$ est de $m^{\text{ième}}$ espèce, ce qu'il fallait démontrer.

§ VII.

Méthode pour résoudre une équation transcendante lorsque la racine de l'équation est exprimable en fonction finie explicite des coefficients.

22. Soit $T=0$ une équation transcendante ayant pour premier membre une fonction finie T de l'inconnue y et d'un paramètre indéterminé x: si l'on cherche à résoudre cette équation pour en tirer la valeur de y en fonction de x, il pourra se présenter deux cas, suivant que la quantité y est ou n'est pas exprimable par une fonction finie explicite de x. Cela posé, le problème de la résolution des équations transcendantes en quantités finies explicites peut s'énoncer ainsi : Étant donnée l'équation $T=0$, décider s'il est ou non possible d'y satisfaire par une valeur de la forme $y=$ *une fonction finie explicite de* x, et, si la réponse est affirmative, trouver la valeur de y.

La méthode que nous allons exposer pour résoudre ce problème est fondée sur un principe général semblable à celui dont nous avons fait usage dans les numéros précédents et surtout au § V; mais ce principe laisse subsister les difficultés particulières propres à chaque exemple. Dès lors, au lieu de présenter notre méthode d'une manière abstraite, nous croyons devoir l'exposer sur des équations choisies : les détails dans lesquels nous entrerons suffiront pour indiquer nettement la marche à suivre dans tout autre cas.

23. Considérons l'équation

$$(1) \qquad \log y = \frac{y}{x},$$

et cherchons s'il est possible de satisfaire à cette équation en prenant pour y une fonction finie explicite du paramètre indéterminé x.

D'après un théorème démontré n° 4, le logarithme d'une fonction algébrique n'est jamais égal à une autre fonction algébrique ; ainsi on voit d'abord que la valeur de y ne peut pas être une fonction algébrique de x.

Supposons maintenant que y soit une fonction finie explicite de première espèce. Si l'on réduit à son *minimum* le nombre des transcendantes de cette fonction, je dis qu'elle ne renfermera plus alors aucun logarithme. Car s'il en existe un (seul ou avec d'autres), désignons-le par $\log u$, u étant une fonction algébrique de x. En posant $\log u = \theta$, on aura

$$y = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ : dans cette fonction φ peuvent se trouver en outre, algébriquement aussi, d'autres transcendantes dont il est inutile de faire mention.

En remplaçant y par $\varphi(x, \theta)$ dans l'équation (1), il vient

$$\log\varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, \theta)}{x}$$

d'où l'on conclut, par la différenciation,

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta)+\varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}\left[\varphi'_x(x, \theta)+\varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}\right] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2}.$$

Cette dernière équation étant algébrique par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes monomes contenues dans $\varphi(x, \theta)$, on peut y mettre $\mu + \theta$ au lieu de θ, μ étant une constante indéterminée (*). On obtient aisément par là

$$d\log\varphi(x, \mu + \theta) = d\left[\frac{\varphi(x, \mu + \theta)}{x}\right].$$

(*) Les lecteurs qui ont prêté quelque attention aux autres paragraphes de ce Mémoire doivent être accoutumés à nous voir remplacer la transcendante θ, dont nous nous occupons, par $\mu\theta$ ou par $\mu + \theta$, suivant que θ est une exponentielle ou un logarithme. La raison de cette différence tient à la nature même des équations différentielles qui servent à définir ces deux espèces de fonctions. La quantité $z = \log x$ dépend de l'équation différentielle $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$, dont l'intégrale complète est $z = \mu + \log x$, μ étant une constante arbitraire, tandis que si l'on pose $z = e^x$ on a l'équation différentielle $\frac{dz}{dx} = z$ dont l'intégrale complète est

En intégrant et nommant a la valeur de θ qui répond à une valeur b de x prise à volonté, on a ensuite

$$\log \varphi(x, \mu + \theta) = \frac{\varphi(x, \mu + \theta)}{x} + \log \varphi(b, \mu + a) - \frac{\varphi(b, \mu + a)}{b}.$$

Je différencie par rapport à μ l'équation que je viens d'écrire, et je pose $\mu = 0$ après la différenciation, ce qui me donne

$$\frac{\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\varphi'_\theta(x, \theta)}{x} + \frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{\varphi'_a(b, a)}{b},$$

relation algébrique entre x, θ et les autres transcendantes monomes, dans laquelle je puis substituer à θ une indéterminée i. J'ai par conséquent

$$(2) \qquad \frac{\varphi'_i(x, i)}{\varphi(x, i)} = \frac{\varphi'(x, i)}{x} + \frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{\varphi'_a(b, a)}{b},$$

équation que j'intègre par rapport à i et d'où je tire

$$(3) \qquad \log \varphi(x, i) = \frac{\varphi(x, i)}{x} + \left[\frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{\varphi'_a(b, a)}{b}\right](i - i_\circ) + \log \varphi(x, i_\circ) - \frac{\varphi(x, i_\circ)}{x}.$$

$z = \mu e^x$. Aussi, lorsque $\theta = \log u$, la dérivée

$$\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}$$

de $\varphi(x, \theta)$ devient celle de $\varphi(x, \mu + \theta)$ par le changement de θ en $\mu + \theta$: elle ne deviendrait pas celle de $\varphi(x, \mu\theta)$ par le changement de θ en $\mu\theta$; car ce changement donne

$$\varphi'_x(x, \mu\theta) + \varphi'_{\mu\theta}(x, \mu\theta)\frac{u'}{u}$$

et non pas

$$\varphi'_x(x, \mu\theta) + \varphi'_{\mu\theta}(x, \mu\theta)\frac{\mu u}{u}.$$

Au contraire, lorsque $\theta = e^u$, c'est en remplaçant θ par $\mu\theta$ que l'on transforme la dérivée de $\varphi(x, \theta)$ en dérivée de $\varphi(x, \mu\theta)$.

de i qui ne peut pas être égale à $\log \varphi(x, i)$. Donc il est absurde d'admettre que l'expression de la racine y renferme un ou plusieurs logarithmes, tels que log

24. L'expression de cette racine y ne contient pas non plus d'exponentielles. Soit en effet, s'il est possible, $\theta = e^u$ une exponentielle que l'on suppose devoir y entrer et $\varphi(x, \theta)$ la valeur même de y, u étant une fonction algébrique de x, et φ une fonction algébrique, tant par rapport à θ que par rapport aux autres exponentielles que nous ne mettons pas en évidence. Il faudra que l'on ait

$$\log \varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, \theta)}{x},$$

d'où résulte en différenciant

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u'}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}[\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u'] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2},$$

équation algébrique par rapport à x, θ, et par rapport aux autres exponentielles. On peut donc au lieu de θ écrire $\mu\theta$, μ étant une constante indéterminée. L'équation que l'on obtient ainsi revient à

$$d \log \varphi(x, \mu\theta) = d\, \frac{\varphi(x, \mu\theta)}{x},$$

et en l'intégrant on en tire

$$\log \varphi(x, \mu\theta) = \frac{\varphi(x, \mu\theta)}{x} + \log \varphi(b, \mu a) - \frac{\varphi(b, \mu a)}{b},$$

b étant une valeur particulière de x pour laquelle $\theta = a$.

Maintenant je différencie par rapport à μ et je pose $\mu = 1$ après la différenciation. Dans l'équation

$$\frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{x} + \frac{a\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{a\varphi'_a(b, a)}{b}$$

que cette opération produit, on a évidemment le droit de remplacer

θ par une indéterminée i, ce qui donne

$$\frac{\quad}{\varphi(x,i)} \quad \frac{\quad}{x} \quad \frac{\quad}{\varphi(b,a)} \quad \frac{\quad}{b},$$

et par suite,

$$\frac{\varphi'_i(x,i)di}{\varphi(x,i)} = \frac{\varphi'_i(x,i)di}{x} + \left[\frac{a\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)} - \frac{a\varphi'_a(b,a)}{b}\right]\frac{di}{i}.$$

En intégrant par rapport à i et déterminant la constante à l'aide d'une valeur particulière i_0 de i, on a donc

$$(5) \qquad \log\varphi(x,i) = \frac{\varphi(x,i)}{x} + \text{A}(\log i - \log i_0) + \log\varphi(x,i_0) - \frac{\varphi(x,i_0)}{x};$$

A représente la constante

$$\frac{a\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)} - \frac{a\varphi'_a(b,a)}{b}.$$

En mettant l'équation (5) sous la forme

$$\frac{\varphi(x,i)}{x} - \text{A}\log i_0 + \log\varphi(x,i_0) - \frac{\varphi(x,i_0)}{x} = \log\varphi(x,i) - \text{A}\log i,$$

on voit que son premier membre est une fonction algébrique de i qui ne peut se réduire à une simple constante, puisque i entre essentiellement dans $\varphi(x,i)$: le second membre ne renferme que des logarithmes : l'existence d'une telle équation est donc contraire au théorème du n° 19.

En regardant la racine y de l'équation (1) comme une fonction transcendante de première espèce, nous avons démontré 1°. que cette fonction ne renferme aucun logarithme ; 2°. qu'on arrive à une absurdité en y admettant des exponentielles. Il faut conclure de là que cette racine y ne peut avoir la forme en question. On prouvera par des raisonnements tout-à-fait semblables aux précédents que cette racine y ne peut pas non plus être exprimée par une fonction de seconde, de troisième espèce, etc., ou mieux on fera voir généralement que si la fonction y ne peut pas être de $n^{\text{ième}}$ espèce, elle ne pourra pas non plus être de $(n+1)^{ième}$ espèce : il suffira pour cela d'appliquer aux exponentielles de $(n+1)^{ième}$ espèce les raisonnements exposés ci-dessus dans le cas particulier où l'on suppose $n=0$. En un mot il est impossible de satisfaire à l'équation (1) en posant $y =$ *une fonction finie explicite de* x, ce qu'il fallait démontrer.

25. En remplaçant y par e^y dans l'équation (1), il vient

$$xy = e^y,$$

équation nouvelle qui ne pourra pas non plus être résolue par rapport à y en fonction finie explicite de x, mais dont la racine peut s'exprimer par une intégrale définie. Cette intégrale définie qui dépend de la variable x n'est donc pas réductible à la forme de fonction finie explicite de x.

Mais on peut résoudre au contraire l'équation

$$(6) \qquad \log y = \frac{y}{x} + \log\log x$$

qui diffère peu de l'équation (1) et à laquelle on satisfait en posant $y = x \log x$. Voyons comment cette valeur de y résulte de notre méthode.

D'abord y ne peut pas être une simple fonction algébrique de x. En effet l'équation (6) donnant

$$\log\log x = \log y - \frac{y}{x},$$

il s'ensuivrait que $\log\log x$ pourrait s'exprimer par des transcendantes de première espèce, ce qui est absurde. Essayons donc de satisfaire à l'équation (1) par une valeur de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de première espèce.*

26. Outre la transcendante $\log x$, cette fonction, en supposant qu'elle existe, pourra contenir d'autres transcendantes monomes, mais en réduisant le nombre de ces dernières à son *minimum*, nous serons certains qu'elles ne sont liées aux deux quantités x, $\log x$, et à des transcendantes d'espèce inférieure par aucune relation algébrique, de sorte que si nous tombons sur une relation de cette espèce, nous au-

rons le droit d'y remplacer les transcendantes dont il s'agit par de simples lettres indéterminées.

Cela posé, je dis que la valeur de y ne renferme aucune exponentielle. Car, dans le cas contraire, soit $\theta = e^u$ une des exponentielles que l'on suppose devoir y entrer, et suivant notre usage mettons-la en évidence en écrivant

$$y = \varphi(x, \theta).$$

Remplaçant y par $\varphi(x, \theta)$, l'équation (6) devient

$$\log \varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, \theta)}{x} + \log \log x,$$

d'où l'on tire par la différenciation

$$\frac{\varphi'(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u'}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}[\varphi'(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u'] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2} + \frac{1}{x \log x},$$

équation algébrique par rapport à x, $\log x$, θ, etc., et dans laquelle on peut remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une indéterminée. L'équation que l'on obtient ainsi peut se mettre sous la forme

$$d \log \varphi(x, \mu\theta) = d\left[\frac{\varphi(x, \mu\theta)}{x}\right] + d \log \log x,$$

et en l'intégrant on a

$$\log \varphi(x, \mu\theta) = \frac{\varphi(x, \mu\theta)}{x} + \log \log x + \log \varphi(b, \mu a) - \frac{\varphi(b, \mu a)}{b} - \log \log b,$$

b étant une valeur particulière quelconque de x et a la valeur correspondante de θ.

Maintenant je différencie, par rapport à μ, et je pose $\mu = 1$ après la différenciation. Dans l'équation

$$\frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{x} + \frac{a\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{a\varphi'_a(b, a)}{b}$$

que cette opération produit, nous avons évidemment le droit de remplacer θ par une indéterminée i. Or ce changement conduit à une équation toute semblable à l'équation (4) que nous avons vue être impossible, n° 24. La valeur de y ne renferme donc aucune exponentielle.

27. Elle ne peut pas non plus contenir de logarithmes de la forme $\theta = \log u$, mais essentiellement différents de $\log x$. Adoptons en effet l'hypothèse contraire, et pour mettre θ en évidence posons $y = \varphi(x, \theta)$. Il nous viendra, en vertu de l'équation (6),

$$\log \varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, \theta)}{x} + \log \log x,$$

d'où l'on tire par la différenciation

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}\left[\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}\right] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2} + \frac{1}{x \log x}.$$

L'équation que je viens d'écrire étant algébrique par rapport à x, $\log x$, et par rapport aux logarithmes θ, etc., qui sont irréductibles avec $\log x$, on peut y remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante arbitraire. Le résultat que l'on obtient ainsi peut se mettre sous la forme

$$d \log \varphi(x, \mu + \theta) = d\left[\frac{\varphi(x, \mu + \theta)}{x}\right] + d \log \log x,$$

et l'on a en intégrant

$$\log \varphi(x, \mu + \theta) = \frac{\varphi(x, \mu + \theta)}{x} + \log \log x + \log \varphi(b, \mu + a) - \frac{\varphi(b, \mu + a)}{b} - \log \log b,$$

b étant une valeur particulière quelconque de x, et a la valeur correspondante de θ.

Or, si l'on différencie par rapport à μ l'équation précédente, et si, après avoir posé $\mu = 0$, l'on remplace θ par une indéterminée i, comme on a droit de le faire, l'équation nouvelle à laquelle ces opérations conduiront sera toute semblable à l'équation (2) du n° 23 et par conséquent ne pourra pas subsister. Ainsi $\log x$ est la seule transcendante qui puisse entrer dans la valeur de y réduite à sa forme la plus simple.

28. Cela étant, posons $\log x = \theta$ et $y = \varphi(x, \theta)$, φ désignant une fonction algébrique des deux quantités x, θ. L'équation (6) différenciée nous fournira

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x \log x},$$

ou

$$(7) \qquad \frac{\varphi'_x(x, \theta) + \frac{1}{x}\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}\left[\varphi'_x(x, \theta) + \frac{1}{x}\varphi'_\theta(x, \theta)\right] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2} + \frac{1}{x\theta}.$$

Remplaçons θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante arbitraire; nous aurons sans difficulté

$$d \log \varphi(x, \mu + \theta) = d\left[\frac{\varphi(x, \mu + \theta)}{x}\right] + d \log(\mu + \theta).$$

En intégrant et nommant b, a deux valeurs correspondantes de x et de θ, il vient donc

$$\log \varphi(x, \mu + \theta) = \frac{\varphi(x, \mu + \theta)}{x} + \log(\mu + \theta) + \log \varphi(b, \mu + a) - \frac{\varphi(b, \mu + a)}{b} - \log(\mu + a).$$

Je différencie cette équation nouvelle par rapport à μ, après quoi je pose $\mu = 0$, puis je remplace θ par une indéterminée i. Je trouve de la sorte

$$(8) \qquad \frac{\varphi'_i(x, i)}{\varphi(x, i)} = \frac{\varphi'_i(x, i)}{x} + \frac{1}{i} + m,$$

en faisant pour abréger

$$\frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{\varphi'_a(b, a)}{b} - \frac{1}{a} = m.$$

L'équation (8) où l'on doit prendre i pour variable indépendante est une équation différentielle du premier ordre, et il s'agit d'y satisfaire par une intégrale algébrique, car $\varphi(x, i)$ est une fonction algébrique de i. Or en multipliant ses deux membres par di et intégrant, on a

$$\log \varphi(x, i) = \frac{1}{x}\varphi(x, i) + \log i + mi + \text{constante},$$

ou

$$\log\left[\frac{\varphi(x, i)}{i}\right] = \frac{1}{x}\varphi(x, i) + mi + \text{const.},$$

équation dont les deux membres se présentent l'un sous une forme algébrique, l'autre sous une forme logarithmique, ce qui exige que chacun d'eux soit indépendant de i. On a donc nécessairement $\varphi(x, i)=\lambda i$, λ étant indépendant de i; et par conséquent $\varphi(x, \theta)=\lambda\theta$, $\varphi'_\theta(x, \theta)=\lambda$, $\varphi'_x(x, \theta)=\theta\frac{d\lambda}{dx}$. Ces valeurs substituées dans la différentielle de l'équation (6), c'est-à-dire dans l'équation (7) dont on s'est servi tout-à-l'heure, nous donnent

$$\frac{d\lambda}{\lambda dx} + \frac{1}{x\theta} = \frac{1}{x}\left(\theta\frac{d\lambda}{dx} + \frac{\lambda}{x}\right) - \frac{\lambda\theta}{x^2} + \frac{1}{x\theta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\lambda}{\lambda dx} - \frac{\lambda}{x^2} = \theta\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{d\lambda}{dx} - \frac{\lambda}{x^2}\right).$$

Or θ étant un logarithme et λ étant comme $\varphi(x, i)$ une fonction algébrique de x, cette équation ne peut subsister que si l'on a à la fois

$$\frac{d\lambda}{\lambda dx} = \frac{\lambda}{x^2},\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\lambda}{x^2},\quad \text{d'où}\quad \lambda = x.$$

La seule valeur possible de y est donc $x\log x$: l'équation $y=x\log x$ satisfait à l'équation $\frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x\log x}$, qui est la différentielle de l'équation (6); elle en est donc une intégrale particulière, tout aussi bien que l'équation (6); de plus en posant $x=e$, elle donne $y=e$, ce qui s'accorde aussi avec ce que fournit l'équation (6): donc cette équation (6) est nécessairement vérifiée quand on pose $y=x\log x$; de sorte que nous en avons, comme nous le voulions, trouvé la racine par une méthode directe.

29. Désignons par $F(x, y)$ une fonction algébrique de x, y, et considérons l'équation

$$(9) \qquad \log y = F(x, y),$$

dans laquelle l'équation (1) est comprise comme cas particulier : nous supposons que $F(x, y)$ dépend de x et de y, en sorte que des deux dérivées $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$, aucune n'est identiquement nulle; nous supposons de plus que pour aucune valeur déterminée b de y, $F(x, y)$ ne se réduit à une simple constante égale à $\log b$ (*). Cela étant, on démontre qu'il est impossible d'exprimer la racine y de l'équation (9) par une fonction finie explicite de x.

Comme il est d'abord évident que cette racine n'est pas algébrique, admettons qu'on puisse satisfaire à l'équation (9) en prenant pour y une fonction de $n^{ième}$ espèce : réduisons à leur *minimum* le nombre total des transcendantes monomes de $n^{ième}$ espèce que cette fonction renferme, et soit $\theta = e^u$ une des exponentielles de $n^{ième}$ espèce que l'on suppose devoir y entrer : enfin pour mettre θ en évidence, écrivons

$$y = \varphi(x, \theta).$$

L'équation (9) nous donnera

$$\log \varphi(x, \theta) = F[x, \varphi(x, \theta)],$$

et par suite

$$d \log \varphi(x, \theta) = dF[x, \varphi(x, \theta)].$$

Or si l'on développe les différenciations indiquées en ayant soin de remplacer $d\theta$ par $\theta u' dx$, on tombera sur une équation algébrique par rapport à toutes les transcendantes de $n^{ième}$ espèce et dans laquelle on pourra remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une constante arbitraire. Le

(*) Si $F(x, y)$ se réduisait à une fonction $F(x)$ de x seule, on aurait $y = e^{F(x)}$. Si $F(x, y)$ se réduisait à une fonction de y seule, la valeur de y fournie par l'équation (9) serait purement numérique et cesserait de dépendre de x. Enfin si, pour une valeur particulière b de y, $F(x, y)$ était égale à $\log b$, l'équation (9) serait satisfaite en posant $y = b$.

résultat qu'on obtient en opérant ainsi peut se mettre sous la forme

$$d \log \varphi(x, \mu\theta) = d\mathrm{F}[x, \varphi(x, \mu\theta)];$$

c'est ce dont on s'assure aisément en effectuant le calcul, et ce qui cesserait d'être vrai si θ représentait un logarithme au lieu d'une exponentielle.

En intégrant et nommant a la valeur de θ qui répond à $x = b$, on aura donc

$$\log \varphi(x, \mu\theta) = \mathrm{F}[x, \varphi(x, \mu\theta)] + \log \varphi(b, \mu a) - \mathrm{F}[b, \varphi(b, \mu a)].$$

Je différencie cette équation par rapport à μ, après quoi je fais $\mu = 1$ et je remplace θ par une indéterminée i. Si, pour abréger, je pose $\varphi(x, i) = z$, le résultat final que j'obtiendrai sera de la forme

$$(10) \qquad \frac{idz}{zdi} = \mathrm{F}'_z(x, z)\frac{idz}{di} + m,$$

m désignant une certaine quantité, indépendante de x et de i, dont il est inutile d'écrire ici la valeur. L'équation (10), dans laquelle on prend i pour variable, est différentielle du premier ordre, et il s'agit d'y satisfaire par une valeur de z algébrique en i. Mais si l'on multiplie ses deux membres par $\frac{di}{i}$, qu'on intègre, et qu'on désigne par i_0 une valeur particulière quelconque de i, on aura

$$\log\left(\frac{z}{z_0}\right) = \mathrm{F}(x, z) + m \log\left(\frac{i}{i_0}\right) - \mathrm{F}(x, z_0),$$

z_0 étant ce que devient z quand on pose $i = i_0$. De là on conclut

$$\mathrm{F}(x, z) - \mathrm{F}(x, z_0) = \log\left(\frac{z}{z_0}\right) - m \log\left(\frac{i}{i_0}\right),$$

équation dont l'absurdité devient manifeste si l'on observe que z contient i et se trouve essentiellement contenu dans $\mathrm{F}(x, z)$, en sorte que le premier membre est une fonction algébrique de i qui ne se réduit pas à une simple constante.

Donc la valeur de y ne renferme aucune exponentielle de $n^{ième}$ espèce : cette conclusion cesserait d'être exacte si la dérivée $\mathrm{F}'_y(x, y)$

était identiquement nulle; en effet on aurait alors

$$F(x, z) - F(x, z_0) = 0;$$

mais nous avons expressément exclu ce cas particulier.

30. Maintenant soit $\theta = \log u$ un des logarithmes de $n^{ième}$ espèce entrant dans la valeur de y, et posons

$$y = \varphi(x, \theta).$$

L'équation (9) nous donnera

$$\log \varphi(x, \theta) = F[x, \varphi(x, \theta)],$$

ou

$$d \log \varphi(x, \theta) = dF[x, \varphi(x, \theta)],$$

et l'on en conclura sans difficulté

$$d \log \varphi(x, \mu + \theta) = dF[x, \varphi(x, \mu + \theta)],$$

μ désignant une constante arbitraire. En intégrant et nommant b, a deux valeurs de x, θ qui se correspondent, on obtient

$$\log \varphi(x, \mu+\theta) = F[x, \varphi(x, \mu+\theta)] + \log \varphi(b, \mu+a) - F[b, \varphi(b, \mu+a)].$$

Je différentie cette équation par rapport à μ, je pose $\mu = 0$, puis je remplace θ par une indéterminée i : en faisant $\varphi(x, i) = z$ et désignant par m une certaine quantité indépendante de x et de i, je trouve

$$(11) \qquad \frac{dz}{zdi} = F'_z(x, z) \frac{dz}{di} + m.$$

L'équation (11), en prenant i pour variable indépendante, est différentielle du premier ordre, et il s'agit d'y satisfaire par une valeur de z algébrique en i. Mais cela est impossible, car en intégrant on a cette équation

$$\log z = F(x, z) + m(i - i_0) - F(x, z_0) + \log z_0,$$

où z_0 désigne la valeur de z correspondante à $i = i_0$, et qui est absurde puisqu'elle donne le logarithme de z ou de $\varphi(x, i)$ en fonction algébrique de i.

Ainsi la valeur de y que l'on a supposée de $n^{ième}$ espèce ne peut contenir ni logarithme ni exponentielle de $n^{ième}$ espèce : donc il est impossible de l'exprimer par aucune fonction finie explicite de x.

