ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES ŒUVRES D'EUCLIDE.

n

Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris, aux indications suivantes

CHEZ
- L'AUTEUR, rue de Provence, n° 25 ;
- TREUTTEL et WURTZ, libraires à Paris, rue de Lille, n° 17
- FIRMIN DIDOT, rue Jacob, n° 24 ;
- Madame veuve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.

LES ŒUVRES D'EUCLIDE,

EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

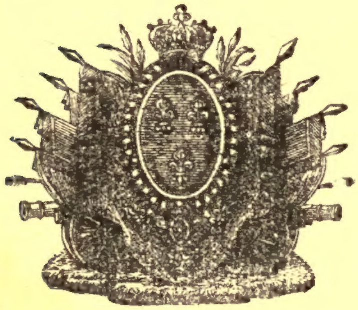
PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

DÉDIÉ AU ROI.

TOME SECOND.



A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

1816.

PRÉFACE.

PRÆFATIO.

Hoc volumen, quo liber octavus, nonus et decimus continetur, jampridem editum fuisset, nisi plura impedimenta, quæ sane non prævideram, moram aliquam attulissent, opusque intermisissent. Tertium et ultimum volumen prelo subjicitur, et sub ortum proximæ æstatis prodibit in lucem.

Malignus quidam rumor percrebuerat me jam non habere in manibus vaticanæ bibliothecæ codicem 190, ac proinde ab incœpto destitisse. Quo rumore nihil absurdius; rogante enim et impetrante regni interioris administro, codex ille fidei meæ creditus est, ac penes me erit, donec opus meum in lucem sit editum.

Interim, omissâ aliquandiu Euclidis mei curâ, ultimam Apollonio meo manum admovi, quod quidem opus absolutum ac sub judice est, nempe Scientiarum Academiâ. Typis mandabitur græcis, latinis et gallicis: accedent variæ lectiones regiæ bibliothecæ codicum, necnon et Oxoniæ editionis, quæ, fatente ipso editore, confecta est juxta duos græcos codices, scatentes vitiis, ac prorsus iisdem, utpote ex uno et eodem codice exaratos.

Hæc editio complectetur Conicorum Apollonii septem libros qui supersunt, Pappi lemmata, Eutocii commentarios, et Sereni duos libros de cylindro et cono.

Archimedis operibus necnon Eutocii commentariis edendis græce, latine et gallice operam impendo. Quando nitidissima Oxoniæ editio prelo fuit subjecta, jam obierat Torelli, vir magnæ doctrinæ, antequam ultimam manum Archimedi suo admovisset, et ob id maculis scatet. Quod si

PRÉFACE.

Ce volume, qui renferme le huitième, le neuvième et le dixième livre, aurait paru depuis long-temps, si plusieurs obstacles qu'il ne m'était pas donné de prévoir, n'eussent retardé et suspendu plusieurs fois l'impression de mon ouvrage. Le troisième et dernier volume est sous presse, et paraîtra au commencement de l'été prochain.

On avait répandu le bruit que n'ayant plus entre mes mains le manuscrit 190 de la bibliothèque du Vatican, j'avais abandonné mon entreprise : ce bruit était sans fondement, ce manuscrit n'est jamais sorti de mes mains ; à la sollicitation du Ministre de l'intérieur, ce volume sera laissé à ma disposition jusqu'à la publication entière de mon ouvrage.

Les interruptions de l'impression de mon Euclide m'ont laissé le temps nécessaire pour mettre la dernière main à mon Apollonius. Mon travail est terminé, et soumis à l'examen de l'Académie des Sciences. Lés œuvres d'Apollonius seront imprimées en grec, en latin et en français, avec les variantes des manuscrits grecs de la bibliothèque du Roi et de l'édition d'Oxford, laquelle, de l'aveu même de l'éditeur, ne fut faite que d'après deux manuscrits grecs qui avaient les mêmes défauts, parce qu'ils étaient tous les deux la copie d'un seul et même manuscrit.

Cette édition renfermera les sept livres des Coniques qui nous restent d'Apollonius, les lemmes de Pappus, les commentaires d'Eutocius, et les deux livres du cylindre et du cône de Sérénus.

Je prépare une édition grecque, latine et française des œuvres d'Archimède et des commentaires d'Eutocius. Lorsque la belle édition d'Oxford fut imprimée, le savant Torelli était mort avant d'avoir mis la dernière main à son Archimède, et c'est à cause de cela que cette édition fourmille de hæc editio Torelli vivente facta fuisset, non equidem hoc ultimum opus aggressus fuissem. Si forte accidit ut mors immatura me quoque prius arripiat, quam Archimedis opera penitus absolverim, tum opus imperfectum ante novissimam diem exuri jubebo, ne quis, me mortuo, illud prelo subjicere velit.

Liber decimus Euclidis Elementorum vix quibusdam geometris nostratibus notus est : quin et bene multi illum habent supervacaneum et intellectu perdifficilem.

Utrumque citra manifestam rerum fidem. Hic liber continet et plures propositiones geometris perutiles, et nonnullas illis semper admirandas.

Fateor equidem studentis animum, primo intuitu posse deterreri et avocari, conspectis septemdecim et centum propositionibus hoc in libro contentis ; sed unaquæque, velut è fonte communi, derivatur è quibusdam definitionibus ac præcipuis, iisque paucissimis, propositionibus, quarum ope reliqua facillime demonstrantur. Ad hoc hujus libri partes ita inter se dispositæ sunt, ut earum non seriem et juncturam modo, sed concentum et harmoniam oculus, primo conjectu, percipiat. Illic vere notandus est mirabilis ille ordo quem in omnibus suis operibus Euclides constituit.

Hæ vero libri decimi sunt definitiones et propositiones. Hæc tabula synoptica mihi aptissima visa est ad illius comprehensionem acquirendam.

DEFINITIONES.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eàdem mensurâ mensurantur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.

3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatio mensurantur.

4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

fautes. Si cette édition eût été faite de son vivant, je ne me serais certainement pas chargé de ce dernier travail. Il est très-possible qu'une mort prématurée viène aussi me surprendre avant que j'aye mis la dernière main aux œuvres d'Archimède. Mais si cela arrive, j'ordonnerai, avant mon dernier jour, de livrer aux flammes un travail imparfait, qu'on serait peut-être tenté de publier après ma mort.

Le dixième livre des Éléments d'Euclide est aujourd'hui très-peu connu des géomètres français : ils regardent généralement ce livre comme superflu, et comme étant très-difficile à entendre.

Ces deux reproches me paraissent mal fondés. Ce livre renferme un grand nombre de propositions utiles aux géomètres, et une foule d'autres qui sont dignes de toute leur admiration.

Les cent dix-sept propositions que contient ce dixième livre seraientpeut-être capables de décourager, au premier abord, celui qui veut l'étudier ; mais tout dépend dans ce livre de quelques définitions, et d'un très-petit nombre de propositions fondamentales, à l'aide desquelles tout le reste se démontre avec la plus grande facilité. Ajoutons à cela que les parties en sont tellement disposées, que l'œil en saisit l'ensemble sans le moindre effort. C'est là surtout qu'Euclide se fait remarquer par l'ordre admirable qu'il a su établir dans tous ses ouvrages.

Voici les définitions et les propositions du dixième livre. Ce tableau synoptique me paraît très-propre à en faciliter l'étude.

DÉFINITIONS.

1. On appèle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés sont mesurés par une même surface.

4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. His suppositis, ostenditur propositæ rectæ esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocetur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

Prop. I. Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

Prop. II. Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; incommensurabiles erunt magnitudines.

Prop. III. Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensarum invenire.

Prop. IV. Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

Prop. V. Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Prop. VI. Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

Prop. VII. Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

5. Ces choses étant supposées, on démontre qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appèlera rationelle la droite proposée.

6. On appèlera aussi rationelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appèlera rationel le quarré de la proposée.

9. On appèlera aussi rationelles les surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationelles, celles qui lui sont incommensurables.

11. On appèlera encore irrationelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

Prop. I. Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Prop. II. Deux grandenrs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

Prop. III. Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Prop. IV. Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Prop. V. Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Prop. VI. Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

Prop. VII. Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

PROP. VIII. Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. IX. A rectis longitudine commensurabilibus quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum et latera habebunt longitudine commensurabilia; sed a rectis longitudine incommensurabilibus quadrata inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

PROP. X. Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.

PROP. XI. Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

PROP. XII. Eidem magnitudini commensurabiles et inter se sunt commensurabiles.

PROP. XIII. Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem commensurabilis est eidem, altera autem incommensurabilis; incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. XIV. Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

PROP. XV. Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

PROP. XVI. Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et

Prop. VIII. Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

Prop. IX. Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

Prop. X. Si quatre grandeurs sont proportionelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

Prop XI. Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

Prop. XII. Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles.

Prop. XIII. Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs seront incommensurables.

Prop. XIV. Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

Prop. XV. Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième; et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

Prop. XVI. Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme tota utrique ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

Prop. XVII. Si duæ magnitudines incommensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incommensurabilis est, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

Prop. XVIII. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

Prop. XIX. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

Prop. XX. Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundùm aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

sera commensurable avec chacune d'elles ; et si leur somme est commensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront commensurables.

Prop. XVII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables, leur somme sera incommensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est incommensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront incommensurables.

Prop. XVIII. Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, et si ce parallélogramme partage la plus grande droite en parties commensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande, et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

Prop. XIX. Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.

Prop. XX. Le rectangle compris sous des droites rationelles commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est rationel.

Prop. XXI. Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationalem, et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

Prop. XXII. Sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum irrationale est, et recta quæ potest ipsum irrationalis erit; ea autem vocetur media.

Prop. XXIII. Quadratum ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

Prop. XXIV. Recta mediæ commensurabilis media est.

Prop. XXV. Sub mediis longitudine commensurabilibus secundùm aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, medium est.

Prop. XXVI. Sub mediis potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum, vel rationale vel medium est.

Prop. XXVII. Medium non medium superat rationali.

Prop. XXVIII. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes.

Prop. XXIX. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes.

Prop. XXX. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Prop. XXXI. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine.

Prop. XXXII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Prop. XXI. Si une surface rationelle est appliquée à une droite rationelle, elle fera une largeur rationelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

Prop. XXII. Le rectangle compris sous des droites rationelles, commensurables en puissance seulement, est irrationel, et la droite dont la puissance égale ce rectangle sera irrationelle; cette droite s'appèlera médiale.

Prop. XXIII. Le quarré d'une médiale appliqué à une rationelle fait une longueur rationelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

Prop. XXIV. Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

Prop. XXV. Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

Prop. XXVI. Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationel ou médial.

Prop. XXVII. Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationelle.

Prop. XXVIII. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui contiènent une surface rationelle.

Prop. XXIX. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprènent une surface médiale.

Prop. XXX. Trouver deux rationelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Prop. XXXI. Trouver deux rationelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

Prop. XXXII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent un rectangle rationel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

PROP. XXXIII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

PROP. XXXIV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

PROP. XXXV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale.

PROP. XXXVI. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

PROP. XXXVII. Si duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis nominibus.

PROP. XXXVIII. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

PROP. XXXIX. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, medium continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis secunda.

PROP. XL. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium; tota recta irrationalis est, vocetur autem major.

PROP. XLI. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est, vocetur autem rationale et medium potens.

PROP. XLII. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum

Prop. XXXIII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable avec la plus grande.

Prop. XXXIV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit rationelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

Prop. XXXV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle qu'elles comprènent soit rationel.

Prop. XXXVI. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des quarrés de ces mêmes droites.

Prop. XXXVII. Si l'on ajoute deux rationelles commensurables en puissance seulement, leur somme sera irrationelle, et sera appelée droite de deux noms.

Prop. XXXVIII. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent une surface rationelle, leur somme sera irrationelle, et sera la première de deux médiales.

Prop. XXXIX. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent une surface médiale, leur somme sera irrationelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

Prop. XL. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la droite entière sera irrationelle, et sera appelée majeure.

Prop. XLI. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel, la droite entière sera irrationelle, et sera appelée celle qui peut une rationelle et une médiale.

Ppop. XLII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis; tota recta irrationalis est, vocetur autem bina media potens.

Prop. XLIII. Recta ex binis nominibus ad unum solùm punctum dividitur in nomina.

Prop. XLIV. Ex binis mediis prima ad unum solùm punctum dividitur.

Prop. XLV. Ex binis mediis secunda ad unum solùm punctum dividitur.

Prop. XLVI. Major ad idem solùm punctum dividitur.

Prop. XLVII. Recta rationale et medium potens ad unum solùm punctum dividitur.

Prop. XLVIII. Bina media potens ad unum solùm punctum dividitur.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Expositâ rationali, et rectâ ex binis nominibus divisâ in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si autem minus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secunda.

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus et si majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si vero neutrum, sexta.

droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés, la droite entière sera irrationelle et sera appelée celle qui peut deux médiales.

Prop. XLIII. La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

Prop. XLIV. La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Prop. XLV. La seconde de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Prop. XLVI. La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

Prop. XLVII. La droite qui peut une rationelle et une médiale ne peut être divisée qu'en un seul point.

Prop. XLVIII. La droite qui peut deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

Prop. XLIX. Invenire ex binis nominibus primam.

Prop. L. Invenire ex binis nominibus secundam.

Prop. LI. Invenire ex binis nominibus tertiam.

Prop. LII. Invenire ex binis nominibus quartam.

Prop. LIII. Invenire ex binis nominibus quintam.

Prop. LIV. Invenire ex binis nominibus sextam.

Prop. LV. Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

Prop. LVI. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secundâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

Prop. LVII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Prop. LVIII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

Prop. LIX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

Prop. LX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

Prop. LXI. Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Prop. LXII. Quadratum primæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

Prop. LXIII. Quadratum secundæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

Prop. LXIV. Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Prop. XLIX. Trouver la première de deux noms.

Prop. L. Trouver la seconde de deux noms.

Prop. LI. Trouver la troisième de deux noms.

Prop. LII. Trouver la quatrième de deux noms.

Prop. LIII. Trouver la cinquième de deux noms.

Prop. LIV. Trouver la sixième de deux noms.

Prop. LV. Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite de deux noms.

Prop. LVI. Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la première de deux médiales.

Prop. LVII. Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la seconde de deux médiales.

Prop. LVIII. Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée majeure.

Prop. LIX. Si une surface est comprise sous une irrationelle et sous une cinquième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Prop. LX. Si une surface est comprise sous une rationelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite qui peut deux médiales.

Prop. LXI. Le quarré d'une droite de deux noms appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

Prop. LXII. Le quarré de la première de deux médiales appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la seconde de deux noms.

Prop. LXIII. Le quarré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la troisième de deux noms.

Prop. LXIV. Le quarré d'une majeure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

Prop. LXV. Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

Prop. LXVI. Quadratum ex eâ quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Prop. LXVII. Recta ei quæ ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est ordine eadem.

Prop. LXVIII. Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

Prop. LXIX. Recta majori commensurabilis et ipsa major est.

Prop. LXX. Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

Prop. LXXI. Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

Prop. LXXII. Rationali et medio compositis, quatuor irrationales fiunt, vel ex binis nominibus recta, vel ex binis mediis prima, vel major, vel et rationale et medium potens.

Prop. LXXIII. Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

Prop. LXXIV. Si a rationali rationalis auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

Prop. LXXV. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

Prop. LXXVI. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commen-

Prop. LXV. Le quarré d'une droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale étant appliqué à une rationelle, fait uue largeur qui est la cinquième de deux noms.

Prop. LXVI. Le quarré d'une droite qui peut deux médiales étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est la sixième de deux noms.

Prop. LXVII. La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

Prop. LXVIII. La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

Prop. LXIX. Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

Prop. LXX. Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Prop. LXXI. Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

Prop. LXXII. Si l'on ajoute une surface rationelle avec une surface médiale, on aura quatre droites irrationelles ; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Prop. LXXIII. Deux surfaces médiales incommensurables entr'elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

Prop. LXXIV. Si une droite rationelle est retranchée d'une droite rationelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière ; la droite restante sera irrationelle, et sera appelée apotome.

Prop. LXXV. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface rationelle, la droite restante est irrationelle, et elle s'appèlera le premier apotome de la médiale.

Pрop. LXXVI. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensusurabilis existens toti, quæ cum totâ medium continet; reliqua irrationalis est, vocetur antem mediæ apotome secunda.

Prop. LXXVII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum vero sub ipsis medium; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

Prop. LXXVIII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

Prop. LXXIX. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

Prop. LXXX. Apotomæ una solùm congruit recta rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Prop. LXXXI. Mediæ apotomæ primæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

Prop. LXXXII. Mediæ apotomæ secundæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ medium continens.

Prop. LXXXIII. Minori una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum totâ compositum quidem ex rable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface médiale, la droite restante est irrationelle, et elle s'appèlera le second apotome de la médiale.

Prop. LXXVII. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationelle, et elle sera appelée mineure.

Prop. LXXVIII. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationel, la droite restante sera irrationelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Prop. LXXIX. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des quarrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Prop. LXXX. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

Prop. LXXXI. Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationelle.

Prop. LXXXII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome médial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

Prop. LXXXIII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero bis sub ipsis medium.

Prop. LXXXIV. Ei quæ cum rationali medium totum facit una solùm congruit rectâ potentiâ incommensurabilis existens toti; et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale.

Prop. LXXXV. Ei quæ cum medio medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Expositâ rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, si quidem tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome quarta.

ces droites rationelle, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Prop. LXXXIV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Prop. LXXXV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés.

DÉFINITIONS TROISIÈMES.

1. Une rationelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appèlera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable avec la droite entière, le reste s'appèlera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera quatrième apotome.

5. Si vero sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

Prop. LXXXVI. Invenire primam apotomen.

Prop. LXXXVII. Invenire secundam apotomen.

Prop. LXXXVIII. Invenire tertiam apotomen.

Prop. LXXXIX. Invenire quartam apotomen.

Prop. XC. Invenire quintam apotomen.

Prop. XCI. Invenire sextam apotomen.

Prop. XCII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome primâ, recta spatium potens apotome est.

Prop. XCIII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est prima.

Prop. XCIV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

Prop. XCV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potens minor est.

Prop. XCVI. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

Prop. XCVII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ cum medio medium totum facit.

Prop. XCVIII. Quadratum ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

Prop. XCIX. Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Prop. C. Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera cinquième apotome.

6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera sixième apotome.

Prop. LXXXVI. Trouver un premier apotome.

Prop. LXXXVII. Trouver un second apotome.

Prop. LXXXVIII. Trouver un troisième apotome.

Prop. LXXXIX. Trouver un quatrième apotome.

Prop. XC. Trouver un cinquième apotome.

Prop. XCI. Trouver un sixième apotome.

Prop. XCII. Si une surface est comprise sous une rationelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

Prop. XCIII. Si une surface est comprise sous une rationelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

Prop. XCIV. Si une surface est comprise sous une rationelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

Prop. XCV. Si une surface est comprise sous une rationelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

Prop. XCVI. Si une surface est comprise sous une rationelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Prop. XCVII. Si une surface est comprise sous une rationelle et un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Prop. XCVIII. Le quarré d'un apotome appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un premier apotome.

Prop. XCIX. Le quarré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un second apotome.

Prop. C. Le quarré d'un second apotome médial appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

Prop. CI. Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Prop. CII. Quadratum ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Prop. CIII. Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Prop. CIV. Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est atque ordine eadem.

Prop. CV. Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

Prop. CVI. Recta minori commensurabilis minor est.

Prop. CVII. Recta ei quæ cum rationali medium totum facit oommensurabilis et ipsa cum rationali medium totum faciens est.

Prop. CVIII. Recta ei quæ cum medio medium totum facit commensurabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

Prop. CIX. Medio a rationali detracto, recta reliquum spatium potens una duarum irrationalium fit, vel apotome, vel minor.

Prop. CX. Rationali a medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum faciens.

Prop. CXI. Medio a medio detracto incommensurabili toti, reliquæ duæ rationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum faciens.

Prop. CXII. Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus.

Prop. CXIII. Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus

Prop. CI. Le quarré d'une mineure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

Prop. CII. Le quarré d'une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

Prop. CIII. Le quarré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

Prop. CIV. Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

Prop. CV. Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

Prop. CVI. Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

Prop. CVII. La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationelle un tout médial.

Prop. CVIII. Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.

Prop. CIX. Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationelle, la droite qui peut la surface restante est une des deux irrationelles suivantes; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

Prop. CX. Une surface rationelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Prop. CXI. Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable avec la surface entière, il résulte deux droites irrationelles; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Prop. CXII. Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

Prop. CXIII. Le quarré d'une rationelle étant appliqué à une droite de applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in eâdem ratione; et adhuc apotome quæ fit eumdem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

Prop. CXIV. Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eàdem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eumdem ordinem habet quem apotome.

Prop. CXV. Si spatium contineatur sub apotome et rectâ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; recta spatium potens rationalis est.

Prop. CXVI. A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nulla nulli præcedentium eadem.

Prop. CXVII. Proponatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

Hæ sunt definitiones et propositiones libri decimi, quæ omnes propositiones perspicue, simpliciterque demonstrantur.

Hoc volumen permultas lectiones varias continet. Ingens multitudo rerum supervacanearum in textum libri decimi introductæ fuerant; quæ omnes e textu ejectæ sunt.

Aliter demonstrata, corollaria, lemmata et scholia quibus librum decimum expurgavi reperiuntur cum versionibus latinis et gallicis in lectionibus variantibus.

Quæ e textu libri decimi ejecta sunt, illa Euclidi abjudicanda semper fuerunt visa; et quæ ejeci, ea et ex omnibus optimis codicibus fuerunt ejecta. Si quando erravi, hoc erit parvi momenti; adde quod quæ ejecta sunt e textu in lectionibus variantibus reperiuntur. Cæterum mihi erat norma semper fere certa secernendi quæ sunt Euclidis ex illis quæ ab Euclide sunt aliena.

deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

Prop. CXIV. Le quarré d'une rationelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

Prop. CXV. Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui peut cette surface est rationelle.

Prop. CXVI. Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

Prop. CXVII. Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures quarrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Telles sont les définitions et les propositions du dixième livre : toutes ces propositions sont démontrées d'une manière claire et simple.

Ce volume renferme un très-grand nombre de variantes. Une foule de superfluités avaient été introduites dans le texte du dixième livre; je les en ai fait disparaître.

Les *autrement*, les corollaires, les lemmes et les scholies dont j'ai purgé le dixième livre se trouvent dans les variantes avec leur traduction latine et française.

Ce que j'ai supprimé dans le dixième livre a toujours été regardé comme indigne d'Euclide; ajoutez à cela que les suppressions que j'ai faites sont autorisées presque toutes par les meilleurs manuscrits. Si j'ai erré en quelque chose, le mal n'est pas grand; puisque ce que l'on ne trouve pas dans le texte, on le trouve dans les variantes. Au reste, j'avais une règle presque toujours infaillible de discerner ce qui appartient à Euclide de ce qui lui est étranger.

Antiqui geometræ, Euclides scilicet, Archimedes et Apollonius, solebant ad propositum directe tendere, nunquam de viâ declinantes demonstrandi causâ quæ ad progrediendum nequaquam ipsis erant necessaria. Quæ cum ita sint, fere impossibile est illum in errorem labi qui argumentum callide animo complectitur. Accedit illud quod in omnibus ejectis nec Euclidis concinitatem agnoscere est, nec verba ipsi familiaria.

Inter ejecta ex decimo libro invenire est aliter demonstrata quæ nullius sunt momenti. Vide *aliter* propositionis 1, et scholium propositionis 22, quod merum est *aliter*.

Invenire est demonstrationes quæ in libris præcedentibus reperiuntur. Vide lemmata propositionum 31, 32, 33.

Invenire quoque est plura futilia et scioli alicujus glossemata. Vide corollarium propositionis 24, scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum.

In pluribus ejectis Euclides loquens introducitur, κάλει, ἐκάλεσε; *vocat, vocavit*, etc. Vide scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum, etc.

Hæc et plura alia e textu decimi libri sunt ejecta. In textu plura retinui quæ ex ipso fortasse ejicere potuissem; tale est scholium propositionis 19, et *aliter* propositionum 19, 106, 107, 116, et corollarium propositionis 112, necnon *aliter* propositionis 117, cujus haud dubie demonstratio est una ex elegantissimis totius geometriæ.

Retinui quoque in textu plura alia quæ ex illo ejicere fortasse debuissem, et quæ ex illo ejicerem, si quando alteram Euclidis editionem producerem; tale est lemma propositionis 9, talia sunt etiam lemmata propositionum 14, 17, 33, quæ in libris præcedentibus sunt demonstrata, necnon lemma propositionis 20, et corollarium propositionis 24, quæ nihil sunt nisi inutilia glossemata.

E textu ejicere debuissem propositionem 13, quæ eadem est ac propositio 14, et quæ sine dubio Euclidis non est. Retinui tamen, ut propositiones

Les anciens géomètres, je veux dire Euclide, Archimède et Apollonius, avaient pour usage de marcher constamment vers leur but sans s'écarter jamais de leur chemin, pour s'occuper de ce qui ne leur était pas nécessaire pour aller en avant. Cela étant ainsi, il n'est guère possible, pour une personne qui entend bien la matière, de tomber dans l'erreur. Ajoutez à cela que dans toutes les suppressions que j'ai faites, on ne reconnaît ni la manière, ni même les expressions accoutumées d'Euclide.

Parmi les suppressions que j'ai faites au dixième livre, on trouve des *Autrement* qui ne sont d'aucun prix. Voyez l'*Autrement* de la proposition 1, et la Scholie de la proposition 22, qui n'est qu'un pur *Autrement.*

On y rencontre des démonstrations qui se trouvent dans les livres précédents. Voyez les lemmes des propositions 31, 32, 33.

Ici ce sont des futilités, ce sont des gloses de quelque demi-savant en géométrie. Voyez le corollaire de la proposition 24, les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes.

Dans une grande partie des suppressions que j'ai faites, on fait parler Euclide κάλει, ἐκάλεσε; *il appèle, il appela.* Voyez les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes, etc.

Telles sont les suppressions importantes que j'ai cru devoir faire au dixieme livre; j'ai conservé dans le texte des choses que j'aurais pu supprimer; telle est la scholie de la proposition 19, les *aliter* des propositions 19, 106, 107 et 116; le corollaire de la proposition 112, ainsi que l'*autrement* de la proposition 117, dont la démonstration est certainement une des plus belles de toute la géométrie.

J'en ai conservé d'autres que j'aurais peut-être dû supprimer, et que je supprimerais certainement dans une nouvelle édition, si jamais elle avait lieu. Tel est le lemme de la proposition 9; tels sont aussi les lemmes des propositions 14, 17, 33, qui sont démontrés dans les livres précédents; ainsi que le lemme de la proposition 20, et le corollaire de la proposition 24, qui ne sont que des gloses inutiles.

J'aurais dû supprimer la proposition 13, qui est la même que la proposition 14, et qui n'est certainement pas d'Euclide. Si je ne l'ai meæ editionis signarentur iisdem numeris quibus propositiones editionis Oxoniæ.

Retinui etiam scholium quod ultimam propositionem subsequitur, quamvis illud supponat plures propositiones quæ in libris tantum subsequentibus demonstrantur. Hoc scholium retinui, quia illud ostendit quomodo, rectis incommensurabilibus inventis, magnitudines duarum et trium dimensionum inveniri possint inter se incommensurabiles.

Corollarium propositionis 73, quod in lectionibus variis adest, in textu adesse deberet.

Nihil amplius dicam de lectionibus variis libri decimi; nunc de propositione 19 libri noni sum locuturus.

Dixi in notâ quæ reperitur in imâ paginâ hujus propositionis Hervagium volentem emendare duos codices græcos quibus usus fuit in Euclide edendo, pro propositione 19 substituisse græcam versionem versionis latinæ Zamberti, quæ concordat cum codicibus 190, 2466, 2342. Vide lectiones varias. Mea editio plane concordat cum omnibus aliis codicibus. Editio Oxoniæ consentanea est cum editione Basiliæ. In imâ paginâ editionis Oxoniæ legere est textum hujus propositionis esse corruptissimum. Textus est corruptus in solis codicibus de quibus mentionem feci; in omnibus vero aliis est maxime purus.

In editionibus Basiliæ et Oxoniæ, et in codicibus 190, 2466, 2362, hoc agitur ut ostendatur esse impossibile invenire quartum numerum integrum Δ tribus numeris integris A, B, Γ proportionalem, quando numeri A, B, Γ non sunt deinceps proportionales, et quando numeri A, Γ inter se sunt primi.

Hæc est ratiocinatio :

Hoc sit possibile, *et ut* A *ad* B *ita sit* Γ *ad* Δ *; fiat ut* B *ad* Γ *ita sit* Δ *ad* E. Vide secundum *alinea* paginæ 439, et notam propositionis 19.

Atqui evidenter fieri potest ut E qui numerus integer esse debet vel sit vel non sit integer numerus; hæc ratiocinatio igitur est falsa. Et valde miror quod falsitatem hujus ratiocinationis non animadverterit Commandinus, qui erat unus ex primis ætatis suæ geometris.

pas fait, c'était afin que les propositions de mon édition eussent les mêmes numéros que celle d'Oxford.

J'ai conservé aussi la scholie de la fin du dixième livre, quoiqu'elle suppose plusieurs propositions qui ne sont démontrées que dans les livres suivants. J'ai conservé cette scholie, parce qu'elle fait voir comment des droites incommensurables étant trouvées, on peut trouver des grandeurs de deux et de trois dimensions incommensurables entr'elles.

C'est par erreur que le corollaire de la proposition 73 se trouve parmi les variantes, et non dans le texte.

Je ne parlerai pas davantage des variantes du dixième livre. Il ne me reste plus qu'à parler de la proposition 19 du neuvième livre.

J'ai dit dans la note qui est au bas de cette proposition, qu'Hervage, voulant rectifier les deux manuscrits grecs dont il se servit dans son édition d'Euclide, avait mis à la place de la proposition 19 la version grecque de la version latine de Zamberti, qui est entièrement conforme aux trois manuscrits 190, 2466, 2342. Voyez les variantes. Mon édition est entièrement conforme à tous les autres manuscrits. Celle d'Oxford est calquée sur celle de Basle. On lit, au bas de la page, dans l'édition d'Oxford, que cette proposition est tout-à-fait corrompue. Le texte n'est corrompu que dans les trois manuscrits dont je viens de parler; dans tous les autres, il est dans toute sa pureté.

Dans les éditions de Basle et d'Oxford, et dans les trois manuscrits 190, 2466, 2342, il s'agit de démontrer qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre entier Δ proportionnel aux trois nombres entiers A, B, Γ, lorsque les nombres A, B, Γ ne sont pas successivement proportionnels, et que les nombres A, Γ sont premiers entr'eux.

Voici comment on raisonne :

Que cela soit possible, *et que* A *soit à* B *comme* Γ *est à* Δ; *faisons en sorte que* B *soit à* Γ *comme* Δ *est à* E. Voyez le second alinéa de la page 439, et la note de la proposition 19.

Or, il est évident que E, qui doit être un nombre entier, peut ou être ou n'être pas un nombre entier. Ce raisonnement est donc faux. Je suis très-surpris que Commandin, qui était un des premiers géomètres de son temps, n'ait pas aperçu la fausseté de ce raisonnement.

Hæc ratiocinatio non solum falsa est, sed etiam et enuntiatio propositionis demonstrandæ; possibile enim est invenire quartum numerum integrum proportionalem numeris 4, 8, 9, qui quidem non sunt deinceps proportionales, et quorum extremi 4 et 9 primi inter se sunt.

Quod attinet ad partem typographicam summâ diligentiâ usus sum ut textus hujus voluminis quam maxime emendatus esset. D. Jannet necnon D. Patris, mei operis editor, qui mea specimina accuratissime legerunt, non tenui mihi fuerunt auxilio.

Nota. Propositio 7 libri primi detruncata erat in omnibus græcis codicibus. Vide præfationem primi voluminis, pag. 19. Hanc propositionem integram reperi in versione latinâ quam ex arabicâ linguâ fecit Campanus, et quæ edita fuit Venetiis anno 1482. Hæc propositio ex toto Euclidis dignissima mihi videtur. En hîc illa est cum meâ versione græcâ gallicâque : Campani versionem in paucissimis immutavi.

ΒΙΒΛΙΟΝ ά. ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζʹ.

Εὰν ἀπὸ δύο σημείων τῶν οὔσων εὐθείας περάτων δύο εὐθεῖαι κατά τι σημεῖον συμπίπτουσαι διάχθωσιν, ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη οὐ διαχθήσονται δύο ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ ἄλλον σημεῖον συμπίπτουσαι· ὥστε ἴσας εἶναι ταῖς τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαις.

Εστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Β περάτων διήχθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΓ κατά τι σημεῖον τὸ Γ συμπίπτουσαι· λέγω δὴ ὅτι ἀπὸ περάτων τῆς ΑΒ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, οὐ διαχθήσονται ἄλλαι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι κατὰ

Si ex duobus punctis rectæ extremitatibus duæ rectæ in unum punctum concurrentes ducantur, ex iisdem punctis et in iisdem partibus non ducentur duæ aliæ rectæ in aliud punctum concurrentes, ita ut æquales sint rectis easdem extremitates habentibus.

Sit recta AB, et ex A, B extremitatibus ducantur duæ rectæ AΓ, BΓ in punctum Γ concurrentes; dico ex extremitatibus rectæ AB, et in iisdem partibus, non ducendas fore duas alias rectas in aliud punctum concurrentes, ita ut

LIVRE I. PROPOSITION VII.

Si des extrémités d'une droite on mène deux droites qui se rencontrent en un point, il est impossible de mener des mêmes points, et du même côté, deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de manière que les droites qui ont les mêmes extrémités soient égales entr'elles.