51. Ce théorème est applicable à une question de Mécanique Céleste. En effet, désignons par h l'excentricité de l'orbite elliptique d'une planète, par x l'anomalie moyenne et par z l'anomalie excentrique. L'équation qui donne z en fonction de x sera, comme on sait,

$$(12) \qquad x = z - h \sin z.$$

En observant que

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

cette équation devient

$$x = z - \frac{h}{2\sqrt{-1}}\left(e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}\right).$$

En faisant $e^{z\sqrt{-1}} = y$, on aura donc

$$x = \frac{\log y}{\sqrt{-1}} - \frac{h}{2\sqrt{-1}}\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

c'est-à-dire

$$\log y = x\sqrt{-1} + \frac{h}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Or cette dernière équation est de même forme que l'équation (9), et par conséquent n'est pas résoluble en fonction finie explicite de x: donc l'équation (12) n'est pas non plus résoluble de cette manière. Toutefois le cas où h est nulle fait exception; la valeur de z est alors simplement égale à x. En prenant x égale à un nombre déterminé différent de zéro, et regardant h comme variable, on verra de même que z n'est pas fonction finie explicite de h.

52. Enfin soit proposé de trouver la racine y de l'équation

$$(13) \qquad e^{y} \log x = (xy - x^2)e^{x}.$$

Comme on en tire

$$\log x = (xy - x^2)e^{x-y},$$

et que $\log x$ ne peut pas s'exprimer sous forme finie à l'aide des seuls signes algébriques et exponentiels, il faut en conclure que la racine cherchée n'est pas algébrique. Voyons si elle est exprimable par une fonction finie explicite de première espèce. Cette fonction pourra renfermer, outre $\log x$, d'autres transcendantes monomes : réduisons le nombre de ces dernières à son *minimum*, de sorte qu'il n'existe entre elles et les deux quantités x, $\log x$, aucune relation algébrique; dès-lors il nous sera facile de démontrer qu'aucune des transcendantes dont nous parlons n'est de la forme e^u, u étant algébrique.

En effet, dans le cas contraire, posons $e^u = \theta$, et pour mettre θ en évidence, écrivons

$$y = \varphi(x, \theta).$$

L'équation (13) nous donnera

$$e^{\varphi(x, \theta)} \log x = [x\varphi(x, \theta) - x^2]\, e^x,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\left[e^{\varphi(x, \theta)} . \log x\right]}{e^{\varphi(x, \theta)} . \log x} = \frac{d.[x\varphi(x, \theta) - x^2]\, e^x}{[x\varphi(x, \theta) - x^2]\, e^x}.$$

Si l'on effectue les différentiations indiquées, les exponentielles e^x, $e^{\varphi(x, \theta)}$ disparaîtront d'elles-mêmes, et l'équation que l'on obtiendra sera algébrique par rapport à x, $\log x$, θ, etc., de sorte qu'on pourra y remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une constante indéterminée. D'après cela on trouve sans peine que

$$\frac{d.\left[e^{\varphi(x, \mu\theta)} . \log x\right]}{e^{\varphi(x, \mu\theta)} . \log x} = \frac{d.[x\varphi(x, \mu\theta) - x^2]\, e^x}{[x\varphi(x, \mu\theta) - x^2]\, e^x}:$$

par suite, en intégrant, il vient

$$(14) \qquad e^{\varphi(x, \mu\theta)} . \log x = C[x\varphi(x, \mu\theta) - x^2]\, e^x;$$

C est une constante arbitraire; pour la déterminer on désignera par a la valeur de θ qui répond à une valeur particulière quelconque de x représentée par b, et l'on aura

$$C = \frac{e^{\varphi(b, \mu a)} . \log b}{[b\varphi(b, \mu a) - b^2] e^b}.$$

Maintenant je différentie l'équation (14) par rapport à μ, et je pose $\mu = 1$ après la différentiation. En nommant m, n, ce que deviennent les deux quantités C, $\frac{dC}{d\mu}$, pour $\mu = 1$, j'obtiens

$$(15) \quad e^{\varphi(x, \theta)} . \theta\varphi'_\theta(x, \theta) . \log x = mx\theta\varphi'_\theta(x, \theta)e^x + n[x\varphi(x, \theta) - x^2]e^x.$$

Mais en faisant $\mu = 1$, l'équation (14) donne

$$(16) \quad e^{\varphi(x, \theta)} . \log x = m[x\varphi(x, \theta) - x^2]e^x.$$

L'équation (16) rapprochée de l'équation

$$e^{\varphi(x, \theta)} . \log x = [x\varphi(x, \theta) - x^2] e^x,$$

nous montre que $m = 1$.

Divisant les deux équations (15) et (16), membre à membre, on élimine $e^{\varphi(x, \theta)}$, et l'on trouve, après avoir posé $m = 1$,

$$\theta\varphi'_\theta(x, \theta) = \frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta) - x} + n,$$

relation algébrique entre x, θ et les autres transcendantes contenues dans $\varphi(x, \theta)$, de sorte qu'on peut y remplacer θ par une indéterminée i. On a ainsi

$$i\varphi'_i(x, i) = \frac{i\varphi'_i(x, i)}{\varphi(x, i) - x} + n,$$

ou bien, en multipliant par $\frac{di}{i}$,

$$\varphi'_i(x, i) di = \frac{\varphi'_i(x, i) di}{\varphi(x, i) - x} + \frac{ndi}{i}.$$

Intégrant et désignant par i_0 une valeur particulière quelconque de i, on obtient ensuite

$$\varphi(x,\ i) - \varphi(x,\ i_0) = \log\left(\frac{\varphi(x,\ i) - x}{\varphi(x,\ i_0) - x}\right) + n\log\left(\frac{i}{i_0}\right),$$

équation absurde, puisque le premier membre est algébrique en i et ne peut se réduire à une simple constante tant que la fonction $\varphi(x,i)$ n'est pas supposée indépendante de i. Il est prouvé par là que la valeur cherchée de y ne peut contenir aucune exponentielle.

33. Si l'on représente par $\log u$ un logarithme essentiellement différent de $\log x$, la valeur de y ne pourra pas non plus contenir $\log u$; en effet si $\log u$ entrait dans l'expression de y, on le mettrait en évidence en écrivant

$$\log u = \theta,\quad y = \varphi(x,\ \theta).$$

Par suite, l'équation (13) nous donnerait

$$e^{\varphi(x,\ \theta)}.\log x = [x\varphi(x,\ \theta) - x^2]\,e^x,$$

puis

$$\frac{d\left[e^{\varphi(x,\ \theta)}.\log x\right]}{e^{\varphi(x,\ \theta)}.\log x} = \frac{d.[x\varphi(x,\ \theta) - x^2]\,e^x}{[x\varphi(x,\ \theta) - x^2]\,e^x}.$$

Si l'on effectue les différentiations indiquées, les exponentielles e^x, $e^{\varphi(x,\ \theta)}$ disparaîtront d'elles-mêmes, et l'on aura le droit de remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante indéterminée. D'après cela on prouve aisément que

$$\frac{d\left[e^{\varphi(x,\ \mu+\theta)}.\log x\right]}{e^{\varphi(x,\ \mu+\theta)}.\log x} = \frac{d.[x\varphi(x,\ \mu+\theta) - x^2]\,e^x}{[x\varphi(x,\ \mu+\theta) - x^2]\,e^x};$$

par conséquent en intégrant il vient

$$(17)\qquad e^{\varphi(x,\ \mu+\theta)}.\log x = \mathrm{C}\,[x\varphi(x,\ \mu+\theta) - x^2]\,e^x:$$

C désigne une constante arbitraire que l'on déterminera en attribuant à x une valeur particulière quelconque.

Différencions l'équation (17) par rapport à μ, posons $\mu = 0$ après la différentiation, et nommons m, n les valeurs de C et $\frac{dC}{d\mu}$ pour $\mu = 0$: nous aurons

$$(18)\quad e^{\varphi(x,\,\theta)}.\varphi'_\theta(x,\,\theta)\log x = mx\varphi'_\theta(x,\,\theta)e^x + n[x\varphi(x,\,\theta) - x^2]e^x.$$

Mais quand $\mu = 0$, l'équation (17) devient

$$(19)\qquad e^{\varphi(x,\,\theta)}.\log x = m[x\varphi(x,\,\theta) - x^2]e^x.$$

L'équation (19) rapprochée de l'équation

$$e^{\varphi(x,\,\theta)}.\log x = [x\varphi(x,\,\theta) - x^2]e^x,$$

nous montre que $m = 1$.

Divisant les équations (18), (19) membre à membre, on élimine $e^{\varphi(x,\,\theta)}$, et l'on trouve

$$\varphi'_\theta(x,\,\theta) = \frac{\varphi'_\theta(x,\,\theta)}{\varphi(x,\,\theta) - x} + n.$$

Dans cette équation qui est algébrique par rapport à x, θ et par rapport aux autres transcendantes contenues dans $\varphi(x,\,\theta)$, on peut remplacer θ par une indéterminée i, ce qui donne

$$\varphi'_i(x,\,i) = \frac{\varphi'_i(x,\,i)}{\varphi(x,\,i) - x} + n.$$

Multipliant donc par di et intégrant, on obtient l'équation nouvelle
$\log[\varphi(x,\,i) - x] = \varphi(x,\,i) - \varphi(x,\,i_0) + n(i_0 - i) + \log[\varphi(x,\,i_0) - x]$,
où i_0 représente une valeur particulière quelconque de i, et qui est absurde puisqu'elle fournit pour $\log[\varphi(x,\,i) - x]$ une valeur algébrique en i. Donc si la racine y de l'équation (13) est exprimable par une fonction transcendante de première espèce, cette fonction ne contiendra qu'un seul logarithme, savoir $\log x$.

34. Cela étant, posons $\log x = \theta$, et $y = \varphi(x,\,\theta)$, la fonction φ étant algébrique par rapport à x et θ. L'équation (13), savoir

$$(13)\qquad e^y \log x = (xy - x^2)e^x,$$

de laquelle on déduit aisément

$$(20)\qquad \frac{d(e^y \log x)}{e^y \log x} = \frac{d.(xy - x^2)e^x}{(xy - x^2)e^x},$$

nous donnera

$$(21)\qquad \frac{d.\left[e^{\varphi(x,\theta)}.\theta\right]}{e^{\varphi(x,\theta)}.\theta} = \frac{d.[x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x}{[x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x},$$

équation de laquelle e^x et $e^{\varphi(x,\theta)}$ disparaîtront après les différentiations effectuées. La transcendante θ restant seule alors, on pourra remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante arbitraire. Le résultat qu'on obtiendra ainsi pourra se mettre sous la forme

$$(22)\qquad \frac{d.\left[e^{\varphi(x,\mu+\theta)}.(\mu+\theta)\right]}{e^{\varphi(x,\mu+\theta)}.(\mu+\theta)} = \frac{d.[x\varphi(x,\mu+\theta) - x^2]e^x}{[x\varphi(x,\mu+\theta) - x^2]e^x},$$

de sorte qu'en intégrant il vient

$$(23)\qquad e^{\varphi(x,\mu+\theta)}.(\mu+\theta) = \mathrm{C}\,[x\varphi(x,\mu+\theta) - x^2]\,e^x :$$

C désigne une constante que l'on déterminera, si l'on veut, en attribuant à x une valeur particulière.

Maintenant je différentie par rapport à μ l'équation (23) et je pose $\mu = 0$ après la différentiation. En désignant par m, n les valeurs de C et $\frac{d\mathrm{C}}{d\mu}$ pour $\mu = 0$, j'obtiens

$$(24)\quad e^{\varphi(x,\theta)}\,[1 + \theta\varphi'_\theta(x,\theta)] = mx\varphi'_\theta(x,\theta)e^x + n\,[x\varphi(x,\theta) - x^2]\,e^x.$$

Mais en faisant $\mu = 0$ l'équation (23) fournit

$$(25)\qquad e^{\varphi(x,\theta)}.\theta = m[x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x.$$

Cette équation rapprochée de l'équation (13) et des équations $\log x = \theta$, $y = \varphi(x,\theta)$ nous montre que $m = 1$.

Si donc on divise membre à membre les équations (24) et (25), on aura

$$\frac{1+\theta\varphi'_\theta(x,\theta)}{\theta} = \frac{\varphi'_\theta(x,\theta)}{\varphi(x,\theta)-x} + n,$$

ce qui, en remplaçant, comme on en a le droit, θ par une indéterminée i, nous fournira

$$\frac{1+i\varphi'_i(x,\ i)}{i} = \frac{\varphi'_i(x,\ i)}{\varphi(x,\ i)-x} + n.$$

En prenant i pour variable indépendante, l'équation que je viens d'écrire est différentielle du premier ordre, et il s'agit d'en trouver, s'il est possible, une intégrale algébrique. Multipliant par di et intégrant, on en tire

$$\log\left(\frac{i}{i_0}\right) + \varphi(x,\ i) - \varphi(x,i_0) = \log\left(\frac{\varphi(x,\ i)-x}{\varphi(x,\ i_0)-x}\right) + n(i-i_0),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x,\ i) - \varphi(x,\ i_0) - n(i-i_0) = \log\left(\frac{\varphi(x,\ i)-x}{\varphi(x,\ i_0)-x}\right) - \log\left(\frac{i}{i_0}\right);$$

Or, $\varphi(x, i)$ étant algébrique par rapport à i, cette dernière équation ne peut subsister sans que son premier membre se réduise à une simple quantité constante ou fonction de x, mais indépendante de i. En désignant par λ une fonction de x seule, on voit donc que $\varphi(x,\ i)$ ne peut être que de la forme

$$\varphi(x,\ i) = ni + \lambda,$$

et l'on doit observer que $\varphi(x, i)$ étant algébrique en x, λ est aussi une fonction algébrique de cette variable. A présent, si l'on fait $i=\theta$, il vient

$$\varphi(x,\ \theta) = n\theta + \lambda.$$

Je remplace $\varphi(x,\ \theta)$ par sa valeur dans l'équation (21), et comme on a $d\theta = d\log x = \frac{dx}{x}$, je trouve, tout calcul fait,

$$(26) \qquad \lambda' + \frac{n}{x} - 1 = \frac{x\lambda' + n - 2x + n\theta + \lambda}{nx\theta + x\lambda - x^2} - \frac{1}{x\theta}:$$

λ' représente la dérivée de λ.

L'équation (26) étant algébrique par rapport à x et θ doit subsister encore si l'on remplace θ par une indéterminée i. Mais en chassant les dénominateurs, elle prend la forme

$$P\theta^2 + Q\theta + R = 0.$$

Par suite on doit avoir séparément $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Or $R = x^2 - x\lambda$; il faut donc que l'on ait d'abord $\lambda = x$, moyennant quoi l'équation (26) se réduit à $n = 1$.

35. Il suit de là qu'en posant $\varphi(x, \theta) = \theta + \lambda = \log x + x$, on satisfait à l'équation (21); cela revient à dire que l'équation

$$y = \log x + x$$

est une intégrale particulière de l'équation differentielle du premier ordre

$$(20) \qquad \frac{d(e^y \log x)}{e^y \log x} = \frac{d.\,(xy - x^2)\,e^x}{(xy - x^2)\,e^x}:$$

elle partage cette propriété avec l'équation (13). Par conséquent pour que $\log x + x$ soit racine de l'équation (13), il faut et il suffit que la quantité $\log x + x$ et la racine y de cette équation (13) soient égales entre elles pour une valeur particulière de x, telle que $x = 1$, ce qui a lieu en effet. Donc enfin on vérifie l'équation (13) en posant $y = \log x + x$, ce dont on s'assure du reste très facilement *à posteriori*.

Quoique j'aie abrégé certains raisonnements qui doivent être devenus très familiers au lecteur, on trouvera sans doute ce dernier exemple un peu long. Mais j'ai du moins lieu de croire qu'il suffira pour bien faire comprendre l'esprit de la méthode que j'ai suivie dans ce Mémoire.

Sur le nombre de manières de décomposer un polygone en triangles au moyen de diagonales ;

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

En désignant ce nombre par P_n pour un polygone de n côtés, on a

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n,$$

formule que M. Lamé a démontrée dans le dernier cahier de ce Journal, et qui peut être établie plus directement comme il suit.

Le nombre des triangles qui entrent dans chaque figure de décomposition d'un polygone de n côtés, est $n-2$.

Celui des droites, diagonales ou côtés, qui joignent deux à deux les n sommets de chacune de ces figures de décomposition est $2n-3$. Le nombre total de ces droites pour les P_n figures sera donc $(2n-3)P_n$; et comme chacune de ces droites joint deux sommets, on comprend immédiatement que $\frac{4n-6}{n} P_n$ représente le nombre total des droites qui dans les P_n figures, vues ensemble, aboutissent à un sommet désigné du polygone donné.

Il est de plus évident que chacune de ces droites, dont le nombre est $\frac{4n-6}{n} P_n$, se trouve répétée autant de fois dans les P_n figures vues ensemble qu'il y a de décompositions possibles du polygone donné, *rapportées* à cette droite, côté ou diagonale ; en sorte qu'on peut dire encore que $\frac{4n-6}{n} P_n$ exprime le nombre total des décompositions possibles d'un polygone de n côtés, opérées successivement par rapport à l'une et à l'autre des $n-1$ droites qui d'un sommet désigné, vont joindre les autres sommets du polygone.

J'entends ainsi qu'une décomposition s'opère *par rapport* à un côté ou une diagonale donnée, lorsque ce côté ou cette diagonale fait invariablement partie de toutes les figures de décomposition qui restent possibles avec ce côté ou cette diagonale invariable.

Considérons maintenant un polygone de $n+1$ côtés, et dans ce polygone un côté nn' joignant deux sommets n, n'.

Rapportons successivement toutes les décompositions possibles de ce polygone à chacun des $n-1$ triangles qui ont pour base nn' et pour sommet l'un des $n-1$ sommets autres que n et n'; c'est-à-dire, considérons le groupe de ces figures de décomposition, qui ont en commun l'un de ces triangles dont nn' est la base, $nn'k$ par exemple, en désignant ainsi celui dont le sommet est k:

Et remarquons que le même côté nn' ne sert de base qu'à un seul triangle dans chaque figure de décomposition, et qu'en conséquence le nombre total de ces figures sera bien exactement le même que celui des décompositions possibles, opérées successivement par rapport à chacun des $n-1$ triangles qui peuvent avoir nn' pour base.

Maintenant il est aisé de voir que le groupe rapporté au triangle $nn'k$ comprend précisément autant de figures qu'en comprendrait le groupe des figures de décomposition du polygone donné réduit à n côtés par l'annulation du côté nn' ou la confusion de n' en n, les figures de ce second polygone étant rapportées à la droite nk; ou si l'on aime mieux, que chacune des décompositions rapportées dans le premier polygone donné, de $n+1$ côtés, au triangle $nn'k$, correspond rigoureusement à une décomposition semblable dans le polygone composé des mêmes sommets que le premier à l'exception du sommet n', cette décomposition étant opérée par rapport à la droite nk.

Le nombre total des décompositions possibles d'un polygone de $n+1$ côtés est donc égal au nombre total des décompositions possibles d'un polygone de n côtés, en opérant ces dernières successivement par rapport à toutes les $n-1$ droites qui peuvent joindre un sommet donné à chacun des autres.

On a donc $P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n$ relation qui montre en même temps que ce nombre P_{n+1} est égal à celui de toutes les droites qui aboutissent à un sommet désigné dans les P_n figures de décompositions possibles, vues ensemble, pour un polygone de n côtés.

Sur le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs;

PAR M. OLINDE **RODRIGUES**.

Soit P_n ce nombre; M. Catalan, dans le numéro précédent de ce Journal, a trouvé, sauf la notation

$$P_{n+1} = (4n - 2)P_n.$$

Il est arrivé à ce résultat indirectement, à l'aide des formules employées par M. Lamé, pour la décomposition d'un polygone en triangles. En voici la démonstration directe et élémentaire.

Remarquons d'abord que chaque manière d'effectuer le produit de n facteurs implique $n-1$ multiplications, et maintenant cherchons P_{n+1}, connaissant P_n.

Or le $(n+1)^{ième}$ facteur introduit, ne peut se combiner avec les n facteurs donnés dans chaque système de multiplication conduisant au produit de ces n facteurs, que suivant deux modes différents, savoir: 1° comme multiplicateur ou multiplicande du produit déjà effectué, ce qui fournit $2P_n$ systèmes de multiplications des $n+1$ facteurs, ou bien 2° comme multiplicateur ou multiplicande de l'un des deux facteurs qui entrent dans chacune des $n-1$ multiplications dont le système donne le produit de n facteurs, ce qui fournit $(4n-4)P_n$ autres manières d'effectuer le produit de $(n+1)$ facteurs. On a donc

$$P_{n+1} = (4n - 2)P_n.$$

Démonstration élémentaire et purement algébrique du développement d'un binome élevé à une puissance négative ou fractionnaire;

Par M. Olinde RODRIGUES.

---

x, y étant deux nombres entiers et positifs, on a rigoureusement, en s'arrêtant aux termes du degré p,

$$(1+a)^x = 1 + xa + (x,2)a^2 + (x,3)a^3 + \ldots (x,p)a^p, \quad (1)$$
$$(1+a)^y = 1 + ya + (y,2)a^2 + (y,3)a^3 + \ldots (y,p)a^p, \quad (2)$$
$$(1+a)^{x+y} = 1 + (x+y)a + (x+y,2)a^2 + (x+y,3)a^3 \ldots + (x+y,p)a^p, \quad (3)$$

la notation (x,p), désignant l'expression $\frac{x.x-1.x-2\ldots x-p+1}{1.2.3\ldots p}$.

Il s'ensuit que les $p+1$ premiers termes du développement de $(1+a)^{x+y}$ donnent rigoureusement et identiquement les $(p+1)$ premiers termes du produit des deux polynomes (1) et (2), identité qui se trouve avoir lieu pour toutes les valeurs entières de x et y, entre deux fonctions entières rationnelles de ces variables, du degré p. Cette identité subsiste donc absolument pour toutes les valeurs de x et de y, en vertu d'un théorème connu. La division du polynome (3) par l'un des polynomes (1) ou (2) donnera donc rigoureusement pour quotient l'autre de ces polynomes jusqu'aux termes du degré p en a inclusivement. Soit donc $x+y=0$, on aura

$$\frac{1}{1+xa+(x,2)a+(x,3)a\ldots+(x,p)a^p} = 1 - xa + (-x,2)a^2 \ldots + (-x,p)a^p,$$

et prenant p indéfiniment plus grand que x, on aura aussi loin qu'on voudra pousser la division

$$\frac{1}{1+xa+(x,2)a^2+\ldots+a^x} = (1+a)^{-x} = 1 - xa + (-x,2)a^2 \ldots \text{ etc.}$$

Telle est la loi du développement de $(1+a)^{-x}$, résultant de la division algébrique, indiquée par cette notation, de l'unité par le binome entier $(1+a)^x$.

Cette loi est la même que celle du développement de la puissance entière et positive.

Passons au cas de l'exposant fractionnaire : soient x, y, deux nombres entiers dont l'un est de plus positif ; on aura aux termes de l'ordre a^p près,

$$(1+a)^{xy}=[1+xa+(x,\,2)a^2+(x,\,3)a^3\ldots+(x,\,p)a^p]^y, \quad (4)$$

et par le binome

$$(1+a)^{xy}=1+xy.a+(xy,\,2)a^2+(xy,\,3)a^3\ldots+(xy,\,p)a^p : \quad (5)$$

les $\overline{p+1}$ premiers termes de la puissance y du polynome $1+xa+(x,\,2)a^2\ldots+(x,\,p)a^p$ seront donc identiques avec le polynome (5), pour toutes les valeurs entières de x et de y, et par les mêmes raisons que ci-dessus pour toutes les valeurs possibles de x et de y.

Soit donc $xy=z$, z entier, on aura identiquement jusqu'aux termes de l'ordre a^p,

$$\sqrt[y]{1+za+(z,\,2)a^2+\ldots(z,p)a^p}=1+\frac{z}{y}a+\left(\frac{z}{y},\,2\right)a^2+\ldots\left(\frac{z}{y},\,p\right)a^p,$$

et comme p est aussi grand que l'on veut, on a aussi loin qu'on pousse l'extraction de la racine

$$(1+a)^{\frac{z}{y}}=1+\frac{z}{y}a+\left(\frac{z}{y},\,2\right)a^2+\left(\frac{z}{y},\,3\right)a^3+\text{etc.}$$

La loi algorithmique du développement du binome $(1+a)^x$ est donc la même pour toutes les valeurs de x, soit que les termes de ce développement résultent de la multiplication, de la division ou de l'extraction des racines, quelles que soient d'ailleurs ses applications numériques selon la convergence ou la divergence de la série engendrée.

NOTE

Sur des Intégrales définies déduites de la théorie des surfaces orthogonales ;

Par G. LAMÉ,

Professeur à l'École Polytechnique.

L'étude des surfaces orthogonales me paraît de plus en plus féconde en applications. Les paramètres de ces surfaces, introduits en analyse comme système de coordonnées, permettent de résoudre des questions de Physique mathématique, et d'intégrer des équations aux différences partielles, qui seraient autrement inabordables. C'est du moins ce qui semble résulter des mémoires que j'ai présentés à l'Académie, sur les surfaces isothermes, sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré, sur les coordonnées curvilignes en général, et de celui que je rédige actuellement sur les surfaces isostatiques dans les corps solides. Je me propose d'indiquer ici une application nouvelle, en démontrant, à l'aide des coordonnées curvilignes, une formule très générale, qui établit une relation entre certaines intégrales définies.