Soit la droite AB; des extrémités A, B de cette droite menons deux droites AΓ, BΓ qui se rencontrent en un point Γ; je dis qu'on ne peut pas du même côté mener des extrémités de AB deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de

Non seulement ce raisonnement est faux, mais encore l'énoncé de la proposition à démontrer. Car il est très-possible de trouver un quatrième nombre entier proportionnel aux nombres 4, 8, 9, qui ne sont pas successivement proportionnels, et dont les extrêmes 4 et 9 sont premiers entr'eux.

Quant à la partie typographique de ce volume, j'ai fait tous mes efforts pour donner au texte toute la pureté possible. J'ai été puissamment secondé par M. Jannet et M. Patris, éditeur de mon ouvrage, qui ont eu la complaisance de lire les épreuves avec le plus grand soin.

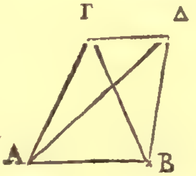
Nota. La proposition VII du premier livre était tronquée dans tous les manuscrits grecs. Voyez la Préface du premier volume, pag. 19. J'ai trouvé cette proposition toute entière dans la version latine faite d'après l'arabe par Campan, et publiée à Venise en 1482. Elle me paraît en tout digne d'Euclide. La voici avec ma version grecque et latine. Je n'ai fait que quelques légers changements à la version de Campan.

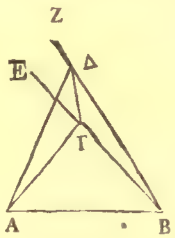
ἄλλον σημεῖον, ὥστε εὐθεῖαν μὲν ἀπὸ σημείου τοῦ Α ἠχθεῖσαν ἴσην εἶναι τῇ ΑΓ, ἠχθεῖσαν δὲ ἀπὸ σημείου τοῦ Β ἴσην τῷ ΒΓ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ σημεῖον τὸ Δ συμπίπτουσαι, καὶ ἔστω εὐθεῖα μὲν ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, εὐθεῖα δὲ ΒΔ ἴση τῇ ΒΓ.

recta quidem ex puncto A ducta æqualis sit ipsi AΓ, ducta vero ex puncto B æqualis ipsi BΓ.

Si enim possibile, ducantur in eisdem partibus duæ aliæ rectæ in punctum Δ concurrentes; et sit recta quidem AΔ æqualis ipsi AΓ, recta vero BΔ æqualis ipsi BΓ.





Ἤτοι σημεῖον τὸ Δ ἐντὸς πεσεῖται τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἢ ἐκτός· μὴ γὰρ εἰς μίαν τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ

Vel punctum Δ intra triangulum ABΓ cadet vel extra; non enim in unum laterum AΓ, BΓ

manière que la droite menée du point A soit égale à AΓ, et que la droite menée du point B soit égale à BΓ.

Car si cela est possible, menons du même côté deux autres droites qui se rencontrent en un point Δ, de manière que AΔ soit égal à AΓ, et BΔ égal à BΓ.

Ou le point Δ tombera en dedans du triangle ABΓ, ou en dehors; car il ne tombera πεσεῖται· εἰ γὰρ πεσεῖται, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ μεῖζον ἔσται, ὅπερ ἄτοπον.

Πιπτέτω πρότερον ἐκτός. Ἤτοι μία τῶν ΑΔ, ΒΔ μίαν τῶν ΑΓ, ΒΓ τεμεῖ, ἢ οὐδετέρα τῶν ΑΔ, ΒΔ οὐδετέραν τῶν ΑΓ, ΒΓ τεμεῖ.

Τεμνέτω δὴ ἡ ΑΔ τὴν ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶ δύο πλευραὶ αἱ ΑΔ, ΑΓ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶ δύο πλευραὶ αἱ ΒΔ, ΒΓ τοῦ ΒΓΔ τριγώνου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Ἀλλὰ δὴ μείζων ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΔ· ὥστε τὸ μέρος τοῦ ὅλου μεῖζόν ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν ἡ ΒΓ τὴν ΑΔ τέμνῃ.

Ἀλλὰ δὴ οὐδετέρα τῶν ΑΔ, ΒΔ οὐδετέραν τῶν ΑΓ, ΒΓ τεμνέτω καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐκτὸς πιπτέτω τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΒΓ, ΒΔ εὐθεῖαι αἱ ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ

cadet; si enim caderet, pars toto major esset, quod absurdum.

Cadat primum extra. Vel una ex ΑΔ, ΒΔ rectis unam ex ΑΓ, ΒΓ rectis secabit, vel neutra ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ipsarum ΑΓ, ΒΓ secabit.

Secet igitur ΑΔ ipsam ΒΓ, et jungatur ΓΔ. Quoniam igitur æqualia sunt duo latera ΑΔ, ΑΓ trianguli ΑΓΔ, æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi ΑΔΓ. Rursus, quoniam æqualia sunt duo latera ΒΔ, ΒΓ trianguli ΒΓΔ, æqualis est et angulus ΒΓΔ angulo ΒΔΓ. Sed et major est angulus ΒΔΓ angulo ΑΔΓ; angulus igitur ΒΓΔ major est angulo ΑΓΔ; quare pars quam totum major est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si ipsa ΒΓ ipsam ΑΔ secet.

Sed et neutra ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ipsarum ΑΓ, ΒΓ secet, et punctum Δ cadat extra triangulum ΑΒΓ, et jungatur ΔΓ, et producantur in directum ipsarum ΒΓ, ΒΔ rectæ ΓΕ, ΔΖ.

Quoniam igitur æquales sunt rectæ ΑΓ, ΑΔ, æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ. Rursus,

pas sur un des côtés ΑΓ, ΒΓ de ce triangle, parce que, si cela était, la partie serait plus grande que le tout; ce qui est absurde.

Que le point Δ tombe premièrement en dehors; ou l'une des droites ΑΔ, ΒΔ coupera l'une des droites ΑΓ, ΒΓ, ou aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupera aucune des droites ΑΓ, ΒΓ.

Que la droite ΑΔ coupe la droite ΒΓ; joignons ΓΔ. Puisque les deux côtés ΑΔ, ΑΓ du triangle ΑΓΔ sont égaux, l'angle ΑΓΔ sera égal à l'angle ΑΔΓ (5. 1). De plus, puisque les deux côtés ΒΔ, ΒΓ du triangle ΒΓΔ sont égaux, l'angle ΒΓΔ sera égal à l'angle ΒΔΓ (5. 1). Mais l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΑΔΓ; l'angle ΒΓΔ est donc plus grand que l'angle ΑΓΔ; la partie est donc plus grande que le tout, ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si la droite ΒΓ coupait la droite ΑΔ.

Mais qu'aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupe aucune des droites ΑΓ, ΒΓ, et que le point Δ tombe hors du triangle ΑΒΓ; joignons ΔΓ, et menons les droites ΓΕ, ΔΖ dans les directions des droites ΒΓ, ΒΔ.

Puisque les droites ΑΓ, ΑΔ sont égales, l'angle ΑΔΓ sera égal à l'angle ΑΓΔ (5. 1).

ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΒΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ. Αλλὰ δὴ ἐλάσσων ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΖ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· ὥστε καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους ἔλασσον ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον.

Ομοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς πίπτῃ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Εὰν ἀπὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

quoniam æquales sunt rectæ ΒΓ, ΒΔ, æqualis est et angulus ΓΔΖ angulo ΕΓΔ. Sed et minor est angulus ΕΓΔ quam angulus ΑΓΔ; angulus igitur ΓΔΖ minor est angulo ΑΔΓ; quare et totum quam pars minus est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si punctum Δ cadat intra triangulum ΑΒΓ. Si ex duobus, etc.

De plus, puisque les droites ΒΓ, ΒΔ sont égales, l'angle ΓΔΖ sera égal à l'angle ΕΓΔ (5. 1). Mais l'angle ΕΓΔ est plus petit que l'angle ΑΓΔ; l'angle ΓΔΖ est donc plus petit que l'angle ΑΔΓ; le tout est donc plus petit que la partie; ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si le point Δ tombait en dedans du triangle ΑΒΓ. Donc, etc.

M. Sédillot, membre adjoint du bureau des longitudes, et professeur à la Bibliothèque du Roi, a eu la complaisance de traduire littéralement pour moi cette proposition importante d'Euclide d'après la version arabe de Nassir-Eddin Thoussy, imprimée à Rome en 1594. La version latine de Campan est tout-à-fait conforme à la manière d'Euclide; il n'en est pas de même de la version de Nassir-Eddin Thoussy, quoiqu'elle soit la même pour le fond; il est donc présumable que la version arabe dont s'est servi Campan n'est pas la même que la version arabe imprimée à Rome. Voici la version de M. Sédillot, pour qui la langue arabe est aussi familière que les sciences mathématiques.

Soient menées des deux extrémités d'une ligne droite donnée, deux droites qui se rencontrent en un point quelconque, situé d'un côté déterminé de la ligne donnée, on ne pourra, des deux mêmes points et du même côté de la ligne, mener deux autres droites respectivement égales aux deux premières, chacune à sa corrélative, et se rencontrant en un autre point que les deux premières.

Des deux points Α et Β de la droite ΑΒ, je mène les deux droites ΑΓ, ΒΓ qui se rencontrent au point Γ. Des deux mêmes points et du même côté Γ, je mène les deux autres droites ΑΔ, ΒΔ; ΑΔ étant la corrélative de ΑΓ, et ΒΔ celle de ΒΓ; et je dis que les deux lignes ΑΔ et ΒΔ ne peuvent se rencontrer en un autre point que le point Γ.

Supposons qu'elles puissent se rencontrer au point Δ; je joins Δ et Γ par la droite ΔΓ; les deux côtés ΑΓ, ΑΔ sont égaux ; l'angle ΔΓΑ plus grand que ΔΓΒ est égal à l'angle ΓΔΑ par la cinquième proposition ; ainsi ΓΔΑ est plus grand que ΔΓΒ.

De même, les deux côtés ΒΓ, ΒΔ sont égaux ; l'angle ΔΓΒ plus petit que ΓΔΑ est égal à l'angle ΓΔΒ par la cinquième proposition ; l'angle ΓΔΒ serait donc plus petit que ΓΔΑ, et celui-ci plus grand que celui-là ; ce qui est absurde. Ainsi la chose proposée est vraie ; ce que nous voulions démontrer.

A l'égard de cette proposition, on peut varier la construction. Ainsi lorsque le point Δ tombe au-dehors du triangle ΑΒΓ, l'un des deux côtés ΔΑ ou ΔΒ peut être ou n'être pas coupé par l'un des deux autres côtés ΓΑ ou ΓΒ ; ou bien le point Δ peut tomber dans le triangle ΑΒΓ, ou enfin sur l'un des deux côtés ΓΑ ou ΓΒ.

Nous venons de démontrer l'impossibilité du cas indiqué dans la figure première. Prolongeons dans la seconde les deux lignes ΑΔ, ΒΓ, selon leur direction respective dans la région du point Δ, vers les points Ε, Ζ*; puis joignons par une droite les deux points Γ et Δ.

Comme dans la figure 2, les angles ΒΓΔ et ΒΔΓ sont égaux par la cinquième proposition, les angles ΕΓΔ et ΖΔΓ sont aussi égaux par la même proposition ; l'angle ΕΓΔ égal à ΖΔΓ, qui est plus grand que ΒΔΓ égal à ΒΓΔ, serait plus grand que ΒΓΔ, et celui-ci plus petit que celui-là, ce qui est absurde.

On montrerait de même l'absurdité pour le cas *où le point Δ tomberait dans le triangle* ΑΒΓ**.

Quant *au cas**** où le point Δ tombe sur la ligne ΒΓ, prolongée ou non, il faudrait que de deux lignes égales l'une fût plus grande ou plus petite que l'autre, ce qui est également absurde.

* Après les points Ε, Ζ, la version arabe ajoute : *et vers les points* Κ, Ε *dans la figure* 3.

** Au lieu de *où le point* Δ *tomberait dans le triangle* ΑΒΓ, la version arabe dit simplement : *indiqué dans la figure* 3.

*** Au lieu de *au cas*, la version arabe dit *à la figure* 4.

J'ai fait ces légers changements pour ne pas multiplier les figures sans nécessité.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales; extremi autem eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, extremi autem eorum A, Δ primi inter se sint; dico ipsos A, B, Γ, Δ minimos esse ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis.

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

Soient A, B, Γ, Δ tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que leurs extrêmes A, Δ soient premiers entr'eux; je dis que les nombres A, B, Γ, Δ sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν ἐλάττονες τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Ε, Ζ, Η, Θ[1]· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως[2] ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι[3] ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim non, sint minores ipsis Α, Β, Γ, Δ ipsi Ε, Ζ, Η, Θ in eâdem ratione existentes cum ipsis. Et quoniam ipsi Α, Β, Γ, Δ in eâdem ratione sunt cum ipsis Ε, Ζ, Η, Θ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudini ipsorum Ε, Ζ, Η, Θ; ex æquo igitur est ut Α ad Δ ita Ε ad Θ. Ipsi autem Α, Δ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri æqualiter metiuntur ipsos eamdem rationem habentes, major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Α ipsum Ε, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsi Ε, Ζ, Η, Θ minores existentes ipsis Α, Β, Γ, Δ in eâdem ratione sunt cum ipsis; ipsi Α, Β, Γ, Δ igitur minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Α, 8.	Β, 12.	Γ, 18.	Δ, 27.
Ε	Ζ	Η	Θ

Car si cela n'est point, que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, soient en même raison que ceux-ci. Puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ sont en même raison que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Ε, Ζ, Η, Θ, par égalité Α est à Δ comme Ε est à Θ (14. 7). Mais les nombres Α, Δ sont premiers entre eux, et les nombres premiers sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Α mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, ne sont pas en même raison que ceux-ci; donc les nombres Α, Β, Γ, Δ sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ[1], ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Α τοὺς Γ, Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η, Θ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω.

PROPOSITIO II.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in datâ ratione.

Sit data ratio in minimis numeris, ratio ipsius A ad B; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in ipsius A ad B ratione.

Imperentur quidem quatuor; et A se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat; ipsum vero B multiplicans ipsum Δ faciat, et adhuc B se ipsum multiplicans ipsum E faciat, et adhuc ipse A ipsos Γ, Δ, E multiplicans ipsos Z, H, Θ faciat, ipse vero B ipsum E multiplicans ipsum K faciat.

A, 2.	B, 3.		
Γ, 4.	Δ, 6.	E, 9.	
Z, 8.	H, 12.	Θ, 18.	K, 27.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν[2]· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως[3] ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ

Et quoniam ipse A se ipsum quidem multiplicans ipsum Γ fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Δ fecit, numerus igitur A duos ipsos A, B multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut A ad B ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam ipse A ipsum B multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero B se ipsum

PROPOSITION II.

Trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans une raison donnée.

Que la raison donnée, dans les plus petits nombres, soit celle de A à B; il faut trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de A à B.

Qu'on en demande quatre. Que A se multipliant lui-même fasse Γ, que A multipliant B fasse Δ, que B se multipliant lui-même fasse E, que A multipliant encore Γ, Δ, E fasse Z, H, Θ, et que B multipliant E fasse K.

Puisque A se multipliant lui-même a fait Γ, et que A multipliant B a fait Δ, le nombre A multipliant les deux nombres A, B a fait Γ, Δ; donc A est à B comme Γ est à Δ (17. 7). De plus, puisque A multipliant B a fait Δ, et que B se multipliant πεποίηκεν, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Α, Β τὸν Β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν[4] Δ, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ

multiplicans ipsum E fecit; uterque igitur ipsorum A, B ipsum B multiplicans utrumque ipsorum Δ, E fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad E. Sed ut A ad B ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Δ ad E. Et quoniam ipse A ipsos Γ, Δ multiplicans ipsos Z, H fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Z ad H. Ut autem Γ ad Δ ita A ad B; et

A, 2.	B, 3.		
Γ, 4.	Δ, 6.	E, 9.	
Z, 8.	H, 12.	Θ, 18.	K, 27.

οὕτως ἦν ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ[5] ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως[6] ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, Κ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Ἀλλ'[7] ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὅ, τε Ζ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὅ, τε[8] Η πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. Λέγω δὴ ὅτι

ut igitur A ad B ita Z ad H. Rursus, quoniam ipse A ipsos Δ, E multiplicans ipsos H, Θ fecit; est igitur ut Δ ad E ita H ad Θ. Ut autem Δ ad E ita A ad B; et ut A igitur ad B ita H ad Θ. Et quoniam ipsi A, B, ipsum E multiplicantes ipsos Θ, K fecerunt; est igitur ut A ad B ita Θ ad K. Sed ut A ad B ita et Z ad H et H ad Θ; et ut igitur Z ad H ita et H ad Θ et Θ ad K; ipsi Γ, Δ, E igitur et ipsi Z, H, Θ, K proportionales sunt, in ipsius A ad B ratione. Dico etiam et minimi. Quoniam enim

lui-même a fait E, les nombres A, B multipliant B ont fait Δ, E; donc A est à B comme Δ est à E (18. 7). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Δ est à E. Et puisque A multipliant Γ, Δ a fait Z, H, le nombre Γ est à Δ comme Z est à H. Mais Γ est à Δ comme A est à B; donc A est à B comme Z est à H. De plus, puisque A multipliant Δ, E a fait H, Θ, le nombre Δ est à E comme H est à Θ. Mais Δ est à E comme A est à B; donc A est à B comme H est à Θ. Et puisque A, B multipliant E ont fait Θ, K, le nombre A est à B comme Θ est à K. Mais A est à B comme Z est à H, et comme H est à Θ; donc Z est à H comme H est à Θ, et comme Θ est à K; donc Γ, Δ, E et Z, H, Θ, K sont proportionnels, dans la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits. Car puisque A, B sont les plus petits καὶ ἐλάχιστοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς9, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν Α, Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, Ε πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Γ, Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ζ, Κ πεποίηκεν· οἱ Γ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Κ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, Β minimi sunt ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis, ipsi autem minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis primi inter se sunt; ipsi Α, Β igitur primi inter se sunt. Et uterque quidem ipsorum Α, Β se ipsum multiplicans utrumque ipsorum Γ, Ε fecit; utrumque vero ipsorum Γ, Ε multiplicans, utrumque ipsorum Ζ, Κ fecit; ipsi Γ, Ε igitur et Ζ, Κ primi inter se sunt. Si autem sint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis; ipsi Γ, Δ, Ε igitur et ipsi Ζ, Η, Θ, Κ minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Β. Quod oportebat ostendere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν[10] τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν· ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

COROLLARIUM.

Ex hoc igitur evidens est, si tres numeri deinceps proportionales minimi sunt ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis, extremos eorum quadratos esse; si autem quatuor, cubos.

nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, et que les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux sont premiers entr'eux (23. 7), les nombres Α, Β sont premiers entr'eux. Mais les nombres Α, Β, se multipliant eux-mêmes, ont fait Γ, Ε, et les nombres Α, Β multipliant Γ, Ε ont fait Ζ, Κ; donc les nombres Γ, Ε et Ζ, Κ sont premiers entr'eux (29. 7). Mais si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (1. 8); donc les nombres Γ, Δ, Ε et les nombres Ζ, Η, Θ, Κ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Β. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont des quarrés; que si l'on a quatre nombres, les extrêmes sont des cubes.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ[1] ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Β, Γ, Δ λόγῳ, οἱ Ε, Ζ, τρεῖς δὲ οἱ Η, Θ, Κ, καὶ αἰεὶ[2] ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως οὗ[3] τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλήθει τῶν Α, Β, Γ, Δ. Εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ.

PROPOSITIO III.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis; extremi eorum primi inter se sunt.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis, ipsi Α, Β, Γ, Δ; dico extremos eorum Α, Δ primos inter se esse.

Sumantur enim duo quidem numeri minimi in ipsorum Α, Β, Γ, Δ ratione, ipsi Ε, Ζ, tres autem Η, Θ, Κ, et semper deinceps uno plures, quoad assumpta multitudo æqualis facta fuerit multitudini ipsorum Α, Β, Γ, Δ. Sumantur, et sint Λ, Μ, Ν, Ξ.

Α, 8.	Β, 12.	Γ, 18.	Δ, 27.
Ε, 2.	Ζ, 3.		
Η, 4.	Θ, 6.	Κ, 9.	
Λ, 8.	Μ, 12.	Ν, 18.	Ξ, 27.

PROPOSITION III.

Si tant de nombres successivement proportionnels que l'on voudra, sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont premiers entr'eux.

Que tant de nombres Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels qu'on voudra, soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux ; je dis que leurs extrêmes Α, Δ sont premiers entr'eux.

Car prenons les deux plus petits nombres qui ont la même raison que Α, Β, Γ, Δ (2, 8); que ces nombres soient Ε, Ζ; prenons-en trois, et qu'ils soient Η, Θ, Κ, et ainsi de suite, toujours un de plus jusqu'à ce qu'on en ait pris une quantité égale à celle des nombres Α, Β, Γ, Δ. Qu'ils soient pris, et qu'ils soient Λ, Μ, Ν, Ξ.

Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Ζ ἑαυτὸν μὲν[4] πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η, Κ πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Η, Κ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν[5] Α, Ξ πεποίηκεν· καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Α, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί[6]. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ· ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ ἑκάστῳ τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. Καὶ εἰσιν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους[7]· καὶ οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Et quoniam Ε, Ζ minimi sunt ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Et quoniam uterque ipsorum Ε, Ζ se ipsum quidem multiplicans utrumque ipsorum Η, Κ fecit, utrumque vero ipsorum Η, Κ multiplicans utrumque ipsorum Λ, Ξ fecit; et ipsi Η, Κ igitur et ipsi Λ, Ξ primi inter se sunt. Et quoniam Α, Β, Γ, Δ minimi sunt ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis, sunt autem et Λ, Μ, Ν, Ξ minimi in eâdem ratione existentes cum ipsis Α, Β, Γ, Δ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudini ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ; unusquisque igitur ipsorum Α, Β, Γ, Δ unicuique ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem Α ipsi Λ, ipse vero Δ ipsi Ξ. Et sunt Λ, Ξ primi inter se; et Α, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον[1] ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

PROPOSITIO IV.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps proportionales minimos in datis rationibus.

Puisque les nombres Ε, Ζ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ils sont premiers entr'eux (24. 7). Et puisque les nombres Ε, Ζ se multipliant eux-mêmes ont fait Η, Κ, et que ces mêmes nombres multipliant Η, Κ ont fait Λ, Ξ, les nombres Η, Κ, et les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux (29. 7). Et puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, que les nombres Λ, Μ, Ν, Ξ sont les plus petits qui ont la même raison que Α, Β, Γ, Δ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Λ, Μ, Ν, Ξ; chacun des nombres Α, Β, Γ, Δ est égal à chacun des nombres Λ, Μ, Ν, Ξ; donc Α est égal à Λ, et Δ à Ξ. Mais les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux; donc les nombres Α, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION IV.

Tant de raisons qu'on voudra étant données, dans leurs plus petits nombres, trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons données.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὅ, τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον[2] ἐλαχίστους, ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Sint datæ rationes in minimis numeris, et ratio ipsius A ad B et ea ipsius Γ ad Δ, et adhuc ea ipsius E ad Z; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos et in ipsius A ad B ratione, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius E ad Z.

A, 2. B, 5. Γ, 3. Δ, 4. E, 5. Z, 6.
Θ, 6. H, 15. K, 20. Λ, 24.
N Ξ M O

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Η. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ[3] ὁ Α τὸν Θ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρείτω· ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον. Καὶ ὁσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρείτω. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον[4] εἰσὶν ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε

Sumatur enim ab ipsis B, Γ minimus mensuratus numerus, ipse H. Et quoties quidem B ipsum H metitur toties et A ipsum Θ metiatur, quoties vero Γ ipsum H metitur, toties et Δ ipsum K metiatur; ipse autem E ipsum K vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoties E ipsum K metitur toties et Z ipsum Λ metiatur. Et quoniam æqualiter A ipsum Θ metitur et B ipsum H; est igitur ut A ad B ita Θ ad H. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita H ad K, et adhuc ut E ad Z ita K ad Λ; ipsi Θ, H, K, Λ igitur deinceps proportionales sunt in ratione et ipsius A ad B, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius E ad Z. Dico etiam

Soient données dans leurs plus petits nombres la raison de A à B, celle de Γ à Δ, et celle de E à Z; il faut trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de A à B, dans celle de Γ à Δ, et enfin dans celle de E à Z.

Soit pris le plus petit nombre qui est mesuré par B et Γ (36. 7); que ce soit H. Que A mesure Θ autant de fois que B mesure H, et que Δ mesure K autant de fois que Γ mesure H; ou E mesurera K ou il ne le mesurera pas. Premièrement que E mesure K; et que Z mesure Λ autant de fois que E mesure K. Puisque A mesure Θ autant de fois que B mesure H, A est à B comme Θ est à H (13. 7). Par la même raison Γ est à Δ comme H est à K, et E est à Z comme K est à Λ; les nombres Θ, H, K, Λ sont donc successivement dans la raison de A à B, dans celle de Γ à Δ, et encore dans celle de Γ à Z; et je dis aussi qu'ils sont les plus πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἑξῆς ἀνάλογον[5] ἐλάχιστοι, ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις[6]. Εστωσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι[7] μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ[8] μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Γ μετρούμενός ἐστιν[9], ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς, ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν[10] τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν[11] τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

et minimos. Si enim non sunt ipsi Θ, Η, Κ, Λ minimi deinceps proportionales, et in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ, erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Λ minores numeri in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ. Sint ipsi Ν, Ξ, Μ, Ο. Et quoniam est ut Α ad Β ita Ν ad Ξ, ipsi autem Α, Β minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Β igitur ipsum Ξ metitur. Propter eadem utique Γ ipsum Ξ metitur; ipsi Β, Γ igitur ipsum Ξ metiuntur, et minimus igitur ab ipsis Β, Γ mensuratus ipsum Ξ metietur. Minimus autem ab ipsis Α, Γ mensuratus, est ipse Η; ipse Η igitur ipsum Ξ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Λ minores numeri deinceps, et in ratione ipsius Α ad Β, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ.

petits. Car si Θ, Η, Κ, Λ ne sont pas les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ, il y aura certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Λ dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ. Que ce soient Ν, Ξ, Μ, Ο. Puisque Α est à Β comme Ν est à Ξ, que Α, Β sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre Β mesurera Ξ. Par la même raison Γ mesure Ξ; donc Β et Γ mesurent Ξ; donc le plus petit nombre mesuré par Β, Γ mesure Ξ (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Β, Γ est Η; donc Η mesure Ξ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Il n'y a donc pas certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Λ, successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et enfin de Ε à Ζ.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Ε τὸν Κ. Καὶ εἰλήφθω ὁ[12] ὑπὸ τῶν Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Μ. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Η ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρείτω. Καὶ[13] ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ξ πρὸς

Non metiatur autem E ipsum K. Et sumatur ab ipsis E, K minimus mensuratus numerus, ipse M. Et quoties quidem K ipsum M metitur, toties et uterque ipsorum Θ, H utrumque ipsorum N, Ξ metiatur; quoties vero E ipsum M metitur, toties et Z ipsum O metiatur. Et quoniam æqualiter Θ ipsum N metitur ac H ipsum Ξ; est igitur ut Θ ad H ita N ad Ξ. Ut autem Θ ad H ita A ad B; et ut igitur A ad B ita N ad Ξ. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ

Α, 4.	Β, 5.	Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 4.	Ζ, 3.
Θ, 8.	Η, 10.	Κ, 15.			
Ν, 32.	Ξ, 40.	Μ, 60.	Ο, 45.		
Π	Ρ	Σ	Τ		

τὸν Μ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε[14] Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι[15] τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Εἰ γὰρ μὴ[16], ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάττονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον[17] ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις.

ita Ξ ad M. Rursus, quoniam æqualiter E ipsum M metitur ac Z ipsum O; est igitur ut E ad Z ita M ad O; ipsi N, Ξ, M, Θ igitur deinceps proportionales sunt in rationibus et ipsius A ad B, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius E ad Z. Dico etiam et minimos in ipsis A, B, Γ, Δ, E, Z rationibus. Si enim non, erunt aliqui ipsis N, M, Ξ, O minores numeri deinceps proportionales in rationibus A, B, Γ, Δ, E, Z

Mais que E ne mesure pas K. Soit pris le plus petit nombre mesuré par E, K (36. 7), et que ce soit M. Que les nombres Θ, H mesurent autant de fois N, Ξ que K mesure M, et que Z mesure O autant de fois que E mesure M. Puisque Θ mesure N autant de fois que H mesure Ξ, Θ est à H comme N est à Ξ (13. 7). Mais Θ est à H comme A est à B; donc A est à B comme N est à Ξ. Par la même raison Γ est à Δ comme Ξ est à M. De plus, puisque E mesure M autant de fois que Z mesure O, E est à Z comme M est à O; donc les nombres N, Ξ, M, O sont successivement proportionnels dans les raisons de A à B, de Γ à Δ, et de E à Z. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits dans les raisons de A, B, Γ, Δ, E, Z. Car si cela n'est point, il y aura des nombres plus petits que N, Ξ, M, O qui seront successivement proportionnels dans les raisons de A, B, Γ, Δ, E, Z. Que ces nombres soient

Εστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ τε[18] ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ρ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ρ μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενός, ἐστιν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε, Κ ἄρα τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενός ἐστιν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον[19] ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς[20] Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Sint Π, Ρ, Σ, Τ. Et quoniam est ut Π ad Ρ ita Α ad Β, ipsi autem Α, Β minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse igitur Β ipsum Ρ metitur. Propter eadem utique et Γ ipsum Ρ metitur. Ipsi Β, Γ igitur ipsum Γ metiuntur; et minimus igitur ab ipsis Β, Γ mensuratus ipsum Ρ metietur. Minimus autem ab ipsis Β, Γ mensuratus, est ipse Η; ipse Η igitur ipsum Ρ metitur. Et est ut Η ad Ρ ita Κ ad Σ; et Κ igitur ipsum Σ metitur. Metitur autem et Ε ipsum Σ; ipsi Ε, Κ igitur ipsum Σ metiuntur; et minimus igitur ab ipsis Ε, Κ mensuratus ipsum Σ metietur. Minimus autem ab ipsis Ε, Κ mensuratus, est ipse Μ; ipse Μ igitur ipsum Ζ metitur, major minorem, quod est impossibile. Non igitur erunt aliqui ipsis Ν, Ξ, Μ, Ο minores numeri deinceps proportionales et in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ; ipsi Ν, Ξ, Μ, Ο igitur deinceps proportionales minimi sunt in rationibus Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Quod oportebat ostendere.

Π, Ρ, Σ, Τ. Puisque Π est à Ρ comme Α est Β, que Α, Β sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre Β mesurera Ρ. Par la même raison Γ mesurera Ρ; donc Β, Γ mesurent Ρ; donc le plus petit nombre mesuré par Β, Γ mesurera Ρ (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Β, Γ est Η; donc Η mesure Ρ. Mais Η est à Ρ comme Κ est à Σ (13. 7); donc Κ mesure Σ (déf. 20. 7); mais Ε mesure Σ; donc Ε, Κ mesurent Σ; donc le plus petit nombre mesuré par Ε, Κ mesurera Σ. Mais le plus petit nombre mesuré par Ε, Κ est Μ; donc Μ mesure Σ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossibile; donc il n'y aura pas certains nombres plus petits que Ν, Ξ, Μ, Ο successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ; donc Ν, Ξ, Μ, Ο sont les plus petits nombres qui soient successivement proportionnels dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ τοῦ μὲν[1] A πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ B οἱ E, Z· λέγω ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν E καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Z, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ, E, Δ, Z λόγοις, οἱ H, Θ, K, ὥς τε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν E οὕτως τὸν[2] H πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν[3] Δ πρὸς τὸν Z οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν K. Καὶ ὁ Δ[4] τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Λ.

PROPOSITIO V.

Plani numeri inter se rationem habent compositam ex lateribus.

Sint plani numeri A, B, et ipsius quidem A latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero B ipsi E, Z; dico A ad B rationem habere compositam ex lateribus.

Rationibus enim datis, et ipsâ quam habet Γ ad E, et Δ ad Z, sumantur numeri deinceps minimi in rationibus Γ, E, Δ, Z, ipsi H, Θ, K, ita ut sit ut quidem Γ ad E ita H ad Θ, ut vero Δ ad Z ita Θ ad K. Et ipse Δ ipsum E multiplicans ipsum Λ faciat. Et quoniam Δ ipsum quidem Γ multiplicans ipsum A fecit, ipsum vero E multiplicans ipsum Λ fecit; est igitur ut Γ ad E ita A ad Λ. Ut autem Γ ad E ita H ad Θ;

A, 6. B, 20.
Λ, 12.
Γ, 2. Δ, 3. E, 4. Z, 5.
H, 3. Θ, 6. K, 10.

PROPOSITION V.

Les nombres plans ont entr'eux une raison composée des côtés.

Soient les nombres plans A, B; que Γ, Δ soient les côtés de A, et E, Z les côtés de B; je dis que A a avec B une raison composée des côtés.

La raison de Γ à E, et celle de Δ à Z étant données, soient pris les nombres H, Θ, K qui soient successivement les plus petits dans les raisons de Γ, E, Δ, Z (4. 8), de manière que Γ soit à E comme H est à Θ, et que Δ soit à Z comme Θ est à K. Que Δ multipliant E fasse Λ. Puisque Δ multipliant Γ fait A, et que Δ multipliant E fait Λ, Γ est à E comme A est à Λ (17. 7). Mais

Ως δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Αλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ οὕτως[5] ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ο δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

et ut igitur H ad Θ ita A ad Λ. Rursus, quoniam E ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit, sed autem et ipsum Z multiplicans ipsum B fecit; est igitur ut Δ ad Z ita A ad B. Sed ut Δ ad Z ita Θ ad K; et ut igitur Θ ad K ita A ad B. Ostensum est autem ut H ad Θ ita A ad Λ; ex æquo igitur est ut H ad K ita A ad B. Ipse autem H ad K rationem habet compositam ex lateribus; et A igitur ad B rationem habet compositam ex lateribus. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Εὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ· οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Εστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

PROPOSITIO VI.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur, neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, ipse autem A ipsum B non metiatur; dico neque alium aliquem ullum mensurum esse.

Γ est à E comme H et à Θ; donc H est à Θ comme A est à Λ. De plus, puisque E multipliant Δ fait A, et que E multipliant Z fait B, Δ est à Z comme A est à B. Mais Δ est à Z comme Θ est à K; donc Θ est à K comme A est à B. Mais on a démontré que H est à Θ comme A est à Λ; donc, par égalité, H est à K comme A est à B (14. 7); mais H a avec K une raison composée des côtés; donc A a avec B une raison composée des côtés. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VI.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si le premier ne mesure pas le second, aucun autre n'en mesure un autre.

Soient A, B, Γ, Δ, E tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que A ne mesure pas B; je dis qu'aucun autre n'en mesurera un autre.

Οτι μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσι, φανερόν. Οὐδὲ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείτω ὁ Α τὸν Γ. Καὶ ὅσοι[1] εἰσιν οἱ Α, Β, Γ τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ, οἱ Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Α, Β, Γ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ τῷ πλήθει τῶν Ζ, Η, Θ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Ζ τὸν Η· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Ζ, ἡ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ[2], καί εἰσιν οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ[3]. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ· οὐδὲ ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Et quidem ipsos Α, Β, Γ, Δ, Ε deinceps non se se metiri evidens est. Non enim Α ipsum Β metitur. Dico etiam neque alium aliquem ullum mensurum esse. Si enim possibile, metiatur Α ipsum Γ. Et quot sunt Α, Β, Γ tot sumantur minimi numeri ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ, ipsi Ζ, Η, Θ. Et quoniam Ζ, Η, Θ in eâdem ratione sunt cum ipsis Α, Β, Γ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ multitudini ipsorum Ζ, Η, Θ; ex æquo igitur est ut Α ad Γ ita Ζ ad Θ. Et quoniam est ut Α ad Β ita Ζ ad Η, non metitur autem Α ipsum Β; non metitur igitur et Ζ ipsum Η; non igitur unitas est Ζ, unitas enim omnem numerum metitur, et sunt Ζ, Θ primi inter se; neque Ζ igitur ipsum Θ metitur. Et est ut Ζ ad Θ ita Α ad Γ; neque Α igitur ipsum Γ metitur. Similiter utique ostendemus neque alium aliquem ullum metiri. Quod oportebat ostendere.

Α, 16.	Β, 24.	Γ, 36.	Δ, 54.	Ε, 81.
Ζ, 4.	Η, 6.	Θ, 9.		

Il est certainement évident que les nombres Α, Β, Γ, Δ, Ε ne se mesurent point successivement les uns les autres, puisque Α ne mesure pas Β. Je dis de plus qu'aucun autre n'en mesure un autre; car que Α mesure Γ, si cela est possible. Autant qu'il y a de nombres Α, Β, Γ, autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Β, Γ (35. 7), et que ces nombres soient Ζ, Η, Θ. Puisque les nombres Ζ, Η, Θ sont dans la même raison que Α, Β, Γ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ est la même que la quantité des nombres Ζ, Η, Θ, par égalité Α est à Γ comme Ζ est à Θ (14. 7). Et puisque Α est à Β comme Ζ est à Η, et que Α ne mesure pas Β, Ζ ne mesure pas Η (20. déf. 7); donc Ζ n'est pas l'unité, parce que l'unité mesure tous les nombres (déf. 1. 7); donc Ζ, Θ sont premiers entr'eux; donc Ζ ne mesure pas Θ (déf. 12. 7.). Mais Ζ est à Θ comme Α est à Γ; donc Α ne mesure pas Γ. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'en mesure un autre. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Εὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρεῖ· καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Εστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Εἰ γὰρ οὐ[1] μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει[2]. Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO VII.

Si sint quotcunque numeri deinceps proporportionales, primus autem extremum metiatur, et secundum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, ipse autem Α ipsum Δ metiatur; dico et Α ipsum Β metiri.

Si enim non metitur Α ipsum Β, neque alius aliquis ullum metietur. Metitur autem Α ipsum Δ; metitur igitur et Α ipsum Β. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Εὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς[1] μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

PROPOSITIO VIII.

Si duos inter numeros in continuum proportionales cadant numeri, quot inter eos in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter illos eamdem rationem habentes in continuum proportionales cadent.

PROPOSITION VII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si le premier mesure le dernier, il mesurera le second.

Soient Α, Β, Γ, Δ tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que Α mesure Δ; je dis que Α mesure Β.

Car si Α ne mesure pas Β, aucun autre n'en mesurera un autre (6. 8); mais Α mesure Δ; donc Α mesure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si entre deux nombres tombent des nombres successivement proportionnels, il tombera autant de nombres moyens proportionnels entre deux autres nombres qui ont la même raison que les premiers, qu'il en tombe entre les deux premiers.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Duos enim inter numeros Α, Β in continuum proportionales cadant numeri Γ, Δ, et fiat ut Α ad Β ita Ε ad Ζ; dico quot inter Α, Β in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter Ε, Ζ in continuum proportionales casuros esse numeros.

Α, 2.	Γ, 4.	Δ, 8.	Β, 16.
Η, 1.	Θ, 2.	Κ, 4.	Λ, 8.
Ε, 3.	Μ, 6.	Ν, 12.	Ζ, 24.

Ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ Α, Γ, Δ, Β, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν οἱ[a] ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β, οἱ Η, Θ, Κ, Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Η, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Β, Δ τῷ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ

Quot enim sunt in multitudine ipsi Α, Γ, Δ, Β totidem sumantur minimi numeri eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ, Β, ipsi Η, Θ, Κ, Λ; ergo extremi eorum Η, Λ primi inter se sunt. Et quoniam Α, Γ, Δ, Β cum ipsis Η, Θ, Κ, Λ in eâdem ratione sunt, atque est æqualis multitudo ipsorum Α, Γ, Β, Δ multitudini ipsorum Η, Θ, Κ, Λ; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Η ad Λ. Ut autem Α ad Β ita Ε ad Ζ; et ut igitur Η ad Λ ita Ε ad Ζ. Ipsi autem Η, Λ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri metiuntur æqua-

Qu'entre les deux nombres Α, Β tombent les nombres moyens proportionnels Γ, Δ, et soit fait en sorte que Α soit à Β comme Ε est à Ζ; je dis qu'il tombera entre Ε, Ζ autant de nombres moyens proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers Α, Β.

Autant qu'il y a de nombres Α, Γ, Δ, Β, autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, Β (35. 7); et que ces nombres soient Η, Θ, Κ, Λ; leurs extrêmes Η, Λ seront premiers entr'eux (3. 8). Et puisque les nombres Α, Γ, Δ, Β sont en même raison que Η, Θ, Κ, Λ, et que la quantité des nombres Α, Γ, Β, Δ est égale à la quantité des nombres Η, Θ, Κ, Λ, par égalité Α sera à Β comme Η est à Λ (14. 7). Mais Α est à Β comme Ε est à Ζ; donc Η est à Λ comme Ε est à Ζ. Mais les nombres Η, Λ sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ισάκις ἄρα ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, καὶ ὁ Λ τὸν Ζ· ὁσάκις δὴ[3] ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Κ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν μετρείτω· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Αλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν[4]· οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν[5]· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

liter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. Æqualiter igitur H ipsum E metitur ac Λ ipsum Z. Quoties autem H ipsum E metitur, toties et uterque ipsorum Θ, K utrumque ipsorum M, N metiatur; ipsi H, Θ, K, Λ igitur ipsos E, M, N, Z æqualiter metiuntur; ergo H, Θ, K, Λ cum ipsis E, M, N, Z in eâdem ratione sunt. Sed H, Θ, K, Λ cum ipsis A, Γ, Δ, B in eâdem ratione sunt; ipsi A, Γ, Δ, B igitur cum ipsis E, M, N, Z in eâdem ratione sunt. Ipsi autem A, Γ, Δ, B deinceps proportionales sunt; et E, M, N, Z igitur deinceps proportionales sunt; quot igitur inter A, B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter et ipsos E, Z in continuum proportionales cadent numeri. Quod oportebat ostendere.

petits (23. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit; c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc H mesure E autant de fois que Λ mesure Z. Que les nombres Θ, K mesurent les nombres M, N autant de fois que H mesure E; les nombres H, Θ, K, Λ mesureront également E, M, N, Z; donc les nombres H, Θ, K, Λ sont en même raison que E, M, N, Z (déf. 20. 7). Mais les nombres H, Θ, K, Λ sont en même raison que les nombres A, Γ, Δ, B; donc les nombres A, Γ, Δ, B sont en même raison que E, M, N, Z. Mais les nombres A, Γ, Δ, B sont successivement proportionnels; donc les nombres E, M, N, Z sont successivement proportionnels; donc il tombe entre E, Z autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre A, B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος[1] μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ[2] κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ ἐκκείσθω ἡ Ε μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς[3] μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

PROPOSITIO IX.

Si duo numeri primi inter se sunt, et inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter utrumque ipsorum, et unitatem deinceps in continuum proportionales cadent.

Sint duo numeri primi inter se A, B, et inter ipsos in continuum proportionales cadant Γ, Δ, et exponatur E unitas; dico quot inter A, B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter utrumque A, B et unitatem in continuum proportionales cadere.

A, 8. Γ, 12. Δ, 18. B, 27.
E, 1.
Z, 2. H, 3.
Θ, 4. K, 6. Λ, 9.
M, 8. N, 12. Ξ, 18. O, 27.

PROPOSITION IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et s'il tombe entr'eux des nombres successivement proportionnels, il tombera entre chacun de ces nombres et l'unité autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers nombres.

Soient deux nombres A, B premiers entr'eux, et qu'entre ces deux nombres il tombe les deux nombres successivement proportionnels Γ, Δ; et soit E l'unité; je dis qu'entre chacun des nombres A, B il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre A, B et l'unité.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες, οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β, εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκε, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκε, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκε, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β· ἕκαστος ἄρα τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο ἑκάστῳ τῶν Α, Γ, Δ, Β ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Μ τῷ Α, ὁ δὲ Ο τῷ Β. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν· ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ

Sumantur enim duo quidem numeri minimi Z, H in ipsorum A, Γ, Δ, B ratione existentes, tres vero Θ, K, Λ, et semper deinceps uno plures quoad æqualis fiat multitudo eorum multitudini ipsorum A, Γ, Δ, B; sumantur, et sint M, N, Ξ, O; evidens est utique Z quidem se ipsum multiplicantem ipsum Θ fecisse, multiplicantem vero Θ fecisse M, et H se ipsum quidem multiplicantem fecisse Λ, multiplicantem vero Λ fecisse O. Et quoniam M, N, Ξ, O minimi sunt eamdem rationem habentium cum ipsis Z, H, sunt autem et A, Γ, Δ, B minimi eamdem rationem habentium cum ipsis Z, H, et est æqualis multitudo ipsorum M, N, Ξ, O multitudini ipsorum A, Γ, Δ, B; unusquisque igitur ipsorum M, N, Ξ, O unicuique ipsorum A, Γ, Δ, B æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem M ipsi A, ipse vero O ipsi B. Et quoniam Z se ipsum multiplicans ipsum Θ fecit, ergo Z ipsum Θ metitur per unitates quæ in Z. Metitur autem et E unitas ipsum Z per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur E unitas ipsum Z numerum metitur ac Z ipsum Θ; est igitur ut E

Soient pris les deux plus petits nombres Z, H dans la raison des nombres A, Γ, Δ, B (2. 8); ensuite trois Θ, K, Λ, et toujours successivement un de plus jusqu'à ce que leur quantité soit égale à celle des nombres A, Γ, Δ, B; que ces nombres soient pris, et qu'ils soient M, N, Ξ, O; il est évident que Z se multipliant lui-même a fait Θ, que Z multipliant Θ a fait M, que H se multipliant lui-même a fait Λ, et que H multipliant Λ a fait O (2. 8). Puisque les nombres M, N, Ξ, O sont les plus petits de ceux qui ont la même raison que Z, H, que les nombres A, Γ, Δ, B sont aussi les plus petits de ceux qui ont la même raison que Z, H, et que la quantité des nombres M, N, Ξ, O est égale à celle des nombres A, Γ, Δ, B, chacun des nombres M, N, Ξ, O est égal à chacun des nombres A, Γ, Δ, B; donc M est égal à A et O à B. Et puisque Z se multipliant lui-même a fait Θ, Z mesure Θ par les unités qui sont en Z. Mais l'unité E mesure Z par les unités qui sont en Z; donc l'unité E mesure Z autant de fois que Z mesure Θ; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ (déf. 20. 7). De plus, puisque Z multi-ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ζ[4] τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ[5] μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Θ[6] τὸν Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως

unitas ad Z numerum ita Z ad Θ. Rursus, quoniam Z ipsum Θ multiplicans ipsum M fecit; ergo Θ ipsum M metitur per unitates quæ in Z. Metitur autem et E unitas ipsum Z numerum per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur E unitas ipsum Z numerum metitur ac Θ ipsum M; est igitur ut E unitas ad Z numerum ita Θ ad M. Ostensum est autem et ut E unitas ad Z numerum ita Z ad Θ; et ut igitur E unitas

A, 8. Γ, 12. Δ, 18. B, 27.

E, 1.

Z, 2. H, 3.

Θ, 4. K, 6. Λ, 9.

M, 8. N, 12. Ξ, 18. O, 27.

ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Ισος δὲ ὁ Μ τῷ Α[7]· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Η ἀριθμὸν οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Ε μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ad Z numerum ita Z ad Θ et Θ ad M. Æqualis autem M ipsi A; est igitur ut E unitas ad Z numerum ita Z ad Θ et Θ ad A. Propter eadem utique et ut E unitas ad H numerum ita H ad Λ et Λ ad B; quot igitur inter A, B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter utrumque ipsorum A, B et unitatem E in continuum proportionales cadent numeri. Quod oportebat ostendere.

pliant Θ a fait M, le nombre Θ mesure M par les unités qui sont en Z. Mais l'unité E mesure le nombre Z par les unités qui sont en lui; donc l'unité E mesure Z autant de fois que Θ mesure M; donc l'unité E est au nombre Z comme Θ est à M. Mais on a demontré que l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ, et comme Θ est à M. Mais M égale A; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ, et comme Θ est à A. Par la même raison l'unité E est au nombre H comme H est à Λ, et comme Λ est à B; il tombe donc entre chacun des nombres A, B, et l'unité E, autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre A, B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν[1] καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος[2] μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἵ τε[3] Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

PROPOSITIO X.

Si inter duos numeros et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter utrumque ipsorum et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter ipsos in continuum proportionales cadent.

Duos enim inter numeros Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadant numeri et Δ, Ε et Ζ, Η; dico quot inter utrumque ipsorum Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter Α, Β numeros in continuum proportionales cadere.

Α, 8. Κ, 12. Λ, 18. Β, 27.
Ε, 4. Θ, 6. Η, 9.
Δ, 2. Ζ, 3.
Γ, 1.

Ὁ Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ ποιείτω.

Ipse Δ enim ipsum Ζ multiplicans ipsum Θ faciat, uterque autem ipsorum Δ, Ζ ipsum Θ multiplicans utrumque ipsorum Κ, Λ faciat.

PROPOSITION X.

Si entre deux nombres et l'unité il tombe des nombres successivement proportionnels, il tombe entre les deux premiers nombres autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des premiers et l'unité.

Qu'entre les nombres Α, Β, et l'unité Γ, il tombe les nombres successivement proportionnels Δ, Ε et Ζ, Η; je dis qu'entre Α, Β il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des nombres Α, Β et l'unité Γ.

Car que Δ multipliant Ζ fasse Θ, et que chacun des nombres Δ, Ζ multipliant Θ fasse Κ, Λ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε. Η δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα[4] τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς[5] πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ

Et quoniam est ut Γ unitas ad Δ numerum ita Δ ad E, æqualiter igitur Γ unitas ipsum Δ numerum metitur ac Γ ipsum E. Unitas autem Γ ipsum Δ numerum metitur per unitates quæ in Δ; et Δ igitur ipsum E metitur per unitates quæ in Δ; ergo Δ se ipsum multiplicans ipsum E fecit. Rursus, quoniam est ut Γ unitas ad Δ numerum ita E ad A; æqualiter igitur Γ

A, 8. K, 12. Λ, 18. B, 27.
E, 4. Θ, 6. H, 9.
Δ, 2. Z, 3.
Γ, 1.

καὶ ὁ Ε τὸν Α. Η δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν[6]· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ

unitas ipsum Δ numerum metitur ac E ipsum A. Unitas autem Γ ipsum Δ numerum metitur per unitates quæ in Δ; et E igitur ipsum A metitur per unitates quæ in Δ; ergo Δ ipsum E multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et Z quidem se ipsum multiplicans ipsum H fecit, ipsum vero H multiplicans ipsum B fecit, et quoniam Δ se ipsum quidem multiplicans ipsum E fecit, ipsum autem Z multiplicans ipsum Θ fecit; est igitur ut Δ ad Z ita E ad Θ. Propter eadem et ut Δ ad Z ita Θ ad H. Et ut igitur E ad Θ ita Θ ad H.

Puisque l'unité Γ est au nombre Δ comme Δ est à E, l'unité Γ mesure le nombre Δ autant de fois que Δ mesure E. Mais l'unité Γ mesure le nombre Δ par les unités qui sont en Δ; donc Δ mesure E par les unités qui sont en Δ; donc Δ se multipliant lui-même fait E. De plus, puisque l'unité Γ est au nombre Δ comme E est à A, l'unité Γ mesure le nombre Δ autant de fois que E mesure A. Mais l'unité Γ mesure le nombre Δ par les unités qui sont en Δ; donc E mesure A par les unités qui sont en Δ; donc Δ multipliant E fait A. Par la même raison Z se multipliant lui-même fait H, et Z multipliant H fait B. Mais Δ se multipliant lui-même fait E, et Δ multipliant Z fait Θ; donc Δ est à Z comme E est à Θ (17. 7). Par la même raison Δ est à Z comme Θ est à H; donc E est à Θ comme Θ est à H.

οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ετι ἐπεὶ ὁ Ζ ἑκάτερον τῶν Η, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Κ, καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα κατὰ τὸ συνεχὲς ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum E, Θ multiplicans utrumque ipsorum A, K fecit; est igitur ut E ad Θ ita A ad K. Sed ut E ad Θ ita Δ ad Z; et ut igitur Δ ad Z ita A ad K. Rursus, quoniam uterque ipsorum Δ, Z ipsum Θ multiplicans utrumque ipsorum K, Λ fecit; est igitur ut Δ ad Z ita K ad Λ. Sed ut Δ ad Z ita A ad K; et ut igitur A ad K ita K ad Λ. Præterea, quoniam Z utrumque ipsorum H, Θ multiplicans utrumque ipsorum Λ, B fecit; est igitur ut Θ ad H ita Λ ad B. Ut autem Θ ad H ita Δ ad Z; et ut igitur Δ ad Z ita Λ ad B. Ostensum est autem et ut Δ ad Z ita A ad K, et K ad Λ; et ut igitur A ad K ita K ad Λ, et Λ ad B; ipsi A, K, Λ, B igitur in continuum deinceps sunt proportionales; quot igitur inter utrumque ipsorum A, B et Γ unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter A, B in continuum proportionales cadent. Quod oportebat ostendere.

De plus, puisque le nombre Δ multipliant les nombres E, Θ fait les nombres A, K, le nombre E est à Θ comme A est K (17. 7). Mais E est à Θ comme Δ est à Z; donc Δ est à Z comme A est à K. De plus, puisque les nombres Δ, Z multipliant Θ font les nombres K, Λ, le nombre Δ est à Z comme K est à Λ (18. 7). Mais Δ est à Z comme A est à K; donc A est à K comme K est à Λ. De plus, puisque le nombre Z multipliant les nombres H, Θ fait les nombres Λ, B, le nombre Θ est à H comme Λ est à B. Mais Θ est à H comme Δ est à Z; donc Δ est à Z comme Λ est à B. Mais il a été démontré que Δ est à Z comme A est à K, comme K est à Λ; donc A est à K comme K est à Λ, et comme Λ est à B; donc les nombres A, K, Λ, B sont successivement proportionnels; donc entre A, B il tombe autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre les nombres A, B et l'unité Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Εστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

PROPOSITIO XI.

Duorum quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum duplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

Sint quadrati numeri A, B, et ipsius quidem A latus sit Γ, ipsius vero B ipse Δ; dico ipsorum A, B unum medium proportionalem esse numerum, et A ad B duplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ.

A, 4. E, 6. B, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν[1] ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἔστιν ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς

Ipse Γ enim Δ multiplicans ipsum E faciat. Et quoniam quadratus est A, latus autem ipsius est Γ; ergo Γ se ipsum multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et Δ se ipsum multiplicans ipsum B fecit; quoniam igitur Γ utrumque ipsorum Γ, Δ multiplicans utrumque ipsorum A, E fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita A ad E. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita E ad

PROPOSITION XI.

Entre deux nombres quarrés, il y a un nombre moyen proportionnel, et le quarré est au quarré en raison double de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres quarrés A, B; que le côté de A soit Γ, et que le côté de B soit Δ; je dis qu'il y a un nombre moyen proportionnel entre A et B, et que A a avec B une raison double de celle que Γ a avec Δ.

Car que Γ multipliant Δ fasse E. Puisque A est un nombre quarré, et que son côté est Γ, le nombre Γ se multipliant lui-même fait A (déf. 18. 7). Par la même raison le nombre Δ se multipliant lui-même fait B; donc puisque Γ multipliant l'un et l'autre nombre Γ, Δ fait l'un et l'autre nombre A, E, le nombre Γ est à Δ comme A est à E (17. 7). Par la même raison Γ est à Δ comme E τὸν B[2]· καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν E οὕτως ὁ E πρὸς τὸν B. Τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ E[3].

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Επεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ A, E, B· ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ A πρὸς τὸν E. Ως δὲ ὁ A πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πλευρὰ πρὸς τὴν Δ πλευράν[4]. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

B; et ut igitur A ad E ita E ad B. Ipsorum A, B igitur unus medius proportionalis est numerus E.

Dico etiam et A ad B duplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt A, E, B; ergo A ad B duplam rationem habet ejus quam A ad E. Ut autem A ad E ita Γ ad Δ; ergo A ad B duplam rationem habet ejus quam Γ latus ad Δ latus. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϐ.

Δύο κύϐων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύϐος πρὸς τὸν κύϐον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

PROPOSITIO XII.

Duorum cuborum duo medii proportionales sunt numeri, et cubus ad cubum triplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

A, 8. Θ, 12. K, 18. B, 27.
E, 4. Z, 6. H, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Εστωσαν κύϐοι ἀριθμοὶ, οἱ A, B, καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ B ὁ Δ· λέγω ὅτι

Sint cubi numeri A, B, et ipsius quidem A latus sit Γ, ipsius vero B ipse Δ; dico ip-

est à B; donc A est à E comme E est à B; donc le nombre E est moyen proportionnel entre A, B.

Je dis aussi que A a avec B une raison double de celle que Γ a avec Δ. Car puisque les trois nombres A, E, B sont proportionnels, le nombre A a avec B une raison double de celle que A a avec E. Mais A est à E comme Γ est à Δ; donc A a avec B une raison double de celle que le côté Γ a avec le côté Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionnels, et le cube a avec le cube une raison triple de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres cubes A, B, et que Γ soit le côté de A, et Δ le côté de B; je τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ο γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω.

sorum Α, Β duos medios proportionales esse numeros, et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ.

Ipse enim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε faciat, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat, uterque vero ipsorum Γ, Δ ipsum Ζ multiplicans utrumque ipsorum Θ, Κ faciat.

Α, 8. Θ, 12. Κ, 18. Β, 27.
Ε, 4. Ζ, 6. Η, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ· καὶ ὁ Γ[1] ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε[2], τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ ~~Γ ἑκάτερον~~ τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Θ πε-

Et quoniam cubus est Α, latus autem ipsius ipse Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Ε fecit; ergo Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Δ se ipsum quidem multiplicans ipsum Η fecit, ipsum vero Η multiplicans ipsum Β fecit. Et quoniam Γ utrumque ipsorum Γ, Δ multiplicans utrumque ipsorum Ε, Ζ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita Ζ ad Η. Rursus, quoniam Γ utrumque ipsorum Ε, Ζ multiplicans utrumque ipsorum Α, Θ fecit; est igitur ut Ε

dis qu'il y a deux nombres moyens proportionnels entre Α, Β, et que Α a avec Β une raison triple de celle que le côté Γ a avec le côté Δ.

Car que le côté Γ se multipliant lui-même fasse Ε, que Γ multipliant Δ fasse Ζ, que Δ se multipliant lui-même fasse Η, et que les nombres Γ, Δ multipliant Ζ fassent les nombres Θ, Κ.

Puisque Α est un cube, que son côté est Γ, et que Γ se multipliant lui-même a fait Ε, le nombre Γ se multipliant lui-même fera Ε, et Γ multipliant Ε fera Α (déf. 19. 7). Par la même raison, Δ se multipliant lui-même fait Η, et Δ multipliant Η fait Β. Et puisque Γ multipliant les nombres Γ, Δ a fait les nombres Ε, Ζ, le nombre Γ est à Δ comme Δ est à Ζ (17. 7). Par la même raison, Γ est à Δ comme Ζ est à Η De plus, puisque Γ multipliant les nombres Ε, Ζ fait les πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἐπεὶ[3] ἑκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Θ[4] καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Θ, Κ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Θ, Κ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα[5] πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ad Z ita A ad Θ. Ut autem E ad Z ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita A ad Θ. Rursus, quoniam uterque ipsorum Γ, Δ ipsum Z multiplicans utrumque ipsorum Θ, K fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Θ ad K. Rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum Z, H multiplicans utrumque ipsorum K, B fecit; est igitur ut Z ad H ita K ad B. Ut autem Z ad H ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita K ad B. Ostensum autem est et ut Γ ad Δ ita et A ad Θ, et Θ ad K, et K ad B; ipsorum A, B igitur duo medii proportionales sunt numeri Θ, K.

Dico etiam et A ad B triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ. Quoniam enim quatuor numeri A, Θ, K, B proportionales sunt; ergo A ad B triplam rationem habet ejus quam A ad Θ. Ut autem A ad Θ ita Γ ad Δ; et A igitur ad B triplam rationem habet ejus quam Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

nombres A, Θ, le nombre E est à Z comme A est à Θ. Mais E est à Z comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme A est à Θ. De plus, puisque les nombres Γ, Δ multipliant Z ont fait les nombres Θ, K; le nombre Γ est à Δ comme Θ est à K (18. 7). De plus, puisque Δ multipliant les nombres Z, H fait les nombres K, B, le nombre Z est à H comme K est à B. Mais Z est à H comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme K est à B. Mais il a été démontré que Γ est à Δ comme A est à Θ, comme Θ est à K, et comme K est à B; donc entre A, B il y a deux nombres moyens proportionnels Θ, K.

Je dis aussi que A a avec B une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Car puisque les quatre nombres A, Θ, K, B sont proportionnels, A aura avec B une raison triple de celle que A a avec Θ. Mais A est à Θ comme Γ est à Δ; donc A a avec B une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ αἰεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Εστωσαν ὁποιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς[1] ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἵ τε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.

PROPOSITIO XIII.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et se ipsum multiplicans unusquisque faciat aliquos, facti ex ipsis proportionales erunt; et si ipsi a principio, factos multiplicantes faciant aliquos, et ipsi proportionales erunt, et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ, et ipsi Α, Β, Γ se ipsos quidem multiplicantes ipsos Δ, Ε, Ζ faciant, ipsos vero Δ, Ε, Ζ multiplicantes ipsos Η, Θ, Κ faciant; dico et ipsos Δ, Ε, Ζ et ipsos Η, Θ, Κ deinceps proportionales esse.

		Α, 2.	Β, 4.	Γ, 8.		
	Δ, 4.	Λ, 8.	Ε, 16.	Ξ, 32.	Ζ, 64.	
Η, 8.	Μ, 16.	Ν, 32.	Θ, 64.	Ο, 128.	Π, 256.	Κ, 512.

Ο μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω· ἑκάτερος δὲ τῶν Α, Β τὸν Λ πολλαπλα-

Etenim Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Λ faciat; uterque vero ipsorum Α, Β

PROPOSITION XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si chacun de ces nombres se multipliant lui-même fait certains nombres, les nombres produits seront proportionnels; et si les premiers nombres multipliant les nombres produits font certains nombres, ceux-ci seront encore proportionnels, et cela arrivera toujours aux derniers produits.

Soient Α, Β, Γ tant de nombres proportionnels qu'on voudra, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; que les nombres Α, Β, Γ se multipliant eux-mêmes fassent Δ, Ε, Ζ, et que ces mêmes nombres multipliant Δ, Ε, Ζ fassent Η, Θ, Κ; je dis que les nombres Δ, Ε, Ζ, ainsi que Η, Θ, Κ, sont successivement proportionnels.

Car que Α multipliant Β fasse Λ; que les nombres Α, Β multipliant Λ fassent σιάσας ἑκάτερον τῶν Μ, Ν ποιείτω. Καὶ πάλιν, ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ο, Π ποιείτω.

Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι οἱ Δ, Λ, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον[2] ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον[3] ἐν τῷ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ λόγῳ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Λ, Ε ἄρα τοῖς Ε, Ξ, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔτι οἱ Η, Μ, Ν, Θ τοῖς Θ, Ο, Π, Κ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν[4] Δ, Λ, Ε πλῆθος τῷ τῶν Ε, Ξ, Ζ πλήθει. Τὸ δὲ τῶν Η, Μ, Ν, Θ τῷ τῶν Θ, Ο, Π, Κ· καὶ[5] διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsum A multiplicans utrumque ipsorum M, N faciat. Et rursus B quidem ipsum Γ multiplicans ipsum Ξ faciat, uterque vero ipsorum B, Γ ipsum Ξ multiplicans utrumque ipsorum O, Π faciat.

Congruenter utique præcedentibus ostendemus ipsos Δ, Λ, E et ipsos H, M, N, Θ deinceps esse proportionales in ratione ipsius A ad B, et adhuc ipsos E, Ξ, Z et ipsos Θ, O, Π, K deinceps esse proportionales in ratione ipsius B ad Γ. Atque est ut A ad B ita B ad Γ; et Δ, Λ, E igitur in eâdem ratione sunt in quâ E, Ξ, Z et adhuc ipsi H, M, N, Θ in quâ ipsi Θ, O, Π, K. Et est æqualis quidem ipsorum Δ, Λ, E multitudo ipsorum E, Ξ, Z multitudini. Ipsorum vero H, M, N, Θ multitudo ipsorum Θ, O, Π, K multitudini; et ex æquo igitur est ut quidem Δ ad E ita E ad Z, ut vero H ad Θ ita Θ ad K. Quod oportebat ostendere.

M, N; et de plus, que B multipliant Γ fasse Ξ, et que les nombres B, Γ multipliant Ξ fassent O, Π.

Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que les nombres Δ, Λ, E et H, M, N, Θ sont successivement proportionnels dans la raison de A à B, que les nombres E, Ξ, Z et Θ, O, Π, K sont aussi successivement proportionnels dans la raison de B à Γ. Mais A est à B comme B est à Γ; donc les nombres Δ, Λ, E sont en même raison que les nombres E, Ξ, Z, et les nombres H, M, N, Θ en même raison que les nombres Θ, O, Π, K. Mais la quantité des nombres Δ, Λ, E est égale à la quantité des nombres E, Ξ, Z; et la quantité des nombres H, M, N, Θ est égale à la quantité des nombres Θ, O, Π, K; donc par égalité Δ est à E comme E est à Z, et H est à Θ comme Θ est à K (14. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Εὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Εστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν[1] οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

PROPOSITIO XIV.

Si quadratus quadratum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri Α, Β, latera autem eorum sint ipsi Γ, Δ, ipse vero Α ipsum Β metiatur; dico et Γ ipsum Δ metiri.

Α, 4. Ε, 8. Β, 16.
Γ, 2. Δ, 4.

Ο Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω· οἱ Α, Ε, Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ[2].

Αλλὰ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ[3]· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς[4] ἀνάλογόν εἰσιν

Ipse Γ enim ipsum Δ multiplicans ipsum Ε faciat; ipsi Α, Ε, Β igitur deinceps proportionales sunt in ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam Α, Ε, Β deinceps proportionales sunt, et metitur Α ipsum Β; metitur igitur et Α ipsum Ε. Atque est ut Α ad Ε ita Γ ad Δ; ergo metitur et Γ ipsum Δ.

Sed et metiatur Γ ipsum Δ; dico et Α ipsum Β metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus Α, Ε, Β deinceps proportionales esse in

PROPOSITION XIV.

Si un nombre quarré mesure un nombre quarré, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le quarré mesurera le quarré.