Soient ρ, ρ_1, ρ_2, les paramètres proprement dits d'un système de surfaces orthogonales; h, h_1, h_2, les paramètres différentiels du premier ordre de ces mêmes surfaces, ou les expressions

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2},\ \sqrt{\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2},\ \sqrt{\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2};$$

ds, ds_1, ou ds_2, l'arc parcouru lorsqu'on passe normalement d'une surface ρ, ρ_1, ou ρ_2, à une autre surface de même espèce, infiniment voisine de la première. On aura

$$(1) \qquad ds = \frac{d\rho}{h}, \quad ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}, \quad ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2}.$$

Nous supposerons qu'une partie au moins des surfaces ρ soient fermées, ou que chacune d'elles enveloppe un espace fini.

Imaginons qu'une masse solide homogène soit rapportée à ces surfaces orthogonales, et qu'elle éprouve une très petite dilatation, uniforme dans tous les sens. Si λ représente l'accroissement de la distance de deux molécules du corps, séparées primitivement par l'unité de longueur, il résulte de la théorie mathématique de l'élasticité que la dilatation cubique constante θ sera égale à 3λ.

Considérons en particulier une surface ρ fermée, et soit λR le déplacement normal, éprouvé par un de ses points m, lors de la dilatation générale. Le point m étant rapporté à des coordonnées rectilignes orthogonales, x, y, z, dont la surface ρ enveloppe l'origine O supposée fixe, et la distance $\overline{Om} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ étant représentée par r, le déplacement de m s'opérera sur Om, et sera égal à λr; ses projections sur les axes rectilignes seront λx, λy, λz; et enfin sa projection sur la normale à la surface ρ sera

$$(2) \qquad \lambda R = \lambda \frac{\left(x\frac{d\rho}{dx} + y\frac{d\rho}{dy} + z\frac{d\rho}{dz}\right)}{h},$$

puisque $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz}$, sont les cosinus des angles que cette normale fait avec les axes des x, y, z. Or les surfaces orthogonales étant connues, il est toujours possible de déterminer x, y, z, $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho}{dz}$, h en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2; R peut donc être regardé comme une fonction de ces mêmes paramètres.

Cela posé, l'espace parcouru par la surface ρ, ou qu'elle abandonne derrière elle, lors du déplacement général, s'obtiendra en intégrant la différentielle $[\lambda R ds_1 ds_2]$, et étendant l'intégrale à toute la surface ρ, ou à toutes les valeurs des paramètres ρ_1 et ρ_2. Mais cet espace doit être évidemment égal à la dilatation totale de l'espace enveloppé par la surface ρ, laquelle s'obtiendra en multipliant, par $\theta = 3\lambda$, le volume V de cet espace, ou l'intégale triple $\int\int\int ds ds_1 ds_2$, étendue aussi à toutes les valeurs de ρ_1 et ρ_2, et de plus aux valeurs du paramètre ρ inférieures à celle de la surface considérée.

On a donc essentiellement, en supprimant le facteur commun λ, et substituant à ds, ds_1, ds_2, leurs valeurs (1) :

$$(3) \qquad \int\int \frac{R d\rho_1 d\rho_2}{h_1 h_2} = 3V = 3\int\int\int \frac{d\rho d\rho_1 d\rho_2}{h h_1 h_2};$$

équation dans laquelle R, h, h_1, h_2, doivent être exprimés en ρ, ρ_1, ρ_2. Cette formule établit ainsi une relation nécessaire entre deux intégrales définies, l'une double et l'autre triple, dans un système quelconque de coordonnées curvilignes. Si le volume V, ou plutôt si l'intégrale triple $\int\int\int \frac{d\rho d\rho_1 d\rho_2}{h h_1 h_2}$ est connue, on en déduit immédiatement la valeur de l'intégrale double $\int\int \frac{R d\rho_1 d\rho_2}{h_1 h_2}$.

Pour donner une application de cette formule générale, prenons le système de surfaces orthogonales du second degré, comprises dans les équations :

$$(4) \quad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho_1^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\rho_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho_2^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho_2^2} = 1,$$

lesquelles représentent des ellipsoïdes (ρ), des hyperboloïdes à une nappe (ρ_1), et des hyperboloïdes à deux nappes (ρ_2), tous homofocaux. La constante b est moindre que c; les limites du paramètre ρ_2 sont zéro et b, celles de ρ_1, b et c; quant à ρ, sa limite inférieure est c. On a, par des calculs faciles, développés dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes

$$(5) \quad h = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}\sqrt{\rho^2 - \rho_2^2}}, \quad h_1 = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}\sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_2^2}\sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}}.$$

L'équation en ρ, (4), donne par la différentiation, en désignant l'expression

$$\left[\frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}\right]$$

par φ,

$$\varphi\rho\frac{d\rho}{dx}=\frac{x}{\rho^2},\quad \varphi\rho\frac{d\rho}{dy}=\frac{y}{\rho^2-b^2},\quad \varphi\rho\frac{d\rho}{dz}=\frac{z}{\rho^2-c^2};$$

d'où l'on conclut facilement

$$\varphi\rho^2h^2=1,\quad \varphi\rho\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right)=1;$$

d'où enfin, par l'élimination de φ,

$$(6)\qquad x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}=\rho h^2.$$

Le volume V d'un ellipsoïde (ρ) est $\frac{4}{3}\pi\rho\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}$. On a donc, en substituant la valeur (6) sous l'intégrale double de la formule (3), où R est l'expression (2), et observant que toutes les valeurs positives de ρ_1 et ρ_2, comprises entre leurs limites respectives, n'embrassent que la huitième partie de l'espace :

$$8\iint\frac{\rho_2}{h_1h_2}d\rho_1d\rho_2=4\rho\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2},$$

ou, en mettant les valeurs (5) de h, h_1, h_2, et réduisant

$$(7)\qquad \int_b^c\int_0^b\frac{(\rho_1^2-\rho_2^2)\,d\rho_1d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}=\frac{\pi}{2};$$

intégrale définie que j'ai déduite de la théorie des surfaces isothermes, que M. Poisson a vérifiée par les propriétés des transcendantes elliptiques, et dont M. Chasles a donné une démonstration géométrique, simplifiée depuis par M. Terquem.

Démonstration d'un Théorème combinatoire de M. Stern,

Par M. TERQUEM (*).

I. Soit le polynome $a+b+c+d+\ldots+r+s$, composé de n lettres; si l'on élève ce polynome à la puissance entière positive p, et qu'on remplace tous les coefficients par l'unité, on obtient ce que les géomètres allemands nomment une combinaison *avec répétition* de la classe p, des n *éléments* $a, b, c, \ldots s$; et ils désignent cette fonction par ce symbole C'^p_n, tandis qu'en ôtant l'accent, C^p_n désigne la somme des produits différents de n lettres combinées p à p, ou, comme disent les Allemands, la classe $p^{ième}$ de la combinaison *sans répétition* de n éléments.

Cela posé, le théorème de M. Stern est renfermé dans la formule suivante :

$$C'^p_n = C_n C'^{p-1}_n - C^2_n C'^{p-2}_n + C^3_n C'^{p-3}_n - C^4_n C'^{p-4}_n + \ldots \pm C^p_n, \quad \text{(A)}$$

II. En effaçant dans C'^p_n toutes les combinaisons qui renferment la lettre a, je désigne le reste par C'^p_{n-1}; effaçant dans ce dernier reste les combinaisons qui renferment b, je désigne le second reste par C'^p_{n-2}, et ainsi de suite. On a évidemment :

$$C'^p_{n-1} = C'^p_n - aC'^{p-1}_n, \quad (1)$$
$$C'^p_{n-2} = C'^p_{n-1} - bC'^{p-1}_{n-1}; \quad (2)$$

d'où l'on tire

$$C'^p_{n-2} = C'^p_n - aC'^{p-1}_n - bC'^{p-1}_{n-1}. \quad (3)$$

Mais, l'équation (1) donne

$$C'^{p-1}_{n-1} = C'^{p-1}_n - aC'^{p-2}_n;$$

(*) *Journal de M. Crelle*, vol. 18, p. 375, année 1838.

donc l'équation (3) se change en celle-ci :

$$C'^{p}_{n-2} = C'^{p}_{n} - (a + b)C'^{p-1}_{n} + abC'^{p-2}_{n}, \qquad (4)$$

d'où l'on déduit

$$C'^{p}_{n-3} = C'^{p}_{n-1} - (b + c)C'^{p-1}_{n-1} + bcC'^{p-2}_{n-1}: \qquad (5)$$

l'équation (1) donne encore

$$C'^{p-2}_{n-1} = C'^{p-2} - aC'^{p-3}_{n};$$

donc l'équation (5) devient

$$C'^{p}_{n-3} = C'^{p}_{n} - (a + b + c)C'^{p-1}_{n} + (ab + ac + bc)C'^{p-2}_{n} - abcC'^{p-3}_{n}.$$

On a de même, ayant toujours égard à l'équation (1),

$$\begin{aligned} C'^{p}_{n-4} = C'^{p}_{n} &- (a+b+c+d)C'^{p-1}_{n} + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)C'^{p-2}_{n} \\ &- (abc + abd + acd + bcd)C'^{p-3}_{n} + abcdC'^{p-4}_{n}: \end{aligned}$$

la loi de formation est évidente ; continuant ces déductions jusqu'à C'^{p}_{n-n} quantité qui est nulle, on a enfin

$$0 = C'^{p}_{n} - C^{1}_{n}C'^{p-1}_{n} + C^{2}_{n}C'^{p-2}_{n} - C^{3}_{n}C'^{p-3} + \ldots \pm C^{p}_{n},$$

formule qui est celle de M. Stern.

III. En donnant successivement à p toutes les valeurs comprises entre p et 1, on aura p équations du premier degré, soit qu'on les considère par rapport aux lettres accentuées ou aux lettres non accentuées. On peut donc exprimer chaque quantité de la première espèce, en fonction des autres de la seconde espèce *et vice versâ;* en d'autres termes, une classe combinatoire avec répétition peut s'exprimer en classes combinatoires sans répétition et réciproquement (I).

IV. Lorsque les éléments combinatoires $a, b, c, d \ldots s$ deviennent égaux à l'unité, la formule de M. Stern, donne une relation entre les nombres figurés : on a alors en général

$$C'^{q}_{n} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots n+q-1}{1.2.3\ldots q} = [n+q-1]^{q}[0]^{-q},$$

$$C^{q}_{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots n-q+1}{1.2.3\ldots q} = [n]^{q}[0]^{-q};$$

si l'on a $q > n$, C_n^q devient nul.

V. Considérant les n quantités a, b, c,... s comme les racines d'une équation de degré n, soient 1, A_1, A_2, A_3, etc., les coefficients à partir du premier terme; représentons C'^q_m par y_q qui n'est que la somme de toutes les fonctions symétriques des racines de degré q; et alors l'équation (A) peut s'écrire ainsi

$$y_p + A_1 y_{p-1} + A_2 y_{p-2} + \ldots + A_p = 0 \qquad \text{(B)}.$$

On voit donc que y_p est le terme général d'une série récurrente, dont les coefficients de l'équation sont l'échelle de relation. On sait que cette même échelle appartient aussi à la somme des puissances des racines.

P.-S. J'ajouterai ici quelques mots pour compléter la démonstration du deuxième théorème, énoncé pages 477-78 de ce volume : n devant être plus grand que 3, il s'ensuit que la démonstration ne s'étend pas au cas où $n = 2$; mais il suffit de remarquer que quelle que soit la valeur de n, si $\cos \frac{4^q}{n}$ est irrationnel, $\cos \frac{4^q}{rn}$ est aussi irrationnel; or $\cos \frac{4^q}{8}$ est irrationnel, donc $\cos \frac{4^q}{8r}$ est aussi irrationnel, etc.

Le théorème cité peut être ainsi généralisé. Si un arc divisé par la circonférence donne un quotient rationnel qui ne soit ni $\frac{1}{6}$, ni $\frac{3}{6}$, ni $\frac{5}{6}$, la corde de cet arc divisée par le rayon donne une quotient irrationnel. De même, si une corde divisée par le rayon, donne un quotient rationnel qui ne soit ni 1, ni 2, l'arc soutendu par cette corde, divisé par la circonférence, donne un quotient irrationnel.

Solution d'un Problème de combinaison ;

PAR M. O. TERQUEM.

Ce problème, qui a été proposé par M. Stern (*), peut être énoncé de la manière suivante :

PROBLÈME. « Étant donnés les n nombres $1, 2, 3 \ldots n-1, n$; si » on les permute n à n, on aura $[n]$ permutations ; ce symbole désigne » le produit résultant de la multiplication de tous ces nombres; quel » est le nombre total des *dérangements* qui se rencontrait dans ces $[n]$ » permutations ? »

Solution. Quand un nombre est suivi dans le même terme, *médiatement* ou *immédiatement*, d'un nombre plus petit que lui, on appelle cela un *dérangement*. C'est la définition de Cramer, telle qu'il la donne dans la belle règle qu'il a découverte, pour déterminer les signes des termes dans les formules générales relatives à la résolution des équations du 1er degré (*Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques*. Appendice, p. 658). Par exemple, le terme 321 renferme trois dérangements et 123 n'en a aucun. Soit donc y_n le nombre total des dérangements pour les n nombres : prenons en plus le nombre $n+1$ plus grand que tous les précédents, et soit y_{n+1} le nombre total des dérangements pour ces $n+1$ nombres ; il s'agit de trouver une relation entre y_{n+1} et y_n ; à cet effet, faisons parcourir au nombre $n+1$ les diverses positions qu'il peut occuper. En le plaçant à la gauche de tous les termes, il augmente évidemment chaque terme de n dérangements ; en le plaçant entre le premier et le second nombre, il intro-

(*) *Journal de M. Crelle*, tome 18, p. 100, année 1838.

duit dans chaque terme $n-1$ nouveaux dérangements et ainsi de suite; dans la première position, le nombre des dérangements est donc $y_n + n[n]$; dans la seconde position, il est $y_n + (n-1)[n]$; dans la troisième position, $y_n + (n-2)[n]$, etc. Donc, on a

$$y_{n+1} = (n+1)y_n + \frac{n(n+1)}{2}[n] = (n+1)y_n + \frac{n}{2}[n+1]. \quad \text{(A)}$$

Cette équation donne celle-ci:

$$y_{n+2} = (n+2)y_{n+1} + \frac{n+1}{2}[n+2].$$

Des deux équations réunies, on déduit

$$y_{n+2} = (n+1)(n+2)y_n + \frac{2n+1}{2}[n+2]:$$

de même

$$y_{n+3} = (n+1)(n+2)(n+3)y_n + \frac{3n+3}{2}[n+3],$$

et en général,

$$y_{n+p} = (n+1)(n+2)\ldots(n+p)y_n + \frac{1}{2}\left[pn + \frac{p(p-1)}{2}\right][n+p].$$

Faisant $n=1$, on a $y_1 = 0$; donc

$$y_{p+1} = \frac{p(p+1)}{4}[p+1].$$

Changeant $p+1$ en n, on a enfin, pour le terme général,

$$y_n = \frac{n(n-1)}{4}[n]. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

PREMIER MÉMOIRE

Sur la Théorie des Équations différentielles linéaires et sur le développement des Fonctions en séries;

Par J. LIOUVILLE (*).

La plupart des problèmes de Physique mathématique conduisent à des équations différentielles partielles que l'on peut regarder comme linéaires au moins à une première approximation. Il s'agit d'intégrer ces équations et de satisfaire en même temps à certaines conditions définies relatives soit à quelques points singuliers du système matériel dont on s'occupe, soit à l'état initial des températures ou des vibrations de ses molécules. La méthode que les géomètres suivent ordinairement pour atteindre ce but consiste à représenter l'intégrale demandée par la somme d'un nombre infini d'intégrales particulières qui vérifient toutes les conoitions données, excepté celles relatives à l'état initial. Chacune des intégrales particulières dont nous parlons doit satisfaire à une équation différentielle ordinaire facile à trouver et dans laquelle entre un paramètre variable de l'une à l'autre. On a donc à résoudre deux questions bien distinctes, puisqu'il faut discuter d'abord l'équation différentielle à laquelle sont successivement soumises les intégrales particulières dont l'ensemble compose la valeur générale cherchée, puis traiter à son tour cette expression générale et déterminer les constantes arbitraires qu'elle contient encore, de manière à remplir les conditions définies négligées en premier lieu. Ces deux questions feront l'objet du présent Mémoire, où je les ai consi-

(*) Ce Mémoire a servi de texte à quelques-unes des leçons que j'ai faites cette année au Collége de France, comme suppléant de M. Biot.

dérées sous un point de vue purement analytique, abstraction faite de leur application à tel ou tel problème.

La théorie des équations différentielles est encore peu avancée malgré les nombreux travaux dont elle a été l'objet. Une équation linéaire à coefficients constants ou variables étant donnée, on peut toujours, il est vrai, en trouver l'intégrale exprimée par une série convergente; mais cette intégrale suffit rarement pour découvrir les propriétés et la marche de la fonction que l'équation différentielle détermine. En considérant la fonction dont nous parlons comme l'ordonnée d'une courbe et prenant pour abscisse la variable indépendante, il sera le plus souvent très difficile de reconnaître si, dans un intervalle donné, cette courbe coupe une ou plusieurs fois l'axe des abscisses, si elle le touche sans le couper, si elle a enfin des points de maximum ou de minimum ou des points d'inflexion. « Cependant la connaissance de » ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables » que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques ou dyna- » miques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il » s'agit. » Une intégrale qui nous laisse ignorer ces propriétés intéressantes est d'une utilité bornée. Elle ne dispense nullement d'étudier en elle-même l'équation différentielle qui est plus simple et plus traitable. C'est en nous livrant à cette dernière étude que nous pouvons espérer d'arriver à des résultats précis et à des théorèmes généraux. La remarque que nous venons de faire serait vraie encore lors même que l'on parviendrait à obtenir sous forme finie l'intégrale de l'équation différentielle dont on s'occupe. C'est ainsi que la découverte d'une formule algébrique et générale propre à représenter les racines des équations déterminées n'ôterait rien à l'utilité des méthodes d'approximation, qui fournissent les valeurs numériques de ces racines, et des propositions remarquables dont l'ensemble forme ce qu'on nomme aujourd'hui la *théorie des équations*.

L'idée si simple d'étudier en elles-mêmes les équations différentielles que l'on rencontre dans chaque question, au lieu de s'attacher uniquement à la recherche de leur intégrale, a dû se présenter aux géomètres dès l'origine du calcul différentiel. Mais dans ces derniers temps elle a été surtout développée par M. Sturm qui, dans son beau Mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre (*), en a tiré le parti le plus avantageux. Il y considère l'équation

$$L\frac{d^2V}{dx^2} + M\frac{dV}{dx} + NV = 0,$$

dans laquelle L, M, N sont des fonctions de x, et par une méthode très élégante il trouve successivement toutes les propriétés dont jouit la fonction V qui satisfait à cette équation. Ces propriétés sont analogues à celles des sinus ou des exponentielles. La même théorie fournit les moyens de calculer les racines de certaines équations transcendantes qui se présentent en analyse lorsqu'on veut par exemple déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène.

« Le principe sur lequel reposent, dit M. Sturm, les théorèmes que » je développe, n'a jamais, si je ne me trompe, été employé en ana- » lyse, et il ne me paraît pas susceptible de s'étendre à d'autres » équations différentielles. »

L'auteur a eu raison, je crois, de n'énoncer qu'avec réserve cette dernière assertion. Il me serait facile en effet de prouver au contraire, et je prouverai dans un autre article, que la méthode de M. Sturm peut être employée utilement dans la théorie des équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur. Néanmoins, je dois l'avouer, cette extension offre des difficultés qui ne m'ont pas permis de l'opérer d'une manière tout-à-fait générale. Sans renoncer à l'espoir fondé de voir un jour renverser ces obstacles qui ne seront point sans doute insurmontables (surtout si M. Sturm reprend, pour la perfectionner et l'étendre à de nouvelles questions, une méthode qui dans ses mains s'est déjà montrée si féconde), j'ai donc eu recours à d'autres principes possédant le double avantage d'une extrême simplicité et d'une généralité très grande. Ces principes s'appliquent en effet à des équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque, pourvu toutefois que les conditions définies à l'aide desquelles on détermine les constantes arbitraires implicitement contenues dans les intégrales de nos équations différentielles aient une forme convenable.

Dans ce premier Mémoire, je me borne à considérer les équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque μ, qui peuvent se mettre sous la forme

---

(*) Tome I^er de ce Journal, page 106.

$$\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r\mathrm{U} = 0,$$

K, L, . . . M, N étant des fonctions positives de x, et r un paramètre indépendant de cette variable. De plus j'admets que pour une valeur particulière x de x, les quantités

$$\mathrm{U}, \quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots.d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

sont égales à des constantes positives. Ces conditions laissent encore le paramètre r indéterminé. Mais on déterminera ce paramètre à l'aide d'une nouvelle équation, si l'on exige par exemple que U se réduise à zéro pour une certaine valeur X de x, X étant $>$ x.

Je prouve que les racines de l'équation transcendante dont le paramètre r dépend alors sont en nombre infini, toutes réelles, positives et inégales. Chacune d'elles donne naissance à une fonction particulière U. La première de ces fonctions, celle qui répond à la plus petite racine, conserve constamment le même signe lorsque x croît depuis x jusqu'à X. Celle qui répond à la $n^{ième}$ racine s'évanouit et change de signe $(n - 1)$ fois dans le même intervalle. Deux de ces fonctions correspondantes à deux racines consécutives changent toujours de signe l'une après l'autre alternativement; celle qui répond à la plus grande racine s'évanouit la première à partir de $x = $ x. En un mot on retrouve ici, comme dans l'équation du second ordre traitée par M. Sturm, des propriétés analogues à celles des sinus d'arcs multiples d'une même variable.

Dans un Mémoire présenté à l'Académie le 30 novembre 1835 et imprimé tome Ier de ce Journal, page 253, j'ai montré, je crois, le premier quelle liaison intime existe entre les propriétés des intégrales des équations linéaires du second ordre et le développement des fonctions en séries. On verra clairement dans ce nouveau Mémoire que les théorèmes auxquels je suis parvenu subsistent quel que soit l'ordre des équations différentielles que l'on considère. C'est le résultat principal que j'annonçais il y a quelques mois (*), en donnant

(*) Voyez page 255 de ce volume.

une indication succincte, mais assez précise, de mes nouvelles recherches.

Ces recherches prendront une extension très grande dans les Mémoires que je publierai par la suite. Dans ce premier travail, je dois le dire, j'ai cherché surtout la rigueur et la simplicité.

J'ai supprimé tous les détails qui m'ont paru n'avoir qu'une importance secondaire, ou qui ne se rattachaient pas d'une manière très directe au fond du sujet. Je n'ai jamais prouvé de deux manières les théorèmes qu'une seule démonstration établissait avec assez de clarté. Enfin parmi toutes les formes dont une démonstration était susceptible, j'ai constamment préféré celle qui se rapprochait le plus des méthodes connues.

§ I.

1. Soient x une variable indépendante qui peut croître depuis x jusqu'à X; K, L, ... M, N des fonctions de x positives et continues; r un paramètre indéterminé; et U une fonction de x et de r satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r\mathrm{U} = 0.$$

L'intégrale de l'équation (1) renfermera μ constantes arbitraires que l'on déterminera en se donnant les valeurs des μ quantités

$$\mathrm{U},\quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx},\quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^2},\ldots\quad \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

pour $x = \mathrm{x}$: nous désignerons ces valeurs par A, B, C, ... D, et nous poserons

$$(2) \quad \mathrm{U} = \mathrm{A},\quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{B},\ldots\ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}} = \mathrm{D} \text{ pour } x = \mathrm{x} :$$

de plus, nous admettrons toujours que A, B, C, ... D sont des quantités indépendantes de r, positives ou nulles, mais non pas toutes nulles à la fois. De cette manière, U sera une fonction de x et de r qui ne contiendra plus rien d'inconnu, et que nous représenterons par

$U(x)$, ou par $U(x, r)$ quand nous voudrons mettre en évidence la variable x ou les variables x et r.

Si l'on a $\mu = 2$, l'équation (1) est du second ordre seulement, et U doit satisfaire d'une part à l'équation indéfinie,

$$(3) \qquad \frac{d.\mathrm{K}d\mathrm{U}}{dx^2} + r\mathrm{U} = 0,$$

et d'autre part aux conditions définies

$$(4) \qquad \mathrm{U} = \mathrm{A}, \quad \frac{\mathrm{K}d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{B} \text{ pour } x = \mathrm{x}.$$

Si l'on pose $\mu = 3$, l'équation (1) est du troisième ordre, et U doit satisfaire à l'équation indéfinie

$$(5) \qquad \frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}d\mathrm{U}}{dx^3} + r\mathrm{U} = 0,$$

et aux conditions définies

$$(6) \qquad \mathrm{U} = \mathrm{A}, \quad \frac{\mathrm{L}d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{B}, \quad \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}d\mathrm{U}}{dx^2} = \mathrm{C} \quad \text{pour } x = \mathrm{x}.$$

Nous répétons une fois pour toutes que la variable x reste constamment comprise entre deux limites x, X : x est la plus petite valeur de x ; X est une autre valeur déterminée quelconque : les valeurs des fonctions K, L,... M, N sont supposées essentiellement > 0 ; ces fonctions ne s'évanouissent donc jamais : les nombres A, B, etc. sont aussi supposés positifs ; toutefois notre analyse subsisterait encore si quelques-uns d'entre eux se réduisaient à zéro.

La fonction U qui satisfait à l'équation linéaire (1) et aux conditions définies (2) jouit de propriétés très générales et très remarquables. L'étude de ces propriétés est l'objet principal du présent Mémoire.

2. On peut développer U en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de r. Pour fixer les idées, admettons que l'on ait $\mu = 2$ et posons

$$\varphi_0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}\int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{K}},$$

puis en général,

$$\varphi_n = \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{x}}^{x} \varphi_{n-1}\, dx\,,$$

d'où résultera immédiatement

$$\varphi_n = \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{x}}^{x} dx \ldots\ldots \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{x}}^{x} \varphi_0 dx\,.$$

expression où le signe $\int$ entre $2n$ fois. Il est aisé de voir qu'en prenant

$$\mathrm{U} = \varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - r^3\varphi_3 + \ldots\,,$$

on satisfera à l'équation indéfinie (3) et aux conditions définies (4).

Représentons par α la plus petite valeur que K puisse prendre lorsque x croît de x à X : on augmentera évidemment la valeur de φ_0 si l'on y remplace K par α et x par X; en faisant

$$\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{\alpha}(\mathrm{X} - \mathrm{x}) = \varphi\,,$$

on aura donc $\varphi_0 < \varphi$. Maintenant dans l'expression générale de φ_n et dans celle de $\frac{d\varphi_n}{dx}$ qui s'en déduit par la différentiation, écrivez partout α au lieu de K, φ au lieu de φ_0, et vous trouverez

$$\varphi_n < \frac{(x-\mathrm{x})^{2n}.\varphi}{1.2.3\ldots 2n.\alpha^n}\,, \quad \frac{d\varphi_n}{dx} < \frac{(x-\mathrm{x})^{2n-1}.\varphi}{1.2.3\ldots(2n-1)\alpha^n}.$$

Les séries

$$\varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - r^3\varphi_3 + \ldots\,.$$

$$\frac{\mathrm{K}d\varphi_0}{dx} - r\frac{\mathrm{K}d\varphi_1}{dx} + r^2\frac{\mathrm{K}d\varphi_2}{dx} - \ldots\,,$$

$$- r\varphi_0 + r^2\varphi_1 - r^3\varphi_2 + \ldots\,,$$

qui représentent respectivement les valeurs de

$$\mathrm{U}, \quad \frac{\mathrm{K}d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{d.\mathrm{K}d\mathrm{U}}{dx^2} \quad \text{ou} \quad -r\mathrm{U}\,,$$

sont donc convergentes, et il en est de même de leurs dérivées d'un ordre quelconque prises par rapport à r. De là il suit que les dérivées soit par rapport à x, soit par rapport à r, des deux quantités

$$U, \quad \frac{KdU}{dx}$$

ont des valeurs finies exprimées par des séries convergentes : donc ces quantités elles-mêmes sont fonctions continues de x et de r : par suite la quantité

$$\frac{d.KdU}{dx^2} \quad \text{ou} \quad -rU$$

est aussi fonction continue de ces deux variables.

3. On trouve par une méthode semblable l'intégrale complète de l'équation (1) exprimée en série convergente sous la forme

$$U = \varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - r^3\varphi_3 + \ldots,$$

et l'on démontre que les quantités

$$U, \quad \frac{NdU}{dx}, \quad \frac{Md.NdU}{dx^2}, \ldots \quad \frac{d.Kd.L\ldots d.NdU}{dx^\mu},$$

et leurs dérivées d'un ordre quelconque, prises par rapport à r, sont des fonctions continues de x et de r. Le premier terme φ_0 s'obtient en intégrant l'équation

$$\frac{d.Kd.L\ldots.d.Md.Nd\varphi_0}{dx^\mu} = 0,$$

et en déterminant les constantes arbitraires à l'aide des conditions

$$\varphi_0 = A, \quad \frac{Nd\varphi}{dx} = B, \ldots\ldots \frac{Kd.L\ldots d.Nd\varphi_0}{dx^{\mu-1}} = D \text{ pour } x = \text{x},$$

de telle sorte que l'on transporte à ce terme φ_0 toutes les conditions définies auxquelles la fonction U doit satisfaire. Ensuite on prend généralement

$$\varphi_n = \int_{\text{x}}^{x} \frac{dx}{N} \int_{\text{x}}^{x} \frac{dx}{M} \ldots\ldots \int_{\text{x}}^{x} \frac{dx}{K} \int_{\text{x}}^{x} \varphi_{n-1} dx.$$

Les coefficients φ_0, φ_1, φ_2, ... de la série

$$U = \varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - \ldots.$$

sont donc positifs et d'autant plus grands que les valeurs des fonctions K, ... M, N sont elles-mêmes plus petites : ils ne pourraient se réduire à zéro que si toutes les quantités A, B, ... D étaient nulles. En excluant ce cas particulier, on voit que la fonction U ne devient identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, tant que x reste indéterminée.

Quand le paramètre r est égal à zéro, U se réduit à φ_0, quantité essentiellement > 0 : dans ce cas U ne peut s'annuler pour aucune valeur de x comprise entre x et X : il en est de même *à fortiori* quand le paramètre r est négatif.

On peut observer enfin que les quantités

$$\varphi_n, \quad \frac{\mathrm{N}d\varphi_n}{dx}, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\varphi_n}{dx^2}, \ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\varphi_n}{dx^{\mu-1}}$$

étant > 0, si l'on désigne par a, b, ... c des coefficients positifs, et si l'on égale à zéro la somme

$$a\mathrm{U} + b\,\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} + \ldots + c\,\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}},$$

après avoir donné à x une valeur déterminée $>$ x, l'équation ainsi formée ne sera satisfaite par aucune racine r négative ou nulle.

§ II.

4. Étudions maintenant avec un peu plus de détail la marche de la fonction U.

Lorsqu'on suppose le paramètre r négatif, les quantités φ_n, $\frac{\mathrm{N}d\varphi_n}{dx}$, etc., et par suite

$$\mathrm{U}, \quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^2}, \ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}},$$

sont positives : ce sont même des fonctions croissantes de x puisque leurs dérivées sont aussi positives. La courbe dont l'équation est $y = U$ ne présente alors dans son cours rien de remarquable : elle ne coupe nulle part l'axe des x et n'a aucune tangente parallèle à cet axe.

Quand le paramètre r est positif, la courbe représentée par l'équation $y = U$ peut au contraire offrir des sinuosités, devenir parallèle à l'axe de x, couper cet axe une ou plusieurs fois. On s'en convaincra en considérant d'abord le cas où les coefficients K, L, ... M, N sont constants dans l'équation (1).

5. Pour fixer les idées, supposons que l'équation (1) soit du troisième ordre seulement, en sorte que la fonction U doive satisfaire à l'équation indéfinie (5) et aux conditions définies (6). Remplaçons K, L par des constantes positives α, β, et U par u. L'équation (5) deviendra

$$(7) \qquad \alpha\beta \frac{d^3u}{dx^3} + ru = 0,$$

et les conditions définies servant à la détermination des constantes arbitraires seront

$$(8) \qquad u = A, \quad \beta \frac{du}{dx} = B, \quad \alpha\beta \frac{d^2u}{dx^2} = C \text{ pour } x = X.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{\alpha\beta} = \omega^3, \quad r = \rho^3, \quad x - X = z,$$

l'intégrale de l'équation (7), exprimée sous forme finie, sera

$$u = C_1 e^{-\omega\rho z} + C_2 e^{-\mu\omega\rho z} + C_3 e^{-\mu^2\omega\rho z},$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes arbitraires, et μ, μ^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité. On déterminera les constantes C_1, C_2, C_3 à l'aide des conditions (8) qui donnent

$$C_1 + C_2 + C_3 = A,$$
$$C_1 + C_2\mu + C_3\mu^2 = -\frac{B}{\beta\omega\rho},$$
$$C_1 + C_2\mu^2 + C_3\mu = \frac{C}{\alpha\beta\omega^2\rho^2},$$

équations faciles à résoudre et desquelles on tire

$$C_1 = \frac{A}{3} - \frac{B}{3\beta\omega\rho} + \frac{C}{3\alpha\beta\omega\rho^2},$$
$$C_2 = \frac{A}{3} - \frac{B\mu^2}{3\beta\omega\rho} + \frac{C\mu}{3\alpha\beta\omega\rho^2},$$
$$C_3 = \frac{A}{3} - \frac{B\mu}{3\beta\omega\rho} + \frac{C\mu^2}{3\alpha\beta\omega\rho^2}.$$

Donc, si l'on pose

$$\frac{A}{3}\left(e^{-\alpha\rho z} + e^{-\mu\alpha\rho z} + e^{-\mu^2\alpha\rho z}\right) = F(\rho z),$$
$$\frac{B}{3\beta\omega}\left(e^{-\alpha\rho z} + \mu^2 e^{-\mu\alpha\rho z} + \mu e^{-\mu^2\alpha\rho z}\right) = F_1(\rho z),$$
$$\frac{C}{3\alpha\beta\omega}\left(e^{-\alpha\rho z} + \mu e^{-\mu\alpha\rho z} + \mu^2 e^{-\mu^2\alpha\rho z}\right) = F_2(\rho z),$$

on aura

$$u = F(\rho z) - \frac{1}{\rho} F_1(\rho z) + \frac{1}{\rho^2} F_2(\rho z).$$

Cette valeur de u est fonction continue des constantes α, β, ω : elle se simplifie beaucoup quand ρ est très grand, et peut servir à démontrer qu'alors il existe un très grand nombre de racines x ou z de l'équation $u=0$: le nombre de ces racines devient même infini lorsque $\rho=\infty$, et cela a lieu non-seulement quand on considère les valeurs de z comprises entre les limites $z=0$, $z=X-x$ qui répondent à $x=x$, $x=X$, mais même quand on se borne à considérer les valeurs de z comprises dans un très petit intervalle à partir de $z=0$. C'est ce que nous allons expliquer.

6. *Posons $\rho\xi=\theta$, θ étant une quantité aussi grande qu'on voudra, mais que nous regarderons comme restant invariable lorsque ρ croît de plus en plus. La valeur de ξ, savoir $\xi=\frac{\theta}{\rho}$, finira donc par être très petite. Or, si l'on prend le paramètre ρ extrêmement grand, et si l'on se borne aux racines z de l'équation $u=0$ qui sont comprises entre les limites $z=\xi$, $z=2\xi$, je dis que le nombre de ces racines sera d'autant plus grand que la valeur arbitraire de θ aura été choisie plus considérable, en sorte qu'on pourra toujours le rendre supérieur à un nombre entier donné d'avance.*

Puisque les fonctions $F(\rho z)$, $F_1(\rho z)$, $F_2(\rho z)$ ne contiennent que le produit ρz, posons

$$\rho z = t :$$

t sera une inconnue comprise entre deux limites fixes et très grandes θ, 2θ, et l'on aura

$$(9) \qquad u = F(t) - \frac{1}{\rho} F_1(t) + \frac{1}{\rho^2} F_2(t).$$

Maintenant attribuons à ρ une valeur infiniment grande : les deux quantités

$$\frac{1}{\rho} F_1(t), \quad \frac{1}{\rho^2} F_2(t)$$

deviendront infiniment petites. Le premier terme $\frac{A}{3} e^{-\omega t}$ de $F(t)$ est aussi très petit puisqu'on suppose très grande la limite inférieure θ de t : quant aux deux autres termes de $F(t)$, il suffira de remplacer μ et μ^2 par leurs valeurs

$$\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},$$

pour leur donner la forme

$$\frac{2A}{3} e^{\frac{\omega t}{2}} \cos\left(\frac{\omega t\sqrt{3}}{2}\right).$$

Donc quand ρ devient infiniment grand, la valeur fixe de θ étant aussi infiniment grande, l'équation $u = 0$ se réduit à

$$(10) \qquad \cos\left(\frac{\omega t\sqrt{3}}{2}\right) = \varepsilon,$$

ε désignant un infiniment petit.

Les mots infiniment petit, infiniment grand, sont employés ici uniquement pour abréger. Il n'est pas nécessaire en effet que le second membre ε demeure infiniment petit dans toute l'étendue des valeurs de t, c'est-à-dire depuis $t = \theta$ jusqu'à $t = 2\theta$: il suffit que dans cet intervalle on ait constamment $\varepsilon^2 < 1$. Cela étant, si l'on désigne par m le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{\omega\theta\sqrt{3}}{2\pi}$, et par $(m+i)$ le nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{\omega\theta\sqrt{3}}{\pi}$: donc l'on donne à t les valeurs successives

$$t=\frac{2m\pi}{\omega\sqrt{3}},\quad t=\frac{2(m+1)\pi}{\omega\sqrt{3}},\ldots . t=\frac{2(m+i)\pi}{\omega\sqrt{3}},$$

pour lesquelles la valeur de $\cos\left(\frac{\omega t\sqrt{3}}{2}\right)$ devient successivement.... $+1$, -1, il est clair qu'elles rendront la différence

$$\cos\left(\frac{\omega t\sqrt{3}}{2}\right)-\varepsilon,$$

aussi alternativement positive et négative, en sorte que de l'une d'elles à la suivante il y a au moins une racine de l'équation $u=0$. Par suite entre les limites

$$t=\frac{2m\pi}{\omega\sqrt{3}},\quad t=\frac{2(m+i)\pi}{\omega\sqrt{3}},$$

il y a au moins i racines de cette équation. Ce nombre i est d'ailleurs infiniment grand quand la valeur attribuée à θ est infiniment grande. De là résulte la démonstration du théorème énoncé; car à chaque valeur de t qui annule u répond une valeur de z comprise entre ξ et 2ξ.

7. On étendra notre théorème à la fonction U et à l'équation (5) dans laquelle les coefficients K, L sont variables, si l'on fait voir que la variabilité de ces coefficients, quand le paramètre ρ est très considérable, n'altère la valeur de u et par suite le second membre de l'équation (10), que d'une quantité très petite que l'on peut confondre dans ε et qui ne change rien aux raisonnements précédents.

Admettons que les constantes α, β représentent les plus grandes valeurs des fonctions K, L dans l'intervalle compris depuis $z=0$ jusqu'à $z=2\xi$; soient α', β' d'autres constantes représentant les plus petites valeurs de ces fonctions dans le même intervalle : si la valeur de ξ est infiniment petite, les différences $\alpha'-\alpha$, $\beta'-\beta$ seront aussi infiniment petites. La valeur exacte de U est

$$\mathrm{U}=\varphi_0-r\varphi_1+r^2\varphi_2-r^3\varphi_3+\ldots\ldots,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ conservant la signification qu'on leur a attribuée n° 3. Désignons par φ'_n, φ''_n les deux valeurs que prend φ_n lorsqu'on y remplace K, L d'abord par α, β, et ensuite par α', β'; il est aisé de voir que l'on aura

$$\varphi_n > \varphi'_n \quad \text{et} \quad \varphi_n < \varphi''_n.$$

Donc l'erreur que l'on commet en prenant φ'_n pour valeur de φ_n est plus petite que $\varphi''_n - \varphi'_n$. L'erreur totale commise en remplaçant la série

$$\varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - \text{etc.}$$

par la série

$$\varphi'_0 - r\varphi'_1 + r^2\varphi'_2 - \text{etc.},$$

est donc inférieure à la somme

$$\varphi''_0 - \varphi'_0 + r(\varphi''_1 - \varphi'_1) + r^2(\varphi''_2 - \varphi'_2) + \dots,$$

dans laquelle on a pris tous les termes positivement, tandis que dans l'expression de U ces termes sont alternativement positifs et négatifs.

La somme

$$\varphi''_0 - \varphi'_0 + r(\varphi''_1 - \varphi'_1) + r^2(\varphi''_2 - \varphi'_2) + \dots$$

représente ainsi une limite supérieure de l'erreur que l'on commet dans l'évaluation de U lorsque l'on remplace les fonctions variables K, L par les constantes α, β; et tout se réduit à prouver qu'elle devient infiniment petite en même temps que l'intervalle ξ. Or si l'on pose

$$u'' = \varphi''_0 + r\varphi''_1 + r^2\varphi''_2 + \text{etc.}, \quad u' = \varphi'_0 + r\varphi'_1 + r^2\varphi'_2 + \text{etc.},$$

cette somme est exprimée par $u'' - u'$. La série

$$\varphi'_0 - r\varphi'_1 + r^2\varphi'_2 - \text{etc.}$$

n'est autre chose que le développement de la fonction u des n^os 5 et 6. Donc u' se déduira de u en y remplaçant r par $-r$. Supposons que par ce changement les fonctions $F(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ deviennent $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$; on aura

$$u' = f(t) - \frac{1}{\rho} f_1(t) + \frac{1}{\rho} f_2(t).$$

Pour passer de u' à u'' il suffira d'augmenter maintenant les constantes α, β des différences infiniment petites $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$: donc puisque u' est une fonction continue de ces constantes, la différence $u'' - u'$ sera aussi infiniment petite, ce qu'il fallait démontrer.

8. La démonstration dont nous venons de faire usage pour prouver que les racines x de l'équation $\mathrm{U} = 0$ sont en nombre infini quand le paramètre r est infiniment grand, n'est pas bornée aux équations différentielles du troisième ordre que nous avons spécialement considérées. Voici comment on peut l'exposer en peu de mots pour l'équation générale (1) sans entrer toutefois dans le détail des calculs.

Posons, comme ci-dessus, $x - \mathrm{x} = z$, $\rho\xi = \theta$, et bornons-nous aux valeurs de z comprises entre ξ et 2ξ : nous regardons θ comme un nombre très grand en lui-même, mais très petit par rapport à ρ ; les valeurs de z seront donc toujours très petites, et par suite les fonctions K, L, ... N seront sensiblement constantes : en faisant $\mathrm{K} = \alpha$, $\mathrm{L} = \beta, \ldots \mathrm{N} = \gamma$, où α, $\beta, \ldots \gamma$ désignent des constantes convenables, on altérera très peu la valeur de U ainsi que les valeurs des racines de l'équation $\mathrm{U} = 0$. En posant donc

$$\frac{1}{\alpha\beta \ldots \gamma} = \omega^\mu, \quad r = \rho^\mu, \quad \rho z = t,$$

l'équation qui détermine la valeur de U simplifiée sera

$$\frac{d^\mu \mathrm{U}}{dt^\mu} + \omega^\mu \mathrm{U} = 0,$$

et les conditions définies qu'il faudra y joindre prendront la forme

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}, \quad \gamma \frac{d\mathrm{U}}{dt} = \frac{\mathrm{B}}{\rho}, \text{ etc. pour } t = 0.$$

Or si l'on intègre cette équation, et qu'après avoir déterminé les constantes arbitraires, on néglige les termes infiniment petits divisés par ρ, on a simplement

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{A}}{\mu}\left(e^{r_1 \omega t} + e^{r_2 \omega t} + \ldots + e^{r_\mu \omega t}\right),$$

r_1, $r_2, \ldots r_\mu$ étant les racines de l'équation binome $r^\mu + 1 = 0$. Il reste à discuter l'équation

$$e^{\nu_1\omega t} + e^{\nu_2\omega t} + \ldots + e^{\nu_\mu\omega t} = 0,$$

dans laquelle on considère seulement les valeurs de t comprises entre deux nombres très grands θ, 2θ. A cet effet, désignons par $p + q\sqrt{-1}$, $p - q\sqrt{-1}$ les deux valeurs de ν dont la partie réelle est la plus grande. Si l'on multiplie tous les termes de l'équation

$$e^{\nu_1\omega t} + e^{\nu_2\omega t} + \ldots + e^{\nu_\mu\omega t} = 0$$

par $e^{-p\omega t}$, on rendra très petit le module de toutes les exponentielles qui répondent à des racines ν différentes des deux racines $p \pm q\sqrt{-1}$ dont nous venons de parler; en sorte que ce premier membre deviendra à très peu près

$$2\cos(q\omega t).$$

C'est donc à l'équation

$$\cos(q\omega t) = 0,$$

ou plus exactement à l'équation

$$\cos(q\omega t) = \varepsilon,$$

ε étant un infiniment petit, que se réduit en définitive l'équation $\mathrm{U} = 0$. Or, le nombre des valeurs de t, comprises entre θ et 2θ, pour lesquelles $\cos(q\omega t)$ s'annule est d'autant plus grand que la limite 2θ est plus grande et devient infini pour $\theta = \infty$: donc il en est de même du nombre des racines de l'équation $\mathrm{U} = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

§ III.

9. Les racines x, plus grandes que x, de l'équation $\mathrm{U} = 0$ et des équations dérivées

$$\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} = 0, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^2} = 0, \ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}} = 0,$$

sont nécessairement inégales. Pour le prouver et pour démontrer en même temps plusieurs propriétés intéressantes de ces racines, faisons croître x d'une manière continue, à partir de $x = \mathrm{x}$, et considérons la suite des signes des quantités

$$(11) \qquad \mathrm{U}, \quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^2}, \ldots \ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}:$$

chacune de ces quantités est égale à la dérivée de la précédente, multipliée par un facteur positif, et la dernière en vertu de l'équation (1) a pour dérivée $-r\mathrm{U}$.

Pour $x = \mathrm{x}$ et pour des valeurs de x très voisines de x, les fonctions (11) sont positives en vertu des équations (2): l'une d'elles, savoir

$$\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}},$$

est décroissante puisque sa dérivée $-r\mathrm{U}$ est négative, mais les autres vont en croissant. Cet état de choses durera tant que l'une de ces fonctions ne sera pas réduite à zéro, et d'un autre côté celle qui décroît actuellement est la seule qui tende vers une valeur nulle. C'est donc la fonction

$$\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

qui s'évanouira la première pour une certaine valeur $x_{\prime}^{(\mu-1)}$ de x: ensuite cette fonction changera de signe, car lorsque $x = x_{\prime}^{(\mu-1)}$ sa dérivée $-r\mathrm{U}$ n'a pas cessé d'être < 0.

A partir de $x = x_{\prime}^{(\mu-1)}$, la suite (11) présente une variation. Des μ fonctions qui la composent, les $(\mu - 2)$ premières sont positives et croissantes; la $(\mu - 1)^{\text{ième}}$ est positive, mais décroissante; la $\mu^{\text{ième}}$ est négative, mais sa valeur absolue augmente puisque la dérivée $-r\mathrm{U}$ est aussi négative : cette fois donc c'est la fonction

$$\frac{\mathrm{L}d\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-2}}$$

qui s'évanouira la première pour une certaine valeur $x_{\prime}^{(\mu-2)}$ de x et qui changera ensuite de signe.

A partir de $x = x_1^{(\mu-2)}$ la suite des signes de (11) présentera encore une variation. Des μ fonctions qui la composent, les $(\mu - 3)$ premières seront positives et croissantes ; la $(\mu - 2)^{ième}$ sera positive, mais décroissante ; quant aux deux dernières, elles seront négatives, mais leurs valeurs absolues iront en augmentant puisqu'elles ont des dérivées aussi négatives. C'est donc la $(\mu - 2)^{ième}$ fonction qui s'évanouira la première pour une certaine valeur $x_1^{(\mu-3)}$ de la variable indépendante x.

En continuant ces raisonnements, on voit que les diverses fonctions qui composent la suite (11) s'annulent successivement dans un ordre rétrograde pour des valeurs de x représentées par $x_1^{(\mu-1)}$, $x_1^{(\mu-2)}$, etc. jusqu'à ce qu'enfin U s'évanouisse aussi et change de signe pour une certaine valeur $x = x_1$.

Pour des valeurs de x un peu plus grandes que x_1, toutes les fonctions (11) seront négatives : à l'exception de la dernière, elles auront des dérivées négatives et par conséquent des valeurs absolues croissantes. Donc le premier changement qui aura lieu dans les signes de la suite (11) sera dû à une valeur $x_2^{(\mu-1)}$ de x pour laquelle

$$\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

s'évanouira de nouveau : après quoi toutes les autres fonctions recommenceront à s'évanouir dans l'ordre rétrograde précédemment indiqué.

Au-delà de la seconde racine x_2 de $\mathrm{U} = 0$ les fonctions (11) seront d'abord toutes positives ; ensuite elles changeront de signe, comme cela est déjà arrivé dans l'intervalle compris entre x et x_1. Et ainsi de suite.