Soient les nombres quarrés Α, Β; que Γ, Δ soient leurs côtés; que Α mesure Β; je dis que Γ mesure Δ.

Car que Γ multipliant Δ fasse Ε, les nombres Α, Ε, Β seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ; et puisque Α, Ε, Β sont successivement proportionnels, et que Α mesure Β, Α mesurera Ε (7. 8). Mais Α est à Ε comme Γ est à Δ; donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7).

Mais que Γ mesure Δ; je dis que Α mesure Β.

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε[5]. Καί εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. Εὰν ἄρα τετράγωνος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam est ut Γ ad Δ ita A ad E, metitur autem Γ ipsum Δ; ergo metitur A ipsum E. Et sunt A, E, B deinceps proportionales; ergo metitur et A ipsum B. Si igitur quadratus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν[1] τὸν Β μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ[2].

PROPOSITIO XV.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, et cubus cubum metietur.

Cubus enim numerus A cubum numerum B metiatur, et ipsius quidem A latus sit Γ, ipsius vero B ipse Δ; dico Γ ipsum Δ metiri.

A, 8. Θ, 16. K, 32. B, 64.
E, 4. Z, 8. H, 16.
Γ, 2. Δ, 4.

Ο Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας

Etenim Γ se ipsum multiplicans ipsum E faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum H faciat, et adhuc Γ ipsum Δ multiplicans

A, E, B sont successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ. Et puisque Γ est à Δ comme A est à E, et que Γ mesure Δ, A mesurera E. Mais A, E, B sont successivement proportionnels; donc A mesure B; donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le cube mesurera le cube.

Car que le nombre cube A mesure le nombre cube B; que Γ soit le côté de A et Δ le côté de B; je dis que Γ mesure Δ.

Que Γ se multipliant lui-même fasse E; que Δ se multipliant lui-même fasse H;

τὸν Ζ[3], ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω. Φανερὸν δὴ[4] ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η καὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ· καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

ipsum Z, uterque vero ipsorum Γ, Δ ipsum Z multiplicans utrumque ipsorum Θ, K faciat. Evidens utique est ipsos E, Z, H et A, Θ, K, B deinceps proportionales esse in ipsius Γ ad Δ ratione; et quoniam A, Θ, K, B deinceps proportionales sunt, et metitur A ipsum B; ergo metitur et ipsum Θ. Atque est ut A ad Θ ita Γ ad Δ; metitur igitur et Γ ipsum Δ.

A, 8. Θ, 16. K, 32. B, 64.

E, 4. Z, 8. H, 16.

Γ, 2. Δ, 4.

Ἀλλὰ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ[5] ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Θ μετρεῖ· ὥς τε καὶ τὸν Β μετρεῖ ὁ Α. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sed et metiatur Γ ipsum Δ; dico et A ipsum B mensurum esse.

Iisdem enim constructis, similiter utique ostendemus A, Θ, K, B deinceps proportionales esse in ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam Γ ipsum Δ metitur, estque ut Γ ad Δ ita A ad Θ; et A igitur ipsum Θ metitur; quare et ipsum B metitur ipse A. Quod oportebat ostendere.

que Γ multipliant Δ fasse Z, et que les nombres Γ, Δ multipliant Z fassent Θ, K. Il est évident que les nombres E, Z, H et A, Θ, K, B seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ; et puisque A, Θ, K, B sont successivement proportionnels, et que A mesure B, A mesurera Θ (7. 8). Mais A est à Θ comme Γ est à Δ; donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7).

Mais que Γ mesure Δ, je dis que A mesurera B.

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que les nombres A, Θ, K, B sont successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ. Et puisque Γ mesure Δ, et que Γ est à Δ comme A est à Θ, A mesurera Θ; donc A mesure B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδ'[1] ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ[2] οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν[3] οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Β· λέγω[4] ὅτι οὐδ' ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ[5].

PROPOSITIO XVI.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A, B, latera autem ipsorum sint Γ, Δ, et non metiatur A ipsum B; dico neque Γ ipsum Δ metiri.

Α, 9.	Β, 16.
Γ, 3.	Δ, 4.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω[6] πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ[7]. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, metietur et A ipsum B. Non metitur autem A ipsum B; neque igitur Γ ipsum Δ metietur.

Non metiatur rursus Γ ipsum Δ; dico neque A ipsum B mensurum esse.

Si enim metitur A ipsum B, metietur et Γ ipsum Δ. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur A ipsum B metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVI.

Si un nombre quarré ne mesure pas un nombre quarré, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le quarré ne mesurera pas le quarré.

Soient les nombres quarrés A, B, que Γ, Δ en soient les côtés, et que A ne mesure pas B; je dis que Γ ne mesure pas Δ.

Car si Γ mesure Δ, A mesurera B (14. 8). Mais A ne mesure pas B; donc Γ ne mesurera pas Δ.

De plus, que Γ ne mesure pas Δ; je dis que A ne mesurera pas B.

Car si A mesure B, Γ mesurera Δ (14. 8). Mais Γ ne mesure pas Δ; donc A ne mesurera pas B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδ' ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XVII.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque cubus cubum metietur.

Cubus enim numerus A cubum numerum ipsum B non metiatur, et ipsius quidem A latus sit Γ, ipsius verò B ipse Δ; dico Γ ipsum Δ non mensurum esse.

Α, 8.	Β, 27.
Γ, 2.	Δ, 3.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, et A ipsum B metietur. Non metitur autem A ipsum B; neque igitur Γ ipsum Δ metitur.

Sed et non metiatur Γ ipsum Δ; dico neque A ipsum B mensurum esse.

Si enim A ipsum B metiatur, et Γ ipsum Δ metietur. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur A ipsum B metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVII.

Si un nombre cube ne mesure pas un nombre cube, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le cube ne mesurera pas le cube.

Que le nombre cube A ne mesure pas le nombre cube B, et que Γ soit le côté de A, et Δ le côté de B; je dis que Γ ne mesurera pas Δ.

Car si Γ mesure Δ, A mesurera B (15. 8.) Mais A ne mesure pas B; donc Γ ne mesure pas Δ.

Mais que Γ ne mesure pas Δ; je dis que A ne mesurera pas B.

Car si A mesure B, Γ mesurera Δ (15. 8). Mais Γ ne mesure pas Δ; donc A ne mesurera pas B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι[1] οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω οὖν ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· τουτέστιν ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον[2].

PROPOSITIO XVIII.

Duorum similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus; et planus ad planum duplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

Sint duo numeri similes plani Α, Β, et ipsius quidem Α latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero Β ipsi Ε, Ζ. Et quoniam similes plani sunt qui proportionalia habent latera, est igitur ut Γ ad Δ ita E ad Ζ. Dico igitur ipsorum Α, Β unum medium proportionalem esse numerum, et Α ad Β duplam rationem habere ejus quam Γ ad Ε, vel Δ ad Ζ, hoc est ejus quam latus homologum ad homologum.

Α, 6.	Η, 12.	Β, 24.	
Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 4.	Ζ, 6.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως[3] ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ἐπεὶ ἐπί-

Et quoniam est ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; alterne igitur est ut Γ ad Ε ita Δ ad Ζ. Et quo-

PROPOSITION XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a un nombre moyen proportionnel, et le nombre plan a avec le nombre plan une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient les deux nombres plans semblables Α, Β, que les nombres Γ, Δ soient les côtés de Α, et Ε, Ζ les côtés de Β. Puisque les nombres plans semblables ont leurs côtés proportionnels, Γ est à Δ comme Ε est Ζ (déf. 21. 7); et je dis qu'entre Α, Β il y a un nombre moyen proportionnel, et que Α a avec Β une raison double de celle que Γ a avec Ε, ou de celle que Δ a avec Ζ, c'est-à-dire de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Puisque Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, par permutation Γ est à Ε comme Δ est πεδός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ, Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Ο Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν[4] Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Αλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως[5] ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν μὲν[6] Δ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Η, Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

niam planus est A, latera autem ipsius ipsi Γ, Δ; ergo Δ ipsum Γ multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et E ipsum Z multiplicans ipsum B fecit. Ipse Δ utique ipsum E multiplicans ipsum H faciat. Et quoniam Δ ipsum Γ quidem multiplicans ipsum A fecit, ipsum vero E multiplicans ipsum H fecit; est igitur ut Γ ad E ita A ad H. Sed ut Γ ad E ita Δ ad Z; et ut igitur Δ ad Z ita A ad H. Rursus, quoniam E ipsum quidem Δ multiplicans ipsum H fecit; ipsum vero Z multiplicans ipsum B fecit; est igitur ut Δ ad Z ita H ad B. Ostensum est autem et ut Δ ad Z ita A ad H; et ut igitur A ad H ita H ad B; ergo A, H, B deinceps proportionales sunt; ipsorum A, B igitur unus medius proportionalis est numerus.

A, 6. H, 12. B, 24.
Γ, 2. Δ, 3. E, 4. Z, 6.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Επεὶ γὰρ οἱ Α, Η, Β ἑξῆς

Dico etiam et A ad B duplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam Γ ad E vel Δ ad Z. Quoniam enim A, H, B deinceps proportionales

à Z (13. 7). Et puisque A est un nombre plan, et que Γ, Δ en sont les côtés, Δ multipliant Γ fera A. Par la même raison E multipliant Z fera B. Que Δ multipliant E fasse H. Puisque Δ multipliant Γ fait A, et que Δ multipliant E fait H, Γ est à E comme A est à H (17. 7). Mais Γ est à E comme Δ est à Z; donc Δ est à Z comme A est à H. De plus, puisque E multipliant Δ fait H, et que E multipliant Z fait B, Δ est à Z comme H est à B. Mais on a démontré que Δ est à Z comme A est à H; donc A est à H comme H est à B; donc A, H, B sont successivement proportionnels; donc il y a un nombre moyen proportionnel entre A et B.

Je dis que A a avec B une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que Γ a avec E ou de celle que Δ a avec Z. Car puisque les nombres A, H, B sont successivement proportionnels, A a avec B ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

sunt, A ad B duplam rationem habet ejus quam ad H. Atque est ut A ad H ita et Γ ad E et Δ ad Z; et A igitur ad B duplam rationem habet ejus quam et Γ ad E vel Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

PROPOSITIO XIX.

Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt numeri; et solidus ad similem solidum triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

A, 30. N, 60. Ξ, 120. B, 240.

K, 6. M, 12. Λ, 24.

Γ, 2. Δ, 3. E, 5. Z, 4. H, 6. Θ, 10.

Εστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς

Sint duo similes solidi A, B, et ipsius quidem A latera sint Γ, Δ, E, ipsius vero B ipsi Z, H, Θ. Et quoniam similes solidi sunt qui proportionalia habent latera; est igitur ut Γ quidem ad

une raison double de celle que A a avec H. Mais A est à H comme Γ est à E, et comme Δ est à Z; donc A a avec B une raison double de celle que Γ a avec E, ou de celle que Δ a avec Z. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Entre deux nombres solides semblables il y a deux nombres moyens proportionnels; et un nombre solide a avec un nombre solide semblable une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient A, B deux nombres solides semblables; que Γ, Δ, E soient les côtés de A, et Z, H, Θ les côtés de B. Puisque les nombres solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés homologues proportionnels (déf. 21. 7), Γ est à Δ comme Z à H, μὲν ὁ[1] Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· Λέγω ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

Δ ita Z ad H, ut vero Δ ad E ita H ad Θ. Dico inter ipsos A, B duos medios proportionales cadere numeros, et A ad B triplam rationem habere ejus quam Γ ad Z et Δ ad H et adhuc E ad Θ.

A, 30. N, 60. Ξ, 120. B, 240.

K, 6. M, 12. Λ, 24.

Γ, 2. Δ, 3. E, 5. Z, 4. H, 6. Θ, 10.

Ὁ Γ γὰρ τὸν μὲν[2] Δ πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω, ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Ζ, Η ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ, Η ὁ Λ· οἱ Κ, Λ ἄρα[3] ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Κ, Λ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. Ἔστω ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη[4]. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Κ πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως[5] ὁ Μ πρὸς τὸν Λ· οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν[6] ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ

Etenim Γ ipsum Δ multiplicans ipsum K faciat, ipse vero Z ipsum H multiplicans ipsum Λ faciat. Et quoniam Γ, Δ cum ipsis Z, H in eâdem ratione sunt, et ex quidem ipsis Γ, Δ est K, ex ipsis vero Z, H ipse Λ; ergo K, Λ similes plani sunt numeri; ipsorum K, Λ igitur unus medius proportionalis est numerus. Sit M; ergo M est ex ipsis Δ, Z ut in præcedenti theoremate ostensum est. Et quoniam Δ ipsum quidem Γ multiplicans ipsum K fecit, ipsum vero Z multiplicans ipsum M fecit; est igitur ut Γ ad Z ita K ad M. Sed ut K ad M ita M ad Λ; ipsi K, M, Λ igitur deinceps sunt proportionales in ipsius Γ ad Z ratione. Et quoniam est ut Γ

et Δ est à E comme H est à Θ; je dis qu'entre les nombres A, B il y a deux moyens proportionnels, et que A a avec B une raison triple de celle que Γ a avec Z, de celle que Δ a avec H, et de celle que E a avec Θ.

Car que Γ multipliant Δ fasse K, et que Z multipliant H fasse Λ. Puisque Γ, Δ sont en même raison que Z, H; que K est le produit de Γ par Δ, et Λ le produit de Z par H, les nombres K, Λ sont des nombres plans semblables; il y a donc entre K et Λ un nombre moyen proportionnel (18. 8). Qu'il soit M; le nombre M sera le produit de Δ par Z, ainsi qu'on l'a démontré dans le théorème précédent. Puisque Δ multipliant Γ fait K, et que Δ multipliant Z fait M, le nombre Γ est à Z comme K est à M (17. 7). Mais K est à M comme M est à Λ; les nombres K, M, Λ sont donc successivement proportionnels dans la raison de λόγῳ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ[7]· οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον[8] ἔν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ[9] καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ[10]. Εκάτερος δὴ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ, Δ, Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ τὸν Λ πολλαπλασιάσας[11] τὸν Β πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Ως δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ[12] ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν,

ad Δ ita Z ad H; alterne igitur est ut Γ ad Z ita Δ ad H. Rursus, quoniam est ut Δ ad E ita H ad Θ; alterne igitur est ut Δ ad H ita E ad Θ; ipsi K, M, Λ igitur deinceps sunt proportionales et in ipsius Γ ad Z ratione et in ipsius Δ ad H et adhuc in ipsius E ad Θ. Uterque autem ipsorum E, Θ ipsum M multiplicans utrumque ipsorum N, Ξ faciat. Et quoniam solidus est A, latera autem ipsius sunt Γ, Δ, E; ergo E ipsum ex Γ, Δ multiplicans ipsum A fecit; ipse autem ex Γ, Δ est K; ergo E ipsum K multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et Θ ipsum Λ multiplicans ipsum B fecit. Et quoniam E ipsum K multiplicans ipsum A fecit; sed quidem et ipsum M multiplicans ipsum N fecit; est igitur ut K ad M ita A ad N. Ut autem K ad M ita et Γ ad Z et Δ ad H et adhuc E ad Θ; et ut igitur Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ ita A ad N. Rursus, quoniam uterque ipsorum E, Θ ipsum M multiplicans utrum-

Γ à Z. Et puisque Γ est à Δ comme Z est à H, par permutation Γ est à Z comme Δ est à H (13. 7). De plus, puisque Δ est à E comme H est à Θ, par permutation Δ est à H comme E est à Θ (13. 7); les nombres K, M, Λ sont donc successivement proportionnels dans la raison de Γ à Z, de Δ à H, et de E à Θ. Que les nombres E, Θ multipliant M fassent N, Ξ. Puisque A est un nombre solide, et que ses côtés sont Γ, Δ, E, le nombre E multipliant le produit de Γ par Δ fera A; mais le produit de Γ par Δ est K; donc E multipliant K fait A. Par la même raison, Θ multipliant Λ fait B. Et puisque E multipliant K fait A, et que E multipliant M fait N, K est à M comme A est à N (17. 7). Mais K est à M comme Γ est à Z, comme Δ est à H, et comme E est à Θ; donc Γ est à Z, et Δ à H, et E à Θ, comme A est à N. De plus, puisque les nombres E, Θ multipliant M font N, Ξ, le nombre E est

Ξ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς[13] ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὅ, τε[14] ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ· οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

que ipsorum N, Ξ fecit; est igitur ut E ad Θ ita N ad Ξ. Sed ut E ad Θ ita et Γ ad Z et Δ ad H; est igitur ut Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ ita et A ad N et N ad Ξ. Rursus, quoniam Θ ipsum M multiplicans ipsum Ξ fecit, sed etiam et ipsum Λ multiplicans ipsum B fecit; est igitur ut M ad Λ ita Ξ ad B. Sed ut M ad Λ ita et Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ; et igitur ut Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ ita non solum Ξ ad B sed et A ad N et N ad Ξ; ipsi A, N, Ξ, B igitur deinceps sunt proportionales in dictis laterum rationibus.

A, 30. N, 60. Ξ, 120. B, 240.

K, 6. M, 12. Λ, 24.

Γ, 2. Δ, 3. E, 5. Z, 4. H, 6. Θ, 10.

Λέγω ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς

Dico et A ad B triplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam habet Γ numerus ad Z, vel Δ ad H et adhuc E ad Θ. Quoniam enim quatuor numeri deinceps proportionales sunt A, N, Ξ,

à Θ comme N est à Ξ. Mais E est à Θ comme Γ est à Z, et comme Δ est à H; donc Γ est à Z, Δ à H, et E à Θ, comme A est à N, et comme N est à Ξ. De plus, puisque Θ multipliant M fait Ξ, et que Θ multipliant Λ fait B, M est à Λ comme Ξ est à B. Mais M est à Λ comme Γ est à Z, comme Δ est à H, et comme E est à Θ; donc Γ est à Z, Δ à H, et E à Θ, non seulement comme Ξ est à B, mais encore comme A est à N, et comme N est à Ξ; les nombres A, N, Ξ, B sont donc successivement proportionnels dans lesdites raisons des côtés.

Je dis aussi que A a avec B une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre Γ a avec Z, ou de celle que Δ a avec H, et encore de celle que E a avec Θ. Car puisque ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ν, Ξ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν οὕτως ἐδείχθη ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

B; ergo A ad B triplam rationem habet ejus quam A ad N. Sed ut A ad N ita ostensum est et Γ ad Z et Δ ad H et adhuc E ad Θ; et A igitur ad B triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam Γ numerus ad Z et Δ ad H et adhuc E ad Θ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμὸς, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ[1] ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

PROPOSITIO XX.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus, similes plani erunt numeri.

Inter duos enim numeros A, B unus medius proportionalis cadat numerus Γ; dico ipsos A, B similes planos esse numeros.

A, 8. Γ, 12. B, 18.
Δ, 2. E, 3. Z, 4. H, 6.

Εἰλήφθωσαν γὰρ[2] ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, οἱ Δ, Ε· ἔστιν

Sumantur enim Δ, E minimi numeri ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis A, Γ;

les quatre nombres A, N, Ξ, B sont successivement proportionnels, le nombre A a avec B une raison triple de celle que A a avec N. Mais on a démontré que A est à N comme Γ est à Z, comme Δ est à H, et comme E est à Θ; donc A a avec B une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre Γ a avec Z, de celle que Δ a avec H, et de celle que E a avec Θ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si entre deux nombres il tombe un nombre moyen proportionnel, ces nombres seront des plans semblables.

Car qu'entre les deux nombres A, B il tombe un moyen proportionnel Γ; je dis que les nombres A, B sont des plans semblables.

Car prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. Ως δὴ ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β[3]· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ. Οσάκις δὴ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν[4]· ὥς τε ὁ Α ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ, Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ, Ε ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Β. Οσάκις δὲ[5] ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η· καὶ[6] ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Η μονάδας· ὁ Η ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Ε, Η· οἱ Α, Β ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. Επεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε· τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς

est igitur Δ ad E ita A ad Γ. Ut autem A ad Γ ita Γ ad B; æqualiter igitur Δ ipsum A metitur ac E ipsum Γ. Quoties autem Δ ipsum A metitur, tot unitates sint in Z; ergo Z ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit, ipsum autem E multiplicans ipsum Γ fecit; quare A planus est, latera vero ipsius Δ, Z. Rursus, quoniam Δ, E minimi sunt ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis Γ, B; æqualiter igitur Δ ipsum Γ metitur ac E ipsum B. Quoties autem E ipsum B metitur, tot unitates sint in H; ergo E ipsum B metitur per unitates quæ in H; ergo H ipsum E multiplicans ipsum B fecit; ergo B planus est, latera vero ipsius sunt ipsi E, H; ergo A, B plani sunt numeri. Dico etiam et similes. Quoniam enim Z ipsum quidem Δ multiplicans ipsum A fecit, ipsum vero E multiplicans ipsum Γ fecit; æqualiter igitur Δ ipsum A metitur ac E ipsum Γ; est igitur ut Δ ad E ita A ad Γ, hoc est

A, 8. Γ, 12. B, 18.
Δ, 2. E, 3. Z, 4. H, 6.

A, Γ (35. 7), et qu'ils soient Δ, E. Le nombre Δ sera à E comme A est à Γ. Mais A est à Γ comme Γ est à B; donc Δ mesure A autant de fois que E mesure Γ. Qu'il y ait autant d'unités dans Z que Δ mesure de fois A. Le nombre Z multipliant Δ fera A, et Z multipliant E fera Γ; donc A est un nombre plan, dont les côtés sont Δ, Z. De plus, puisque les nombres Δ, E sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Γ, B, le nombre Δ mesurera Γ autant de fois que E mesure B. Qu'il y ait autant d'unités dans H que E mesure de fois B; le nombre E mesurera B par les unités qui sont dans H, et le nombre H multipliant E fera B; donc B est un nombre plan, dont les côtés sont E, H; donc A, B sont des nombres plans. Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car, puisque Z multipliant Δ fait A, et que Z multipliant E fait Γ, Δ mesure A autant de fois que E mesure Γ; donc Δ est à E comme A est à Γ, c'est-à-dire comme Γ est à B. De plus, puisque E multipliant τὸν Β. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποίηκεν[7]· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η[8]· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί εἰσιν, αἱ γὰρ πλευραὶ αὐτῶν[9] ἀνάλογόν εἰσιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Γ ad Β. Rursus, quoniam Ε utrumque ipsorum Ζ, Η multiplicans ipsos Γ, Β fecit, est igitur ut Ζ ad Η ita Γ ad Β. Ut autem Γ ad Β ita Δ ad Ε; et igitur ut Δ ad Ε ita Ζ ad Η. Et alterne ut Δ ad Ζ ita Ε ad Η; ergo Α, Β similes plani numeri sunt, etenim ipsorum latera sunt proportionalia. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ[1] ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσιν.

PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri, similes solidi sunt numeri.

Inter duos enim numeros Α, Β duo medii proportionales cadant numeri Γ, Δ; dico ipsos Α, Β similes solidos esse.

Α, 24.		Γ, 72.	Δ, 216.		Β, 648.
	Ε, 1.	Ζ, 3.		Η, 9.	
Θ, 1.	Κ, 1.	Ν, 24.	Λ, 3.	Μ, 3.	Ξ, 72.

Εἰλήφθωσαν γὰρ[2] ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, τρεῖς[3] οἱ

Sumantur enim tres minimi numeri ipsorum camdem rationem habentium cum ipsis Α, Γ,

Ζ, Η fait Γ, Β, le nombre Ζ est à Η comme Γ est à Β (18. 7). Mais Γ est à Β comme Δ est à Ε; donc Δ est à Ε comme Ζ est à Η. Et par permutation Δ est à Ζ comme Ε est à Η (13. 7.) Donc Α, Β sont des nombres plans semblables (déf. 21. 7), puisque leurs côtés sont proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXI.

Si entre deux nombres il tombe deux nombres moyens proportionnels, ces nombres seront des solides semblables.

Qu'entre les nombres Α, Β il tombe deux nombres moyens proportionnels Γ, Δ; je dis que les nombres Α, Β sont des solides semblables.

Prenons les trois plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec

Ε, Ζ, Η· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ τῶν Ε, Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Ζ· οἱ Ε, Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί[4]. Εστωσαν οὖν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ· φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ πρὸ[5] τούτου ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον[6] ἔν τε τῷ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ· καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ[7]· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. Οἱ δὲ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Δ. Οσάκις δὴ

Δ, scilicet ipsi Ε, Ζ, Η; ergo extremi eorum Ε, Η primi inter se sunt. Et quoniam inter Ε, Η unus medius proportionalis cecidit numerus Ζ; ergo Ε, Η numeri similes plani sunt numeri. Sint igitur ipsius quidem Ε latera ipsi Θ, Κ, ipsius vero Η ipsi Λ, Μ; evidens igitur est ex antecedente Ε, Ζ, Η deinceps esse proportionales in ipsius Θ ad Λ ratione et in ipsius Κ ad Μ. Et quoniam Ε, Ζ, Η minimi sunt ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ; et est æqualis multitudo ipsorum Ε, Ζ, Η multitudini ipsorum Α, Γ, Δ; ex æquo igitur est ut Ε ad Η ita Α ad Δ. Ipsi autem Ε, Η primi, primi vero et minimi, minimi autem metiuntur ipsos æqualiter eamdem rationem habentes cum ipsis, major majorem, et minor minorem, hoc est et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur Ε ipsum Α metitur ac Η ipsum Δ. Quoties

Α, 24.		Γ, 72.		Δ, 216.	Β, 648.
	Ε, 1.		Ζ, 3.	Η, 9.	
Θ, 1.	Κ, 1.	Ν, 24.	Λ, 3.	Μ, 3.	Ξ, 72.

Α, Γ, Δ (35. 7); qu'ils soient Ε, Ζ, Η; leurs extrêmes Ε, Η seront premiers entr'eux (3. 8). Et puisque entre Ε, Η il tombe un moyen proportionnel Ζ, les nombres Ε, Η seront des nombres plans semblables (20. 8). Que Θ, Κ soient les côtés de Ε, et Λ, Μ les côtés de Η; il est évident, d'après ce qui précède, que les nombres Ε, Ζ, Η sont successivement proportionnels dans la raison de Θ à Λ et de Κ à Μ. Et puisque les nombres Ε, Ζ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, et que la quantité des nombres Ε, Ζ, Η est égale à la quantité des nombres Α, Γ, Δ, par égalité Ε est à Η comme Α est à Δ (14. 7). Mais les nombres Ε, Η sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); le nombre Ε mesure donc le nombre Α autant de fois que Η mesure Δ.

ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ν· ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. Ο δὲ Ε ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, Κ, Ν. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Δ, Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Β. Οσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Γ[8] μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ξ. Καὶ[9] ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Ο δὲ Η ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Λ, Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν Λ, Μ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε[10]· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ δὴ αὐτοῦ[11] εἰσιν οἱ Λ, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοί εἰσι. Λέγω δὴ[12] ὅτι καὶ ὅμοιοι. Επεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Α, Γ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Αλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως[13] ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Καί εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ,

autem Ε ipsum Α metitur, tot unitates sint in Ν; ergo Ν ipsum Ε multiplicans ipsum Α fecit. Est autem Ε ex ipsis Θ, Κ; ergo Ν ipsum ex Θ, Κ multiplicans ipsum Α fecit; solidus igitur est Α, latera autem ipsius sunt Θ, Κ, Ν. Rursus, quoniam Ε, Ζ, Η minimi sunt ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis Γ, Δ, Β; æqualiter igitur Ε ipsum Γ metitur ac Η ipsum Β. Quoties autem Ε ipsum Γ metitur, tot unitates sint in Ξ; ergo Η ipsum Β metitur per unitates quæ in Ξ; ergo Ξ ipsum Η multiplicans ipsum Β fecit. Est autem Η ex Λ, Μ; ergo Ξ ipsum ex Λ, Μ multiplicans ipsum Β fecit; solidus igitur est Β; latera autem ipsius sunt Λ, Μ, Ξ; ergo Α, Β solidi sunt. Dico etiam et similes. Quoniam enim Ν, Ξ ipsum Ε multiplicantes ipsos Α, Γ fecerunt; est igitur ut Ν ad Ξ ita Α ad Γ, hoc est Ε ad Ζ. Sed ut Ε ad Ζ ita Θ ad Λ et Κ ad Μ; et ut igitur Θ ad Λ ita Κ ad Μ et Ν ad Ξ. Et sunt quidem Θ, Κ, Ν la-

Qu'il y ait autant d'unités dans Ν que Ε mesure de fois Α; le nombre Ν multipliant Ε fera Α. Mais Ε est le produit de Θ par Κ; donc le nombre Ν multipliant le produit de Θ par Κ fait Α; donc Α est un nombre solide, dont les côtés sont Θ, Κ, Ν. De plus, puisque les nombres Ε, Ζ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Γ, Δ, Β, le nombre Ε mesure Γ autant de fois que Η mesure Β. Qu'il y ait autant d'unités dans Ξ que Ε mesure de fois Γ; le nombre Η mesurera Β par les unités qui sont dans Ξ; donc Ξ multipliant Η fera Β. Mais Η est le produit de Λ par Μ; donc Ξ multipliant le produit de Λ par Μ fera Β; donc Β est un nombre solide, dont les côtés sont Λ, Μ, Ξ; donc Α, Β sont des nombres solides. Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car puisque les nombres Ν, Ξ multipliant Ε font Α, Γ, le nombre Ν sera à Ξ comme Α est à Γ, c'est-à-dire comme Ε est à Ζ (17. 7). Mais Ε est à Ζ comme Θ est à Λ, et comme Κ est à Μ; donc Θ est à Λ comme Κ est à Μ, et comme Ν est à Ξ. Mais Θ, Κ, Ν

Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

tera ipsius Α, ipsi vero Ξ, Λ, Μ latera ipsius Β; ergo Α, Β similes solidi sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.

Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

PROPOSITIO XXII.

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, primus autem quadratus sit, et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, primus autem Α quadratus sit; dico et tertium Γ quadratum esse.

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

Επεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β· οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. Τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim ipsorum Α, Γ unus medius proportionalis est numerus Β; ergo Α, Γ similes solidi sunt. Quadratus autem Α; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

sont les côtés de Α, et Ξ, Λ, Μ les côtés de Β; donc les nombres Α, Β sont des solides semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si trois nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un quarré, le troisième sera un quarré.

Soient Α, Β, Γ trois nombres successivement proportionnels, et que le premier Α soit un quarré; je dis que le troisième Γ est un quarré.

Puisque entre les nombres Α, Γ il y a un moyen proportionnel Β, les nombres Α, Γ sont des plans semblables (20. 8). Mais Α est un quarré; donc Γ est un quarré. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

Εστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἐστίν.

PROPOSITIO XXIII.

Si quatuor numeri deinceps proportionales sint, primus autem cubus sit, et quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, ipse autem Α cubus sit; dico et Δ cubum esse.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27.

Επεὶ γὰρ τῶν Α, Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ· οἱ Α, Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. Κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim ipsorum Α, Δ duo medii proportionales sunt numeri Β, Γ; ergo Α, Δ similes sunt solidi numeri. Cubus autem Α; cubus igitur et Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIII.

Si quatre nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un cube, le quatrième sera un cube.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre nombres successivement proportionnels, et que Α soit un cube; je dis que Δ est un cube.

Car puisque entre Α, Δ il y a deux nombres moyens proportionnels Β, Γ, les nombres Α, Δ sont des solides semblables (21. 8). Mais Α est un nombre cube; donc Δ est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Β τετράγωνός ἐστιν.

PROPOSITIO XXIV.

Si duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem quadratus sit, et secundus quadratus erit.

Duo enim numeri Α, Β inter se rationem habeant quam quadratus numerus Γ ad quadratum numerum Δ, ipse autem Α quadratus sit; dico et Β quadratum esse.

Α, 4.	Β, 9.
Γ, 16.	Δ, 36.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ τετράγωνοί εἰσιν· οἱ Γ, Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως[1] ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Β ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim Γ, Δ quadrati sunt; ergo Γ, Δ similes plani sunt; inter Γ, Δ igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut Γ ad Δ ita Α ad Β; et inter Α, Β igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est Α quadratus; et Β igitur quadratus est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et si le premier est un quarré, le second sera un quarré.

Car que les deux nombres Α, Β ayent entr'eux la même raison que le nombre quarré Γ a avec le nombre quarré Δ, et que Α soit un quarré; je dis que Β est un quarré.

Car puisque Γ, Δ sont des quarrés, les nombres Γ, Δ sont des plans semblables; il tombe donc entre Γ, Δ un nombre moyen proportionnel (18. 8). Mais Γ est à Δ comme Α est à Β; il tombe donc aussi un nombre moyen proportionnel entre Α et Β (8. 8). Mais Α est un quarré; donc Β est un quarré (22. 8.) Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ Α· λέγω[1] ὅτι καὶ ὁ Β κύβος ἐστίν.

PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri inter se rationem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit.

Duo enim numeri Α, Β inter se rationem habeant quam cubus numerus Γ ad cubum numerum Δ, cubus autem sit Α; dico et Β cubum esse.

Α, 8.	Ε, 12.	Ζ, 18.	Β, 27.
Γ, 64.			Δ, 216.

Επεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσὶν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Οσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ[2], τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς· ὥς τε καὶ τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Εμπιπτέτωσαν οἱ

Quoniam enim Γ, Δ cubi sunt, ipsi Γ, Δ similes solidi sunt; inter Γ, Δ igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Quot autem inter Γ, Δ in continuum proportionales cadunt numeri, tot et inter eos eamdem rationem habentes cum ipsis; quare et inter Α, Β duo medii proportionales cadunt numeri. Cadant Ε, Ζ. Quo-

PROPOSITION XXV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube, et si le premier est un cube, le second sera aussi un cube.