10. Cette discussion met bien en évidence la loi régulière suivant laquelle se succèdent les changements de signe des fonctions (11). Il en résulte que deux de ces fonctions ne peuvent jamais s'évanouir à la fois, et que de plus en s'évanouissant chacune d'elles change de signe : en particulier on ne peut pas avoir à la fois $\mathrm{U} = 0$, $\frac{d\mathrm{U}}{dx} = 0$, de sorte que les racines x de l'équation $\mathrm{U} = 0$ sont toutes inégales. Il en résulte aussi que dans la suite (11) il ne peut jamais se trouver

plus d'une variation. Quand une des fonctions qui la composent devient nulle, celles qui la précèdent ont toutes le même signe $\pm$ et celles qui la suivent ont le signe $\mp$. Ainsi pour chaque valeur de x qui donne $\mathrm{U} = 0$, les quantités

$$\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^2}, \ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{n-1}}$$

prennent toutes le même signe, savoir le signe $+$ si l'on a $x = x_2$, $x = x_4, \ldots$, et le signe $-$ si l'on a $x = x_1$, $x = x_3, \ldots$ On voit par-là qu'il est impossible de satisfaire à la fois aux deux équations

$$\mathrm{U} = 0$$

et

$$a\mathrm{U} + b\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} + \ldots + c\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{n-1}} = 0,$$

a, $b, \ldots c$ étant des coefficients positifs : on voit aussi que le premier membre de cette dernière équation devient alternativement positif et négatif lorsqu'on y pose $x = \mathrm{x}$, $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, etc., d'où il suit que l'équation dont il s'agit possède au moins une racine dans chacun des intervalles de x à x_1, de x_1 à x_2, etc. Mais il ne faut pas nous arrêter à discuter en détail les conséquences diverses que l'on pourrait déduire de notre analyse. Contentons-nous d'observer que cette analyse n'éprouvera que des modifications très légères si quelques-unes des constantes positives A, B, C, ... D se réduisent à zéro. On doit même dire que nos démonstrations n'auront à subir aucun changement si le dernier nombre D reste > 0. Pour s'en convaincre il suffit d'observer que dans cette hypothèse et pour des valeurs de x infiniment peu supérieures à x les fonctions (11) seront encore positives, résultat facile à constater et qui tient à ce que toute fonction de x qui s'annule pour $x = \mathrm{x}$ prend, lorsque x croît très peu au-delà de x, le même signe que sa dérivée. Mais lorsque $\mathrm{D} = 0$ la fonction

$$\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{n-1}}$$

est égale à zéro pour $x = \mathrm{x}$, et ce n'est plus elle qui s'annule la première lorsque x croît d'une manière continue au-delà de x. Pour donner à la question toute la généralité dont elle est susceptible, admettons que les i dernières des fonctions (11) s'évanouissent pour $x = \mathrm{x}$. En observant que la dérivée de

$$\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

est égale à $-r\mathrm{U}$ et par conséquent est négative lorsque x diffère très peu de x, on verra que pour de telles valeurs de x les $(\mu - i - 1)$ premières des fonctions (11) sont positives et croissantes, que la $(\mu - i)^{ieme}$ est positive mais décroissante, et que les i dernières sont négatives et ont des valeurs absolues croissantes. C'est donc la $(\mu - i)^{ieme}$ fonction qui s'évanouira la première à partir de $x = \mathrm{x}$; mais l'ordre des changements de signe et les conséquences que nous en avons deduites ci-dessus subsisteront entièrement.

11. Ainsi, dans tous les cas possibles, nous avons ces deux théorèmes qu'il est bon de détacher des autres à cause de leur utilité.

1°. *Les valeurs de* x, *plus grandes que* x, *qui donnent* $\mathrm{U} = 0$, *ne donnent jamais* $\frac{d\mathrm{U}}{dx} = 0$. Nous désignerons ces racines par x_1, x_2, x_3, $x_4 \ldots$

2°. *Si dans la quantité*

$$a\mathrm{U} + b\,\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} + \ldots + c\,\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

où $a, b, \ldots c$ *représentent des coefficients positifs ou nuls, on fait* $x = x_1$, *puis* $x = x_2$, *puis* $x = x_3$, *etc., les résultats que l'on obtiendra seront alternativement négatifs et positifs.*

§ IV.

12. Considérons maintenant les variations que peuvent éprouver les racines x de l'équation $\mathrm{U}(x, r) = 0$ lorsqu'on attribue à r une série de valeurs croissantes. Si l'on remplace r par $r + k$, k étant un accroissement positif et très petit, et que l'on conserve à x sa valeur primitive pour laquelle on a $\mathrm{U}(x, r) = 0$, la quantité $\mathrm{U}(x, r + k)$

ne sera plus zéro, mais elle pourra être rendue aussi petite qu'on voudra en raison de la petitesse de k. Cette quantité aura d'ailleurs ou le même signe que la dérivée $\frac{dU(x, r)}{dx}$ qui n'est pas nulle, ou un signe contraire à celui de cette dérivée. De là deux cas distincts qu'il faut examiner successivement.

Si $U(x, r+k)$ et $\frac{dU(x, r)}{dx}$ sont de même signe, on pourra supposer que ces deux quantités sont toutes deux positives; car, si elles étaient toutes deux négatives, rien n'empêcherait de remplacer l'équation $U(x, r) = 0$ par celle-ci $-U(x, r) = 0$.

Cela posé, désignons par h un nombre très petit, mais néanmoins tel que l'on ait

$$(12) \qquad h > \frac{2U(x, r+k)}{\left[\frac{dU(x, r)}{dx}\right]},$$

et supposons que ξ représente une variable qui peut croître depuis $-h$ jusqu'à o. Puisque la dérivée

$$\frac{dU(x, r)}{dx}$$

est positive, il en sera de même de la dérivée

$$\frac{dU(x+\xi, r+k)}{d\xi},$$

ce qui tient à la petitesse de ξ et de k. Donc la fonction

$$U(x+\xi, r+k)$$

est une fonction croissante de ξ. Pour $\xi = 0$ cette fonction se réduit à $U(x, r+k)$ et par conséquent est positive. Pour $\xi = -h$, il vient par la formule de Taylor

$$U(x-h, r+k) = U(x, r+k) - h\frac{dU(x-\theta h, r+k)}{dx}$$

où θ désigne un coefficient compris entre o et 1. A cause de la petitesse de k et de h, $\frac{dU(x-\theta h,\ r+k)}{dx}$ diffère peu de $\frac{dU(x,\ r)}{dx}$, et l'on a certainement

$$\frac{dU(x-\theta h,\ r+k)}{dx} > \frac{1}{2}\cdot\frac{dU(x,\ r)}{dx}.$$

De là résulte

$$U(x-h,\ r+k) < U(x,\ r+k) - \frac{h}{2}\frac{dU(x,\ r)}{dx},$$

et par conséquent

$$U(x-h,\ r+k) < 0,$$

à cause de l'inégalité (12) que la valeur de h vérifie. Ainsi quand on fait croître ξ d'une manière continue depuis $-h$ jusqu'à o, la fonction $U(x+\xi,\ r+k)$, d'abord négative, augmente par degrés insensibles et devient ensuite positive, d'où l'on doit conclure qu'elle s'annule une fois dans cet intervalle.

En d'autres termes, à la racine x de $U(x,\ r)=0$ dont nous nous occupons, répond une racine x un peu plus petite de $U(x,r+k)=0$.

On arriverait à une conséquence opposée si les deux quantités $U(x,\ r+k)$, $\frac{dU(x,\ r)}{dx}$ étaient de signes contraires. On trouverait alors qu'à la racine x de $U(x,\ r)=0$ répond une racine x un peu plus grande de $U(x,r+k)=0$.

Donc, en général, à chaque racine x de l'équation $U(x,\ r)=0$ répond une racine x un peu plus petite ou un peu plus grande de $U(x,\ r+k)=0$.

Et l'on pourra prouver réciproquement qu'à chaque racine x de $U(x,\ r+k)=0$ répond une racine x un peu plus grande ou un peu plus petite de $U(x,\ r)=0$. J'omets, pour abréger, la démonstration de cette proposition inverse : elle ne diffère pas de celle de la proposition directe que nous avons suffisamment développée.

13. Les raisonnements précédents supposent que quand la quantité

$U(x, r)$ est nulle, la quantité $U(x, r+k)$ ne l'est pas, k désignant une quantité finie très petite à laquelle on n'attribue d'ailleurs aucune valeur déterminée. Cela est vrai en général et revient à dire que la fonction U ne devient identiquement nulle pour aucune valeur particulière de x, tant que celle de r reste arbitraire, ce qui est évident par la série du n° 3,

$$U = \varphi_0 - r\Phi_1 + r^2\Phi_2 - \text{etc.}$$

dès que x est $> \mathrm{x}$. Mais la valeur particulière $x = \mathrm{x}$ peut faire exception. Examinons donc de plus près ce qui arrive lorsque l'on a $U(\mathrm{x}, r) = 0$. Pour que la quantité $U(\mathrm{x}, r)$ soit nulle, il faut, en vertu des conditions (2), que l'on ait $A = 0$, et alors l'équation $U(\mathrm{x}, r) = 0$ subsiste quel que soit r. Cette racine x sera d'ailleurs double si B est aussi zero; triple si B et C sont nuls en même temps que A, et ainsi de suite. Mais l'existence de la racine x et son degré de multiplicité dépendent uniquement des valeurs de A, B, C, etc., et non de celle de r qui n'a ici aucune influence. En sorte que le changement de r en $r+k$ qui doit diminuer ou augmenter toutes les racines x de $U(x, r) = 0$ est sans action au contraire sur la racine x qui reste invariable au milieu des altérations que le paramètre r éprouve.

14. En observant que la quantité $U(\mathrm{x}, r)$ n'est pas nulle lorsque A est différent de zéro, et que, dans le cas contraire, la racine x de l'équation $U(x, r) = 0$ se conserve sans jamais augmenter ni diminuer; et en se bornant aux valeurs de x comprises entre x et X, on déduit du théorème du n° 12 les conséquences suivantes.

Si $U(x, r)$ et $U(x, r+k)$, où k désigne une quantité infiniment petite, ont des valeurs finies pour $x = X$, ces fonctions changeront de signe et s'évanouiront l'une et l'autre précisément le même nombre de fois. Mais si $U(X, r) = 0$, il se pourra que la seconde de nos deux fonctions change de signe une fois de plus que la première, et cela arrivera toutes les fois que les deux quantités

$$\frac{dU(X, r)}{dX}, \quad U(X, r+k)$$

seront de même signe : quand au contraire ces deux quantités seront de signes différents, l'équation

$$U(x,\ r+k) = 0$$

perdra la racine X que possédait l'équation

$$U(X,\ r) = 0$$

et ne la remplacera par aucune autre.

On comprend actuellement de quelle manière peut varier le nombre des racines x de l'équation $U(x, r) = 0$ lorsqu'on fait croître r d'une manière continue depuis 0 jusqu'à $+\infty$, en se bornant d'ailleurs aux valeurs de x comprises entre x et X. Pour des valeurs de r positives et très petites, ce nombre est nul ; il ne peut augmenter que d'une unité tout au plus au moment où r atteint et dépasse une des racines de l'équation $U(X, r) = 0$. En nommant $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \ldots r^{(n)}, \ldots$ ces racines rangées par ordre de grandeur, sans nous inquiéter du degré de multiplicité de chacune d'elles, nous voyons donc que pour des valeurs de r comprises entre 0 et $r^{(1)}$, $U(x, r)$ ne changera jamais de signe ; pour des valeurs de r comprises entre $r^{(1)}$ et $r^{(2)}$, $U(x, r)$ changera de signe au plus une fois ; en général pour des valeurs de r comprises entre $r^{(n-1)}$ et $r^{(n)}$, $U(x, r)$ changera de signe $(n-1)$ fois au plus. Pour que le nombre des changements de signe de $U(x, r)$ dans ce dernier cas soit précisément $(n-1)$, il faut et il suffit qu'à chaque passage de r par une des racines $r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots r^{(n-1)}$ le nombre des racines x, inférieures à X, de l'équation $U(x, r) = 0$ augmente d'une unité, ou ce qui revient au même il faut et il suffit que l'équation $U(x, r^{(i)}) = 0$ ait toujours une racine de plus que l'équation précédente $U(x, r^{(i-1)}) = 0$. Nous prouverons plus bas qu'effectivement il en est ainsi. Mais avant d'arriver à ce théorème, il est nécessaire d'en démontrer plusieurs autres qui par eux-mêmes ont beaucoup d'intérêt.

En admettant dès à présent l'exactitude du théorème dont nous parlons et qui sera rigoureusement établi dans un des § suivants, il faut en conclure que la racine X de l'équation $U(x, r^{(i-1)}) = 0$ est remplacée par une autre racine plus petite que X lorsque le paramètre $r^{(i-1)}$ augmente et devient $r^{(i-1)} + k$. Et comme la limite supérieure X n'est au fond qu'une valeur de x quelconque, il s'ensuit qu'en général chacune des racines x de l'équation $U(x, r) = 0$ diminue quand r augmente et augmente quand r diminue, résultat conforme à celui que M. Sturm a obtenu, pour le cas où $u = 2$, dans son *Mémoire sur la théorie des équations différentielles du second ordre*. Mais la méthode de M. Sturm différant beaucoup de la nôtre, cette proposition qui pour lui est fondamentale devient pour nous un simple corollaire digne à peine d'être remarqué.

Nous avons jusqu'ici fait abstraction du degré de multiplicité des racines $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, etc. On verra au n° 34 que ces racines sont toujours des racines simples, et que la dérivée $\frac{dU}{dr}$ est, comme la dérivée $\frac{dU}{dx}$, essentiellement différente de zéro lorsque l'on a $U = 0$.

Il faut observer aussi que le nombre des racines $r^{(1)}$, $r^{(2)}$ ... est infini. En effet, quand $r = \infty$, U est une fonction de x qui change de signe un nombre infini de fois; or chacun de ces changements de signe entraîne l'existence d'une racine au moins de l'équation $U(X, r) = 0$, puisque, pour des valeurs de $r < r^{(i)}$, U ne peut changer de signe plus de $(i - 1)$ fois.

§ V.

15. Nous allons maintenant nous occuper d'un théorème d'algèbre qui rentre au fond dans celui de Fourier et qui se démontre par la méthode même dont ce savant illustre a fait usage dans l'ouvrage intitulé *Analyse des équations déterminées*. Ce théorème établit une liaison remarquable entre les changements de signe qu'éprouvent deux fonctions λ et θ liées entre elles par l'équation

$$\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\lambda}{dx^{\mu}} + \theta = 0,$$

lorsqu'on fait croître x depuis x jusqu'à X.

Considérons la suite de fonctions que voici :

$$(13) \qquad \lambda, \quad \frac{\mathrm{N}d\lambda}{dx}, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\lambda}{dx}, \ldots\ldots \frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\lambda}{dx^{\mu}};$$

chacune des quantités dont elle se compose est égale à la dérivée de la précédente, multipliée par un facteur positif, et la dernière est égale à $-\theta$. *Soit* p *le nombre des variations que la suite* (13) *nous offre lorsqu'on donne à* x *une valeur* $\mathrm{x} + \varepsilon$ *infiniment voisine de* x

et un peu plus grande : soit q le nombre des variations de cette même suite lorsqu'on donne à x une valeur $X - \varepsilon$ infiniment voisine de X et un peu plus petite. Cela posé, l'excès du nombre de fois où la fonction θ change de signe sur le nombre de fois où la fonction λ change de signe est au moins égal à $q - p$.

On démontrera ce théorème en faisant croître x d'une manière continue depuis $x + \varepsilon$ jusqu'à $X - \varepsilon$ et observant que la suite (13) perd au moins une variation lorsque x atteint et dépasse une valeur pour laquelle λ change de signe, qu'elle en gagne au plus une lorsque c'est θ qui change de signe, et qu'enfin elle ne peut jamais en gagner lorsque la fonction qui change de signe est une des fonctions intermédiaires comprises entre λ et θ. Il serait inutile d'insister davantage sur ces considérations aujourd'hui si connues et que Fourier a si bien développées.

16. On obtient un second théorème différent du premier lorsqu'au lieu de compter les changements de signe des fonctions λ, θ, on compare le nombre total Θ des racines tant égales qu'inégales de l'équation $\theta = 0$ au nombre Λ des racines tant égales qu'inégales de l'autre équation $\lambda = 0$. On peut dire alors que l'excès $\Theta - \Lambda$ du premier nombre sur le second est au moins égal à $q - p$. Pour le démontrer, il faut encore faire croître x d'une manière continue depuis $x + \varepsilon$ jusqu'à $X - \varepsilon$. Lorsque x atteint et dépasse une des racines de l'équation $\lambda = 0$, il se perd en général autant de variations qu'il y a d'unités dans le nombre indiquant le degré de multiplicité de la racine: cette règle souffre une exception quand la racine dont il s'agit est multiple de l'ordre $\mu + 1 + i$, de sorte qu'elle annule tous les termes de la suite (13) ; il se perd alors μ variations seulement, mais par compensation cette racine est multiple de l'ordre $(1 + i)$ pour l'équation $\theta = 0$: les racines de l'équation $\theta = 0$ qui peuvent faire gagner des variations, doivent donc être différentes de celles qui annulent ainsi tous les termes de la suite (13). De ces remarques bien comprises résulte immédiatement la démonstration du théorème énoncé.

Mais pour plus de clarté, désignons par α le nombre des racines égales ou inégales de l'équation $\lambda = 0$ qui n'annulent pas tous les termes de la suite (13). Supposons de plus que cette équation ait une racine multiple de l'ordre $\mu + 1 + i$, une racine multiple de l'ordre

$\mu + 1 + i_1, \ldots$ et enfin une racine multiple de l'ordre $\mu + 1 + i_\nu$; i, $i_1, \ldots i_\nu$, représentent des nombres entiers nuls ou positifs, égaux ou inégaux : le nombre total des racines de l'équation $\lambda = 0$ étant nommé Λ, on aura

$$\Lambda = \alpha + (\mu + 1)(\nu + 1) + i + i_1 + \ldots + i_\nu,$$

et le nombre des variations perdues en traversant ces racines, sera

$$\alpha + \mu(\nu + 1).$$

L'équation $\theta = 0$ aura d'abord $(\nu + 1) + i + i_1 + \ldots + i_\nu$ racines qui ne feront gagner aucune variation : donc si nous supposons qu'elle ait en outre β racines, le nombre des variations gagnées sera tout au plus β. En en retranchant le nombre des variations perdues, on formera la différence

$$\beta - \alpha - \mu(\nu + 1),$$

laquelle devra être évidemment égale ou supérieure à $q - p$, puisque les fonctions intermédiaires peuvent encore faire perdre des variations et n'en font jamais gagner. Or en posant

$$\Theta = \beta + (\nu + 1) + i + i_1 + \ldots + i_\nu,$$

c'est-à-dire en représentant par Θ le nombre total des racines de l'équation $\theta = 0$, on a

$$\beta - \alpha - \mu(\nu + 1) = \Theta - \Lambda.$$

Il vient donc

$$\Theta - \Lambda \geqq q - p,$$

inégalité dans laquelle consiste précisément le théorème qu'il fallait démontrer (*).

17. On peut dire que le théorème précédent est énoncé à la page 61 de l'ouvrage de Fourier cité plus haut. L'extension que nous lui avons donnée consiste surtout dans l'introduction des facteurs positifs N,

---

(*) Les variations que font perdre les fonctions intermédiaires sont toujours en nombre pair, comme on le constate aisément ; ainsi l'excès de $\Theta - \Lambda$ sur $q - p$, quand il ne se réduit pas à zéro, est exprimé par un multiple de 2.

M, etc. par lesquels nous multiplions chacune des dérivées de λ avant de passer à la dérivée suivante. En un mot, nous considérons les termes successifs de la suite (13) au lieu de considérer, comme Fourier l'indique, les dérivées λ, $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$, etc. Mais une telle extension n'offrait aucune difficulté, et d'ailleurs elle a été déjà explicitement opérée par M. Sturm dans un cas à peu près semblable. (*Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Férussac, tome II, page 422.)

Lorsque je me suis occupé pour la première fois des théorèmes des nos 15 et 16, je les ai démontrés par une méthode un peu différente de celle qui précède. Cette méthode, qui ne manquait ni de simplicité ni d'élégance, était fondée sur l'emploi répété du théorème de Rolle. Mais j'ai cru devoir l'abandonner, M. Sturm à qui j'avais communiqué cette partie de mon travail m'ayant conseillé d'y substituer les considérations équivalentes sur lesquelles repose le théorème de Fourier. La marche que j'ai suivie a du moins l'avantage de bien montrer que les théorèmes établis ci-dessus ne sont pas nouveaux. Bien que Fourier n'en ait pas donné un énoncé général, il est évident qu'on doit lui en laisser tout l'honneur puisqu'il a établi les principes dont ils dérivent immédiatement comme de simples corollaires.

§ VI.

18. Désignons par a, b, ... c des coefficients positifs ou nuls, et nommons $\varpi(r)$ ce que devient la quantité

$$aU + b\,\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\,\frac{Kd.L\ldots d.NdU}{dx^{\mu-1}}$$

lorsqu'on y pose $x = X$. L'équation $\varpi(r) = 0$ comprendra comme cas particulier l'équation $U(X, r) = 0$ dont nous nous sommes déjà occupés dans le § IV et dont nous avons représenté les racines par $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \ldots$ Ces racines $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)} \ldots$ sont supposées rangées par ordre de grandeur sans qu'on s'inquiète du degré de multiplicité de chacune d'elles. Nous représenterons de même par $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m \ldots r_n, \ldots$ les racines successives et inégales de l'équation plus générale $\varpi(r) = 0$. Enfin pour plus de simplicité nous désignerons par $U_n(x)$ ou même par U_n la fonction $U(x, r_n)$, et par $U^{(n)}(x)$ ou par $U^{(n)}$ la fonction $U(x, r^{(n)})$. Il est bon de rappeler que l'équation $\varpi(r) = 0$

et l'équation $U(X, r) = 0$ ne peuvent avoir aucune racine commune à moins que les coefficients $b, \ldots c$ ne se réduisent à zéro, auquel cas elles sont identiques : cela tient (n° 10) à ce que les valeurs de x et de r pour lesquelles $U = 0$ rendent les dérivées

$$\frac{NdU}{dx}, \quad \frac{Md.NdU}{dx^2}, \ldots \ldots \frac{Kd.L\ldots.d.NdU}{dx^{\mu-1}}$$

toutes > 0 ou toutes < 0, d'où il suit qu'elles n'annulent jamais la somme

$$aU + b\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\frac{Kd.L\ldots.d.NdU}{dx^{\mu-1}}.$$

19. Maintenant soient $A_m, A_{m+1}, \ldots A_n$ des constantes quelconques. Faisons

$$\lambda = A_m U_m + A_{m+1} U_{m+1} + \ldots + A_n U_n,$$
$$\theta = A_m r_m U_m + A_{m+1} r_{m+1} U_{m+1} + \ldots + A_n r_n U_n :$$

nous aurons entre les deux fonctions λ et θ la relation

$$\frac{d.Kd.L\ldots.d.Nd\lambda}{dx^{\mu}} + \theta = 0$$

qui se démontre en posant successivement $r = r_m$, $r = r_{m+1}, \ldots r = r_n$ dans l'équation (1), puis ajoutant entre elles toutes les équations ainsi obtenues après les avoir multipliées par les facteurs respectifs A_m, $A_{m+1}, \ldots A_n$.

La relation que nous venons de trouver entre λ et θ est précisément celle que nous avions établie dans le § précédent entre deux fonctions désignées aussi par les lettres λ, θ. Nous pouvons donc former de nouveau la suite (13), et appliquer ici les théorèmes des n^{os} 15 et 16.

En vertu des équations de condition (2), les valeurs des fonctions

$$U, \quad \frac{NdU}{dx}, \quad \frac{Md.NdU}{dx^2}, \ldots \ldots \frac{Kd.L\ldots.d.NdU}{dx^{\mu-1}},$$

pour $x = \mathrm{x}$, sont exprimées par des constantes A, B, C, ... D positives ou nulles. Faisons donc $x = \mathrm{x}$, et représentons par ΣA_n la somme $A_m + A_{m+1} + \ldots + A_n$: nous aurons

$$\begin{aligned} \lambda &= A\Sigma A_n, \\ \frac{Nd\lambda}{dx} &= B\Sigma A_n, \\ \frac{Md.Nd\lambda}{dx^2} &= C\Sigma A_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{Kd.L\ldots d.Nd\lambda}{dx^{\mu-1}} &= D\Sigma A_n. \end{aligned}$$

Considérons d'abord le cas le plus simple, savoir celui où ΣA_n et les constantes A, B, C, ... D ont des valeurs différentes de zéro. Toutes les quantités que nous venons d'écrire et qui sont entre elles comme les constantes A, B, C, ... D, sont évidemment de même signe, mais leur signe commun peut être semblable ou opposé à celui que prend le dernier terme de la suite (13) pour $x = \mathrm{x}$. Donc en posant $x = \mathrm{x}$ ou $x = \mathrm{x} + \varepsilon$, le nombre p des variations que nous offrira la suite (13) sera égal à zéro ou à l'unité, et l'on aura $p \leqq 1$.

En observant que toute fonction de x qui s'annule pour $x = \mathrm{x}$ doit être de même signe que sa dérivée pour $x = \mathrm{x} + \varepsilon$, il est aisé de voir que l'inégalité $p \leqq 1$ subsistera lors même que quelques-unes des constantes A, B, C, ... D se réduiraient à zéro : en effet, si D n'est pas nulle, toutes les fonctions

$$\lambda, \quad \frac{Nd\lambda}{dx}, \ldots \frac{Kd.L\ldots d.Nd\lambda}{dx^{\mu-1}}$$

seront encore de même signe pour $x = \mathrm{x} + \varepsilon$: si au contraire $D = 0$, la dernière d'entre elles se réduira à zéro quand $x = \mathrm{x}$. Pour conserver à la question toute la généralité qu'elle comporte, supposons que les i dernières de ces fonctions soient alors nulles. Pour $x = \mathrm{x} + \varepsilon$ les $(i + 1)$ quantités qui terminent la suite (13) seront nécessairement de même signe ; les $(\mu - i)$ premières seront aussi entre elles de même signe : donc cette suite (13) présentera tout au plus une variation, et l'on aura $p \leqq 1$, ce qu'il fallait démontrer.

La conclusion à laquelle on arrive devient plus précise lorsque la somme ΣA_n se réduit à zéro. Alors les fonctions (13) sont nulles pour $x = \mathrm{x}$, la dernière exceptée ; par suite ces fonctions (13) sont toutes de même signe quand $x = \mathrm{x} + \varepsilon$. Dans ce cas on a sans équivoque $p = 0$.

Les racines r_m, $r_{m+1}, \ldots r_n$ appartenant toutes à l'équation $\varpi(r) = 0$, c'est-à-dire à l'équation

$$aU + b\,\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\,\frac{Kd.L\ldots d.NdU}{dx^{\mu-1}} = 0 \quad \text{pour} \quad x = X.$$

il est aisé de voir qu'on a aussi

$$a\lambda + b\,\frac{Nd\lambda}{dx} + \ldots + c\,\frac{Kd.L\ldots d.Nd\lambda}{dx^{\mu-1}} = 0 \quad \text{pour} \quad x = X.$$

Or cette dernière équation exige nécessairement que pour $x = X$ ou du moins pour $x = X - \varepsilon$, la suite (13) présente une ou plusieurs variations : on a donc $q \geqq 1$.

Donc la différence $q - p$ ne peut jamais être négative, et même elle doit être au moins égale à l'unité lorsque $\Sigma A_n = 0$.

Donc 1°. la fonction θ, lorsque x croît de x à X, change de signe au moins autant de fois que la fonction λ : elle change même de signe au moins une fois de plus lorsque l'on a $\Sigma A_n = 0$. 2°. L'équation $\theta = 0$ a, dans le même intervalle, au moins autant de racines, tant égales qu'inégales, que l'équation $\lambda = 0$; elle a même au moins une racine de plus qu'elle lorsque $\Sigma A_n = 0$.

Par exemple la fonction $r_{n-1}U_{n-1} - r_nU_n$ change de signe au moins une fois de plus que la fonction $U_{n-1} - U_n$.

20. Nous venons de prouver que si l'équation

$$A_mU_m + \ldots\ldots + A_nU_n = 0$$

possède un certain nombre de racines, l'équation

$$A_mr_mU_m + \ldots\ldots + A_nr_nU_n = 0$$

en possède au moins autant. Répétons notre raisonnement, et nous verrons qu'il en est de même *à fortiori* des équations suivantes

$$A_m r_m^2 U_m + \ldots + A_n r_n^2 U_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m r_m^i U_m + \ldots + A_n r_n^i U_n = 0,$$

quelque grand que soit le nombre entier positif i. Et le même théorème subsistera si, au lieu de considérer les racines de ces équations, on considère les changements de signe de leurs premiers membres.

En supposant le coefficient A_n différent de zéro et divisant par $A_n r_n^i$ les deux membres de la dernière de nos équations, on la met sous la forme

$$U_n = -\frac{A_{n-1}}{A_n}\cdot\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^i U_{n-1} - \ldots - \frac{A_m}{A_n}\cdot\left(\frac{r_m}{r_n}\right)^i\cdot U_m.$$

Si donc on suppose le nombre i infini, elle deviendra

$$U_n = \omega,$$

ω désignant un infiniment petit; et cette dernière équation devra avoir au moins autant de racines que l'équation

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n = 0.$$

21. Les racines de l'équation $U_n = \omega$ sont précisément en même nombre que les racines de l'équation plus simple $U_n = 0$, ce qui tient à ce que les racines x de cette dernière équation sont inégales. Divisons en effet la distance $X - x$ en intervalles assez petits pour que dans les uns U_n conserve toujours une valeur absolue plus grande que celle de ω, tandis que dans les autres U_n s'évanouira et changera de signe, la dérivée $\frac{dU_n}{dx}$ restant constamment plus grande que $\frac{d\omega}{dx}$. Dans les premiers il est évident que l'équation $U_n = \omega$ n'est jamais satisfaite. Pour étudier ce qui arrive dans les seconds, nommons α une quelconque des racines de $U_n(x) = 0$ et désignons par h une quantité finie très petite. La fonction ω ou $\omega(x)$ étant infiniment petite, les fonctions

$$U_n(\alpha - h) - \omega(\alpha - h), \quad U_n(\alpha + h) - \omega(\alpha + h)$$

auront les mêmes signes que leurs premiers termes, c'est-à-dire des signes opposés. Donc entre les limites $\alpha - h$, $\alpha + h$, l'équation $U_n - \omega = 0$ a au moins une racine : d'ailleurs elle n'en a qu'une, puisque la dérivée $\frac{dU_n}{dx} - \frac{d\omega}{dx}$ ne s'évanouit pour aucune valeur de x comprise entre $\alpha - h$ et $\alpha + h$.

Si la racine $x = \alpha$ était en même temps racine de l'équation $\omega = 0$, il est clair qu'elle appartiendrait aussi à l'équation $U_n = \omega$, et, d'après la démonstration précédente, l'équation $U_n = \omega$ n'aurait aucune autre racine comprise entre les limites $x = \alpha - h$, $x = \alpha + h$. Cette remarque s'applique à la racine X qui existe dans l'équation $U_n = 0$ toutes les fois que l'on a $b = 0, \ldots\, c = 0$, c'est-à-dire toutes les fois que $\varpi(r)$ se réduit à $U(X, r)$. Cela étant, on aura, pour $x = X$, non-seulement $U_n = 0$, mais encore $U_{n-1} = 0, \ldots U_m = 0$ et par suite $\omega = 0$. Ainsi la racine X appartiendra dans ce cas à l'équation $U_n = \omega$ comme à l'équation $U_n = 0$.

Mais il peut arriver que l'on ait $\alpha = \mathrm{x}$, et ce cas particulier mérite un examen spécial. Pour que x soit racine de l'équation $U_n = 0$, il faut, en vertu des équations (2), que la constante A se réduise à zéro. De plus, la racine x pourra être multiple si quelques-unes des constantes suivantes B, C, ... sont nulles aussi. Pour fixer les idées, nous admettrons que l'on a $B = 0$ et $C > 0$. Alors il viendra en général

$$U_i = 0, \quad \frac{NdU_i}{dx} = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}.$$

et par suite

$$\omega = 0, \quad \frac{Nd\omega}{dx} = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}.$$

Donc x sera une racine double de l'équation $U_n = \omega$ comme de l'équation $U_n = 0$. Mais les quantités

$$\frac{Md.NdU}{dx^2}, \quad \frac{Md.Nd(U_n - \omega)}{dx^2}$$

seront, pour $x = \mathrm{x}$, l'une égale à C et l'autre très peu différente de C, en sorte que la racine x sera double seulement et que dans un très petit intervalle compris depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{x} + h$, on aura nécessairement $\mathrm{U}_n > 0$, $\mathrm{U}_n - \omega > 0$.

De cette discussion complète il résulte que les deux équations $\mathrm{U}_n = 0$, $\mathrm{U}_n = \omega$ ont exactement le même nombre de racines, soit que l'on se borne aux valeurs de $x > \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$, soit que l'on tienne compte des valeurs extrêmes x, X.

Nous pouvons donc établir ce théorème, savoir que *le nombre total des racines de l'équation*

$$\mathrm{A}_m\mathrm{U}_m + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{U}_n = 0,$$

comprises entre x *et* X, *est tout au plus égal au nombre des racines de l'équation* $\mathrm{U}_n = 0$.

La même analyse montre aussi que *le nombre des changements de signe de la fonction*

$$\mathrm{A}_m\mathrm{U}_m + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{U}_n$$

lorsque x *croît de* x *à* X, *est tout au plus égal au nombre des changements de signes de* U_n. Mais comme l'équation $\mathrm{U}_n = 0$ n'a pas de racines égales et que son premier membre change de signe chaque fois qu'il s'annule, on voit que ce nouvel énoncé est compris dans le précédent.

On peut observer en passant que la fonction $\mathrm{A}_m\mathrm{U}_m + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{U}_n$, où l'on suppose le coefficient A_n différent de zéro, n'est jamais identiquement nulle, car d'après les théorèmes que nous venons de démontrer, il faudrait que la fonction U_n fût elle-même identiquement nulle, ce qui est absurde.

22. Nous avons vu ci-dessus que la fonction

$$\mathrm{A}_m r^i{}_m \mathrm{U}_m + \ldots + \mathrm{A}_n r_n^i \mathrm{U}_n$$

change de signe au moins autant de fois que la fonction

$$\mathrm{A}_m\mathrm{U}_m + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{U}_n.$$

En remplaçant $\mathrm{A}_m r^i{}_m$ par $\mathrm{A}_m, \ldots \mathrm{A}_n r^i{}_n$ par A_n, il s'ensuit que la fonction

$$\mathrm{A}_m\mathrm{U}_m + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{U}_n$$

change de signe au moins autant de fois que cette autre fonction

$$\frac{A_m}{r^i_m} U_m + \frac{A_{m+1}}{r^i_{m+1}} U_{m+1} + \ldots + \frac{A_n}{r^i_n} U_n :$$

or cette dernière, lorsque i est infiniment grand, peut se mettre sous la forme

$$\frac{A_m}{r^i_m} (U_m + \omega),$$

ω désignant une quantité infiniment petite ; et par des raisonnements semblables à ceux du n° 21, on voit que le nombre des changements de signe est le même pour U_m et pour $U_m + \omega$. Donc on a ce théorème : *lorsque x croît d'une manière continue depuis* x *jusqu'à* X, *la fonction* $A_m U_m + \ldots + A_n U_n$ *change de signe au moins autant de fois que la fonction* U_m.

23. De nos deux théorèmes réunis il résulte que la fonction U_n change de signe au moins une fois de plus que la fonction U_{n-1} qui la précède immédiatement dans l'ordre des indices. Désignons en effet par σ_n, σ_{n-1} les nombres des changements de signe de ces deux fonctions, et par σ, σ' ces mêmes nombres pour les deux différences $U_{n-1} - U_n$, $r_{n-1}U_{n-1} - r_n U_n$: d'après ce qu'on a vu n° 19, σ' surpasse σ au moins d'une unité. Mais par le théorème du n° 22, on a $\sigma \geqq \sigma_{n-1}$, tandis que le théorème du n° 21 donne $\sigma' \leqq \sigma_n$: de ces deux inégalités jointes à celle-ci, $\sigma' \geqq \sigma + 1$, il résulte de suite $\sigma_n \geqq \sigma_{n-1} + 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Cette proposition générale s'applique en particulier à la fonction $U^{(n)}(x)$ ou $U[x, r^{(n)}]$: cette fonction doit changer de signe au moins une fois de plus que $U[x, r^{(n-1)}]$. Ainsi le *postulatum* du n° 14 est démontré ; nous sommes certains maintenant que le nombre des changements de signe de la fonction $U^{(i)}$ est exactement $(i-1)$, et généralement $U(x, r)$ change de signe $(i-1)$ fois lorsque r est $> r^{(i-1)}$ et $< r^{(i)}$.

24. Voyons maintenant quel rapport de grandeur existe entre les racines r_1, r_2, r_3,... de l'équation $\varpi(r) = 0$ ou

$$aU + b\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\frac{Kd\ L\ldots d.NdU}{dx^{\mu-1}} = 0 \text{ pour } x = X,$$

et les racines $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \ldots$ de l'équation $U(X, r) = 0$.

Si dans le premier membre de l'équation $\varpi(r) = 0$ on pose $r = 0$, ce premier membre est évidemment > 0.

Posons-y maintenant $r = r^{(1)}$ et observons que X est la plus petite racine de l'équation $U[x, r^{(1)}] = 0$. Cela étant, le dernier des théorèmes du n° 11 nous montre que $\varpi[r^{(1)}]$ sera une quantité < 0.

Donc entre $r = 0$ et $r = r^{(1)}$ il existe au moins une racine r_1 de l'équation $\varpi(r) = 0$; d'ailleurs il n'en existe qu'une, car s'il y avait une seconde racine $r_2 > r_1$ et $< r^{(1)}$ la fonction U_2 ne changerait jamais de signe, tandis que nous avons vu qu'elle doit changer de signe au moins une fois.

En posant $r = r^{(2)}$ et observant que X est la seconde racine de l'équation $U[x, r^{(2)}] = 0$, on voit de même, en vertu du théorème cité du n° 11, que le résultat $\varpi[r^{(2)}]$ de la substitution est essentiellement > 0. Donc entre $r^{(1)}$ et $r^{(2)}$ il y a au moins une racine r_2 de l'équation $\varpi(r) = 0$. Il ne peut d'ailleurs y en avoir qu'une, car si une autre racine $r_3 > r_2$ existait entre ces limites, la fonction U_3 ne changerait de signe qu'une fois, tandis qu'elle doit en changer au moins une fois de plus que U_2, c'est-à-dire deux fois au moins.

En général, la racine r_i (dont nous ignorons au reste jusqu'ici le degré de multiplicité) est comprise entre $r^{(i-1)}$ et $r^{(i)}$; par suite la fonction U_i change de signe $(i - 1)$ fois comme la fonction $U^{(i)}$ qui égalée à zéro a de plus qu'elle la racine X.

25. Maintenant nous pouvons donner aux théorèmes des n°s 21 et 22 un énoncé plus précis. On voit en effet

1°. *Que le nombre des racines tant égales qu'inégales de l'équation*

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n = 0,$$

comprises entre les limites x, X *est au plus égal à* $(n - 1)$ *et au moins égal à* $(m - 1)$.

2°. *Que le nombre des changements de signe qu'éprouve la fonction*

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n,$$

lorsque x croît de x *à* X, *est au moins égal à* $(m-1)$ *et au plus égal à* $(n-1)$.

A l'aide de ces deux théorèmes on démontre que les racines de l'équation $A_{n-1}U_{n-1} + A_n U_n = 0$ sont toutes inégales comme celles de l'équation $U_n = 0$. En effet, cette équation a tout au plus $(n-1)$ racines et son premier doit changer de signe au moins $(n-2)$ fois : or il est évident que cela ne pourrait pas arriver si elle avait une racine double, et plus généralement si elle avait des racines multiples.

De là il suit d'abord que les deux fonctions U_n, U_{n-1} ne peuvent jamais s'évanouir pour une même valeur $x=\alpha$ comprise entre x et X, car alors α serait une racine double de l'équation

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(\alpha)}{d\alpha} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(\alpha)}{d\alpha} = 0,$$

ce qui est absurde.

Il en résulte aussi que lorsqu'on fait croître x depuis x jusqu'à X, la quantité

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(x)}{dx} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(x)}{dx}$$

ne change jamais de signe. En effet, dans le cas contraire, cette fonction devrait s'évanouir pour une certaine valeur $x = \alpha$, et l'on aurait

$$U_{n-1}(\alpha)\frac{dU_n(\alpha)}{d\alpha} - U_n(\alpha)\frac{dU_{n-1}(\alpha)}{d\alpha} = 0:$$

α serait donc une racine double de l'équation

$$U_{n-1}(x)\,U_n(\alpha) - U_n(x)\,U_{n-1}(\alpha),$$

ce qui est impossible.

Pour déterminer le signe constant de

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(x)}{dx} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(x)}{dx},$$

j'observe que lorsqu'on fait croître x à partir de $x =$ x, c'est la fonction $U_n(x)$ qui s'évanouit la première, c'est-à-dire avant $U_{n-1}(x)$, puisqu'elle répond à la racine $r_n > r_{n-1}$ et que chaque racine x de l'équation $U(x, r) = 0$ diminue à mesure que le paramètre r augmente. Or, lorsque U_n s'évanouit pour la première fois, la dérivée $\frac{dU_n}{dx}$ est déjà négative et la fonction U_{n-1} est encore positive : donc la quantité

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(x)}{dx} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(x)}{dx}$$

est alors et par conséquent restera toujours négative, en sorte que l'on doit poser

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(x)}{dx} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(x)}{dx} = -\zeta^2 :$$

de là on tire

$$d\left(\frac{U_n}{U_{n-1}}\right) = -\frac{\zeta^2 dx}{U^2_{n-1}};$$

ainsi la différentielle de la fraction $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ est négative, et cette fraction est décroissante dans tous les intervalles où elle reste continue. Sa valeur égale à l'unité pour $x = \mathrm{x}$ diminuera d'abord, puis changera de signe en s'évanouissant et ne redeviendra positive qu'après avoir passé par l'infini : ensuite elle recommencera à décroître et à s'évanouir, puis redeviendra infinie; et ainsi de suite. Les valeurs de x qui rendent cette fraction nulle ou infinie sont respectivement racines des équations $U_n = 0$, $U_{n-1} = 0$: on voit par là que ces racines se succèdent alternativement, et que les $(n-2)$ racines de l'équation $U_{n-1} = 0$ sont comprises chacune à chacune entre les $(n-1)$ racines de l'équation $U_n = 0$.

§ VII.

26. Les propriétés de la fonction U_n nous permettent d'étendre à cette fonction certains théorèmes que j'ai donnés pour la première fois dans ce journal (tome I, page 259), et que j'ai pu ensuite reproduire textuellement dans mon Mémoire sur l'intégration de l'équation $\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}$ (*Journal de l'École Polytechnique*, XXV^e cahier,

page 107). Ces théorèmes s'appliquent encore d'eux-mêmes à la fonction U_2.

Soient α, β, γ... *des grandeurs inégales comprises entre* x *et* X. *Faisons*

$$U_1(\alpha)U_2(x) - U_2(\alpha)U_1(x) = P_2(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$U_1(\alpha)U_n(x) - U_n(\alpha)U_1(x) = P_n(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

puis

$$P_2(\beta)P_3(x) - P_3(\beta)P_2(x) = Q_3(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$P_2(\beta)P_n(x) - P_n(\beta)P_2(x) = Q_n(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

puis encore

$$Q_3(\gamma)Q_4(x) - Q_4(\gamma)Q_3(x) = R_4(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$Q_3(\gamma)Q_n(x) - Q_n(\gamma)Q_3(x) = R_n(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

et ainsi de suite. Je dis que si l'on se borne à considérer les valeurs de $x >$ x *et* $<$ X, *la fonction* $P_2(x)$ *s'évanouira pour* $x=\alpha$ *et seulement pour* $x=\alpha$; *la fonction* $Q_3(x)$ *s'évanouira pour* $x=\alpha$, $x=\beta$, *et seulement pour* $x=\alpha$, $x=\beta$; *la fonction* $R_4(x)$ *s'évanouira pour* $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$ *et seulement pour* $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$; *et ainsi de suite. De plus toutes ces fonctions* $P_2(x)$, $Q_3(x)$, $R_4(x)$.... *changeront de signe chaque fois qu'elles s'évanouiront.*

D'abord on se rappelle que la fonction $U_1(x)$ ne peut jamais devenir nulle quand x est $>$ x et $<$ X.

La fonction $P_2(x)$ se ramène à la forme $A_1U_1(x) + A_2U_2(x)$, en posant $A_1 = -U_2(\alpha)$, $A_2 = U_1(\alpha)$, et le coefficient A_2 n'est pas nul Donc par un théorème démontré (n° 25) cette fonction ne peut s'annuler plus d'une fois quand x est $>$ x et $<$ X, et il est d'ailleurs évident qu'elle devient nulle pour $x=\alpha$; en vertu du même théorème la racine α ne peut être qu'une racine simple ; par conséquent la fonction $P_2(x)$ doit changer de signe en même temps qu'elle s'évanouit. Les fonctions $P_3(x)$, $P_4(x)$,... ne jouissent pas nécessairement des mêmes propriétés que $P_2(x)$: elles s'annulent, il est vrai, pour $x=\alpha$, mais la racine α peut être multiple, et des racines autres que α, quoique comprises entre x et X, peuvent satisfaire aux équations $P_3(x)=0$, $P_4(x)=0$,....

La fonction $Q_3(x)$ s'annule évidemment pour $x=\beta$; elle s'annule aussi pour $x=\alpha$, puisque l'on a $P_2(\alpha)=0$, $P_3(\alpha)=0$. Or en remplaçant $P_2(x)$ et $P_3(x)$ par leurs valeurs, la fonction $Q_3(x)$ prend la forme $A_1U_1(x)+A_2U_2(x)+A_3U_3(x)$, et le coefficient A_3 n'est pas nul puisqu'on le trouve égal à $P_2(\beta)U_1(\alpha)$: donc pour des valeurs de $x>$ x et $<$ X, $Q_3(x)$ ne peut s'évanouir plus de deux fois : donc on a bien $Q_3(x)=0$ pour $x=\alpha$, $x=\beta$, et seulement pour $x=\alpha$, $x=\beta$: de plus les racines α, β ne peuvent être que simples, ce qui oblige la fonction $Q_3(x)$ à changer de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. Les fonctions $Q_4(x)$, $Q_5(x)$,... ne jouissent pas nécessairement des autres propriétés démontrées pour $Q_3(x)$.

La fonction $R_4(x)$ s'annule évidemment pour $x=\gamma$; elle s'annule aussi pour $x=\alpha$, $x=\beta$, car il est aisé de voir que l'on a $Q_3(\alpha)=0$, $Q_3(\beta)=0$, $Q_4(\alpha)=0$, $Q_4(\beta)=0$. Or, en remplaçant $Q_3(x)$ et $Q_4(x)$, puis $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ par leurs valeurs, celle de $R_4(x)$ prend la forme $A_1U_1(x)+A_2U_2(x)+A_3U_3(x)+A_4U_4(x)$, A_4 ayant la valeur suivante $Q_3(\gamma)P_2(\beta)U_1(\alpha)$ qui ne peut pas être nulle. Donc l'équation $R_4(x)=0$ ne peut avoir entre les limites x, X aucune racine différente de α, β, γ, et de plus ces trois racines doivent être simples, en sorte que $R_4(x)$ changera de signe en s'évanouissant.

Il est clair que l'on pourra continuer indéfiniment cette démonstration.

27. Les $(n-1)$ lettres α, β, γ,... représentant toujours des quantités inégales $>$ x et $<$ X, on peut déterminer les constantes A_1, A_2,...A_n de telle manière que la fonction

$$\Psi(x)=A_1U_1+A_2U_2+\ldots+A_nU_n,$$

sans être identiquement nulle, devienne égale à zéro pour $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$.... : en effet si l'on a $n=2$, il suffira de prendre

$\Psi(x) = P_2(x)$; si l'on a $n = 3$, il suffira de prendre $\Psi(x) = Q_3(x)$; si l'on $n=4$, il suffira de prendre $\Psi(x) = R_4(x)$; et ainsi de suite.

La fonction $\Psi(x)$ étant ainsi déterminée, l'équation $\Psi(x) = 0$ ne peut avoir que $(n-1)$ racines au plus (*voyez* n° 25) : on voit donc, 1°. que les racines de l'équation $\Psi(x) = 0$ sont toutes inégales et comprises dans la série $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; 2°. que par suite la fonction $\Psi(x)$ change de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. C'est au reste ce qui a été démontré plus en détail dans le numéro précédent.

28. On peut faire usage des quantités U_1, U_2, etc., pour résoudre les problèmes d'interpolation. Supposons que l'on cherche une fonction y qui se réduise à y_0 pour $x = \alpha$, à y_1 pour $x = \beta$, à y_2 pour $x = \gamma$: on formera trois fonctions $Q_3(x)$, $Q'_3(x)$, $Q''_3(x)$ de la forme $A_1U_1 + A_2U_2 + A_3U_3$ et telles que l'on ait

$$\begin{aligned}
Q_3(x) &= 0 \quad \text{pour} \quad x = \beta, \quad x = \gamma,\\
Q'_3(x) &= 0 \quad \text{pour} \quad x = \alpha, \quad x = \gamma,\\
Q''_3(x) &= 0 \quad \text{pour} \quad x = \alpha, \quad x = \beta,
\end{aligned}$$

puis on prendra

$$y = \frac{Q_3(x)}{Q_3(\alpha)} y_0 + \frac{Q'_3(x)}{Q'_3(\beta)} y_1 + \frac{Q''_3(x)}{Q''_3(\gamma)} y_2.$$

Quel que soit le nombre des valeurs $y_0, y_1, \ldots$ de y données *à priori*, le problème d'interpolation se résoudra toujours de la même manière.