Car que les nombres Α, Β ayent entr'eux la même raison que le nombre cube Γ a avec le nombre cube Δ, et que Α soit un cube; je dis que Β est aussi un cube.

Car puisque Γ, Δ sont des cubes, les nombres Γ, Δ sont des solides semblables; il tombe donc entre Γ et Δ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais autant il tombe entre Γ et Δ de nombres successivement proportionnels, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison avec eux (8. 8); il tombera donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels. Que ces nombres soient Ε, Ζ.

Ε, Ζ. Επεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Ε, Ζ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Β. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

niam igitur quatuor numeri A, E, Z, B deinceps proportionales sunt, atque est cubus A; cubus igitur et B. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Εστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri A, B; dico A ad B rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

A, 6.	Γ, 12.	B, 24.
Δ, 1.	E, 2.	Z, 4.

Επεὶ γὰρ οἱ Α, Β ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Εμπιπτέτω, καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Β, οἱ Δ, Ε, Ζ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοί εἰσι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν

Quoniam enim A, B plani sunt; inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Cadat, et sit Γ, et sumantur minimi numeri Δ, E, Z ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis A, Γ, B; extremi igitur eorum Δ, Z quadrati sunt. Et quoniam est ut Δ ad Z ita A ad B,

Puisque les quatre nombres A, E, Z, B sont successivement proportionnels, et que A est un cube, le nombre B sera aussi un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Les nombres qui sont des plans semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Soient A, B des nombres plans semblables; je dis que A a avec B la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Car puisque les nombres A, B sont des plans, il tombe un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Qu'il en tombe un, et qu'il soit Γ. Prenons les plus petits nombres qui ont la même raison avec A, Γ, B (35. 7), et qu'ils soient Δ, E, Z; leurs extrêmes Δ, Z seront des quarrés (cor. 2. 8). Et puisque Δ est à Z

Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, καί εἰσιν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοι· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

et sunt Δ, Ζ quadrati; ergo Α ad Β rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

PROPOSITIO XXVII.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Εστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Similes solidi numeri inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri Α, Β; dico Α ad Β rationem habere quam cubus numerus ad cubum numerum.

Α, 16.	Γ, 24.	Δ, 36.	Β, 54.
Ε, 8.	Ζ, 12.	Η, 18.	Θ, 27.

Επεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Εμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ[1] τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ Ε,

Quoniam enim Α, Β similes solidi sunt; ergo inter Α, Β duo medii proportionales cadunt numeri. Cadant Γ, Δ, et sumantur minimi numeri ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ, Β, æquales ipsis multitudine, Ε, Ζ,

comme Α est à Β, et que Δ, Ζ sont des quarrés, le nombre Α aura avec le nombre Β la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVII.

Les nombres solides semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Soient Α, Β des nombres solides semblables; je dis que Α a avec Β la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Car puisque les nombres Α, Β sont des solides semblables, il tombe deux moyens proportionnels entre Α, Β (19. 8). Qu'ils soient Γ, Δ. Prenons en même quantité les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, Β (2. 8); qu'ils soient Ε, Ζ, Η, Θ; leurs extrêmes Ε, Θ seront des cubes

Ζ, Η, Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Θ κύβοι εἰσί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

H, Θ; ergo extremi eorum E, Θ cubi sunt. Atque est ut E ad Θ ita A ad B; ergo A ad B rationem habet quam cubus numerus ad cubum numerum. Quod oportebat ostendere.

(cor. 2. 8). Mais E est à Θ comme A est à B; donc A a avec B la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU HUITIÈME LIVRE.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER NONUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι[1] ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

PROPOSITIO I.

Si duo similes plani numeri se se multiplicantes faciunt aliquem, factus quadratus erit.

Sint duo similes plani numeri A, B, et A ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ quadratum esse.

A, 6.	B, 54.
Δ, 36.	Γ, 324.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν

Ipse enim A se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ quadratus est. Quoniam igitur

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Si deux nombres plans semblables se multipliant l'un l'autre produisent un nombre, le produit sera un quarré.

Soient A, B deux nombres plans semblables, et que A multipliant B fasse Γ; je dis que Γ est un quarré.

Car que A se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un quarré.

ὁ Α ἑαυτὸν μὲν[2] πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Εὰν δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ[3] κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥς τε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam A, B similes plani sunt numeri; inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Si autem inter duos numeros in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter ipsos cadunt totidem et inter eos eamdem rationem habentes; quare et inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est quadratus Δ; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

A, 6.	B, 54.
Δ, 36.	Γ, 324.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί[1].

PROPOSITIO II.

Si duo numeri se se multiplicantes faciunt quadratum, similes plani sunt numeri.

Puisque A se multipliant lui-même fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres A, B sont des plans semblables, il tombe un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Mais si entre deux nombres il tombe des nombres successivement proportionnels, autant il en tombe entre ces deux nombres, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison (8. 8); il tombe donc entre Δ et Γ un nombre moyen proportionnel. Mais Δ est un quarré; donc Γ est un quarré. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un quarré, ces nombres seront des plans semblables.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω[2]· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Sint duo numeri A, B, et A ipsum B multiplicans quadratum ipsum Γ faciat; dico A, B similes planos esse numeros.

Α, 3.	Β, 12.
Δ, 9.	Γ, 36.

Ο γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως[3] ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ· οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Δ, Γ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός[4]. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. Εὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· οἱ ἄρα Α, Β ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Ipse enim A se se multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ quadratus est. Et quoniam A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit; ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam Δ quadratus est, sed et Γ; ergo Δ, Γ similes plani sunt; inter Δ, Γ igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut Δ ad Γ ita A ad B; et inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit. Si autem inter duos numeros unus medius proportionalis cadit, similes plani sunt numeri; ergo A, B similes sunt plani. Quod oportebat ostendere.

Soient les deux nombres A, B, et que A multipliant B fasse le quarré Γ; je dis que les nombres A, B sont des plans semblables.

Car que A se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un quarré. Et puisque A se multiplant lui-même fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque Δ est un quarré ainsi que Γ, les nombres Δ, Γ sont des plans semblables; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre Δ et Γ (8. 8). Mais Δ est à Γ comme A est à B; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Mais si un nombre moyen proportionnel tombe entre deux nombres, ces nombres sont des plans semblables (20. 8); donc les nombres A, B sont plans et semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ΄.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

PROPOSITIO III.

Si cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A se ipsum multiplicans ipsum B faciat; dico B cubum esse.

A, 8.
Δ, 4.
Γ, 2.
B, 64. I.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρὰ, ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· φανερὸν δή ἐστιν ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως[1] ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας·

Sumatur enim ipsius A latus Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; manifestum igitur est Γ ipsum Δ multiplicans ipsum A facere. Et quoniam Γ se ipsum multiplicantem ipsum Δ fecit; ergo Γ ipsum Δ metitur per unitates quæ in ipso. Sed etiam et unitas ipsum Γ metitur per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam Γ ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit; ergo Δ ipsum A metitur per unitates quæ in Γ. Metitur autem et unitas ipsum Γ per unitates quæ in ipso; est

PROPOSITION III.

Si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube A se multipliant lui-même fasse B; je dis que B est un cube.

Car prenons le côté Γ de A, et que Γ se multipliant lui-même fasse Δ; il est évident que Γ multipliant Δ fera A (déf. 19. 7). Et puisque Γ se multipliant lui-même a fait Δ, le nombre Γ mesurera Δ par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure Γ par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à Γ comme Γ est à Δ (déf. 20. 7.) De plus, puisque Γ multipliant Δ a fait A, le nombre Δ mesure A par les unités qui sont en Γ. Mais l'unité mesure Γ par les unités qui sont ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως[2] ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως[3] ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α· τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως[4] ὁ Α πρὸς τὸν Β. Τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μέσοι ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἐμπεπτώκασιν[5]· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται[6] ἀριθμοί. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος[7] κύβος ἔσται. Καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

igitur ut unitas ad Γ ita Δ ad A. Sed ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ; et ut igitur unitas ad Γ ita Γ ad Δ, et Δ ad A; ergo inter unitatem et numerum A duo medii proportionales in continuum cadunt numeri Γ, Δ. Rursus, quoniam A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; ergo A ipsum B metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita A ad B. Sed inter unitatem et A duo medii proportionales numeri cadunt; et inter A, B igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Si autem inter duos numeros duo medii proportionales cadunt, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit. Atque est A cubus; et B igitur cubus est. Quod oportebat ostendere.

en lui; l'unité est donc à Γ comme Δ est à A. Mais l'unité est à Γ comme Γ est à Δ; donc l'unité est à Γ comme Γ est à Δ, et comme Δ est à A; il tombe donc entre l'unité et le nombre A deux nombres moyens Γ, Δ successivement proportionnels. De plus, puisque A se multipliant lui-même fait B, le nombre A mesure B par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme A est à B (déf. 20. 7). Mais entre l'unité et le nombre A il tombe deux nombres moyens proportionnels; il tombe donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais si entre deux nombres il tombe deux moyens proportionnels, et si le premier est un cube, le second sera un cube (23. 8). Mais A est un cube; donc B est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ κύβος ἐστίν.

A, 8. B, 27.
Δ, 64. Γ, 216.

Ο γὰρ Α[1] ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ Α, Β[2]· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥς τε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO IV.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum numerum ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ cubum esse.

Ipse enim A se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ cubus est. Et quoniam A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam A, B cubi sunt, similes solidi sunt A, B; ergo inter A, B duo medii proportionales cadunt numeri; quare et inter Δ, Γ duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est cubus Δ; cubus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION IV.

Si un nombre cube multipliant un nombre cube fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube A multipliant le nombre cube B fasse Γ; je dis que Γ est un cube.

Car que A se multiplant lui-même fasse Δ, le nombre Δ sera un cube (3. 9). Et puisque A se multipliant lui-même a fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres A, B sont des cubes, les nombres A, B sont des solides semblables. Il tombe donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (19. 8); il tombera donc aussi entre Δ et Γ deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais Δ est un cube; donc Γ est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait demontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Εὰν κύϐος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύϐον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύϐος ἔσται.

Κύϐος γὰρ ἀριθμὸς[1] *ὁ* A *ἀριθμόν τινα τὸν* B *πολλαπλασιάσας κύϐον τὸν* Γ *ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ* B *κύϐος ἐστίν.*

PROPOSITIO V.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans cubum facit, et multiplicatus cubus erit.

Cubus enim numerus A numerum aliquem ipsum B multiplicans cubum ipsum Γ faciat; dico B cubum esse.

A, 8.	B, 27.
Δ, 64.	Γ, 216.

Ο γὰρ A *ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν* Δ *ποιείτω· κύϐος ἄρα ἐστὶν ὁ* Δ. *Καὶ ἐπεὶ ὁ* A *ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν* Δ *πεποίηκε, τὸν δὲ* B *πολλαπλασιάσας τὸν* Γ *πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ* A *πρὸς τὸν* B *οὕτως*[2] *ὁ* Δ *πρὸς τὸν* Γ. *Καὶ ἐπεὶ οἱ* Δ, Γ *κύϐοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν*[3] Δ, Γ *ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ* Δ *πρὸς τὸν* Γ *οὕτως ὁ* A *πρὸς τὸν* B· *καὶ τῶν* A, B *ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύϐος ὁ* A· *κύϐος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ* B. *Οπερ ἔδει δεῖξαι.*

Ipse enim A se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; cubus igitur est Δ. Et quoniam A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam Δ, Γ cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter Δ, Γ duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est ut Δ ad Γ ita A ad B; et inter A, B igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est cubus A; cubus igitur est et B. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION V.

Si un nombre cube multipliant un nombre fait un cube, le nombre multiplié sera un cube.

Car que le nombre cube A multipliant un nombre B fasse le cube Γ; je dis que B est un cube.

Que A se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un cube (3. 9). Et puisque A se multipliant lui-même fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque Δ et Γ sont des cubes, ces nombres sont des solides semblables; il tombe donc entre Δ et Γ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais Δ est à Γ comme A est à B; il tombe donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais A est un cube; donc B est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Εὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἐστίν.

Ο γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. Επεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν[1] πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Αλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς

PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicans cubum ipsum B faciat; dico et A cubum esse.

A, 8. B, 64. Γ, 512.

Ipse enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat. Quoniam igitur A se ipsum quidem multiplicans ipsum B fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ cubus est. Et quoniam A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; ergo A ipsum B metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita A ad B. Et quoniam A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo B ipsum Γ metitur per unitates quæ in A. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita B ad Γ. Sed ut unitas ad A

PROPOSITION VI.

Si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre sera un cube.

Que le nombre A se multipliant lui-même fasse le cube B; je dis que A est un cube.

Car que A multipliant B fasse Γ. Puisque A se multipliant lui-même fait B, et que A multipliant B a fait Γ, le nombre Γ est un cube (déf. 19. 7). Et puisque A se multiplant lui-même fait B, le nombre A mesure B par les unités qui sont en lui; mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme A est à B (déf. 20. 7). Et puisque A multipliant B fait Γ, le nombre B mesure Γ par les unités qui sont en A. Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme B est à Γ. Mais l'unité est à A comme τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα[2] ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως[3] ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ[4] Β, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Β, Γ[5] ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως[6] ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Β· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ita A ad B; et ut igitur A ad B ita B ad Γ. Et quoniam B, Γ cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter B, Γ duo medii proportionales sunt numeri. Atque est ut B ad Γ ita A ad B; et inter A, B igitur duo medii proportionales sunt numeri. Atque est cubus B; cubus igitur est et A. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Εὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμόν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ στερεός ἐστιν.

PROPOSITIO VII.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans facit aliquem, factus solidus erit.

Compositus enim numerus A numerum aliquem ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ solidum esse.

A, 6. B, 7. Γ, 42.
Δ, 3. E, 2.

Επεὶ γὰρ ὁ Α σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρηθήσεται. Μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Δ. Καὶ

Quoniam enim A compositus est, a numero aliquo mensurabitur. Mensuretur ab ipso Δ. Et

A est à B; donc A est à B comme B est à Γ. Et puisque B et Γ sont des cubes, ces nombres sont des solides semblables; il y a donc entre B et Γ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais B est à Γ comme A à B; il y a donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais B est un cube; donc A est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VII.

Si un nombre composé multipliant un nombre en fait un autre, le produit sera un solide.

Car que le nombre composé A multipliant le nombre B fasse Γ; je dis que Γ est un solide.

Car puisque A est un nombre composé, il sera mesuré par quelque nombre ὁσάκις ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας[1]· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν

quoties Δ ipsum A metitur tot unitates sint in E. Quoniam igitur Δ ipsum A metitur per unitates quæ in E; ergo E ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit. Et quoniam A ipsum B multiplicans

A, 6. B, 7. Γ, 42.
Δ, 3. E, 2.

Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ Α ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Ε τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν[2]· ὁ Γ ἄρα στερεός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Β. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsum Γ fecit, est autem A ex ipsis Δ, E; ergo ipse ex Δ, E ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ solidus est, latera autem ipsius sunt Δ, E, B. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνος ἔσται[1] καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες[2], ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες[3], ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες[4].

PROPOSITIO VIII.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, tertius quidem ab unitate quadratus erit, et unum intermittentes omnes; sed quartus cubus, et duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul et quadratus, et quinque intermittentes omnes.

(déf. 13. 7). Qu'il soit mesuré par Δ; et qu'il y ait en E autant d'unités que Δ mesure de fois A. Puisque Δ mesure A par les unités qui sont en E, le nombre E multipliant Δ fera A. Et puisque A multipliant B fait Γ, et que A est le produit de Δ par E, le produit de Δ par E multipliant B fait Γ (16. 7); le nombre Γ est donc un nombre solide (déf. 17. 7), dont les côtés sont Δ, E, B. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, le troisième, à partir de l'unité, sera un quarré, et tous ceux qui en laissent un; le quatrième un cube, et tous ceux qui en laissent deux; le septième un cube et un quarré tout à la fois, et tous ceux qui en laissent cinq.

Εστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες[5].

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z; dico quidem tertium ab unitate, ipsum B, quadratum esse, et unum intermittentes omnes; quartum vero Γ cubum, et duos intermittentes omnes; septimum autem Z cubum simul et quadratum, et quinque intermittentes omnes.

I. A, 3. B, 9. Γ, 27. Δ, 81. E, 243. Z, 729.

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Η δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν[6] μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. Καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες[7] τετράγωνοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ, καὶ

Quoniam enim est ut unitas ad A ita A ad B; æqualiter igitur unitas ipsum A numerum metitur et A ipsum B. Sed unitas ipsum A numerum metitur per unitates quæ in ipso; atque A igitur ipsum B metitur per unitates quæ in A; ergo A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; quadratus igitur est B. Et quoniam B, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, sed B quadratus est; et Δ igitur quadratus est. Propter eadem utique et Z quadratus est. Similiter etiam demonstrabimus et unum omnes intermittentes quadratos esse. Dico etiam et quartum ab unitate, ipsum Γ, cubum esse, et duos intermit-

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra A, B, Γ, Δ, E, Z successivement proportionnels; je dis que le troisième nombre B, à partir de l'unité, est un quarré, ainsi que tous ceux qui en laissent un; que le quatrième Γ est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux; que le septième Z est un cube et un quarré tout à la fois, ainsi que tous ceux qui en laissent cinq.

Car puisque l'unité est à A comme A est à B, l'unité mesure A autant de fois que A mesure B (déf. 20. 7). Mais l'unité mesure le nombre A par les unités qui sont en lui; donc A mesure B par les unités qui sont en A; le nombre A se multipliant lui-même fera donc le nombre B; le nombre B est donc un quarré. Et puisque B, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que B est un quarré, Δ sera aussi un quarré (22. 8). Par la même raison Z est un quarré. Nous démontrerons de la même manière que tous ceux qui en laissent un sont des quarrés. Je dis aussi que le quatrième, Γ, à partir de l'unité, est un cube, et οἱ δύο διαλείποντες πάντες. Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν A ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ B τὸν Γ. Η δὲ μονὰς τὸν A ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ A μονάδας· καὶ ὁ B ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ A μονάδας· ὁ A ἄρα τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Επεὶ οὖν ὁ A ἑαυτὸν μὲν[8] πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, E, Z ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἐστί[9]· καὶ ὁ Z ἄρα κύβος ἐστίν. Εδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Z κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι εἰσὶ[10] καὶ τετράγωνοι. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

tentes omnes. Quoniam enim est ut unitas ad A ita B ad Γ; æqualiter igitur unitas ipsum A numerum metitur ac B ipsum Γ. Sed unitas ipsum A numerum metitur per unitates quæ in A; et B igitur ipsum Γ metitur per unitates quæ in A; ergo A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit. Quoniam igitur A se ipsum quidem multiplicans ipsum B fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; cubus igitur est Γ. Et quoniam Γ, Δ, E, Z deinceps proportionales sunt, sed Γ cubus est; et Z igitur cubus est. Ostensum est autem et quadratum; ergo septimus ab unitate ipse Z et cubus est et quadratus. Similiter etiam demonstrabimus et quinque intermittentes omnes cubos esse et quadratos. Quod oportebat ostendere.

1.	A, 3.	B, 9.	Γ, 27.	Δ, 81.	E, 243.	Z, 729.

tous ceux qui en laissent deux. Car puisque l'unité est à A comme B est à Γ, l'unité mesure A autant de fois que B mesure Γ. Mais l'unité mesure le nombre A par les unités qui sont en A; donc B mesure Γ par les unités qui sont en A; donc A multipliant B fera Γ. Et puisque A se multipliant lui-même fait B, et que A multipliant B fait Γ, Γ est un cube (déf. 19. 7). Et puisque Γ, Δ, E, Z sont successivement proportionnels, et que Γ est un cube, Z est aussi un cube (23. 8). Mais on a démontré qu'il est un quarré; donc le septième Z, à partir de l'unité, est un cube et un quarré tout à la fois. Nous démontrerons semblablement que tous ceux qui en laissent cinq sont des cubes et des quarrés tout à la fois. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς[1] ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν[2] ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

PROPOSITIO IX.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, ipse autem post unitatem quadratus est; et reliqui omnes quadrati erunt. Et si ipse post unitatem cubus est; et reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ipse autem Α post unitatem sit quadratus; dico et reliquos omnes quadratos fore.

1. Α, 4. Β, 16. Γ, 64. Δ, 256. Ε, 1024. Ζ, 4096.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Γ ἄρα[3] τετράγωνός ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Β τετράγωνος· καὶ ὁ Δ ἄρα[4] τετράγωνός ἐστιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

Tertium quidem ab unitate Β quadratum esse, et unum intermittentes omnes, demonstratum est; dico et reliquos omnes quadratos esse. Quoniam enim Α, Β, Γ deinceps proportionales sunt, et est Α quadratus; et Γ igitur quadratus est. Rursus, quoniam Β, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, et est Β quadratus; et ipse Δ igitur quadratus est. Similiter etiam demonstrabimus et reliquos omnes quadratos esse.

PROPOSITION IX.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un quarré, tous les autres seront des quarrés; si celui qui est après l'unité est un cube, tous les autres seront des cubes.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité soit un quarré; je dis que tous les autres seront des quarrés.

On a déjà démontré que le troisième Β, à partir de l'unité, est un quarré, ainsi que tous ceux qui en laissent un (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont des quarrés. Car puisque Α, Β, Γ sont successivement proportionnels, et que Α est un quarré, Γ est un quarré (22. 8). De plus, puisque les nombres Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Β est un quarré, Δ est aussi un quarré. Nous démontrerons semblablement que tous les autres sont des quarrés.

Ἀλλὰ δὴ[5] ἔστω ὁ Α κύβος· λέγω ὅτι καὶ[6] οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω[7] ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος. Ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστί· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί[8]. Καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε κύβος ἐστὶ, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sed et sit A cubus; dico et reliquos omnes cubos esse.

Quartum quidem ab unitate ipsum Γ cubum esse, et duos intermittentes omnes, demonstratum est; dico et reliquos omnes cubos esse. Quoniam enim est ut unitas ad A ita A ad B; æqualiter igitur unitas ipsum A metitur ac A ipsum B. Sed unitas ipsum A metitur per unitates quæ in ipso; et A igitur ipsum B metitur per unitates quæ in ipso; ergo A se ipsum multiplicans ipsum B fecit, atque est A cubus. Si autem cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus est; et B igitur cubus est. Et quoniam quatuor numeri A, B, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, et est A cubus; et Δ igitur cubus est. Propter eadem utique et E cubus est, et similiter reliqui omnes cubi sunt. Quod oportebat ostendere.

1. A, 8. B, 64. Γ, 512. Δ, 4096. E, 32768. Z, 262144.

Mais que A soit un cube; je dis que tous les autres sont des cubes.

On a déjà démontré que le quatrième, à partir de l'unité, est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont aussi des cubes. Car puisque l'unité est à A comme A est à B, l'unité mesure A autant de fois que A mesure B (déf. 21. 7). Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; donc A mesure B par les unités qui sont en lui; donc A se multipliant lui-même fait B; mais A est un cube; et si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit est un cube (3. 9); donc B est un cube. Et puisque les quatre nombres A, B, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que A est un cube, Δ est un cube (23. 8). Par la même raison E est aussi un cube, ainsi que tous les autres. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Εστωσαν γὰρ[1] ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν[2] ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς[3] τοῦ τρίτου τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων[4].

PROPOSITIO X.

Si ab unitate quotcunque numeri proportionales sunt, ipse autem post unitatem non est quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate et unum intermittentes omnes. Et si ipse post unitatem cubus non est, neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes.

Sint enim ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, sed post unitatem ipse Α non sit quadratus; dico neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16. Ε, 32. Ζ, 64.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. Εστι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

Si enim possibile, sit Γ quadratus. Est autem et Β quadratus; ergo Β, Γ inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum

PROPOSITION X.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité n'est point un quarré, aucun autre ne sera un quarré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent un. Et si celui qui est après l'unité n'est pas un cube, aucun autre ne sera un cube, excepté le quatrième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent deux.

Car soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité ne soit pas un quarré, savoir Α; je dis qu'aucun autre ne sera un quarré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Car si cela est possible, que Γ soit un quarré. Mais Β est aussi un quarré (8. 9); donc Β et Γ ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως[5] ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥς τε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Β· τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειτο[6]· οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι[7], χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων.

Αλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. Λέγω δὴ[8] ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

numerum. Et est ut Β ad Γ ita Α ad Β; ergo Α, Β inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare Α, Β similes plani sunt. Et est quadratus Β; quadratus igitur est et Α, quod non supponebatur; non igitur Γ quadratus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

Sed et non sit Α cubus. Dico etiam neque alium ullum cubum fore, præter quartum ab unitate et duos intermittentes.

1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16. Ε, 32. Ζ, 64.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὁ Δ κύβος. Εστι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος, τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως[9] ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει ὃν κύβος πρὸς κύβον[10]. Καὶ ἔστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μονὰς

Si enim possibile, sit Δ cubus. Est autem et Γ cubus, quartus enim est ab unitate, et est ut Γ ad Δ ita Β ad Γ; et Β igitur ad Γ rationem habet quam cubus ad cubum. Et est Γ cubus; et Β igitur cubus est. Et quoniam

quarré ; et Β est à Γ comme Α est à Β; donc Α, Β ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; donc Α, Β sont des plans semblables (déf. 22. 7). Mais Β est un quarré ; donc Α est un quarré, ce qui n'est point supposé ; donc Γ n'est point un quarré. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'est un quarré, si ce n'est le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Mais que Α ne soit pas un cube; je dis qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux.

Car si cela est possible, que Δ soit un cube. Mais Γ est un cube ; car c'est le quatrième nombre, à partir de l'unité (8. 9), et Γ est à Δ comme Β est à Γ; donc Β a avec Γ la même raison qu'un cube a avec un cube. Mais Γ est un cube ; donc Β est un cube. Et puisque l'unité est à Α comme Α est à Β, et que l'unité mesure πρὸς τὸν Α οὕτως[11] ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· [12]ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποίηκεν. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων[13]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

est ut unitas ad A ita A ad B, sed unitas ipsum A metitur per unitates quæ in ipso; et A igitur ipsum B metitur per unitates quæ in ipso; ergo A se ipsum multiplicans cubum B fecit. Si autem numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit; cubus igitur et A, quod non supponitur; non igitur Δ cubus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate et duos intermittentes. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιαʹ.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος[1] ὁ Β τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα τῶν Γ, Δ.

PROPOSITIO XI.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, minor majorem metitur per aliquem eorum qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate A quotcunque numeri deinceps proportionales B, Γ, Δ, E; dico eorum B, Γ, Δ, E minimum B ipsum E metiri per aliquem ipsorum Γ, Δ.

A par les unités qui sont en lui; donc A mesure B par les unités qui sont en lui (déf. 21. 7); donc A se multipliant lui-même fera le cube B. Mais si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre est un cube (6. 9); A est donc un cube, ce qui n'est point supposé; donc Δ n'est pas un cube. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, le plus petit mesure le plus grand par quelqu'un de ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité A, tant de nombres qu'on voudra B, Γ, Δ, E successivement proportionnels; je dis que B, le plus petit des nombres B, Γ, Δ, E, mesure E par un des nombres Γ, Δ.

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. Η δὲ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ[2] μονάδας·

Quoniam enim est ut A unitas ad B ita Δ ad E; æqualiter igitur A unitas ipsum B numerum metitur ac Δ ipsum E; alterne igitur æqualiter A unitas ipsum Δ metitur ac B ipsum E. Sed A unitas ipsum Δ metitur per uni-

A, 1. B, 3. Γ, 9. Δ, 27. E, 81.

καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ[3] μονάδας· ὥς τε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. Οπερ ἔδει δεῖξαι[4].

tates quæ in ipso; et B igitur ipsum E metitur per unitates quæ in Δ; quare minor B majorem ipsum E metitur per aliquem numerum eorum qui sunt in proportionalibus numeris. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς[1] ἀνάλογον ὦσιν· ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται[2], ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Εστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιδηποτοῦν[3] ἀριθμοὶ ἑξῆς[4] ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται.

PROPOSITIO XII.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt; a quibuscunque ultimus primorum numerorum mensuratur, ab ipsis et proximus unitati mensurabitur.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ; dico a quibuscunque ipse Δ primis numeris mensuretur, ab ipsis et A mensuratum iri.

Car puisque l'unité A est à B comme Δ est à E, l'unité A mesure B autant de fois que Δ mesure E (déf. 20. 7); donc par permutation l'unité A mesure Δ autant de fois que B mesure E (15. 7.) Mais l'unité A mesure Δ par les unités qui sont en lui; donc B mesure E par les unités qui sont en Δ; le plus petit B mesure donc E, qui est le plus grand, par un des nombres qui sont dans les nombres proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, tous les nombres premiers qui mesurent le dernier mesurent aussi celui qui est le plus près de l'unité.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra A, B, Γ, Δ successivement proportionnels; je dis que tous les nombres premiers qui mesurent Δ mesureront aussi A.

Μετρείσθω γὰρ ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ Ε· λέγω ὅτι ὁ Ε καὶ[5] τὸν Α μετρεῖ. Μὴ γὰρ μετρείτω ὁ Ε τὸν Α[6]. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν[7] ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α

Mensuretur enim Δ ab aliquo primo numero Ε; dico Ε et ipsum Α metiri. Non enim metiatur Ε ipsum Α. Atque est Ε primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo Ε, Α primi inter se sunt. Et quoniam Ε ipsum Δ metitur, metiatur eum per Ζ; ergo Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Rursus, quoniam Α ipsum

I.	Α, 4.	Β, 16.	Γ, 64.	Δ, 256.
Ε, 2.	Θ, 8.	Η, 32.	Ζ, 128.	

τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως[8] ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. Μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν

Δ metitur per unitates quæ in Γ; ergo Α ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed utique et Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; est igitur ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α, Ε primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Ε ipsum Γ. Metiatur eum per Η; ergo Ε ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit. Sed et ex antecedente et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α,

Que Δ soit mesuré par un nombre premier Ε; je dis que Α est aussi mesuré par Ε. Que Α ne soit pas mesuré par Ε. Puisque Ε est un nombre premier, et que tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (31. 7); les nombres Ε, Α sont premiers entr'eux. Et puisque Ε mesure Δ, qu'il le mesure par Ζ; le nombre Ε multipliant Ζ fera Δ. De plus, puisque Α mesure Δ par les unités qui sont en Γ (11. 9), le nombre Α multipliant Γ fera Δ. Mais Ε multipliant Ζ fait Δ; donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont lamême raison, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21.7); donc Ε mesure Γ. Qu'il le mesure par Η; le nombre Ε multipliant Η fera Γ. Mais par ce qui précède Α multipliant Β fait Γ; donc le produit

A, B ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν E, H· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν E οὕτως[9] ὁ H πρὸς τὸν B. Οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ E τὸν B. Μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ E ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, E ἴσος[10] τῷ ἀπὸ τοῦ A· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν A οὕτως[11] ὁ A πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε[12] ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ E τὸν A[13]. Ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, E πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί· σύνθετοι ἄρα. Οἱ δὴ σύνθετοι ὑπὸ πρώτου[14] ἀριθμοῦ τινος μετροῦνται· οἱ A, E ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται[15].

B æqualis est ipsi ex E, H; est igitur ut A ad E ita H ad B. Sed et A, E primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur E ipsum B. Metiatur ipsum per Θ; ergo E ipsum Θ multiplicans ipsum B fecit. Sed et A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; est igitur ipse ex Θ, E æqualis ipsi ab A; est igitur ut E ad A ita A ad Θ. Sed A, E primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ergo metitur et E ipsum A. Sed et non metitur, quod impossibile; non igitur A, E primi inter se sunt; ergo compositi. Sed compositi a primo numero aliquo mensurantur; ergo A, E a primo aliquo numero mensurantur. Et quoniam E primus

I.	A, 4.	B, 16.	Γ, 64.	Δ, 256.
	E, 2.	Θ, 8.	H, 32.	Z, 128.

de A par B égale le produit de E par H; donc A est à E comme H est à B. Mais les nombres A, E sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure B. Qu'il le mesure par Θ; le nombre E multipliant Θ fera B. Mais A se multipliant lui-même fait B; donc le produit de Θ par E égale le quarré de A; donc E est à A comme A est à Θ. Mais A et E sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure A. Mais il ne le mesure pas, ce qui est impossible; donc les nombres A, E ne sont pas premiers entr'eux; donc ils sont composés. Mais les nombres composés sont mesurés par quelque nombre premier (déf. 15. 7); donc les nombres A, E sont mesurés par quelque nombre premier.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτοῦ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Ε μετρεῖ· ὥς τε καὶ[16] ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

supponitur, primus autem ab alio numero non mensuratur nisi a se ipso; ergo E ipsos A, E metitur; quare et E ipsum A metitur. Metitur autem et ipsum Δ; ergo E ipsos A, Δ metitur. Similiter utique demonstrabimus a quibuscunque ipse Δ primis numeris mensuretur, ab iisdem et ipsum A mensuratum iri. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ· ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου[1] μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς[2] ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ.

PROPOSITIO XIII.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, ipse autem post unitatem primus est, maximus a nullo alio mensurabitur, nisi ab eis qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, ipse A autem post unitatem primus sit; dico maximum eorum ipsum Δ a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis A, B, Γ.