29. La proposition suivante ne paraît pas moins remarquable. *Soit $\varphi(x)$ une fonction de x réelle et déterminée, qui ne devienne jamais infinie lorsque x croît de x à X : si l'équation*

$$(14) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) \mathrm{U} dx = 0$$

a lieu en remplaçant r par une quelconque des racines $r_1, r_2, r_3, \ldots$ de l'équation $\varpi(r) = 0$, je dis que l'on a $\varphi(x) = 0$ depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$.

D'abord si la fonction $\varphi(x)$, sans être identiquement nulle, conservait toujours le même signe depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, l'équation (14) serait absurde; car en posant $r = r_1$ on aurait

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) \mathrm{U}_1 dx = 0,$$

et cela ne se peut, puisque la fonction U_1 ne change pas non plus de signe entre les limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$.

Supposons maintenant que lorsqu'on fait croître x de x à X, $\varphi(x)$ change de signe $(n-1)$ fois, et soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les $(n-1)$ valeurs de x pour lesquelles ce changement s'effectue. En faisant successivement $r = r_1$, $r = r_2, \ldots$ $r = r_n$ dans l'équation (14), on en déduira n équations nouvelles que l'on pourra ajouter membre à membre après les avoir multipliées respectivement par les constantes A_1, $\mathrm{A}_2, \ldots$ A_n. En posant

$$\mathrm{A}_1\mathrm{U}_1 + \mathrm{A}_2\mathrm{U}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{U}_n = \Psi(x),$$

on trouve ainsi

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) \Psi(x) dx = 0;$$

mais, d'après ce qu'on a vu n° 27, on peut déterminer les constantes $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{A}_n$ de telle manière que la fonction $\Psi(x)$ change de signe toutes les fois que x atteint et dépasse infiniment peu une des $(n-1)$ valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et ne change de signe pour aucune autre valeur de x. En adoptant les valeurs de $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{A}_n$ qui produisent cet effet, l'élément $\varphi(x)\Psi(x)\,dx$ conservera toujours le même signe dans toute l'étendue de l'intégration, et par conséquent on ne pourra pas avoir $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\Psi(x)dx = 0$ à moins qu'on n'ait aussi $\varphi(x) = 0$, du moins pour les valeurs de x comprises entre x et X.

Le sens précis du théorème que nous venons de démontrer consiste en ce que, entre les limites x, X, il ne peut exister aucun intervalle fini si petit qu'il soit, dans lequel $\varphi(x)$ ait une valeur constamment > 0 ou constamment < 0. Il pourra donc se faire que la fonction $\varphi(x)$ étant nulle en général, soit cependant différente de zéro pour certaines valeurs *isolées* de x ; mais cet inconvénient n'est point à craindre lorsqu'on sait *à priori* que $\varphi(x)$ est une fonction continue. Au surplus notre théorème subsiste encore lorsque la fonction $\varphi(x)$, au lieu d'être réelle, est imaginaire et de la forme $\varphi_1(x)+\sqrt{-1}\,\varphi_2(x)$: car alors l'équation (14) se décompose en deux autres qui donnent séparément $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=0$ et par suite $\varphi(x)=0$.

30. Par un raisonnement semblable à celui dont nous venons de faire usage, on peut encore établir la proposition suivante : soit $\varphi(x)$ une fonction réelle de x qui ne soit pas identiquement nulle et qui ne devienne jamais infinie entre les limites $x=\mathrm{x}$, $x=\mathrm{X}$: *si l'équation*

$$(14) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\mathrm{U}dx = 0$$

a lieu en remplaçant r par une quelconque des racines r_1, r_2... jusqu'à r_i, je dis que lorsqu'on fait croître x de x à X, la fonction $\varphi(x)$ change de signe i fois au moins. En effet, supposons, s'il est possible, que la fonction $\varphi(x)$, dans cet intervalle, change de signe $(n-1)$ fois seulement, n étant $\geqq i$, et soit $\Psi(x)$ une fonction de la forme $\mathrm{A}_1\mathrm{U}_1+\mathrm{A}_2\mathrm{U}_2+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{U}_n$ qui change de signe aussi $(n-1)$ fois et pour les mêmes valeurs de x que $\varphi(x)$: le produit... $\varphi(x)\Psi(x)dx$ ne changera jamais de signe, et par suite on ne pourra pas avoir

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\Psi(x)dx = 0,$$

ce qui résulte pourtant de l'équation (14) en y posant successivement $r=r_1$, $r=r_2$,... $r=r_n$, puis ajoutant membre à membre les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par les facteurs respectifs A_1, A_2, ... A_n. Il est donc absurde d'admettre que la fonction $\varphi(x)$ change de signe $(n-1)$ fois seulement, n étant $\leqq i$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Telles sont les principales propriétés de la fonction U que l'on peut démontrer sans avoir recours à aucune fonction auxiliaire. Mais en introduisant une seconde fonction V on peut encore en trouver plusieurs autres.

§ VIII.

31. Dans les paragraphes précédents nous nous sommes occupés de la fonction U qui satisfait à la fois à l'équation indéfinie

$$(1) \qquad \frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r\mathrm{U} = 0$$

et aux conditions définies

$$(2) \quad \mathrm{U} = \mathrm{A}, \quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{B}, \ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}} = \mathrm{D} \text{ pour } x = \mathrm{x}.$$

Nous avons représenté par $\varpi(r)$ ce que devient la quantité

$$a\mathrm{U} + b\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} + \ldots + c\,\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

lorsqu'on y pose $x = \mathrm{X}$; et par U_n ce que devient U lorsqu'on prend $r = r_n$; r_1, $r_2, \ldots r_n \ldots$ étant les racines de l'équation $\varpi(r) = 0$, rangées par ordre de grandeur.

Nous allons maintenant considérer la fonction V qui satisfait à la fois à l'équation indéfinie

$$(15) \qquad \frac{d.\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu}} + (-1)^{\mu} r\mathrm{V} = 0$$

et aux conditions définies

$$(16) \quad \mathrm{V} = c, \ldots \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}} = (-1)^{\mu-1}.a \text{ pour } x = \mathrm{X},$$

conditions définies qui se forment en égalant, pour $x = \mathrm{X}$, les quantités

$$\mathrm{V}, \quad \frac{\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx}, \quad \frac{\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^2}, \ldots \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}},$$

aux constantes $c, \ldots b$, a prises alternativement avec le signe $+$ et le signe $-$.

Les deux équations (1) et (15) sont *conjuguées*, de telle manière que leurs premiers membres deviennent des différentielles exactes lorsqu'on les multiplie par les facteurs respectifs $\mathrm{V}dx$, $\mathrm{U}dx$.

Désignons par $\Pi(r)$ ce que devient la quantité

$$\mathrm{DV} - \ldots \pm \mathrm{B}.\frac{\mathrm{M}d\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-2}} \mp \mathrm{A}.\frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}},$$

(où les signes sont alternativement positifs et négatifs) lorsqu'on y pose $x = \mathrm{x}$. Je dis que cette fonction $\Pi(r)$ sera identique avec $\varpi(r)$.

Multiplions en effet par $\mathrm{V}dx$ et intégrons ensuite les deux membres de l'équation (1) : nous aurons

$$(17) \qquad \int \mathrm{V}dx \left(\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r\mathrm{U}\right) = \text{const.}$$

Mais en intégrant par parties plusieurs fois de suite, on trouve que l'intégrale

$$\int \mathrm{V}dx.\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}}$$

est égale à la somme de deux quantités, l'une exprimée par

$$\mathrm{V}.\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}} - \frac{\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx}.\frac{\mathrm{L}d.\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-2}} + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{\mathrm{M}d.\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-2}}.\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} \mp \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}}.\mathrm{U},$$

l'autre exprimée par

$$(-1)^{\mu}\int \frac{d.\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu}}.\mathrm{U}dx,$$

c'est-à-dire par

$$-r\int \mathrm{UV}dx,$$

en vertu de l'équation (15). Cette seconde partie est détruite par un terme égal et de signe contraire dans le premier membre de l'équation (17) : donc l'autre partie est constante et doit rester la même lorsqu'on y pose $x = \mathrm{x}$, puis $x = \mathrm{X}$. Or quand on fait $x = \mathrm{x}$, elle se réduit à $\Pi(r)$, et quand on fait $x = \mathrm{X}$, elle se réduit à $\varpi(r)$. Donc les deux fonctions $\Pi(r)$ et $\varpi(r)$ sont identiques.

Les racines de l'équation $\Pi(r) = 0$ sont ainsi égales aux racines r_1, r_2, r_3,... de l'équation $\varpi(r) = 0$: il est donc naturel de représenter par V_n ce que devient la fonction V lorsqu'on y pose $r = r_n$.

32. Toutes les propriétés de la fonction U se retrouvent dans la fonction V qui satisfait à l'équation indéfinie (15) et aux conditions définies (16). A la vérité la présence du facteur $(-1)^\mu$ semble empêcher l'équation (15) d'être de même forme que l'équation (1); de plus les constantes $a, b, \ldots c$ qui entrent dans les équations (16) y sont prises tantôt positivement et tantôt négativement; ces équations elles-mêmes sont relatives à la plus grande et non à la plus petite valeur de x; enfin les coefficients des termes successifs de la fonction $\Pi(r)$ sont aussi tantôt positifs, tantôt négatifs; mais on fera disparaître toutes ces différences si l'on change la variable x en une autre variable z en posant $x = -z$. L'équation (15) deviendra ainsi

$$\frac{d.\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dz^\mu} + r\mathrm{V} = 0,$$

les conditions définies (16) prendront la forme

$$\mathrm{V} = c, \ldots \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dz^{\mu-1}} = a \quad \text{pour} \quad z = \mathrm{z},$$

z désignant la plus petite valeur de z; et $\Pi(r)$ sera la valeur de

$$\mathrm{DV} + \ldots + \mathrm{A}.\frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}}$$

relative à $z = \mathrm{Z}$, c'est-à-dire à la plus grande valeur de z. Donc, les quantités V, V_n, considérées comme fonctions de z, jouissent de toutes les propriétés des quantités U, U_n considérées comme fonctions de x. Il est inutile de rappeler ici toutes ces propriétés que nous venons de démontrer : nous énoncerons donc seulement, et cela à cause de l'usage que nous en allons faire, les deux propositions suivantes déduites de celles des nos 29 et 30.

1°. *Soit $\varphi(x)$ une fonction de x, réelle ou imaginaire, mais qui ne devienne jamais infinie lorsque x croît de* x *à* X : *si l'équation*

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) \mathrm{V}_i\, dx = 0$$

a lieu quel que soit l'indice i, on aura $\varphi(x) = 0$ depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$.

2°. *Si cette équation a lieu seulement pour les valeurs de i comprises dans la série $1, 2, 3, \ldots n$, on sera certain que la fonction $\varphi(x)$ change de signe au moins n fois, lorsque x croît de* x *à* X.

§ IX.

33. Désignons par V' ce que devient la fonction V lorsqu'on y remplace r par r', sans altérer d'ailleurs l'équation (15) et les conditions (16). On aura

$$\frac{d.\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}'}{dx^\mu} + (-1)^\mu r'\mathrm{V}' = 0$$

quel que soit x, et

$$\mathrm{V}' = c, \ldots \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}'}{dx^{\mu-1}} = (-1)^{\mu-1}.a \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{X}.$$

En multipliant par $\mathrm{V}'dx$ et intégrant ensuite, entre les limites x, X de x, les deux membres de l'équation (1), il vient

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{V}'dx\left(\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^\mu} + r\mathrm{U}\right) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(r' - r)\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{U}\mathrm{V}'dx = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{V}'dx\left(\frac{d.\mathrm{K}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^\mu} + r'\mathrm{U}\right).$$

Mais à l'aide d'intégrations par parties, on prouve aisément que l'intégrale

$$\int \mathrm{V}' dx . \frac{d.\mathrm{K} \ldots d.\mathrm{N} d\mathrm{U}}{dx^{\nu}}$$

est égale à la somme de deux quantités, l'une exprimée par

$$(-1)^{\mu} \int \mathrm{U} dx . \frac{d.\mathrm{N} \ldots d.\mathrm{K}.d\mathrm{V}'}{dx^{\mu}},$$

c'est-à-dire par

$$- r' \int \mathrm{U}\mathrm{V}' dx$$

en vertu de l'équation (15), l'autre exprimée par

$$\mathrm{V}'. \frac{\mathrm{K}.d.\mathrm{L} \ldots d.\mathrm{N}.d\mathrm{U}}{dx^{\nu-1}} - \frac{\mathrm{K}d\mathrm{V}'}{dx} . \frac{\mathrm{L}d. \ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-2}} + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{\mathrm{M}d. \ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}'}{dx^{\mu-2}} . \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} \mp \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M} \ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}'}{dx^{\mu-1}} . \mathrm{U}$$

où les termes ont alternativement le signe $+$ et le signe $-$; or cette dernière partie devient égale à $\Pi(r')$ ou $\varpi(r')$ lorsqu'on y pose $x = \mathrm{x}$ et égale à $\varpi(r)$ lorsqu'on y pose $x = \mathrm{X}$. On a donc

$$(r' - r) \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{U}\mathrm{V}' dx = \varpi(r) - \varpi(r').$$

De cette équation on tire cette formule remarquable

$$(19) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{U}\mathrm{V}' dx = \frac{\varpi(r) - \varpi(r')}{r' - r},$$

où r et r' sont quelconques, et qui se réduit à

$$(20) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{U}\mathrm{V} dx = - \frac{d\varpi(r)}{dr} = - \varpi'(r)$$

lorsqu'on prend $r' = r$.

34. Nous pouvons maintenant prouver que l'équation $\varpi(r) = 0$ [qui comprend comme cas particulier l'équation $\mathrm{U}(\mathrm{X}, r) = 0$] n'a

jamais ni racines imaginaires de la forme $p + q\sqrt{-1}$, ni racines égales.

S'il existait en effet une racine $r' = p + q\sqrt{-1}$, en attribuant à r' cette valeur on aurait $\varpi(r') = 0$, et l'équation (19) deviendrait

$$\int_{x}^{X} \mathrm{UV}'dx = \frac{\varpi(r)}{r' - r}:$$

or, le second membre de cette équation s'annulle quand on fait $r = r_i$, l'indice i étant quelconque, puisque $\varpi(r_i)$ est $= 0$ et que $r' - r_i$ est différent de zéro. L'hypothèse admise ci-dessus nous donnerait donc

$$\int_{x}^{X} \mathrm{U}_i\mathrm{V}'dx = 0$$

pour toutes les valeurs de l'indice i, d'où résulterait, d'après le théorème du n° 29, que la fonction V' est identiquement nulle entre les limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$; ce qui est absurde.

Maintenant supposons qu'une racine réelle r_n puisse être multiple, c'est-à-dire puisse satisfaire à la fois aux équations $\varpi(r_n) = 0$, $\varpi'(r_n) = 0$. Si nous faisons $r = r_n$ dans la formule (20), elle nous donnera

$$\int_{x}^{X} \mathrm{U}_n\mathrm{V}_n dx = 0,$$

tandis qu'en désignant par i un indice différent de n et posant $r = r_i$, $r' = r_n$ dans la formule (19) nous aurons

$$\int_{x}^{X} \mathrm{U}_i\mathrm{V}_n dx = 0.$$

Donc, si la racine r_n est multiple, le théorème du n° 29 nous conduira encore à l'équation absurde

$$\mathrm{V}_n = 0 \quad \text{depuis} \quad x = \mathrm{x} \quad \text{jusqu'à} \quad x = \mathrm{X}.$$

35. La théorie du développement des fonctions en séries dont les divers termes se composent du produit d'une constante par chacune

des fonctions U_1, U_2, U_3,... ou V_1, V_2, V_3... dépend de la même analyse.

Soit $f(x)$ une fonction de x; et supposons d'abord que l'on sache *à priori* que cette fonction peut être développée en une série de la forme

$$f(x) = A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_iU_i + \ldots$$

A_1, A_2,... A_i,... étant des constantes. Pour déterminer A_i on observera que si l'on pose $r = r_n$, $r' = r_i$ en désignant par n et i deux indices différents, la formule (19) donne

$$\int_{x}^{X} U_nV_i dx = \frac{\varpi(r_n) - \varpi(r_i)}{r_i - r_n} = 0,$$

tandis que l'intégrale

$$\int_{x}^{X} U_iV_i dx$$

est essentiellement différente de zéro et égale à $-\varpi'(r_i)$. En multipliant donc $V_i\,dx$ et intégrant depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$ les deux membres de l'équation

$$f(x) = A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_iU_i + \ldots,$$

on fera disparaître tous les termes du second membre à l'exception d'un seul, et l'on trouvera

$$\int_{x}^{X} f(x) V_i dx = A_i \int_{x}^{X} U_iV_i dx$$

d'où

$$A_i = \frac{\int_{x}^{X} f(x) V_i dx}{\int_{x}^{X} U_iV_i dx}.$$

En admettant à *priori* que la fonction $f(x)$ soit susceptible d'un développement de la forme

$$f(x) = \Sigma A_i U_i,$$

on obtient ainsi sans difficulté

$$(21)\qquad f(x)=\Sigma\left[\frac{U_i\int_x^X f(x)V_i dx}{\int_x^X U_iV_i dx}\right],$$

et l'on trouverait de même

$$(22)\qquad f(x)=\Sigma\left[\frac{V_i\int_x^X f(x)U_i dx}{\int_x^X U_iV_i dx}\right]$$

si l'on regardait la fonction $f(x)$ comme développable en une série composée des fonctions V_1, V_2, etc.

36. Maintenant je dis que si les séries

$$\Sigma\left[\frac{U_i\int_x^X f(x)V_i dx}{\int_x^X U_iV_i dx}\right],\qquad \Sigma\left[\frac{V_i\int_x^X f(x)U_i dx}{\int_x^X U_iV_i dx}\right]$$

sont convergentes et si la fonction $f(x)$ ne devient jamais infinie, elles auront nécessairement $f(x)$ pour valeur commune entre les limites $x=\mathrm{x}$, $x=\mathrm{X}$. La démonstration étant la même pour ces deux séries, considérons seulement la première d'entre elles et posons

$$F(x)=\Sigma\left[\frac{U_i\int_x^X f(x)V_i dx}{\int_x^X U_iV_i dx}\right].$$

Il s'agira de prouver que l'on a $F(x)=f(x)$. Or si l'on multiplie les deux membres de l'équation précédente par $V_i dx$ et qu'on intègre ensuite entre les limites $x=\mathrm{x}$, $x=\mathrm{X}$, il viendra

$$\int_x^X F(x)V_i dx=\int_x^X f(x)V_i dx,$$

ou

$$\int_x^X [F(x)-f(x)]V_i dx=0.$$

78..

Or en vertu d'un théorème donné n° 32, cette équation, dans laquelle l'indice i est quelconque, entraîne la suivante $F(x)-f(x)=0$ qu'il fallait démontrer. Toutefois quelques valeurs singulières et isolées de x pourraient échapper à cette démonstration si l'une des fonctions $F(x)$, $f(x)$ était discontinue : mais ces anomalies que nous avons déjà signalées (n° 29) et que nous ne discuterons pas ici n'existeront jamais si $f(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions continues de x.

37. Pour donner de l'équation (21) une application très simple, posons par exemple $f(x)=U$, en laissant dans la fonction U le paramètre r indéterminé. D'après les formules (19) et (20), on aura

$$\int_x^X UV_i dx = \frac{\varpi(r)-\varpi(r_i)}{r_i-r} = -\frac{\varpi(r)}{r-r_i}$$

et

$$\int_x^X U_i V_i dx = -\varpi'(r_i).$$

Il viendra par suite

$$U = \Sigma\left[\frac{U_i.\varpi(r)}{(r-r_i)\varpi'(r_i)}\right],$$

ou ce qui est la même chose

$$\frac{U}{\varpi(r)} = \Sigma\left[\frac{U_i}{(r-r_i)\varpi'(r_i)}\right],$$

on obtiendrait semblablement, à l'aide de la formule (22),

$$\frac{V}{\varpi(r)} = \Sigma\left[\frac{V_i}{(r-r_i)\varpi'(r_i)}\right].$$

Ces équations s'accordent avec celles que l'on déduirait de la théorie ordinaire sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Mais la démonstration précédente nous paraît mériter l'attention des géomètres.

38. Désignons par σ_n la somme des n premiers termes de la série

$$\Sigma \left[\frac{U_i \int_x^X f(x)\, V_i dx}{\int_x^X U_i V_i dx} \right]$$

et par ρ_n la différence $f(x) - \sigma_n$. Pour un indice i égal ou inférieur à n, nous obtiendrons immédiatement

$$\int_x^X \sigma_n V_i dx = \int_x^X f(x) V_i dx,$$

ou ce qui est la même chose,

$$\int_x^X \rho_n V_i dx = 0.$$

D'après le dernier théorème du n° 32, nous pouvons conclure de là que ρ_n change de signe au moins n fois lorsque x croît de x à X.

39. L'utilité de nos théorèmes pour l'intégration des équations différentielles partielles est évidente. Proposons-nous par exemple d'intégrer l'équation linéaire

$$\frac{du}{dt} = \frac{d.Kd.L\ldots.d.Md.Ndu}{dx^{\nu}},$$

de telle manière que pour $x = \mathrm{x}$, les quantités

$$u, \quad \frac{Ndu}{dx}, \quad \frac{Md.Ndu}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{Kd.L\ldots.d.Ndu}{dx^{\nu-1}}$$

soient entre elles comme des constantes données et positives A, B, C,....D; et que pour $x = X$ on ait

$$au + b\,\frac{Ndu}{dx} + \ldots + c\,\frac{Kd.L\ldots\ldots d.Ndu}{dx^{\nu-1}} = 0.$$

Enfin donnons-nous la valeur $f(x)$ de u relative à $t = 0$, et supposons la variable x comprise entre x et X. On satisfera à toutes ces conditions en prenant

$$u = \Sigma \left[\frac{U_i e^{-r_i t} \int_x^X f(x) V_i dx}{\int_x^X U_i V_i dx} \right].$$

Quand la valeur de t sera devenue très grande, cette série d'exponentielles se réduira sensiblement à son premier terme, pourvu toutefois que ce premier terme ne soit pas nul. Et l'on aura à très peu près

$$u = \frac{U_1 e^{-r_1 t} \int_x^X f(x) V_1 dx}{\int_x^X U_1 V_1 dx};$$

Cette valeur de u ne change jamais de signe lorsque x croît depuis x jusqu'à X.

Note sur l'intégration des Équations linéaires aux Différences partielles ;

Par M. POISSON.

Soit φ une fonction d'un nombre quelconque de variables t, x, y, z, etc., déterminée par une équation (A) linéaire et aux différences partielles. Tous les termes dépendants de φ et de ses différences étant passés dans le premier membre, soit P le second membre qui sera une fonction donnée de t, x, y, z, etc. Si l'on parvient à découvrir une valeur particulière p de φ, qui satisfasse à cette équation (A), on fera disparaître son second membre en prenant

$$\varphi = p + \varphi';$$

ce qui la changera en une autre équation (A'), dont le premier membre se déduira de celui de (A) par le changement de φ en φ', et dont le second membre sera zéro. Ainsi, la réduction d'une équation linéaire (A) avec un second membre, à une équation (A') semblable, mais sans second membre, ne dépend que de la détermination d'une valeur particulière de l'inconnue; mais il n'y a pas de règles générales et directes pour cette détermination, si ce n'est quand il s'agit d'une équation à coefficients constants, c'est-à-dire lorsque les coefficients de φ et de ses différences dans le premier membre de (A), sont indépendants de t, x, y, z, etc.

Quelle que soit d'ailleurs la quantité P, si on la considère par rapport à l'une de ces variables isolément, à t, par exemple, on peut la représenter par une somme d'exponentielles réelles ou imaginaires, que nous désignerons généralement par

$$\mathrm{P} = \Sigma \psi(x, y, z, \text{etc.})\, e^{mt};$$

e étant la base des logarithmes népériens, m une constante indéterminée, ψ une fonction donnée des autres variables x, y, z, etc., de m, et s'il en est besoin, d'une ou plusieurs autres quantités indéterminées; et la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs réelles ou imaginaires qu'il sera nécessaire de donner à ces quantités et à m. Cette expression générale renferme la formule connue

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}' \cos \theta (t - t') \, d\theta dt',$$

dans laquelle la somme Σ est changée en une intégrale double, et ses termes en des éléments infiniment petits du second ordre : π désigne à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre, et P′ ce que devient P quand on y met t' au lieu de t. D'après la forme linéaire de l'équation (A), il suffira de considérer un seul terme de cette somme, et de faire

$$\mathrm{P} = \psi (x, y, z) \, e^{mt},$$

en supposant, pour fixer les idées, que les variables autres que t, soient au nombre de trois seulement : lorsqu'on aura déterminé la valeur correspondante de p, on l'appliquera à tous les termes de P; et en faisant la somme de toutes ces valeurs partielles de p, on aura sa valeur complète, qui se changera en même temps que la somme Σ, en une double intégrale définie.