Et puisque E est supposé être un nombre premier, et qu'un nombre premier n'est mesuré par aucun autre nombre que par lui-même (déf. 12.7), le nombre E mesurera les nombres A, E; donc E mesure A. Mais il mesure Δ; donc E mesure les nombres A, Δ. Nous démontrerons semblablement que tous les nombres premiers qui mesurent Δ mesureront aussi le nombre A. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un nombre premier, aucun autre nombre ne mesurera le plus grand, excepté ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra A, B, Γ, Δ successivement proportionnels, et que le nombre A, qui est après l'unité, soit un nombre premier; je dis que le plus grand Δ ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par les nombres A, B, Γ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἔστω ὁ αὐτός· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. Εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτός ἐστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτός ἐστι· σύνθετος ἄρα· πᾶς[3] δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται[4]. Λέγω δὴ ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται[5], πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ·

Si enim possibile, mensuretur ab ipso E, et ipse E cum nullo ipsorum A, B, Γ sit idem; evidens est autem E primum non esse. Si enim E primus est, et metitur ipsum Δ, et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur E primus est; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo E a primo aliquo numero mensuratur. Dico etiam ipsum a nullo alio numero mensuratum iri, nisi ab ipso A. Si enim ab alio mensu-

1.	A, 5.	B, 25.	Γ, 125.	Δ, 625.
	E-----	Θ-----	H-----	Z-------

κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ε μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ. Λέγω ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτὸς, καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· καὶ εἷς ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε.

ratur ipse E, sed E ipsum Δ metitur; et ille igitur ipsum Δ metietur; quare et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo A ipsum E metitur. Et quoniam E ipsum Δ metitur, metiatur ipsum per Z. Dico Z cum nullo ipsorum A, B, Γ esse eumdem. Si enim Z cum uno ipsorum A, B, Γ est idem, et metitur ipsum Δ per E; et unus igitur ipsorum A, B, Γ ipsum Δ metitur

Car si cela est possible, que E mesure Δ, et que E ne soit aucun des nombres A, B, Γ; il est évident que E n'est pas un nombre premier. Car si E est un nombre premier, et s'il mesure Δ, il mesurera A, qui est un nombre premier, E n'étant pas le même que A (12. 9), ce qui est impossible; donc E n'est pas un nombre premier; il est donc composé. Mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier (33. 7); donc E est mesuré par quelque nombre premier. Je dis qu'aucun autre nombre premier ne le mesurera, si ce n'est A. Car si E, qui mesure Δ, est mesuré par un autre nombre, cet autre nombre mesurera Δ; il mesurera donc A, qui est un nombre premier, cet autre n'étant pas le même que A (12. 9); ce qui est impossible. Donc A mesure E. Et puisque E mesure Δ, qu'il le mesure par Z; je dis que Z n'est aucun des nombres A, B, Γ. Car si Z est le même qu'un des nombres A, B, Γ, et s'il mesure Δ par E, un des nombres A, B, Γ

Αλλὰ εἷς τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατά τινα τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὁ Ε ἄρα ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτὸς, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ Ζ ὑπὸ τοῦ Α, δεικνύντες πάλιν ὅτι ὁ Ζ οὐκ ἔστι[7] πρῶτος. Εἰ γὰρ πρῶτος[8], καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Ζ· σύνθετος ἄρα· ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται[9]. Λέγω δὴ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται, πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ δὲ Ζ τὸν Δ μετρεῖ· κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥς τε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίη-

per E. Sed unus ipsorum A, B, Γ ipsum Δ metitur per aliquem ipsorum A, B, Γ; et E igitur cum uno ipsorum A, B, Γ est idem, quod non supponitur; non igitur Z cum uno ipsorum A, B, Γ est idem. Similiter utique ostendemus ipsum Z mensuratum iri ab ipso A, ostendentes rursus Z non esse primum. Si enim primus, et metitur ipsum Δ, et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur primus est Z; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo Z a primo aliquo numero mensuratur. Dico et ipsum ab alio primo numero non mensuratum iri, nisi ab ipso A. Si enim alius aliquis primus ipsum Z metitur, sed Z ipsum Δ metitur; et ille igitur ipsum Δ metietur; quare et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo A ipsum Z metitur. Et quoniam E ipsum Δ metitur per Z; ergo E ipsum Z multiplicans ipsum Δ fecit. Sed quidem et A ipsum Γ multiplicans ipsum

mesurera Δ par E. Mais un des nombres A, B, Γ mesure Δ par quelqu'un des nombres A, B, Γ (11.9); donc E sera le même que quelqu'un des nombres A, B, Γ, ce qui n'est point supposé; donc Z n'est aucun des nombres A, B, Γ. Nous démontrerons semblablement que Z est mesuré par A, en faisant voir encore que Z n'est pas un nombre premier. Car s'il l'est, et s'il mesure Δ, il mesurera A, qui est un nombre premier, Z n'étant pas le même que A (12. 9); ce qui est impossible; Z n'est donc pas un nombre premier; il est donc composé; mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier; donc Z est mesuré par quelque nombre premier (33. 7). Je dis qu'il ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par A. Car si Z, qui mesure Δ, est mesuré par tout autre nombre premier, cet autre nombe mesurera Δ, et par conséquent A, qui est un nombre premier, Z n'étant pas le même que A (12. 9); ce qui est impossible; donc A mesure Z. Et puisque E mesure Δ par Z, le nombre E multipliant Z fera Δ. Mais A multipliant Γ fait Δ;

κεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Ο δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β ἐστὶν ὁ αὐτὸς, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η· ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν.

Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; proportionaliter igitur est ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α ipsum Ε metitur; et Ζ igitur ipsum Γ metitur. Metiatur ipsum per Η. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Η cum nullo ipsorum Α, Β esse eumdem, et ipsum mensuratum iri ab ipso Α. Et quoniam Ζ ipsum Γ metitur per Η; ergo Ζ ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit.

1.	Α, 5.	Β, 25.	Γ, 125.	Δ, 625.
	Ε-----	Θ-----	Η-----	Ζ-------

Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ζ, Η· ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ οὕτως[10] ὁ Η πρὸς τὸν Β. Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. Μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ Θ τῷ Α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ· ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν[11] Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α οὕτως[12] ὁ Α πρὸς τὸν Η.

Sed quidem et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α, Β æqualis est ipsi ex Ζ, Η; proportionaliter igitur ut Α ad Ζ ita Η ad Β. Metitur autem Α ipsum Ζ; metitur igitur et Η ipsum Β. Metiatur eum per Θ. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Θ cum ipso Α non esse eumdem. Et quoniam Η ipsum Β metitur per Θ; ergo Η ipsum Θ multiplicans ipsum Β fecit. Sed et Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; ergo ipse ex Θ, Η æqualis est ipsi ex Α quadrato; est igitur ut Θ ad Α ita Α

donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais Α mesure Ε; donc Ζ mesure Γ (déf. 21. 7); qu'il le mesure par Η. Nous démontrerons semblablement que Η n'est aucun des nombres Α, Β, et que Α mesure Η. Et puisque Ζ mesure Γ par Η, le nombre Ζ multipliant Η fera Γ. Mais Α multipliant Β fait Γ; donc le produit de Α par Β égale le produit de Ζ par Η; donc Α est à Ζ comme Η est à Β. Mais Α mesure Ζ; donc Η mesure Β. Qu'il le mesure par Θ. Nous démontrerons semblablement que Θ n'est pas le même que Α. Et puisque Η mesure Β par Θ, le nombre Η multipliant Θ fait Β. Mais Α se multipliant lui-même fait Β; donc le produit de Θ par Η égale le quarré de Α; donc Θ est à Α comme Α est à Η (20. 7). Mais Α mesure Η;

Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑφ' ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ad H. Metitur autem A ipsum H; metitur igitur et Θ ipsum A primum existentem, non existens cum ipso idem, quod absurdum; non igitur maximus Δ ab alio numero mensurabitur, nisi ab ipsis A, B, Γ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται· ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου[1] ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Β, Γ, Δ.

PROPOSITIO XIV.

Si minimus numerus a primis numeris mensuratur; a nullo alio primo numero mensurabitur, nisi ab ipsis a principio metientibus.

Minimus enim numerus A a primis numeris B, Γ, Δ mensuretur; dico ipsum A a nullo alio primo numero mensuratum iri, nisi ab ipsis B, Γ, Δ.

A, 30.
B, 2. Γ, 3. Δ, 5.
E----- Z-------

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ἔστω ὁ αὐτός.

Si enim possibile, mensuretur a primo E, et E cum nullo ipsorum B, Γ, Δ sit idem. Et quoniam

donc Θ mesure A, qui est un nombre premier, Θ n'étant pas le même que A, ce qui est absurde; donc le plus grand nombre Δ n'est mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIV.

Si le plus petit nombre est mesuré par des nombres premiers, il ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, si ce n'est par ceux qui le mesuraient d'abord.

Car soit A le plus petit nombre mesuré par les nombres premiers B, Γ, Δ; je dis que A ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, si ce n'est par B, Γ, Δ.

Car si cela est possible, qu'il soit mesuré par le nombre premier E, et que E ne soit

Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ τῶν[2] πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β, Γ, Δ

E ipsum A metitur, metiatur eum per Z; ergo E ipsum Z multiplicans ipsum A fecit. Et mensuratur A a primis numeris B, Γ, Δ. Si autem duo numeri sese multiplicantes faciunt aliquem, factum vero ex ipsis metitur aliquis primus numerus, et unum eorum a principio metietur; ergo B, Γ, Δ unum ipsorum E, Z

A, 30.

B, 2. Γ, 3. Δ, 5.

E----- Z------

ἄρα ἕνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσι. Τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός· τὸν Ζ ἄρα μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α, ὅπερ ἐστὶν[3] ἀδύνατον, ὁ γὰρ Α ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος[4]· οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, πάρεξ τῶν Β, Γ, Δ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

metiuntur. Ipsum quidem E non metientur, ipse E enim primus est, et cum nullo ipsorum B, Γ, Δ idem; ipsum Z igitur metientur minorem existentem ipso A, quod est impossibile, ipse enim A ponitur minimus ab ipsis B, Γ, Δ mensuratus; non igitur ipsum A metietur primus numerus, præter ipsos B, Γ, Δ. Quod oportebat ostendere.

aucun des nombres B, Γ, Δ. Puisque E mesure A, qu'il le mesure par Z; le nombre E multipliant Z fera A. Mais A est mesuré par les nombres premiers B, Γ, Δ, et lorsque deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et qu'un nombre premier mesure le produit, ce nombre mesurera un des nombres qu'on avait d'abord supposés (32. 7); les nombres B, Γ, Δ mesurent donc un des nombres E, Z. Mais ils ne mesureront pas E, car E est un nombre premier, et il n'est aucun des nombres B, Γ, Δ; ils mesurent donc Z, qui est plus petit que A; ce qui est impossible, car A est supposé le plus petit nombre mesuré par B, Γ, Δ; donc aucun nombre premier, si ce n'est B, Γ, Δ, ne mesurera A. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β, Γ δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α, καὶ ἔτι οἱ Γ, Α πρὸς τὸν Β.

PROPOSITIO XV.

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis; duo quicunque compositi ad reliquum primi sunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales, Α, Β, Γ, minimi eorum eamdem rationem habentium cum ipsis; dico ipsorum Α, Β, Γ duos quoscunque compositos ad reliquum primos esse, ipsos quidem Α, Β ad Γ, ipsos autem Β, Γ ad Α, et adhuc ipsos Γ, Α ad Β.

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.

Δ. . . Ε. . . . Ζ.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. Φανερὸν δὴ ὅτι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἔτι ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ οἱ

Sumantur enim duo ΔΕ, ΕΖ minimi numeri eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ. Evidens est et quidem ΔΕ se ipsum multiplicantem ipsum Α facere; ipsum vero ΕΖ multiplicantem ipsum Β facere, et adhuc ΕΖ se ipsum multiplicantem ipsum Γ facere. Et

PROPOSITION XV.

Si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux, la somme de deux quelconques de ces nombres sera un nombre premier avec le nombre restant.

Que les trois nombres Α, Β, Γ successivement proportionnels soient les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que la somme de deux des trois nombres Α, Β, Γ est un nombre premier avec le nombre restant, savoir la somme de Α et de Β avec Γ, la somme de Β et de Γ avec Α, et la somme de Γ et de Α avec Β.

Car prenons les deux plus petits nombres ΔΕ, ΕΖ qui ont la même raison avec Α, Β, Γ. Il est évident que ΔΕ se multipliant lui-même fera Α, que ΔΕ multipliant ΕΖ fera Β, et que ΕΖ se multipliant lui-même fera Γ (2. 8). Et puisque

ΔΕ, ΕΖ ἐλάχιστοί εἰσι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Εἀν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ μὲν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοί εἰσιν[3]. Εἀν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥς τε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ωςτε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστι. Εἀν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος[3] πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν[4]. Αλλ' ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Β ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοί εἰσιν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ

quoniam ΔΕ, ΕΖ minimi sunt, primi inter se sunt. Si autem duo numeri primi inter se sunt, et uterque ad utrumque primus est; et ΔΖ igitur ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est. Sed quidem et ΔΕ ad ΕΖ primus est; ergo ΔΖ, ΔΕ ad ΕΖ primi sunt. Si autem duo numeri ad aliquem numerum primi sunt, et ex ipsis factus ad reliquum primus est; quare ipse ex ΖΔ, ΔΖ ad ΕΖ primus est. Quare et ipse ex ΖΔ, ΔΕ ad ipsum ex ΕΖ primus est. Si enim duo numeri primi inter se sunt, ipse ex uno ipsorum factus ad reliquum primus est. Sed ipse ex ΖΔ, ΔΕ est ipse ex ΔΕ cum ipso ex ΔΕ, ΕΖ; ipse igitur ex ΔΕ cum ipso ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΕΖ primus est. Et ipse quidem ex ΔΕ est Α, ipse vero ex ΔΕ, ΕΖ est Β, ipse autem ex ΕΖ est Γ, ergo Α, Β compositi ad ipsum Γ primi sunt. Similiter utique demonstrabimus et

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.
Δ. . . Ε. . . . Ζ.

les nombres ΔΕ, ΕΖ sont les plus petits, ces nombres sont premiers entr'eux (24. 7). Mais si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux (30. 7); donc ΔΖ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔΕ, ΕΖ. Mais ΔΕ est premier avec ΕΖ; donc ΔΖ et ΔΕ sont premiers avec ΕΖ. Mais si deux nombres sont premiers avec un autre, le produit de ces deux nombres est premier avec cet autre (26. 7); donc le produit de ΖΔ par ΔΕ est premier avec ΕΖ; donc le produit de ΖΔ par ΔΕ est premier avec le quarré de ΕΖ. Car si deux nombres sont premiers entr'eux, le quarré de l'un d'eux est premier avec l'autre (27. 7). Mais le produit de ΖΔ par ΔΕ égale le quarré de ΔΕ avec le produit de ΔΕ par ΕΖ (3. 2); donc le quarré de ΔΕ avec le produit de ΔΕ par ΕΖ est un nombre premier avec le quarré de ΕΖ. Mais le quarré de ΔΕ est Α, le produit de ΔΕ par ΕΖ est Β, et le quarré de ΕΖ est Γ; donc la somme de Α et de Β est un nombre premier avec Γ. Nous démontrerons de la même manière que la somme des οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. Επεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν· ὥς τε καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ[6] τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν[7] ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν[8] ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσι. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsos Β, Γ ad Α primos esse. Dico et ipsos Α, Γ ad Β primos esse. Quoniam enim ΔΖ ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est; quare et ipse ex ΔΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primus est. Sed ipsi ex ΔΖ æquales sunt ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ; et ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso semel ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt; et rursus dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Atque est quidem ipse ex ΔΕ ipse Α, ipse autem ex ΔΕ, ΕΖ ipse Β, ipse vero ex ΕΖ ipse Γ; ergo Α, Γ compositi ad ipsum Β primi sunt. Quod oportebat ostendere.

nombres Β, Γ est un nombre premier avec .Α Je dis aussi que la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Car puisque ΔΖ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔΕ, ΕΖ (30. 7), le quarré de ΔΖ sera un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ (26 et 27. 7). Mais la somme des quarrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est égale au quarré de ΔΖ (4. 2); donc la somme des quarrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des quarrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec une fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des quarrés des nombres ΔΕ, ΕΖ est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ. Mais le quarré de ΔΕ est Α, le produit de ΔΕ par ΕΖ est Β, et le quarré de ΕΖ est Γ; donc la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.

PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri primi inter se sunt, non erit ut primus ad secundum ita secundus ad alium aliquem.

Duo enim numeri A, B primi inter se sint; dico non esse ut A ad B ita B ad alium aliquem.

A, 5. B, 8. Γ------

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως[1] ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ[2] μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας[3] ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἄτοπον[4]· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β[5] οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim possibile, sit ut A ad B ita B ad Γ. Sed A, B primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri æqualiter metiuntur ipsos eamdem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur A ipsum B, ut antecedens antecedentem. Metitur autem et se ipsum; ergo A ipsos A, B metitur, primos existentes inter se, quod absurdum; non igitur erit ut A ad B ita B ad Γ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le second est à un autre nombre.

Que les deux nombres A, B soient premiers entr'eux; je dis que A n'est point à B comme B est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que A soit à B comme B est à Γ. Mais A et B sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7); et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc A mesure B, comme un antécédent mesure un antécédent. Mais A se mesure lui-même; donc A mesure A et B, qui sont premiers entr'eux; ce qui est absurde; donc A ne sera pas à B comme B est à Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄.

Εὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Εστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

PROPOSITIO XVII.

Si sunt quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem eorum primi inter se sunt; non erit ut primus ad secundum ita ultimus ad alium aliquem.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ; extremi autem eorum ipsi Α, Δ primi inter se sint; dico non esse ut Α ad Β ita Δ ad alium aliquem.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27. Ε-------

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως[1] ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ[2] μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας[3] ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ

Si enim possibile, sit ut Α ad Β ita Δ ad Ε; alterne igitur ut Α ad Δ ita Β ad Ε. Sed Α, Δ primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri æqualiter metiuntur ipsos eamdem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur

PROPOSITION XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le dernier est à un autre nombre.

Soient tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, et que leurs extrêmes Α, Δ soient premiers entr'eux; je dis que Α n'est pas à Β comme Δ est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que Α soit à Β comme Δ est à Ε; par permutation Α sera à Δ comme Β est à Ε (13. 7). Mais les nombres Α, Δ sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), donc Α mesure Β.

ἄρα ὁ Α τὸν Β. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως[4] ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ, ὥς τε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως[5] ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Αλλ' ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ· ὥς τε ὁ Α καὶ[6] τὸν Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

A ipsum B. Atque est ut A ad B ita B ad Γ; et B igitur ipsum Γ metitur, quare et A ipsum Γ metitur. Et quoniam est ut B ad Γ ita Γ ad Δ, metitur autem B ipsum Γ; metitur igitur et Γ ipsum Δ. Sed A ipsum Γ metitur; quare A et ipsum Δ metitur. Metitur autem et se ipsum; ergo A ipsos A, Δ metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur erit ut A ad B ita Δ ad alium aliquem. Quod oportebat ostendere.

A, 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27. E-------

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Εστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· καὶ δέον ἔσται ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XVIII.

Duobus numeris datis considerare, an possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

Sint dati duo numeri A, B; et oportebit considerare, an possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

Mais A est à B comme B est à Γ; donc B mesure Γ; donc A mesure aussi Γ. Mais B est à Γ comme Γ est à Δ; donc le nombre B mesure Γ, et Γ mesure Δ. Mais A mesure Γ; donc A mesure Δ. Mais il se mesure lui-même; donc A mesure les nombres A, Δ, qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc A n'est pas à B comme Δ est à un autre nombre. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVIII.

Deux nombres étant donnés, chercher s'il est possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel.

Soient donnés les deux nombres A, B; il faut chercher s'il est possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel.

Οἱ δὴ Α, Β ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Καὶ εἰ[1] πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Itaque A, B vel primi inter se sunt, vel non. Et si primi inter se sunt, demonstratum est impossibile esse ipsis tertium proportionalem invenire.

A, 4. B, 7.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. Ὁ Α δὴ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν.

Sed et non sint A, B primi inter se, et B se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat. Ipse A igitur ipsum Γ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum per Δ; ergo A ipsum Δ multiplicans ipsum Γ fecit. Sed quidem et B se ip-

A, 4. B, 6. Δ, 9. Γ, 36.

Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως[2] ὁ Β πρὸς τὸν Δ· τοῖς Α, Β ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον[3] προσεύρεται, ὁ Δ.

sum multiplicans ipsum Γ fecit; ipse igitur ex A, B æqualis est ipsi ex B; est igitur ut A ad B ita B ad Δ; ergo ipsis A, B tertius numerus proportionalis Δ inventus est.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Γ· λέγω ὅτι τοῖς Α, Β ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσευρήσθω ὁ Δ·

Sed et non metiatur A ipsum Γ; dico ipsis A, B impossibile esse tertium proportionalem invenire numerum. Si enim possibile,

Les nombres A, B sont premiers entr'eux, ou ils ne le sont pas. S'ils sont premiers entr'eux, il est démontré qu'il n'est pas possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel (16. 9).

Que les nombres A, B ne soient pas premiers entr'eux, et que B se multipliant lui-même fasse Γ. Le nombre A mesurera Γ ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure par Δ; le nombre A multipliant Δ fera Γ. Mais B se multipliant lui-même fait Γ; donc le produit de A par Δ est égal au quarré de B; donc A est à B comme B est à Δ (20. 7). On a donc trouvé un troisième nombre Δ proportionnel aux nombres A, B.

Mais que A ne mesure pas Γ; je dis qu'il est impossible de trouver un troisième nombre proportionnel aux nombres A, B. Car si cela est possible, que Δ soit le ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστὶν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ· ὥς τε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Δ. Ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρῇ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

inveniatur ipse Δ; ipse igitur ex A, Δ æqualis est ipsi ex B, ipse autem ex B est ipse Γ; ipse igitur ex A, Δ æqualis est ipsi Γ; quare A ipsum Δ multiplicans ipsum Γ fecit; ergo A ipsum Γ metitur per Δ. At vero supponitur et non metiri, quod absurdum; non igitur possibile est ipsis A, B tertium proportionalem invenire numerum, quando A ipsum Γ non metitur. Quod oportebat ostendere.

A, 6. B, 4. Δ----- Γ, 16.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότε[1] δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, πότε[2] δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XIX.

Tribus numeris datis considerare, quando possibile sit ipsis quartum proportionalem invenire.

Sint dati tres numeri A, B, Γ, et oporteat considerare, quando possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

nombre trouvé; le produit de A par Δ sera égal au quarré de B (20. 7); mais le quarré de B est Γ; donc le produit de A par Δ est égal à Γ; donc A multipliant Δ fait Γ; donc A mesure Γ par Δ. Mais on a supposé qu'il ne le mesure pas, ce qui est absurde; il est donc impossible de trouver un nombre troisième proportionnel aux nombres A, B, lorsque A ne mesure pas Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Trois nombres étant donnés, chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

Soient donnés les trois nombres A, B, Γ; il faut chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

Οἱ δὴ Α, Β, Γ ἤτοι ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ οὐ*.

Ipsi vero A, B, Γ vel deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi A, Γ primi inter se sunt; vel non.

A, 4. B, 6. Γ, 9.

Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς

Si quidem igitur A, B, Γ deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi A, Γ primi

Ou les nombres A, B, Γ sont successivement proportionnels, et leurs extrêmes A, Γ sont premiers entr'eux; ou bien cela n'est point.

Si les nombres A, B, Γ sont successivement proportionnels, et si leurs ex-

* In margine editionis Basiliæ hoc legere est : *Quia Zambertus græcum sine dubio exemplar secutus, exactâ divisione membrorum hic utitur, singula membra demonstrationibus exequitur, voluimus eam lectionem inserere ; est enim pernecessaria, licet neutrum nostrorum exemplarium tale quidquam haberet.*

Editio Parisiensis concordat cum omnibus codicibus bibliothecæ regiæ, codicibus 190, 2466, 2342 exceptis, qui concordant cum codice græco quem Zambertus secutus est: versio autem latina Zamberti hæc est:

Jam ipsi A, B, Γ, *aut continue sunt proportionales, et eorum extremi* A, Γ *sunt primi ad invicem; aut non sunt continue proportionales, et eorum extremi primi sunt ad invicem; aut continue sunt proportionales, et eorum extremi non sunt ad invicem primi; vel neque sunt continue proportionales, neque eorum extremi primi sunt ad invicem.*

Non sint jam ipsi A, B, Γ *continue proportionales, extremis rursus primis existentibus ad invicem; dico quod et sic quartum proportionalem invenire est impossibile.*

Si enim possibile, inveniatur Δ, *ut sit sicut* A *ad* B *sic* Γ *ad* Δ, *fiatque sicut* B *ad* Γ *sic* Δ *ad* E. *Et quoniam est sicut quidem* A *ad* B *sic* Γ *ad* Δ, *sicut autem* B *ad* Γ *sic* Δ *ad* E; *ex æquali igitur (per* 14 *septimi) est sicut* A *ad* Γ *sic* Γ *ad* E. *At* A, Γ *primi sunt, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur eamdem rationem habentes, antecedens antecedentem, et sequens sequentem (per* 21 *septimi); metitur igitur* A *ipsum* Γ, *antecedens antecedentem; metitur autem et se ipsum; igitur* A *ipsos* A, Γ *metitur primos ad invicem existentes, quod est impossibile; ipsis igitur* A, B, Γ *quartum proportionalem invenire est impossibile.*

ἀλλήλους εἰσὶ, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν

inter se sunt, demonstratum est impossibile

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν.

Εἰ δὲ οὐ, ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ δὴ Α[3] τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ

ipsis quartum proportionalem invenire numerum.

Si autem non, ipse Β ipsum Γ multiplicans ipsum Δ faciat; ipse igitur Α ipsum Δ vel

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Ε, 27. Δ, 216.

μετρεῖ. Μετρείτω αὐτὸν πρότερον κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πε-

metitur, vel non metitur. Metiatur cum primum per Ε; ergo Α ipsum Ε multiplicans

trêmes Α, Γ sont premiers entr'eux, on a démontré qu'il est impossible de leur trouver un quatrième nombre proportionnel (17.9).

Si cela n'est point, que Β multipliant Γ fasse Δ; le nombre Α mesurera le nombre Δ, ou ne le mesurera pas. Qu'il le mesure d'abord par Ε; le nombre Α

Sed jam rursus sint ipsi Α, Β, Γ continue proportionales; at Α, Γ non sint primi ad invicem; dico quod eis quartum proportionalem invenire est possibile.

Sed jam ipsi Α, Β, Γ neque continue sint proportionales, neque eorum extremi ad invicem sint primi, et Β ipsum Γ multiplicans ipsum efficiat Δ. Similiter ostendetur quod si quidem Α ipsum Δ metitur, possibile est eis proportionalem invenire; si autem non metitur, est impossibile. Quod ostendere oportebat.

Divisio editionis Pariensis brevior est, nec tamen minus exacta; *etenim quod Α, Β, Γ vel deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi Α, Γ primi inter se sunt, vel non;* evidens est igitur hanc divisionem comprehendere quatuor casus editionum Basiliæ et Oxoniæ.

Hervagius Euclidis suos codices græcos corrigere voluit, et eos inepte corrupit; perspicuum est enim secundum *alinea* esse meram principii petitionem. Vide præfatium et lectiones variantes.

ποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν[4] καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως[5] ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τοῖς[6] Α, Β, Γ ἄρα τέταρτος ἀνάλογον[7] προσεύρηται ὁ Ε.

ipsum Δ fecit. At vero et B ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex A, E æqualis est ipsi ex B, Γ; proportionaliter igitur est ut A ad B ita Γ ad E; ergo ipsis A, B, Γ quartus proportionalis E inventus est.

A, 8. B, 12. Γ, 18. E, 27. Δ, 216.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Δ· λέγω ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δύνατον,

At vero non metiatur A ipsum Δ; dico impossibile esse ipsis A, B, Γ quartum proportionalem invenire numerum. Si enim pos-

A, 20. B, 30. Γ, 45. E------ Δ, 1350.

προσευρήσθω ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Β, Γ ἐστὶν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ε ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. Ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δύνατόν

sibile, inveniatur E; ipse igitur ex A, E æqualis est ipsi ex B, Γ. Sed ipse ex B, Γ est ipse Δ; et ipse ex A, E igitur æqualis est ipsi Δ; ergo A ipsum E multiplicans ipsum Δ fecit; ergo A ipsum Δ metitur per E; quare metitur A ipsum Δ. Sed et non metitur, quod absurdum; non igitur possibile est ipsis

multipliant E fera Δ. Mais B multipliant Γ fait Δ; donc le produit de A par E est égal au produit de B par Γ; donc A est à B comme Γ est à E (19. 7); on a donc trouvé un quatrième nombre proportionnel E aux nombres A, B, Γ.

Mais que A ne mesure pas Δ; je dis qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre proportionnel aux nombres A, B, Γ. Car si cela est possible, soit trouvé E; le produit de A par E sera égal au produit de B par Γ (19. 7). Mais le produit de B par Γ est Δ; le produit de A par E est donc égal à Δ; donc A multipliant E fera Δ; donc A mesure Δ par E; donc A mesure Δ. Mais il ne le mesure ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ Α τὸν Δ μὴ μετρῇ.

Α, Β, Γ quartum proportionalem invenire numerum, quando Α ipsum Δ non metitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

PROPOSITIO XX.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Εστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.

Primi numeri plures sunt omni propositâ multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri Α, Β, Γ; dico quam ipsi Α, Β, Γ plures esse primos numeros.

Α, 2. Β, 3. Γ, 5.

Ε 30. Δ Ζ

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ[1] προσκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ· ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν,

Sumatur enim ipse ab ipsis Α, Β, Γ minimus mensuratus, et sit ΔΕ, et apponatur ipsi ΔΕ unitas ΔΖ; ipse igitur ΕΖ vel primus est, vel non.

pas, ce qui est absurde; il n'est donc pas possible de trouver un quatrième nombre proportionnel aux nombres Α, Β, Γ, lorsque Α ne mesure pas Δ.

PROPOSITION XX.

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité proposée de nombres premiers.

Soient Α, Β, Γ les nombres premiers que l'on aura proposés; je dis que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres Α, Β, Γ.

Soit pris le plus petit nombre mesuré par les nombres Α, Β, Γ (38. 7), et que ce nombre soit ΔΕ; ajoutons à ΔΕ l'unité ΔΖ; le nombre ΕΖ sera un nombre ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω[1]. Οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσι· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ

Sit primum primus; inventi igitur sunt primi numeri Α, Β, Γ, ΕΖ plures quam ipsi Α, Β, Γ.

At vero non sit ΕΖ primus; a primo igitur aliquo numero mensuratur. Mensuretur a primo Η; dico Η cum nullo ipsorum Α, Β, Γ esse eumdem. Si enim possibile, sit. Sed Α, Β, Γ ipsum ΔΕ metiuntur; et Η igitur ipsum ΔΕ

Α, 3. Β, 5. Γ, 7.

Ε 105. Δ Ζ

Η, 53.

μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν ἄρα[2] τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Ὁ αὐτὸς δὲ καὶ[3] ὑπόκειται πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ, οἱ Α, Β, Γ, Η. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

metietur. Metitur autem et ipsum ΕΖ; et reliquam igitur ipsam ΔΖ unitatem metietur ipse Η numerus existens, quod absurdum; non igitur Η cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem. Sed ipse et supponitur primus; inventi igitur sunt primi numeri plures Α, Β, Γ, Η propositâ multitudine ipsorum Α, Β, Γ. Quod oportebat ostendere.

premier, ou il ne le sera pas. Qu'il soit d'abord un nombre premier; on aura trouvé les nombres premiers Α, Β, Γ, ΕΖ qui sont en plus grande quantité que les nombres Α, Β, Γ.

Mais que ΕΖ ne soit pas un nombre premier; ce nombre sera mesuré par quelque nombre premier (33. 7). Qu'il soit mesuré par le nombre premier Η; je dis que Η n'est aucun des nombres Α, Β, Γ. Qu'il soit un de ces nombres, si cela est possible. Puisque les nombres Α, Β, Γ mesurent ΔΕ, le nombre Η mesurera ΔΕ. Mais Η mesure ΕΖ; donc Η, qui est un nombre, mesurera l'unité restante ΔΖ, ce qui est absurde; donc Η n'est aucun des nombres Α, Β, Γ. Mais on a supposé qu'il est un nombre premier; les nombres premiers Α, Β, Γ, Η, que l'on a trouvés, sont donc en plus grande quantité que les nombres Α, Β, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Εὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· *λέγω ὅτι ὅλος ὁ* ΑΕ *ἄρτιός ἐστιν.*

PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcunque componuntu totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcunq AB, BΓ, ΓΔ, ΔE; dico totum AE parem esse

A. . . . B. . . . . . Γ. . Δ. . . . . E

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ *ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ* ΑΕ *ἔχει μέρος ἥμισυ. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ* ΑΕ. *Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB, B ΓΔ, ΔE par est, habet partem dimidiam; qu et totus AE habet partem dimidiam. Par aut numerus est qui bifariam dividitur; par igi est AE. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὅλος ἄρτιος ἔσται.

PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcunque componunt multitudo autem ipsorum par est, totus par er

PROPOSITION XXI.

Si l'on ajoute tant de nombres pairs que l'on voudra, leur somme sera nombre pair.

Ajoutons tant de nombres pairs AB, BΓ, ΓΔ, ΔE qu'on voudra; je dis que le somme AE est un nombre pair.