Cela posé, je prends, pour la valeur de p qu'il s'agira d'obtenir,

$$p = \frac{1}{8\pi} e^{mt} \int\int\int\int\int\int (\mathrm{A} \cos u + \mathrm{B} \sin u) \, \psi (x', y', z') \, d\alpha d\beta d\gamma dx' dy' dz'),$$

où je fais, pour abréger,

$$\alpha (x - x') + \beta (y - y') + \gamma (z - z') = u,$$

je désigne par A et B deux fonctions inconnues de α, β, γ, et je suppose que chacune des six intégrales ait $\pm \infty$ pour limites. D'après la formule déjà citée, étendue à trois variables, on aura, en même temps,

$$\mathrm{P} = \frac{1}{8\pi} e^{mt} \int\int\int\int\int\int \psi (x', y', z') \cos u \, d\alpha d\beta d\gamma dx' dy' dz';$$

et si l'on substitue cette valeur de P dans (A), et qu'on y mette celle de p à la place de φ, il est facile de voir qu'en supprimant l'exponentielle, facteur commun aux deux membres de cette équation, elle prendra la forme :

$$\int\int\int\int\int\int[(AA'+BB')\cos u+(AA_{,}+BB_{,})\sin u]\psi(x',y',z')d\alpha d\text{б} d\gamma dx'dy'dz'$$
$$=\int\int\int\int\int\int\psi(x',y',z')\cos u\, d\alpha d\text{б} d\gamma dx'dy'dz';$$

A′, B′, $A_{,}$, $B_{,}$, désignant des polynomes ordonnés suivant les puissances et les produits de α, б, γ, dont le premier et le dernier résulteront des différences partielles de p, d'un ordre pair ou zéro par rapport à x, y, z, et les deux autres, des différences d'un ordre impair. Or, pour que cette dernière équation soit identique, il est nécessaire et il suffit qu'on ait

$$AA'+BB'=1, \qquad AA_{,}+BB_{,}=0;$$

ce qui déterminera les deux quantités A et B, et par conséquent, la valeur de p. Son expression dépendra, comme on voit, d'une intégrale sextuple, qui pourra se changer en une intégrale octuple, quand on l'étendra à la valeur générale de P, et que celle-ci aura été elle-même représentée par une intégrale double. La valeur générale de p, dans le cas d'un nombre quelconque n de variables t, x, y, z, etc., serait donnée par une intégrale définie de l'ordre de multiplicité $2n$. Elle est donc très compliquée; mais on pourra souvent la réduire à une forme plus simple, comme on en verra tout-à-l'heure un exemple.

Après que (A) aura été réduite à l'équation (A′), linéaire, de l'ordre quelconque n, à coefficients constants et sans second membre, on satisfera à celle-ci en prenant pour φ' un nombre n de sommes différentes d'exponentielles réelles ou imaginaires; et d'après ce que j'ai montré autrefois, on pourra regarder cette expression de φ', comme un développement d'une forme particulière, de l'intégrale complète de (A′). Sans restreindre ni étendre la généralité de chacune de ces n sommes, on pourra, si l'on veut, la remplacer par une intégrale définie de l'ordre de multiplicité n; mais quoique la valeur de φ' augmentée de p, soit certainement l'intégrale générale de l'équation donnée (A), cependant la forme sous laquelle cette intégrale se présente de cette manière, la rend peu propre à déterminer diverses circonstances du phénomène qui dépendent de cette équation, par exemple, la propagation ondulatoire du mouvement dans les milieux élastiques. Au contraire, les intégrales de plusieurs équations aux différences partielles que j'ai obtenues sous une autre forme, mettent immédiatement en évidence ce genre de mouvement, et font voir que l'ébranlement renfermé d'abord dans une étendue limitée autour d'un point donné, se propage uniformément autour de ce point, en ondes à une ou plusieurs nappes, d'une largeur également limitée, ce qui est le point essentiel de ce genre de questions. C'est ce qui a lieu, en effet, à l'égard de l'équation générale de la théorie du son, intégrée sous la forme dont il s'agit, dans un Mémoire lu à l'Académie en 1819, et relativement aux trois équations du mouvement des corps élastiques homogènes, intégrées sous une semblable forme, dans deux mémoires lus en 1828 et 1830 (*). Dans celui de 1830, j'ai développé en détail toutes les circonstances de la propagation du mouvement dans l'intérieur des corps non cristallisés; et l'on a vu qu'elle a lieu en deux systèmes d'ondes circulaires, dont chacun a sa vitesse et ses propriétés particulières. Relativement à la propagation du mouvement dans un corps cristallisé, je me suis borné à indiquer, dans le n° 17 de ce Mémoire, ce qu'il y aurait à faire pour en déterminer les lois en suivant la marche dont je donnais l'exemple. Je vois avec plaisir que M. le professeur Blanchet a traité ce sujet avec beaucoup de talent et de succès, dans un Mémoire présenté récemment à l'Académie.

Pour donner un exemple de ces différentes considérations, je choisis l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\left(\mathrm{A}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\mathrm{B}\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\mathrm{C}\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\mathrm{D}\frac{d^2\varphi}{dxdy}+\mathrm{E}\frac{d^2\varphi}{dxdz}+\mathrm{F}\frac{d^2\varphi}{dydz}\right)=e^{mt}\psi(x,y,z),$$

dans laquelle A, B, C, D, E, F, sont, ainsi que m, des constantes données. En considérant x, y, z, comme les coordonnées rectangu-

(*) Tomes III[e], VIII[e], X[e], *des Mémoires de l'Académie des Sciences.*

laires d'un même point, on pourra, par les formules connues, les transformer en trois autres, dont les directions soient telles que les différences partielles relatives à deux coordonnées différentes, disparaissent de la nouvelle équation ; ce qui s'exécutera par un calcul tout-à-fait le même que pour faire disparaître les rectangles des coordonnées, dans l'équation générale des surfaces du second ordre. Sans nuire à la généralité de l'équation précédente, on peut donc y supprimer les trois derniers termes de son premier membre. En y mettant aussi à la place des trois nouvelles coordonnées, d'autres variables x, y, z, multipliées par $\frac{1}{a}\sqrt{A}$, $\frac{1}{a}\sqrt{B}$, $\frac{1}{a}\sqrt{C}$, elle deviendra

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) = e^{mt}\psi(x, y, z);$$

a^2 étant une constante donnée, et ψ une fonction aussi donnée de ces dernières variables. D'après ce qu'on a vu plus haut, on aura

$$p = \frac{1}{8\pi^3} e^{mt} \iiiint\!\!\iint \psi(x', y', z') \frac{\cos u\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, dx'\, dy'\, dz'}{m^2 + a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)},$$

pour la valeur de p, au moyen de laquelle on réduira cette même équation à celle-ci :

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2} + \frac{d^2\varphi'}{dz^2}\right),$$

dont l'intégrale complète est

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F'(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega,$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega,$$

f' et F' désignant les deux fonctions arbitraires qui représentent les valeurs de φ' et $\frac{d\varphi'}{dt}$, relatives à $t = 0$.

Pour les déterminer, je suppose que, pour cette valeur de t, on ait

$$\varphi = f(x, y, z), \quad \frac{d\varphi}{dt} = F(x, y, z);$$

f et F étant deux fonctions données. A cause de $\varphi = p + \varphi'$, il en résultera

$$f'(x, y, z) = f(x, y, z) - \frac{1}{8\pi^3} \iiint \psi(x', y', z')\, q dx'dy'dz',$$
$$F'(x, y, z) = F(x, y, z) - \frac{m}{8\pi^3}\, 3\iiint \psi(x', y', z')\, q dx'dy'dz',$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$q = \iiint \frac{\cos u d\alpha d\beta d\gamma}{m^2 + a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}.$$

On aura, en même temps,

$$p = \frac{1}{8\pi^3} e^{mt} \iiint \psi(x', y', z')\, q dx'dy'dz'.$$

On simplifiera ces expressions de f' et F', et par suite la valeur de φ', par des transformations semblables à celles dont j'ai fait usage dans les n^{os} 4 et 5 du Mémoire de 1830. Ainsi, en faisant

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r'^2,$$

on trouvera d'abord

$$q = \frac{4\pi}{r'} \int_0^\infty \frac{\sin \rho r' . \rho d\rho}{m^2 + a^2\rho^2};$$

et par une formule connue, on en conclura

$$q = \frac{2\pi^2}{a^2 r'} e^{-\frac{mr'}{a}};$$

ce qui exige que l'exposant $-\frac{mr'}{a}$ soit négatif, et sera effectivement toujours possible, en regardant la variable r' comme une quantité positive, et la constante a, dont le carré seul est donné et le signe ambigu, comme étant de même signe que m. De cette manière, l'intégrale sextuple que renferment les formules précédentes, se trouvera réduite à une intégrale triple. Mais en substituant les expressions de f' et F' sous les signes $\int$, dans celle de φ', il en résultera des intégrales quintuples, relatives à x', y', z', θ, ω, qu'il s'agira encore de simplifier.

Pour cela, mettons $x + at\cos\theta$, $y + at\sin\theta\sin\omega$, $z + at\sin\theta\cos\omega$, à la place x, y, z, dans les valeurs précédentes de $f'(x, y, z)$ et $F'(x, y, z)$; désignons par $r_{,}$ et $q_{,}$, ce que deviennent alors r' et q'; et faisons ensuite

$$x' = x + r'\cos\theta', \quad y' = y + r'\sin\theta'\sin\omega', \quad z' = z + r'\sin\theta'\cos\omega;$$

ce qui satisfait à la valeur de r'^2. Nous aurons

$$r_{,}^2 = r'^2 - 2atr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + a^2t^2,$$

$$q_{,} = \frac{2\pi^2}{a^2 r_{,}} e^{-\frac{mr_{,}}{a}}.$$

Si l'on change θ et ω dans les deux angles μ et λ du n° 5 que l'on vient de citer, on aura

$$r_{,}^2 = r'^2 - 2atr'\cos\mu + a^2t^2,$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} q_{,} \sin\theta d\theta d\omega = \frac{2\pi}{a} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_{,}} e^{-\frac{mr_{,}}{a}} \sin\mu d\mu d\lambda.$$

En observant que $r_{,}$ ne dépend pas de λ, que dans ces intégrations r' est une constante, et que l'on a, en conséquence,

$$atr'\sin\mu\, d\mu = r_{,}dr_{,},$$

elles s'effectueront immédiatement. Comme les quantités r' et $r_{,}$ doivent toujours être positives, si l'on suppose, pour fixer les idées, que at le soit également, on devra, à la limite $\mu = 0$, prendre $r_{,} = \pm(r' - at)$, selon que la différence $r' - at$ sera positive ou négative, et à l'autre limite $\mu = \pi$, on prendra toujours $r_{,} = r' + at$. Cela étant, on aura

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} q_{,} \sin\theta d\theta d\omega = \frac{4\pi^3}{ma\,tr'}\left[e^{\mp\frac{m}{a}(r' - at)} - e^{-\frac{m}{a}(r' + at)}\right];$$

et il ne restera plus que les intégrations relatives à x', y', z', qui ne soient pas effectuées. Elles ne peuvent l'être, tant que $\psi(x', y', z')$

sera une fonction quelconque; mais on peut en changer la forme, de la manière suivante.

Remplaçons les variables x', y', z', par r', θ', ω'; les limites relatives aux premières étant $\pm\infty$, celles qui se rapportent aux secondes seront $r'=0$, $\theta'=0$, $\omega'=0$, et $r'=\infty$, $\theta'=\pi$, $\omega'=2\pi$, quelles que soient les quantités x, y, z, qui ne varient pas dans ces intégrations; et de plus, sous les signes $\int$, on devra prendre $r'^2\sin\theta' dr'd\theta'd\omega'$ au lieu de $dx'dy'dz'$. De cette manière, on aura

$$\begin{aligned} & f'(x+at\cos\theta,\ y+at\sin\theta\sin\omega,\ z+at\sin\theta\cos\omega) \\ = & f(x+at\cos\theta,\ y+at\sin\theta\sin\omega,\ z+at\sin\theta\cos\omega) \\ & -\frac{1}{2ma^2t}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi(x+r'\cos\theta',\ y+r'\sin\theta'\sin\omega', \\ & z+r'\sin\theta'\sin\omega')\left[e^{\mp\frac{m}{a}(r'-at)}-e^{-\frac{m}{a}(r'+at)}\right]r'\sin\theta' dr'd\theta'd\omega', \end{aligned}$$

et de même à l'égard de la fonction F'. D'après cette même transformation des variables x', y', z', la valeur que l'on a trouvée pour p, pourra s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} p=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} & \psi(x+r'\cos\theta',\ y+r'\sin\theta'\sin\omega', \\ & z+r'\sin\theta'\cos\omega')\, e^{-\frac{m}{a}(r'-at)}\, r'\sin\theta' dr'd\theta'd\omega'. \end{aligned}$$

Au moyen de ces différents résultats, et en employant les lettres r, θ, ω, à la place de r', θ', ω', sous les signes $\int$, la partie de la valeur de φ, dépendante de la fonction ψ, deviendra

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta\sin\omega, \\ & z+r\sin\theta\cos\omega)\left[e^{-\frac{m}{a}(r-at)}\mp\frac{1}{2}e^{\mp\frac{m}{a}(r-at)}-\frac{1}{2}e^{\mp\frac{m}{a}(r-at)}\right]r\sin\theta drd\theta d\omega. \end{aligned}$$

On pourra, si l'on veut, partager l'intégrale relative à r en deux parties : l'une qui s'étendra depuis $r=at$ jusqu'à $r=\infty$, et dans laquelle on prendra les signes supérieurs, ce qui rendra nulle la quantité comprise entre les crochets; l'autre dont les limites seront

$r = 0$ et $r = at$, et dans laquelle on devra prendre les signes inférieurs, ce qui réduira cette même quantité à son premier terme. La valeur totale de φ, ou l'intégrale complète de l'équation donnée, sera alors, sous sa forme la plus simple,

$$\begin{aligned}
\varphi = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega \\
& + \frac{1}{4}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega \\
& + \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x + r\cos\theta,\ y + r\sin\theta\sin\omega, \\
& \qquad z + r\sin\theta\cos\omega)\, e^{-\frac{m}{a}(r - at)}\, r\sin\theta\, dr\, d\theta.
\end{aligned}$$

Addition à la note insérée page 460 de ce volume;

Par M. Anatole de CALIGNY.

Dans la note dont il s'agit, j'ai établi que *le coefficient du terme proportionnel aux carrés des vitesses dans l'expression de la résistance du frottement de l'eau contre les parois des tuyaux de conduite, est moindre dans le mouvement oscillatoire que dans le mouvement uniforme.* Il est entendu que par ces vitesses on veut exprimer les vitesses moyennes dans un même instant donné, en considérant successivement tous les instants, et qu'on ne s'occupe point de ce qui se passe dans celles qui sont très petites. Le retard causé par le frottement à la paroi du tuyau sur la couche d'eau qui le touche, ne se transmet pas *instantanément*, à la naissance du mouvement, aux couches intérieures. Il faut que l'eau ait déjà parcouru, à partir de la naissance du mouvement, un certain chemin par rapport au diamètre du tuyau de conduite, pour que le rapport de la vitesse de cette *couche frottante* contre la paroi. à la vitesse moyenne, considérée, comme je le dis, dans un même instant, soit aussi grand que dans un mouvement parvenu à l'uniformité. On sait par un théorème de M. de Prony, que le coefficient dont il s'agit dépend de ce rapport. Ainsi *jusqu'à une certaine limite de chemin parcouru, il n'y a pas à proprement parler de terme proportionnel aux carrés des vitesses dans le mouvement oscillatoire.* Ce coefficient augmente avec l'amplitude de l'oscillation, toutes choses égales d'ailleurs, et sa limite est le coefficient du mouvement uniforme.

J'avais déjà vérifié ce principe par des expériences assez en grand : je viens de le vérifier de nouveau par d'autres que j'ai faites sur une échelle au moins triple de celle des expériences les plus importantes de Bossut et de Dubuat sur le mouvement uniforme de l'eau dans les tuyaux de conduite.

La soupape que j'ai décrite dans mon Mémoire, et que j'ai exécutée pour faire ces expériences, n'est pas celle qui est dessinée dans le Mémoire de M. Coriolis, comme simple moyen d'explication dans un calcul. L'axe de cette soupape passe par son centre de figure : le but de cette disposition est d'équilibrer les pressions de manière qu'elles puissent devenir prépondérantes alternativement sur l'une ou l'autre face pendant une même oscillation, sans que la soupape s'ouvre, à moins d'y être sollicitée, soit par le mouvement même de l'eau, soit par une petite balance hydraulique extérieure. Ce système de fermeture qui ne pourrait être bien compris sans une figure, a été disposé dans le but de faire ces expériences, mais ce n'est pas le seul que je puisse employer. Ainsi en 1837 j'ai montré à une commission de l'Académie des Sciences, un modèle de machine, fonctionnant *indéfiniment* abandonné à lui-même, au moyen d'un système de fermeture tout différent.

Errata.

Page 12, ligne 7, *au lieu de* $\frac{d}{ds}$, *lisez* $\frac{du}{ds}$.

Page 30, ligne 14, *au lieu de* $(1-4x)$, *lisez* $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$.

Pages 249—254, Note de M. Olivier. *Voyez une addition et un errata pour cette note,* pages 335—336.

Pages 477—482, Note de M. Terquem. *Le* P.S *de la page* 558 *contient une correction relative à cette note.*

Page 508, ligne 3, *au lieu de* M. Lamé a démontré que l'équation, *lisez* D'après ce que M. Lamé a démontré dans l'article précédent, on voit qu'en supposant $P_3 = 1$, l'équation

Page 512, équation (14), *au lieu de* $\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{2}{1}}\,d\theta$, *lisez*.......

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta$$

Page 560, ligne 13, *au lieu de* $\left[pn + \frac{p(p-1)}{2}\right]$ *lisez* $\left(pn + \frac{p(p-1)}{2}\right)$.

FIN DU TOME TROISIÈME.

Fig 2.

Fig 3.

Fig 1.

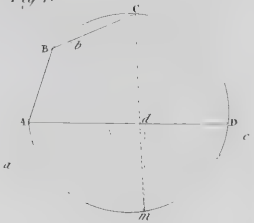


Fig. 2.

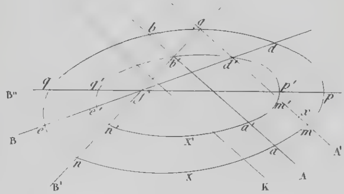


Fig. 3.

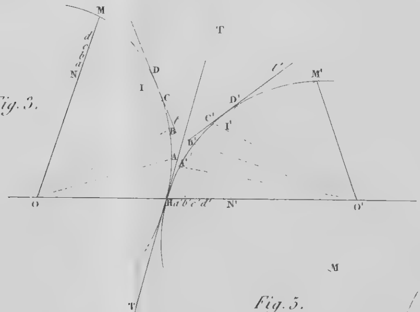


Fig. 4.

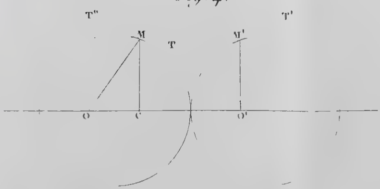


Fig. 5.

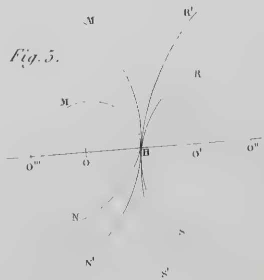


Fig. 2.

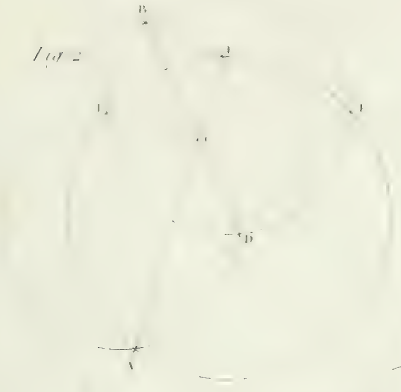


Fig. 3.

Fig. 1.

Fig. 2.

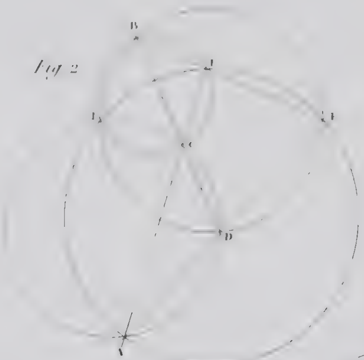


Fig. 4.

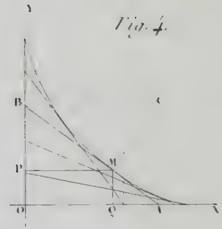


Fig. 6.

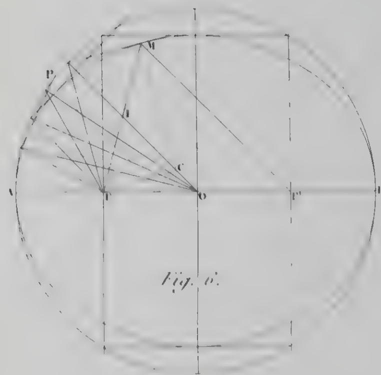


Fig. 3.

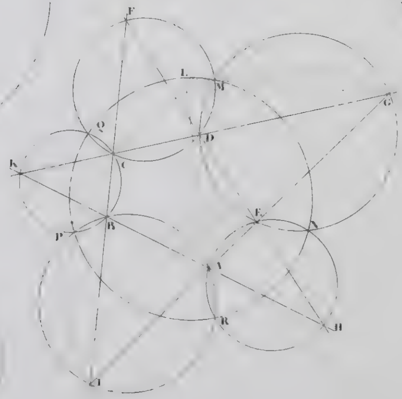


Fig. 5.

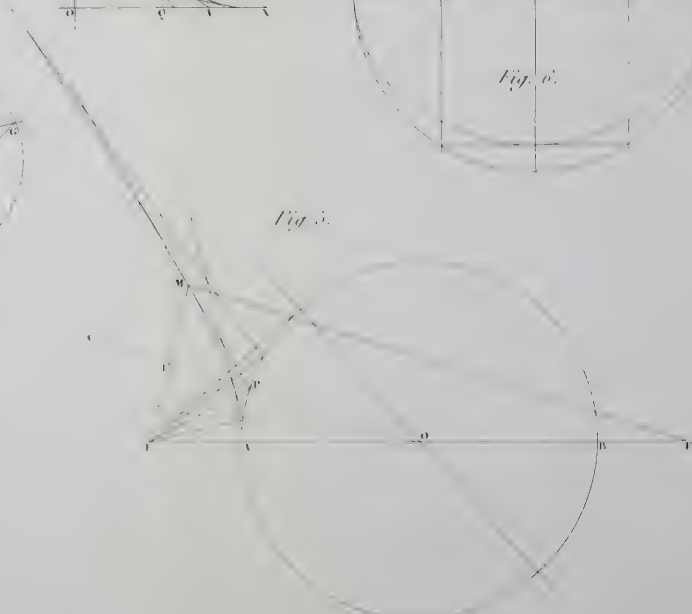


Fig. 1.

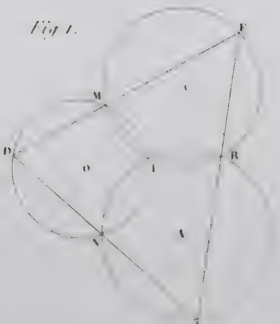


Fig. 2.

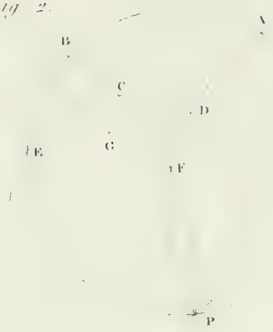


Fig. 4

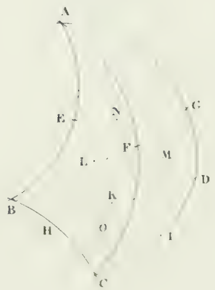


Fig. 1.

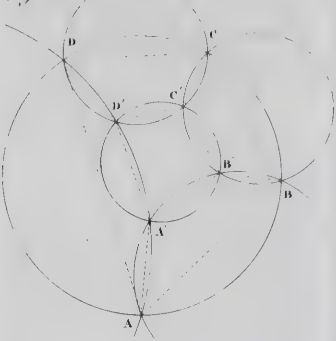


Fig. 2.

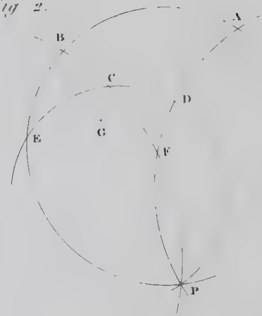


Fig. 3.

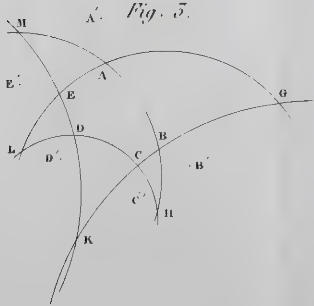


Fig. 4.