Puisque chacun des nombres AB, BΓ, ΓΔ, ΔE est un nombre pair, chacun ces nombres peut être partagé en deux parties égales (déf. 6. 7); donc le somme AE peut être partagée en deux parties égales. Mais un nombre pair celui qui peut être partagé en deux parties égales; le nombre AE est donc nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité e paire, leur somme sera paire.

Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁσοιδηποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Componantur enim impares numeri quotcunque pares multitudine ipsi ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ; dico totum ΑΕ parem esse.

Α. . . Β. . . . . Γ. . . . . . . Δ. . . . . Ε

Επεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ περιττός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ' ἑκάστου, ἕκαστος ἄρα[1] τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται· ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται. Εστι[2] δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim unusquisque ipsorum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ impar est, detractâ unitate ab unoquoque, unusquisque igitur reliquorum par erit; quare et compositus ex ipsis par erit. Est autem et multitudo unitatum par; et totus igitur ΑΕ par est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ· καὶ ὅλος περισσὸς ἔσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν περισσοὶ ἀριθμοὶ[1], ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.

PROPOSITIO XXIII.

Si impares numeri quotcunque componuntur, multitudo autem ipsorum impar est; et totus impar erit.

Componantur enim quotcunque impares numeri, quorum multitudo impar sit, ipsi ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ; dico et totum ΑΔ imparem esse.

Ajoutons tant de nombres impairs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ que l'on voudra, leur quantité étant paire; je dis que leur somme ΑΕ est paire.

Car puisque chacun des nombres ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ est impair, si l'on retranche une unité de chacun d'eux, chacun des nombres restants sera pair; leur somme sera donc un nombre pair (21. 9). Mais la quantité des unités est paire; donc la somme ΑΕ est paire. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité est impaire, leur somme sera impaire.

Ajoutons tant de nombres impairs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ que l'on voudra, leur quantité étant impaire; je dis que leur somme sera impaire.

Αφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. Εστι δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἔστιν ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Auferatur ab ipso ΓΔ unitas ΔΕ; reliquus igitur ΓΕ par est. Est autem et ΓΑ par; et totus igitur ΑΕ par est. Atque est unitas ΔΕ; impar igitur est ΑΔ. Quod oportebat ostendere.

Α. . . . . Β. . . . . . . Γ. . . . . Ε. Δ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ[1] λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Απὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ἀφῃρήσθω ἄρτιος[2] ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Α. . . . . . Γ. . . . Β

Επεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ[3]. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XXIV.

Si a pari numero par aufertur, reliquus par erit.

A pari enim ipso ΑΒ auferatur par ΒΓ; dico reliquum ΓΑ parem esse.

Quoniam enim ΑΒ par est, habet partem dimidiam. Propter eadem utique et ΒΓ habet partem dimidiam; quare et reliquus ΓΑ habet partem dimidiam; par igitur est ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

Retranchons de ΓΔ l'unité ΔΕ; le reste ΓΕ sera un nombre pair (déf. 7. 7). Mais ΓΑ est un nombre pair (22. 9); donc la somme ΑΕ est un nombre pair (21. 9). Mais ΔΕ est une unité; donc ΑΔ est un nombre impair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre pair, le reste sera pair.

Que du nombre pair ΑΒ soit retranché le nombre pair ΒΓ; je dis que le reste ΓΑ est pair.

Car puisque ΑΒ est un nombre pair, ce nombre a une moitié. Par la même raison, ΒΓ a aussi une moitié; donc le reste ΓΑ a aussi une moitié; donc ΑΓ est un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Εὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ[1] λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Απὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ[2] λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

PROPOSITIO XXV.

Si a pari numero impar aufertur, reliquus impar erit.

A pari enim ipso AB impar auferatur BΓ; dico reliquum ΓA imparem esse.

A. . . . . . . Γ. Δ. . . . B

Αφηρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Εστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἔστι μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσός ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Auferatur ab ipso BΓ unitas ΓΔ; ergo ΔB par est. Est autem et AB par; et reliquus igitur AΔ par est. Atque est unitas ΓΔ; ergo ΓA impar est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ΄.

Εὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ[1] λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Απὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

PROPOSITIO XXVI.

Si ab impari numero impar aufertur, reliquus par erit.

Ab impari enim ipso AB impar auferatur BΓ; dico reliquum ΓA parem esse.

PROPOSITION XXV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre impair, le reste sera impair.

Que du nombre pair AB soit retranché le nombre impair BΓ; je dis que le reste ΓA est impair.

Car que l'unité ΓΔ soit retranchée de BΓ, le reste ΔB sera pair (déf. 7. 7). Mais AB est pair; donc le reste AΔ est pair (24. 9). Mais ΓΔ est l'unité; donc ΓA est impair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre impair, le reste sera pair.

Que de AB impair soit retranché BΓ impair; je dis que le reste ΓA est pair.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim AB impar est, auferatur unitas BΔ; reliquus igitur AΔ par est. Per eadem utique et ΓΔ par est; quare et reliquus ΓA par est. Quod oportebat ostendere.

A. . . . Γ. . . . . . Δ. B

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ[1] τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

Ἀφῃρήσθω γάρ[2] μονὰς ἡ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ[3]· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XXVI.

Si ab impari numero par aufertur, reliquus impar erit.

Ab impari enim ipso AB par auferatur BΓ; dico reliquum ΓA imparem esse.

A. Δ. . . . Γ. . . . B

Auferatur enim unitas AΔ; ergo ΔB par est. Est autem et BΓ par; et reliquus igitur ΓΔ par est. Est autem et unitas ΔA; impar igitur est ΓA. Quod oportebat ostendere.

Puisque AB est impair, retranchons-en l'unité BΔ, le reste AΔ sera pair. Par la même raison ΓΔ sera pair; donc le reste ΓA sera pair (24. 9). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVII.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre pair, le reste sera impair.

Que de AB impair soit retranché BΓ pair; je dis que le reste ΓA est impair.

Car soit retranchée l'unité AΔ; le nombre ΔB sera pair. Mais BΓ est pair; donc le reste ΓΔ est pair (24. 9). Mais ΔA est une unité; donc ΓA est impair (déf. 7. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ ἄρτιός ἐστιν.

PROPOSITIO XXVIII.

Si impar numerus parem multiplicans facit aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ parem esse.

A. . .   B. . . .

Γ. . . . .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ὁ Β ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. Ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν[1] συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris æqualibus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est B par; ergo Γ componitur ex paribus. Si autem pares numeri quotcunque componuntur, totus par est; par igitur est Γ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXVIII.

Si un nombre impair multipliant un nombre pair fait un nombre, le produit sera pair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre pair B fasse Γ; je dis que Γ est pair.

Car puisque A multipliant B a fait Γ, le nombre Γ est composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unités dans A. Mais B est pair; donc Γ est composé de nombres pairs. Mais la somme de tant nombres pairs que l'on voudra est un nombre pair (2. 9); donc Γ est un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθʹ.

Εἀν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ περισσός ἐστιν.

A. . .   B. . . . .
Γ. . . . .

Επεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν Α, Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν[1]· ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XXIX.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans facit aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A imparem B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ imparem esse.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris æqualibus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est uterque ipsorum A, B impar; ergo Γ componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar est; quare Γ impar est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIX.

Si un nombre impair multipliant un nombre impair fait un nombre, le produit sera impair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre impair B fasse Γ; je dis que Γ est impair.

Car puisque A multipliant B fait Γ, le nombre Γ est composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unités en A. Mais les nombres A, B sont impairs; donc Γ est composé de nombres impairs, dont la quantité est un nombre impair; donc Γ est un nombre impair (23. 9). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

PROPOSITIO XXX.

Si impar numerus parem numerum metitur, et dimidium ejus metietur.

Impar enim numerus A parem B metiatur; dico et dimidium ejus metiri.

A. . .   B. . . . .

Γ. . . .

Επεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Γ· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα Β[1] σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὁ Β ἄρα περισσός ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος· οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν[2] ὁ Γ· ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις, διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim A ipsum B metitur, metiatur ipsum per Γ; dico Γ non esse imparem. Si enim possibile, sit. Et quoniam A ipsum B metitur per Γ; ergo A ipsum Γ multiplicans ipsum B fecit; ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar est; ergo B impar est, quod absurdum, supponitur enim par; non igitur Γ impar est; impar igitur est Γ; quare A ipsum B metitur pariter, ob id utique et dimidium ejus metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera sa moitié.

Que le nombre impair A mesure le nombre pair B; je dis qu'il mesurera sa moitié.

Car puisque A mesure B, qu'il le mesure par Γ; je dis que que Γ n'est pas un nombre impair. Qu'il le soit, si cela est possible. Puisque A mesure B par Γ, le nombre A multipliant Γ fera B; donc B est composé de nombres impairs dont la quantité est un nombre impair; donc B est impair; ce qui est absurde, puisqu'il est supposé pair; donc Γ n'est pas impair; donc Γ est pair; donc A mesure B par un nombre pair; il mesurera sa donc moitié. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα[1] αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β διπλασίων[2] ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Α[3] πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν.

PROPOSITIO XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus est, et ad duplum ipsius primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B primus sit, ipsius autem B duplus sit Γ; dico A ad Γ primum esse.

A. . .   B. . . .

Γ. . . . .

Δ-----

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Α, Γ πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἔστιν ὁ Α περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὢν τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὁ Γ ἄρτιος· καὶ τὸν ἥμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει ὁ Δ[4]. Τοῦ δὲ Γ ἥμισύς ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὐκ ἔστιν· οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim non sunt A, Γ primi, metietur aliquis eos numerus. Metiatur, et sit Δ. Et est A impar; impar igitur et Δ. Et quoniam Δ impar existens ipsum Γ metitur, atque est Γ par; et dimidium igitur ipsius Γ metietur ipse Δ. Ipsius autem Γ dimidium est ipse B; ergo Δ ipsum B metitur. Metitur autem et ipsum A; ergo Δ ipsos A, B metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur A ad Γ primus non est; ergo A, Γ primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXI.

Si un nombre impair est premier avec un nombre, il sera premier avec son double.

Que le nombre impair A soit premier avec un nombre B, et que Γ soit double de B; je dis que A est premier avec Γ.

Car si les nombres A, Γ ne sont pas premiers, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Mais A est impair; donc Δ est impair. Et puisque Δ, qui est impair, mesure Γ, et que Γ est pair, le nombre Δ mesurera la moitié de Γ (30. 9). Mais B est la moitié de Γ; donc Δ mesure B. Mais il mesure A; donc Δ mesure les nombres A, B, qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; donc A ne peut point ne pas être premier avec Γ; donc les nombres A, Γ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϐ'.

Τῶν ἀπὸ δυάδος[1] διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

Ἀπὸ γὰρ δυάδος[2] τῆς Α δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον.

Ε, 1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Οτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος[3] ἐστὶ διπλασιασθείς. Λέγω[4] ὅτι καὶ μόνον. Εκκείσθω γὰρ μονὰς ἡ Ε[5]. Επεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ. Καὶ ἔστιν ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἄρτιος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι[6] ἑκάτερος τῶν Α, Β, Γ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XXXII.

A binario duplatorum numerorum unusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotcunque numeri B, Γ, Δ; dico B, Γ, Δ pariter pares esse tantum.

At vero unumquemque ipsorum B, Γ, Δ pariter parem esse, manifestum est; a binario enim est duplatus. Dico et tantum. Exponatur enim unitas E. Quoniam igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, et post unitatem ipse A primus est, maximus ipsorum A, B, Γ, Δ ipse Δ a nullo alio mensurabitur, nisi ab ipsis A, B, Γ. Atque est unusquisque ipsorum A, B, Γ par; ergo Δ pariter par est tantum. Similiter utique demonstrabimus unumquemque ipsorum A, B, Γ pariter parem esse tantum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXII.

Chacun des nombres doubles, à partir du binaire, est pairement pair seulement.

Qu'à partir du binaire A, soient tant de nombres doubles qu'on voudra B, Γ, Δ; je dis que les nombres B, Γ, Δ sont pairement pairs seulement.

Il est évident que chacun des nombres B, Γ, Δ est pairement pair (déf. 8. 7); car chacun est double à partir du binaire. Je dis qu'il l'est seulement. Car soit l'unité E. Puisqu'à partir de l'unité, on aura autant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que A est le premier après l'unité, le plus grand des nombres A, B, Γ, Δ, qui est Δ, ne sera mesuré par aucun nombre, si ce n'est par A, B, Γ (13. 9). Mais chacun des nombres A, B, Γ est pair; donc Δ est pairement pair seulement. Nous démontrerons semblablement que chacun des nombres A, B, Γ est pairement pair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσὸν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστι, φανερόν· ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. Εἰ γὰρ ἔσται ὁ Α καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος[1], μετρηθήσεται ὑπ' ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ, περισσὸς ὢν, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XXXIII.

Si numerus dimidium habet imparem, pariter impar est tantum.

Numerus enim A dimidium habeat imparem; dico A pariter imparem esse tantum.

A. . . . .

At vero pariter imparem esse, manifestum est; dimidium enim ipsius impar existens metitur ipsum pariter. Dico utique et tantum. Si enim esset A et pariter par, mensuraretur a pari per parem numerum; quare et dimidium ipsius mensurabitur a pari numero, impar existens, quod est absurdum; ergo A pariter impar est tantum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impaire, ce nombre est pairement impair seulement.

Que la moitié du nombre A soit impaire; je dis que A est pairement impair seulement.

Il est évident qu'il est pairement impair (déf. 9. 7); car sa moitié, qui est impaire, le mesure par un nombre pair. Je dis qu'il l'est seulement. Car si A était aussi pairement pair, un nombre pair le mesurerait par un nombre pair (déf. 8.7); donc sa moitié qui est impaire, serait mesurée par un nombre pair; ce qui est absurde; donc A est pairement impair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Εὰν ἄρτιος[1] ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος[2] διπλασιαζομένων ᾖ, μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν· ἀρτιάκιστε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος[3] διπλασιαζομένων ἔστω, μήτε τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκιστε ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

PROPOSITIO XXXIV.

Si par numerus neque est a binario unus ex duplatis, neque dimidium habet imparem; et pariter par est, et pariter impar.

Numerus enim A neque sit a binario unus ex duplatis, neque dimidium habeat imparem; dico A pariter esse parem, et pariter imparem.

A. . . . .

Οτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν[4]. Εὰν γὰρ τὸν Α τέμνωμεν[5] δίχα, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦμεν[6], καταντήσομεν εἴς τινα ἀριθμὸν[7] περισσὸν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ οὔ, καταντήσομεν εἰς δυάδα[8], καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος[9] διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ὥστε ὁ Α[10] ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. Εδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκιστε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

At verò pariter A esse parem, manifestum est; dimidium enim non habet imparem. Dico utique et pariter imparem esse. Si enim ipsum A secamus bifariam, et dimidium ipsius bifariam, et hoc semper facimus, incidemus in aliquem numerum imparem, qui metietur ipsum A per parem numerum. Si enim non, incidemus in binarium, et erit A a binario unus ex duplatis, quod non supponitur; quare A pariter impar est. Ostensum est autem et pariter parem; ergo A et pariter par est, et pariter impar. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXIV.

Si un nombre, à partir du binaire, n'est pas un de ceux qui sont doubles, et si sa moitié n'est point impaire, il est pairement pair et pairement impair.

Que le nombre A, à partir du binaire, ne soit pas un de ceux qui sont doubles, et que sa moitié ne soit point impaire; je dis que A est pairement pair et pairement impair.

Or, il est évident que A est pairement pair (déf. 8. 7), puisque sa moitié n'est pas impaire. Je dis de plus que A est pairement impair; car si nous partageons A en deux parties égales, et sa moitié en deux parties égales, et si nous faisons toujours la même chose, nous arriverons à quelque nombre impair qui mesurera A par un nombre pair. Car si cela n'est point, nous arriverons au nombre binaire, et A sera, à partir du binaire, un des nombres qui sont doubles, ce qui n'est pas supposé; donc A est pairement impair. Mais on a démontré qu'il est pairement pair; donc A est pairement pair et pairement impair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λέ.

Εὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπότε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχατοῦ ἴσοι[1] τῷ πρώτῳ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ[2] πάντας.

Εστωσαν ὁποσοιδηποτοῦν[3] ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, ἀρχόμενοι ὑπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΗΓ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

PROPOSITIO XXXV.

Si sunt quotcunque numeri deinceps proportionales, auferuntur autem et a secundo et ab ultimo æquales primo; erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, incipientes a minimo Α, et auferatur a ΒΓ et ab ΕΖ ipsi Α æqualis, uterque ipsorum ΗΓ, ΖΘ; dico esse ut ΒΗ ad Α ita ΕΘ ad Α, ΒΓ, Δ.

Α. . . . .
Β. . . . Η. . . . . Γ
Δ. . . . .
Ε. . . . . Λ. . . . . . Κ. . . . Θ. . . . . Ζ

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ΖΛ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἐστὶν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΗΓ ἴσος ἐστί[1]· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΒ ἐστὶν ἴσος. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α,

Ponatur enim ipsi quidem ΒΓ æqualis ΖΚ, ipsi autem Δ æqualis ΖΛ. Et quoniam ΖΚ ipsi ΒΓ æqualis est, quorum ΖΘ ipsi ΗΓ æqualis est; reliquus igitur ΘΚ reliquo ΗΒ est æqualis. Et quoniam est ut ΕΖ ad Δ ita Δ ad ΒΓ et ΒΓ

PROPOSITION XXXV.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si du second et du dernier on retranche un nombre égal au premier, l'excès du second sera au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui.

Soient tant de nombres qu'on voudra Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ successivement proportionnels, à commencer du plus petit Α, et retranchons de ΒΓ et de ΕΖ les nombres ΗΓ, ΖΘ égaux chacun à Α; je dis que ΒΗ est à Α comme ΕΘ est à la somme des nombres Α, ΒΓ, Δ.

Faisons ΖΚ égal à ΒΓ, et ΖΛ égal à Δ. Puisque ΖΚ est égal à ΒΓ, et que ΖΘ est égal à ΗΓ, le reste ΘΚ est égal au reste ΗΒ. Et puisque ΕΖ est à Δ comme Δ est à ΒΓ ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ τῷ ΖΚ, ὁ δὲ Α τῷ ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν ΛΖ οὕτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸν ΖΚ, καὶ ὁ ΚΖ πρὸς τὸν ΖΘ· διελόντι, ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸν ΛΖ οὕτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸν ΖΚ, καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ οὕτως οἱ ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ, ΚΖ, ΘΖ. Ισος δὲ ὁ μὲν ΚΘ τῷ ΒΗ, ὁ δὲ ΖΘ τῷ Α, οἱ δὲ ΛΖ, ΚΖ, ΖΘ τοῖς Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς[5] Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ad A, æqualis autem Δ ipsi ZΛ, ipse et BΓ ipsi ZK, ipse et A ipsi ZΘ; est igitur ut EZ ad ΛZ ita ΛZ ad ZK, et KZ ad ZΘ; dividendo, ut EΛ ad ΛZ ita ΛK ad ZK, et KΘ ad ZΘ; est igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut KΘ ad ZΘ ita EΛ, ΛK, KΘ ad ΛZ, KZ, ΘZ. Æqualis autem KΘ ipsi quidem BH, ipse vero ZΘ ipsi A, et ΛZ, KZ, ΘZ ipsis Δ, BΓ, A; est igitur ut BH ad A ita EΘ ad Δ, BΓ, A; est igitur ut secundi excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes. Quod oportebat ostendere.

et comme BΓ est à A; que Δ est égal à ZΛ; que BΓ est égal à ZK, et A égal à ZΘ, le nombre EZ est à ZΛ comme ΛZ est à ZK, et comme KZ est à ZΘ; donc par soustraction, EΛ est à ΛZ comme ΛK est à ZK, et comme KΘ est à ZΘ; donc un des antécédents est à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 7); donc KΘ est à ZΘ comme la somme des nombres EΛ, ΛK, KΘ est à la somme des nombres ΛZ, KZ, ΘZ. Mais KΘ est égal à BH, ZΘ à A, et la somme des nombres ZΛ, KZ, ΘZ à la somme des nombres Δ, BΓ, A; donc BH est à A comme EΘ est à la somme des nombres Δ, BΓ, A; donc l'excès du second est au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὴν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν[1] *ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ* Α, Β, Γ, Δ, *καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ* Ε, *καὶ ὁ* Ε *τὸν* Δ *πολλαπλασιάσας τὸν* ΖΗ *ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ* ΖΗ *τέλειός ἐστιν.*

Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ *τῷ πλήθει τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ* Ε *εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ* Ε, ΘΚ, Λ, Μ· *δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ* Α *πρὸς τὸν* Δ *οὕτως ὁ* Ε *πρὸς τὸν* Μ[2]· *ὁ ἄρα ἐκ τῶν* Ε, Δ *ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν* Α, Μ. *Καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν* Ε, Δ *ὁ* ΖΗ· *καὶ ὁ ἐκ τῶν* Α, Μ

PROPOSITIO XXXVI.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in duplâ analogiâ, quoad totus compositus primus fiat, et totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

Ab unitate enim exponantur quotcunque numeri Α, Β, Γ, Δ in duplâ analogiâ, quoad totus compositus primus fiat, et toti æqualis sit ipse Ε, et Ε ipsum Δ multiplicans ipsum ΖΗ faciat; dico ΖΗ perfectum esse.

Quot enim sunt Α, Β, Γ, Δ multitudine tot ab ipso Ε sumantur ipsi Ε, ΘΚ, Λ, Μ in duplâ analogiâ; ex æquo igitur est ut Α ad Δ ita Ε ad Μ; ipse igitur ex Ε, Δ æqualis est ipsi ex Α, Μ. Et est ipse ex Ε, Δ ipse ΖΗ; et

PROPOSITION XXXVI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme deviène un nombre premier; que Ε soit égal à leur somme, et que Ε multipliant Δ fasse ΖΗ; je dis que ΖΗ est un nombre parfait.

Car, à partir de Ε, prenons une quantité de nombres, en raison double, qui soit égale à celle des nombres Α, Β, Γ, Δ; que ces nombres soient Ε, ΘΚ, Λ, Μ; par égalité, Α sera à Δ comme Ε est à Μ (14. 7); donc le produit de Ε par Δ sera égal au produit de Α par Μ (19. 7). Mais le produit de Ε par Δ est ΖΗ; donc le ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ· ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Καὶ ἔστι δυὰς ὁ Α· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. Εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Μ, Λ, ΘΚ, Ε ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων· οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ, ΖΗ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν

ipse ex A, M igitur est ZH; ergo A ipsum M multiplicans ipsum ZH fecit; ergo M ipsum ZH metitur per unitates quæ in A. Atque est binarius A; duplus igitur est ZH ipsius M. Sunt autem et M, Λ, ΘK, E deinceps dupli inter se; ergo E, ΘK, Λ, M, ZH deinceps proportionales

1. A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16.

62

E, 31. Θ N K Λ, 124. M, 248.

31 31

Z Ξ 496 H

31 465

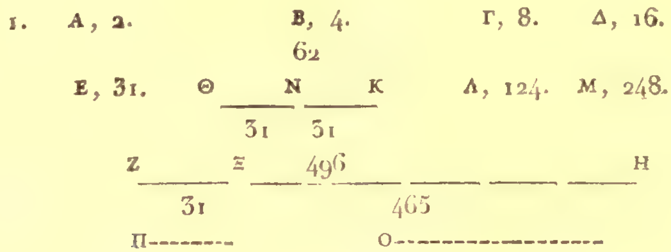
Π O

ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. Ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ ἐσχάτου τοῦ ΖΗ τῷ πρώτῳ τῷ Ε ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΘΝ, ΖΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτῷ πάντας· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΝΚ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τοὺς Μ, Λ, ΘΚ, Ε. Καὶ ἔστιν ὁ ΝΚ ἴσος τῷ Ε· καὶ ὁ ΞΗ ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Μ, Λ, ΘΚ, Ε. Ἔστι δὲ καὶ

sunt in duplâ analogiâ. Auferatur igitur a secundo ΘK et ab ultimo ZH ipsi primo E æqualis, uterque ipsorum ΘN, ZΞ; est igitur ut secundi numeri excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes; est igitur ut NK ad E ita ΞH ad M, Λ, ΘK, E. Et est NK æqualis ipsi E; et ΞH igitur æqualis est ipsis M, Λ, ΘK, E. Est autem et ΞZ ipsi

produit de A par M est aussi ZH; donc A multipliant M fait ZH; donc M mesure ZH par les unités qui sont en A. Mais A est le nombre binaire; donc ZH est double de M; mais les nombres M, Λ, ΘK, E sont successivement doubles les uns des autres; donc E, ΘK, Λ, M, ZH sont successivement proportionnels en raison double. Retranchons du second ΘK et du dernier ZH, les nombres ΘN, ZΞ égaux chacun au premier E; l'excès du second nombre sera au premier comme l'excès du dernier est à la somme des nombres qui sont avant lui (35. 9); donc NK est à E comme ΞH est à la somme des nombres M, Λ, ΘK, E. Mais NK est égal à E; donc ΞH est égal à la somme des nombres M, Λ, ΘK, E. Mais ΞZ est égal à E, et E ὁ ΞΖ τῷ Ε ἴσος, ὁ δὲ Ε τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ ἴσος ἐστὶ τοῖς τε Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω ὅτι ὁ καὶ[3] ΖΗ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείτω τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ ἔστω ὁ αὐτός. Καὶ ὁσάκις ὁ Ο τὸν ΖΗ μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Π· ὁ Π ἄρα τὸν Ο πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν[5]· ὁ Δ ἄρα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ με-

E æqualis, sed E ipsis A, B, Γ, Δ et unitati; totus igitur ZH æqualis est et ipsis E, ΘK, Λ, M et ipsis A, B, Γ, Δ et unitati, et mensuratur ab ipsis. Dico et ZH a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M et ab unitate. Si enim possibile, metiatur aliquis O ipsum ZH, et ipse O cum nullo ipsorum A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M sit idem. Et quoties O ipsum ZH metitur tot unitates sint in Π; ergo Π ipsum O multiplicans ipsum ZH fecit. At vero quidem E ipsum Δ multiplicans ipsum ZH fecit; est igitur ut E ad Π ita O ad Δ. Et quoniam ab unitate deinceps proportionales sunt A, B, Γ, Δ, sed post unitatem ipse A primus est; ergo Δ a nullo alio numero mensurabitur, nisi ab ipsis



égal à la somme des nombres A, B, Γ, Δ augmentée de l'unité ; donc ZH tout entier égale la somme des nombres E, ΘK, Λ, M augmentée de la somme des nombres A, B, Γ, Δ et de l'unité, et ZH est mesuré par tous ces nombres (11. 9). Je dis que ZH n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par les nombres A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M et par l'unité. Car si cela est possible, que quelque nombre O mesure ZH, et que O ne soit aucun des nombres A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M. Qu'il y ait dans Π autant d'unités que O mesure de fois ZH ; le nombre Π multipliant O fera ZH. Mais E multipliant Δ fait ZH ; donc E est à Π comme O est à Δ (19. 7). Et puisque, à partir de l'unité, les nombres A, B, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que le premier nombre après l'unité est A, le nombre Δ n'est mesuré par aucun τρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὑπόκειται ὁ Ο οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ Ο τὸν Δ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ο πρὸς τὸν Δ οὕτως[6] ὁ Ε πρὸς τὸν Π· οὐδὲ ὁ Ε ἄρα τὸν Π μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν[7] ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν[8]· οἱ Ε, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς[9] ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. Ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ· ὁ Π ἄρα ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Ἔστω τῷ Β ὁ αὐτός. Καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ Ε, οἱ Ε, ΘΚ, Λ. Καί εἰσιν οἱ Ε, ΘΚ, Λ τοῖς Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως[10] ὁ Ε πρὸς τὸν Λ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Β, Λ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, Ε. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π, Ο· καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, Ο ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Λ· ἔστιν ἄρα

Α, Β, Γ; et supponitur Ο cum nullo ipsorum Α, Β, Γ idem; non igitur metietur Ο ipsum Δ. Sed ut Ο ad Δ ita Ε ad Π; neque Ε igitur ipsum Π metitur. Et est Ε primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo Ε, Π primi inter se sunt. Sed primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; et est ut Ε ad Π ita Ο ad Δ; æqualiter igitur Ε ipsum Ο metitur atque Π ipsum Δ. Sed Δ a nullo alio mensuratur, nisi ab ipsis Α, Β, Γ; ergo Π cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem. Sit cum ipso Β idem. Et quot sunt Β, Γ, Δ multitudine tot sumantur Ε, ΘΚ, Λ ab ipso Ε. Et sunt Ε, ΘΚ, Λ cum ipsis Β, Γ, Δ in eâdem ratione; ex æquo igitur est ut Β ad Δ ita Ε ad Λ; ipse igitur ex Β, Λ æqualis est ipsi ex Δ, Ε. Sed ipse ex Δ, Ε æqualis est ipsi ex Π, Ο; et ipse ex Π, Ο igitur æqualis est ipsi ex Β, Λ; est igitur ut Π ad Β ita Λ ad Ο.

autre nombre que par Α, Β, Γ (13. 9); mais on a supposé que Ο n'est aucun des nombres Α, Β, Γ; donc Ο ne mesure pas Δ. Mais Ο est à Δ comme Ε est à Π; donc Ε ne mesure pas Π (déf. 21. 7). Mais Ε est un nombre premier, et tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (31. 7); donc les nombres Ε, Π sont premiers entre eux. Mais les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), et Ε est à Π comme Ο est à Δ; donc Ε mesure Ο autant de fois que Π mesure Δ. Mais Δ n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par Α, Β, Γ; donc Π est un des nombres Α, Β, Γ. Qu'il soit Β. A partir de Ε, prenons les nombres Ε, ΘΚ, Λ égaux en quantité aux nombres Β, Γ, Δ. Mais les nombres Ε, ΘΚ, Λ sont en même raison que lesnombres Β, Γ, Δ; donc, par égalité, Β est à Δ comme Ε est à Λ; donc le produit de Β par Λ est égal au produit de Δ par Ε (19. 7). Mais le produit de Δ par Ε est égal au produit de Π par Ο; donc le produit de Π par Ο est égal au produit ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Β οὕτως[11] ὁ Λ πρὸς τὸν Ο. Καὶ ἔστιν ὁ Π τῷ Β ὁ αὐτός· καὶ ὁ Λ ἄρα τῷ Ο ἐστὶν ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ Ο ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ τις ἀριθμὸς, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. Καὶ ἐδείχθη ὁ ΖΗ τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ, καὶ τῇ μονάδι ἴσος· τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Et est Π cum ipso B idem; et Λ igitur cum ipso O est idem, quod impossibile, etenim O supponitur cum nullo ipsorum expositorum idem; non igitur ipsum ZH metitur aliquis numerus, præter ipsos A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M et unitatem. Et ostensus est ZH ipsis A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, et unitati æqualis; perfectus autem numerus est suis ipsius partibus æqualis existens; perfectus igitur est ZH. Quod oportebat ostendere.

de B par Λ; donc Π est à B comme Λ est à O (19. 7). Mais Π est le même que B; donc Λ est le même que O, ce qui est impossible; car on a supposé que O n'était aucun des nombres A, B, Γ; donc aucun nombre ne mesure ZH, si ce ne sont les nombres A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M et l'unité. Mais on a démontré que ZH égale la somme des nombres A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M augmentée de l'unité, et un nombre parfait est celui qui est égal à ses parties (déf. 23. 7); donc ZH est un nombre parfait. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU NEUVIÈME LIVRE.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ΟΡΟΙ.

α΄. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα.

β΄. Ασύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ΄. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ὑπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται.

DEFINITIONES.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eâdem mensurâ mensurantur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.

3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatio mensurantur.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. On appèle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés sont mesurés par une même surface.

δ'. Ασύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

ε'. Τούτων ὑποκειμένων, δείκνυται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει[1]· καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα, ῥητή.

ϛ'. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴ τε μήκει καὶ δυνάμει, εἴ τε δυνάμει μόνον, ῥηταί.

ζ'. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

η'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον, ῥητόν.

θ'. Καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα, ῥητά.

ι'. Τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα[3], ἄλογα καλείσθω.

ια'. Καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ, ἄλογοι· εἰ μὲν τετράγωνα[4] εἴη, αὗται αἱ πλευραί· εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα[5] αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

5. His suppositis, ostenditur propositæ rectæ esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocentur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appèlera rationnelle la droite proposée.

6. On appèlera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appèlera rationel le quarré de la proposée.

9. On appèlera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

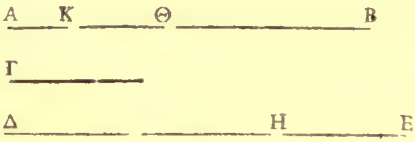
10. Et irrationnelles celles qui lui sont incommensurables.

11. On appèlera encore irrationnelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται· λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ [1]ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

Εστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, *ὧν μεῖζον τὸ* ΑΒ· *λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ* ΑΒ *ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μεγέθος ὃ ἔσται[2] ἔλασσον τοῦ* Γ *μεγέθους.*



Τὸ Γ *γὰρ[3] πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ* ΑΒ[4] *μεῖζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ* ΔΕ *τοῦ μὲν* Γ *πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ* ΑΒ *μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ* ΔΕ *εἰς τὰ τῷ* Γ *ἴσα τὰ* ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, *καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ*

PROPOSITIO I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

Sint duæ magnitudines inæquales AB, Γ, quarum major AB; dico si ab ipsâ AB auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relictum iri quamdam magnitudinem quæ erit minor magnitudine Γ.

Etenim Γ multiplicata erit aliquando ipsâ AB minor. Multiplicetur, et sit ΔE ipsius quidem Γ multiplex, ipsâ autem AB major, et dividatur ΔE in partes ipsi Γ æquales ΔZ, ZH, HE, et auferatur ab AB quidem ipsa BΘ major quam

PROPOSITION I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Soient deux grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur Γ.

Car Γ étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB. Qu'il soit multiplié; que ΔE soit un multiple de Γ, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔE en parties ΔZ, ZH, HE égales chacune à Γ; retranchons de AB une partie BΘ

AB μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ BΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ AΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘK, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ AB διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔE διαιρέσεσι· ἔστωσαν οὖν αἱ AK, KΘ, ΘB διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔZ, ZH, HE.

dimidium BΘ, ab AΘ autem ipsa ΘK major quam dimidium, et hoc semper fiat quoad divisiones ipsius AB multitudine æquales fiant ipsius ΔE divisionibus; sint igitur divisiones AK, KΘ, ΘB multitudine æquales ipsis ΔZ, ZH, HE.

Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔE τοῦ AB, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔE ἔλασσον τοῦ ἡμίσους[5] τὸ EH, ἀπὸ δὲ τοῦ AB μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ[6] τὸ BΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ HΔ λοιποῦ τοῦ ΘA μεῖζόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ HΔ τοῦ ΘA, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν HΔ ἥμισυ τὸ HZ, τοῦ δὲ ΘA μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ[7] τὸ ΘK· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔZ λοιποῦ τοῦ AK μεῖζόν ἐστιν. Ἴσον δὲ τὸ ΔZ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ AK μεῖζόν ἐστιν. Ἔλασσον ἄρα τὸ AK τοῦ Γ· καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ AB μεγέθους τὸ AK μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Et quoniam major est ΔE quam AB, et ablata est ab ΔE quidem ipsa EH minor quam dimidium, ab AB autem ipsa BH major quam dimidium; reliquum igitur HΔ reliquo ΘA majus est. Et quoniam major est HΔ quam ΘA, et ablatum est ab ipsâ quidem HΔ dimidium HZ, ab ΘA autem ipsa ΘK major quam dimidium; reliquum igitur ΔZ reliquo AK majus est. Æqualis autem ΔZ ipsi Γ; et Γ igitur quam AK major est. Minor igitur AK quam Γ; relicta est igitur ex magnitudine AB magnitudo AK minor existens expositâ minore magnitudine Γ. Quod oportebat ostendere.

plus grande que sa moitié, de AΘ une partie ΘK plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de AB soit égal au nombre des divisions de ΔE; que le nombre des divisions AK, KΘ, ΘB soit donc égal au nombre des divisions ΔZ, ZH, HE.

Puisque ΔE est plus grand que AB, et qu'on a retranché de ΔE une partie EH plus petite que sa moitié, et qu'on a retranché de AB une partie BΘ plus grande que sa moitié, le reste HΔ est plus grand que le reste ΘA. Et puisque HΔ est plus grand que ΘA, qu'on a retranché de HΔ sa moitié HZ, et que de ΘA on a retranché ΘK plus grand que sa moitié, le reste ΔZ sera plus grand que le reste AK. Mais ΔZ est égal à Γ; donc Γ est plus grand que AK; donc AK est plus petit que Γ. Il reste donc de la grandeur AB une grandeur AK plus petite que la grandeur Γ, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.

Ομοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση[8] ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα[9].

Similiter autem demonstrabitur, et si dimidia essent ablata.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

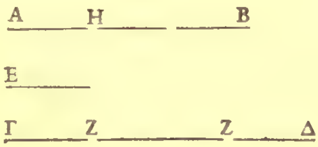
Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων[1] ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ[2] ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

PROPOSITIO II.

Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; incommensurabiles erunt magnitudines.

Duabus enim magnitudinibus existentibus inæqualibus AB, ΓΔ, et minore AB, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metiatur præcedentem; dico incommensurabiles esse AB, ΓΔ magnitudines.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω τὸ[3] Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΔΖ καταμετροῦν λειπέτω

Si enim sunt commensurabiles, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, si possibile, et sit E; et AB quidem ipsam ΔZ metiens relinquat

La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

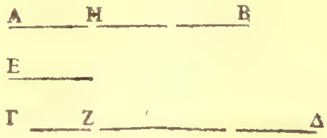
PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

Soient les deux grandeurs inégales AB, ΓΔ; que AB soit la plus petite, et que la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; je dis que les grandeurs AB, ΓΔ sont incommensurables.

Car si elles sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, s'il est possible, et que ce soit E; que AB mesurant ΔZ ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. Γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. Επεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα

se ipsâ minorem ΓΖ; sed ΓΖ ipsam ΒΗ metiens relinquat se ipsâ minorem ΑΗ, et hoc semper fiat, quoad relinquatur aliqua magnitudo, quæ sit minor quam Ε. Fiat, et relinquatur ΑΗ minor quam Ε. Quoniam igitur Ε ipsam ΑΒ metitur, sed ΑΒ ipsam ΔΖ metitur; et Ε igitur ipsam ΔΖ



τὸ ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. Αλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Εὰν ἄρα δύο μεγεθῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam igitur ΓΖ metietur. Sed ΓΖ ipsam ΒΗ metitur; et Ε igitur ipsam ΒΗ metitur. Metitur autem et totam ΑΒ; et reliquam igitur ΑΗ metietur, major minorem, quod est impossibile. Non igitur magnitudines ΑΒ, ΓΔ metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt magnitudines ΑΒ, ΓΔ.

Si igitur duabus magnitudinibus, etc.

laisse ΓΖ plus petit que lui; que ΓΖ mesurant ΒΗ laisse ΑΗ plus petit que lui; que l'on fasse toujours la même chose jusqu'à ce qu'il reste une certaine grandeur qui soit plus petite que Ε. Que cela soit fait, et qu'il reste ΑΗ plus petit que Ε (1. 10). Puisque Ε mesure ΑΒ, et que ΑΒ mesure ΔΖ, Ε mesurera ΔΖ. Mais Ε mesure ΓΔ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΓΖ. Mais ΓΖ mesure ΒΗ; donc Ε mesure ΒΗ. Mais Ε mesure ΑΒ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΑΗ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc aucune grandeur ne mesurera les grandeurs ΑΒ, ΓΔ; donc les grandeurs ΑΒ, ΓΔ sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα[1] τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι[2] μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. Εἰ μὲν οὖν[3] μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· τὸ ΑΒ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστὶ, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον[4]· μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ· καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος[5] ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ,

PROPOSITIO III.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB, ΓΔ, quarum minor AB; oportet igitur ipsarum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

Etenim AB magnitudo vel metitur ΓΔ vel non. Si quidem metitur, metitur autem et se ipsam; ergo AB ipsarum AB, ΓΔ communis mensura est, et manifestum est etiam maximam; major enim magnitudine AB ipsam AB non metietur.

Non metiatur autem AB ipsam ΓΔ; et detractâ semper minore de majore, reliqua metietur aliquando præcedentem, propterea

PROPOSITION III.

Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient AB, ΓΔ les deux grandeurs commensurables données; que AB soit la plus petite; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

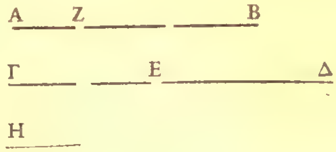
Car la grandeur AB mesure ΓΔ ou ne le mesure pas. Si AB mesure ΓΔ, à cause qu'il se mesure lui-même, AB sera une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ, et il est évident qu'elle en est la plus grande, car une grandeur plus grande que AB ne mesurera pas AB.

Mais que AB ne mesure pas ΓΔ. Retranchant toujours la plus petite de la plus grande, un reste mesurera enfin le reste précédent (2. 10), parce que les διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΕΔ[6] καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ ΑΖ δὲ[7] τὸ ΓΕ μετρείτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΔΕ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ[8]· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ, ΓΔ. Ἔστω[9] τὸ Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ[10] λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν[11] τὸ

quod non sint incommensurabiles ΑΒ, ΓΔ; et ΑΒ quidem ipsam ΕΔ metiens relinquat se ipsâ minorem ΕΓ, sed ΕΓ ipsam ΖΒ metiens relinquat se ipsâ minorem ΑΖ, et ΑΖ ipsam ΓΕ metiatur.

Quoniam igitur ΑΖ ipsam ΓΕ metitur, sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΖΒ metietur. Metitur autem et se ipsam; et totam igitur ΑΒ metietur ipsa ΑΖ. Sed ΑΒ ipsam ΔΕ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΔΕ metietur. Metitur autem et ipsam ΓΕ; et totam igitur ΓΔ metitur; ergo ΑΖ ipsas ΑΒ, ΓΔ metitur; ergo ΑΖ ipsarum ΑΒ, ΓΔ communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non, erit aliqua magnitudo major ipsâ ΑΖ, quæ metietur ipsas ΑΒ, ΓΔ. Sit Η. Quoniam igitur Η ipsam ΑΒ metitur, sed ΑΒ ipsam ΕΔ metitur; et Η igitur ipsam ΕΔ metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam igitur ΓΕ metietur Η. Sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et Η igitur ipsam ΖΒ metietur. Metitur autem et totam ΑΒ; et reliquam



grandeurs ΑΒ, ΓΔ ne sont pas incommensurables; que ΑΒ mesurant ΕΔ laisse ΕΓ plus petit que lui; que ΕΓ mesurant ΖΒ laisse ΑΖ plus petit que lui, et enfin que ΑΖ mesure ΓΕ.

Puisque ΑΖ mesure ΓΕ, et que ΓΕ mesure ΖΒ, ΑΖ mesurera ΖΒ. Mais ΑΖ se mesure lui-même; donc ΑΖ mesurera ΑΒ tout entier. Mais ΑΒ mesure ΔΕ; donc ΑΖ mesurera ΔΕ. Mais il mesure ΓΕ; il mesure donc ΓΔ tout entier; donc ΑΖ mesure les grandeurs ΑΒ, ΓΔ; donc ΑΖ est une commune mesure des grandeurs ΑΒ, ΓΔ. Je dis aussi qu'il en est la plus grande. Car si cela n'est point, il y aura une certaine grandeur plus grande que ΑΖ qui mesurera ΑΒ et ΓΔ. Qu'elle soit Η. Puisque Η mesure ΑΒ, et que ΑΒ mesure ΕΔ, Η mesurera ΕΔ. Mais Η mesure ΓΔ tout entier; donc Η mesurera le reste ΓΕ. Mais ΓΕ mesure ΖΒ; donc Η mesurera ΖΒ. Mais il mesure ΑΒ tout entier; il mesurera donc le reste ΑΖ, le plus grand le

ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ[12] μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται τὸ ΑΖ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

igitur AZ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur major aliqua magnitudo ipsâ AZ ipsas AB, ΓΔ metietur; ergo AZ ipsarum AB, ΓΔ maxima communis mensura est.

Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB, ΓΔ, maxima communis mensura inventa est AZ. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metitur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

PROPOSITIO IV.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

plus petit, ce qui est impossible. Donc quelque grandeur plus grande que AZ ne mesurera pas AB et ΓΔ; donc AZ est la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure AZ des deux grandeurs commensurables données AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

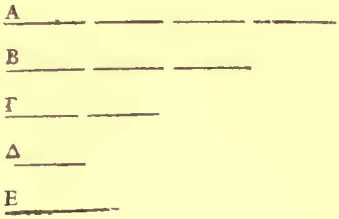
De là il est évident que si une grandeur mesure deux grandeurs, elle mesure aussi leur plus grande commune mesure.

PROPOSITION IV.

Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Sint datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, Γ; oportet igitur ipsarum A, B, Γ maximam communem mensuram invenire.



Εἰλήφθω γὰρ δύο[1] τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὔ[2]. Μετρείτω πρότερον. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β· τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ[3]· τὸ Δ ἄρα[4] τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β οὐ μετρεῖ[5].

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ

Sumatur enim duarum A, B maxima communis mensura, et sit Δ; itaque Δ ipsam Γ vel metitur vel non. Metiatur primum. Quoniam igitur Δ ipsam Γ metitur, metitur autem et ipsas A, B; ergo Δ ipsas A, B, Γ metitur; ergo Δ ipsarum A, B, Γ communis mensura est. Manifestum est etiam et maximam, major enim magnitudine Δ ipsas A, B non metitur.

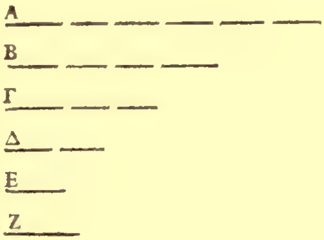
Sed non metiatur Δ ipsam Γ. Dico primum commmensurabiles esse Γ, Δ. Quoniam enim commensurabiles sunt A, B, Γ, metietur aliqua eas magnitudo, quæ scilicet et ipsas A, B metietur; quare et ipsarum A, B maximam communem mensuram Δ metiètur. Metitur autem et Γ; quare dicta magnitudo metietur ipsas Γ, Δ;

Soient A, B, Γ les trois grandeurs commensurables données; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs A, B, Γ.

Prenons la plus grande commune mesure de A et de B (3. 10), et qu'elle soit Δ; Δ mesure Γ ou ne le mesure pas. Qu'il le mesure d'abord. Puisque Δ mesure Γ, et qu'il mesure aussi A et B, Δ mesure les grandeurs A, B, Γ; donc Δ est une commune mesure des grandeurs A, B, Γ. Et il est évident qu'il en est la plus grande, car une grandeur plus grande que Δ ne mesure pas A et B.

Mais que Δ ne mesure pas Γ; je dis d'abord que les grandeurs Γ, Δ sont commensurables. Car puisque les grandeurs A, B, Γ sont commensurables, quelque grandeur les mesurera; mais cette même grandeur mesurera A et B; elle mesurera donc leur plus grande commune mesure Δ. Mais cette même grandeur mesure Γ; donc elle mesure Γ et Δ; donc Γ et Δ sont commensurables τὰ Γ, Δ. Εἰλήφθω οὖν[6] αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει[7]. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ[8]· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν ἐστὶ μέτρον[9]. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τι τοῦ Ε

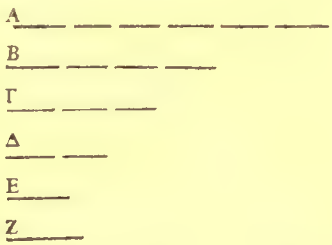
commensurabiles igitur sunt Γ, Δ. Sumatur itaque ipsarum maxima communis mensura, et sit E. Quoniam igitur E ipsam Δ metitur, sed Δ ipsas A, B metitur; et E igitur ipsas A, B metietur. Metitur autem et Γ. Ergo E ipsas A, B, Γ metitur; ergo E ipsarum A, B, Γ communis est mensura. Dico et maximam. Si enim possibile, sit



μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α, Β, Γ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα[10] μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α, Β[11] μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. Τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ[12], τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ

aliqua ipsâ E major magnitudo Z, et metiatur ipsas A, B, Γ. Et quoniam Z ipsas A, B, Γ metitur, et ipsas A, B igitur metietur; et ipsarum A, B maximam communem mensuram metietur. Sed ipsarum A, B maxima communis mensura est Δ; ergo Z ipsam Δ metitur. Metitur autem et ipsam Γ; ergo Z ipsas Γ, Δ metitur; et igitur ipsarum Γ, Δ maximam communem mensuram metietur Z. Sed ipsarum Γ, Δ maxima communis mensura est E; ergo Z ipsam E metitur, major minorem, quod est

(déf. 1. 10). Prenons donc leur plus grande commune mesure (3. 10), et qu'elle soit E. Puisque E mesure Δ, et que Δ mesure A et B, E mesurera A et B. Mais il mesure Γ; donc E mesure les grandeurs A, B, Γ; donc E est une commune mesure des grandeurs A, B, Γ. Je dis aussi qu'elle en est la plus grande. Car que ce soit Z plus grand que E, si cela est possible, et que Z mesure les grandeurs A, B, Γ. Puisque Z mesure les grandeurs A, B, Γ, il mesurera A et B; il mesurera donc la plus grande commune mesure de A et B (cor. 3. 10). Mais la plus grande commune mesure de A et de B est Δ; donc Z mesure Δ; mais il mesure Γ; donc Z mesure Γ et Δ; donc Z mesurera la plus grande commune mesure de Γ et de Δ. Mais la plus grande commune mesure de Γ et de Δ est E; donc Z mesure E, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc une ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μεγέθους μέγεθος τὰ Α, Β, Γ μεγέθη[13] μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν, ἐὰν[14] μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ· ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ τὸ Δ.



Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων[15], τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει[16].

Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πλειόνων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει[17].

impossibile; non igitur major aliqua ipsâ E magnitudine magnitudo ipsas A, B, Γ magnitudines metitur; ergo E ipsarum A, B, Γ maxima communis mensura est, si non metitur Δ ipsam Γ; si autem metitur, ipsa Δ.

Tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, maxima communis mensura inventa est. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo tres magnitudines metitur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

Similiter autem et in pluribus maxima communis mensura invenietur, et corollarium procedet.

grandeur plus grande que la grandeur E ne mesurera pas les grandeurs A, B, Γ; donc E sera la plus grande commune mesure des grandeurs A, B, Γ, si Δ ne mesure pas Γ; et s'il le mesure, ce sera Δ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure de trois grandeurs commensurables données. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si une grandeur mesure trois grandeurs, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure.

On trouvera semblablement la plus grande commune mesure d'un plus grand nombre de grandeurs, et le même corollaire s'en suivra.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

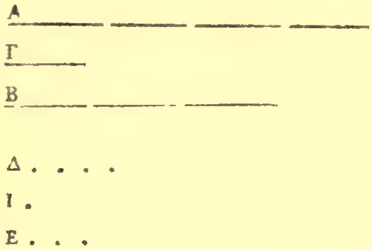
Επεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. Καὶ ὁσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

PROPOSITIO V.

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines A, B; dico A ad B rationem habere, quam numerus ad numerum.

Quoniam enim commensurabiles sunt A, B, metietur aliqua ipsas magnitudo. Metiatur, et sit Γ. Et quoties Γ ipsam A metitur tot unitates sint in Δ, quoties autem Γ ipsam B metitur tot unitates sint in E.



Επεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν

Quoniam igitur Γ ipsam A metitur per unitates quæ in Δ, metitur autem et unitas ipsum Δ per unitates quæ sunt in ipso; æqualiter igitur

PROPOSITION V.

Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

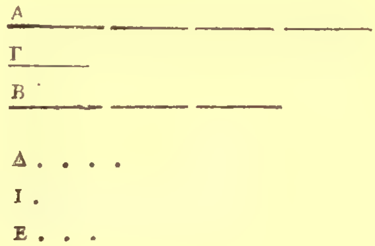
Soient les grandeurs commensurables A, B; je dis que A a avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Car puisque les grandeurs A, B sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Γ. Qu'il y ait autant d'unités dans Δ que Γ mesure de fois A; qu'il y ait aussi autant d'unités dans E que Γ mesure de fois B.

Puisque Γ mesure A par les unités qui sont en Δ, et que l'unité mesure Δ par les unités qui sont en lui, l'unité mesure le nombre Δ autant de fois que la

Δ μετρεῖ ἀριθμόν[1] καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας·

unitas ipsum Δ metitur numerum atque Γ magnitudo ipsam A; est igitur ut Γ ad A ita unitas ad Δ; convertendo igitur, ut A ad Γ ita Δ ad unitatem. Rursus, quoniam Γ ipsam B metitur per unitates quæ in E, metitur autem et unitas ipsum E per unitates quæ in ipso; æqualiter



ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως[2] ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δίισου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

igitur unitas ipsum E metitur atque Γ ipsam B; est igitur ut Γ ad B ita unitas ad E. Ostensum est autem et ut A ad Γ ita Δ ad unitatem; ex æquo igitur est ut A ad B ita Δ numerus ad E.

Commensurabiles igitur magnitudines A, B inter se rationem habent quam Δ numerus ad numerum E. Quod oportebat ostendere.

grandeur Γ mesure A; donc Γ est à A comme l'unité est à Δ; donc, par conversion, A est à Γ comme Δ est à l'unité. De plus, puisque Γ mesure B par les unités qui sont en E, et que l'unité mesure E par les unités qui sont en lui, l'unité mesure E autant de fois que Γ mesure B; donc Γ est à B comme l'unité est à E. Mais on a démontré que A est à Γ comme Δ est à l'unité; donc, par égalité, A est à B comme le nombre Δ est à E.

Donc les grandeurs commensurables A, B ont entr'elles la raison que le nombre Δ a avec le nombre E. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἔσται[1] τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα[2] λόγον ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

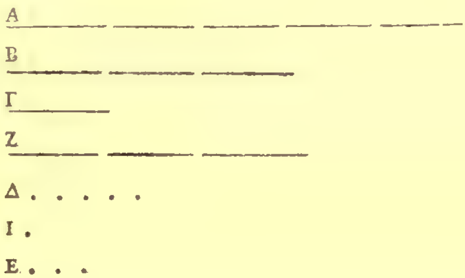
Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δέ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem habeant quam numerus Δ ad numerum Ε; dico commensurabiles esse Α, Β magnitudines.

Quot enim sunt in Δ unitates, in tot partes æquales dividatur Α, et uni ipsarum æqualis sit Γ; quot autem sunt in Ε unitates, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi Γ componatur Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ τὸ αὐτὸ[3] μέρος ἐστὶ καὶ τὸ[4] Γ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α

Quoniam igitur quot sunt in Δ unitates, tot sunt et in Α magnitudines æquales ipsi Γ; quæ pars igitur est unitas ipsius Δ, eadem pars est et Γ ipsius Α; est igitur ut Γ ad Α ita

PROPOSITION VI.

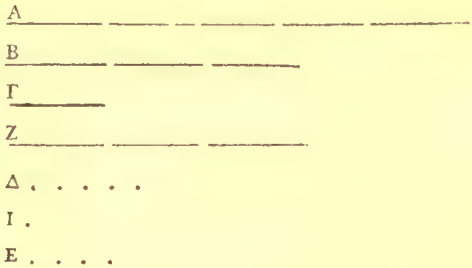
Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

Que les deux grandeurs Α, Β ayent entr'elles la même raison que le nombre Δ a avec le nombre Ε; je dis que les grandeurs Α, Β sont commensurables.

Car que Α soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Δ; que Γ soit égal à une de ces parties; et que Ζ soit composé d'autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Ε.

Puisqu'il y a dans Α autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Δ, Γ sera la même partie de Α que l'unité l'est de Δ; donc Γ est à Α comme οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ[5] πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν[6]· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ[7] ἴσα τῷ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε[8]. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ

unitas ad Δ. Metitur autem unitas ipsum Δ numerum; metitur igitur et Γ ipsam Α. Et quoniam est ut Γ ad Α ita unitas ad Δ numerum; convertendo igitur ut Α ad Γ ita Δ numerus ad unitatem. Rursus, quoniam quot sunt in Ε unitates, tot sunt et in Ζ partes æquales ipsi Γ; est igitur ut Γ ad Ζ ita unitas ad Ε. Ostensum est autem et ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem; ex æquo



οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ἐστὶ[9] τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως καὶ τὸ Α[10] πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Ἀλλὰ μετρεῖ[11] καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur est ut Α ad Ζ ita Δ ad Ε. Sed ut Δ ad Ε ita est Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita et Α ad Ζ; ergo Α ad utramque ipsarum Β, Ζ eamdem habet rationem; æqualis igitur est Β ipsi Ζ. Metitur autem Γ ipsam Ζ; metitur igitur et Β. Sed metitur et Α; ergo Γ ipsas Α, Β metitur; commensurabilis igitur est Α ipsi Β.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

l'unité est à Δ. Mais l'unité mesure le nombre Δ; donc Γ mesure A. Et puisque Γ est à A comme l'unité est au nombre Δ, par conversion A est à Γ comme le nombre Δ est à l'unité. De plus, puisqu'il y a en Z autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en E, Γ sera à Z comme l'unité est au nombre E. Mais on a démontré que A est à Γ comme Δ est à l'unité; donc par égalité A est à Z comme Δ est à E. Mais Δ est à E comme A est à B; donc A est à B comme A est à Z; donc A a la même raison avec B et avec Z; donc B égale Z (9. 5). Mais Γ mesure Z; donc il mesure B. Mais Γ mesure A; donc Γ mesure A et B; donc A est commensurable avec B (déf. 1. 10). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

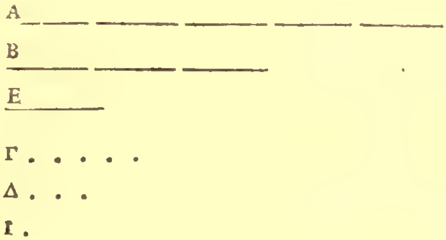
Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Οσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν οὕτως[1] τὸ Ε πρὸς τὸ[2] Α. Εστι δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως[3] τὸ Α πρὸς τὸ Β· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ οὕτως[4] τὸ Ε πρὸς τὸ[5] Β. Μετρεῖ δὲ καὶ[6] ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ[7] καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μετρὸν τὸ Ε. Οπερ ἔδει δεῖξαι[8].

ALITER.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem habeant quam numerus Γ ad numerum Δ; dico commensurabiles esse magnitudines.

Quot enim sunt in Γ unitates, in tot partes æquales dividatur A, et uni ipsarum æqualis sit E; est igitur ut unitas ad Γ numerum ita E ad A. Est autem et ut Γ ad Δ ita A ad B; ex æquo igitur est ut unitas ad Δ ita E ad B. Metitur autem et unitas ipsum Δ; metitur igitur et E ipsam B. Metitur autem et E ipsam A, quoniam et unitas ipsum Γ; ergo E utramque ipsarum A, B metitur; ergo A, B commensurabiles sunt, et est ipsarum communis mensura E. Quod oportebat ostendere.



AUTREMENT.

Que les deux grandeurs A et B ayent entr'elles la même raison que le nombre Γ avec le nombre Δ; je dis que ces grandeurs sont commensurables.

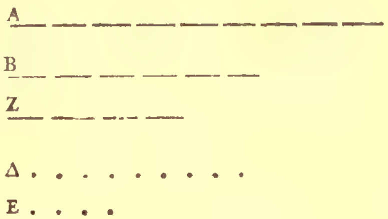
Que A soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Γ, et que E soit égal à une de ces parties; l'unité sera au nombre Γ comme E est à A. Mais Γ est à Δ comme A est à B; donc, par égalité, l'unité est à Δ comme E est à B. Mais l'unité mesure Δ; donc E mesure B. Mais E mesure A, puisque l'unité mesure Γ; donc E mesure A et B; donc A et B sont commensurables, et E est leur commune mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα ὡς ἡ Α, δύνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως ἡ εὐθεῖα[1] πρὸς εὐθεῖαν. Ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας[2].

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si sint duo numeri ut Δ, E, et recta ut A, possibile esse fieri ut Δ numerus ad E numerum ita rectam ad rectam. Si autem et ipsarum A, Z media proportionalis sumatur ut B, erit ut A ad Z ita quadratum ex A ad ipsum ex B, hoc est ut prima ad tertiam ita figura ex primâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam. Sed ut A ad Z ita est Δ numerus ad E numerum; factum est igitur et ut Δ numerus ad E numerum ita figura ex rectâ A ad ipsam ex rectâ B.



COROLLAIRE.

De là il est évident que si l'on a deux nombres comme Δ et E, et une droite comme A, il sera possible de faire en sorte que le nombre Δ soit au nombre E comme la droite A est à une autre droite. Mais si l'on prend une moyenne proportionnelle comme B entre A et Z (cor. 20. 6), A sera à Z comme le quarré de A est au quarré de B; c'est-à-dire que la première sera à la troisième, comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et semblablement décrite sur la troisième (cor. 20. 6). Mais A est à Z comme le nombre Δ est au nombre E; on a donc fait de telle manière que le nombre Δ est au nombre E comme la figure décrite sur la droite A est à la figure décrite sur la droite B.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

PROPOSITIO VII.

Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint incommensurabiles magnitudines A, B; dico A ad B rationem non habere quam numerus ad numerum.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Si enim habet A ad B rationem quam numerus ad numerum, commensurabilis erit A ipsi B. Non est autem; non igitur A ad B rationem habet quam numerus ad numerum.

Incommensurabiles igitur, etc.

PROPOSITION VII.

Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Soient les grandeurs incommensurables A, B; je dis que A n'a pas avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Car si A avait avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre, A serait commensurable avec B (6. 10). Mais il ne l'est pas; donc A n'a pas avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι[1] τὰ Α, Β μεγέθη.

PROPOSITIO VIII.

Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum; dico incommensurabiles esse A, B magnitudines.

Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἕξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν[2]. Οὐκ ἔχει δέ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Si enim fuerit commensurabilis A ipsi B, rationem habebit quam numerus ad numerum. Non habet autem; incommensurabiles igitur sunt A, B magnitudines.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

PROPOSITION VIII.

Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

Que les deux grandeurs A, B n'ayent pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre; je dis que les grandeurs A, B sont incommensurables.

Car si elles étaient commensurables, A aurait avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais il ne l'a pas; donc les grandeurs A, B sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγονος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν[1] τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα ὃν[2] τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Εστωσαν γὰρ[3] αἱ Α, Β μήκει σύμμετροι·

λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει ὃν[4] τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

PROPOSITIO IX.

A rectis longitudine commensurabilibus quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum et latera habebunt longitudine commensurabilia; sed a rectis longitudine incommensurabilibus quadrata inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

Sint enim A, B longitudine commensurabiles; dico ex A quadratum ad quadratum ex B rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

PROPOSITION IX.

Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

Car que les droites A, B soient commensurables en longueur; je dis que le quarré de A a avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ[5], ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸν Δ[6] λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον, δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν[7] διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ[8] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον[9].

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine; ergo A ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat eam quam Γ ad Δ. Quoniam igitur est ut A ad B ita Γ ad Δ, sed ipsius quidem ex A ad B rationis duplicata est ratio quadrati ex A ad quadratum ex B; similes enim figuræ in duplicatâ ratione sunt homologorum laterum; ipsius autem Γ ad Δ rationis duplicata est ratio quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ, duorum enim quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum numerum duplicatam rationem habet ejus quam latus ad latus; est igitur et ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον[10] οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον[11]· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετρά-

At vero sit ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ; dico commensurabilem esse A ipsi B longitudine. Quoniam enim est ut ex A

Car puisque A est commensurable en longueur avec B, A aura avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Qu'il ait celle que Γ a avec Δ. Puisque A est à B comme Γ est à Δ; que la raison du quarré de A au quarré de B est double de la raison de A avec B, car les figures semblables sont en raison double de leurs côtés homologues (20. 6); que la raison du quarré de Γ au quarré de Δ est double de celle de Γ à Δ, car il y a un moyen proportionnel entre deux nombres quarrés (11. 8); et que le quarré d'un nombre a avec le quarré d'un nombre une raison double de celle d'un côté à un côté, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ.

Mais que le quarré de A soit au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ; je dis que A est commensurable en longueur avec B. Car puisque γωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B[12] οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ[13]· ἀλλὰ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B[14] λόγος διπλασίων ἐστὶ[15] τοῦ

quadratum ad ipsum ex B ita ex Γ quadratus ad ipsum ex Δ; sed quidem ex A quadrati ad ipsum ex B ratio duplicata est ipsius ex

τῆς A πρὸς τὴν B λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ[16] τετραγώνου[17] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ[18] τετράγωνον[19] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ[20] πρὸς τὸν Δ λόγου[21]· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ὁ Γ[22] πρὸς τὸν Δ[23]· ἡ A ἄρα πρὸς τὴν B λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει[24].

Ἀλλὰ δὴ[25] ἀσύμμετρος ἔστω ἡ A τῇ B μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B[26] λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον[27] λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ A τῇ B μήκει[28]. Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A

A ad B rationis, quadrati autem ex Γ ad quadratum ex Δ ratio duplicata est ipsius Γ ad ipsum Δ rationis; est igitur et ut A ad B ita Γ ad Δ; ergo A ad B rationem habet quam numerus Γ ad numerum Δ; commensurabilis igitur est A ipsi B longitudine.

At vero incommensurabilis sit A ipsi B longitudine; dico ex A quadratum ad ipsum ex B rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim habet ex A quadratum ad quadratum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. Non est autem; non

le quarré de A est au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ, que la raison du quarré de A au quarré de B est double de la raison de A à B (20. 6), et que la raison du quarré de Γ au quarré de Δ est double aussi de la raison de Γ à Δ (11. 8), A sera à B comme Γ est à Δ; donc A a avec B la raison que le nombre Γ a avec le nombre Δ; donc A est commensurable en longueur avec B (6. 10).

Mais que A soit incommensurable en longueur avec B; je dis que le quarré de A n'a pas avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Car si le quarré de A avait avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, A serait commensurable en longueur avec B. Mais τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον[29] λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ[30] τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον[31] λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·

igitur ex A quadratum ad quadratum ex B rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Rursus denique ex A quadratum ad quadratum ex B rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; dico

λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ ἔσται[32] σύμμετρος ἡ Α τῇ Β μήκει[33], ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει, καὶ τὰ ἑξῆς.

incommensurabilem esse A ipsi B longitudine. Si enim fuerit commensurabilis A ipsi B longitudine, habebit ex A quadratum ad ipsum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Non habet autem; non igitur commensurabilis est A ipsi B longitudine.

Ergo a rectis longitudine, etc.

cela n'est point; donc le quarré de A n'a pas avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

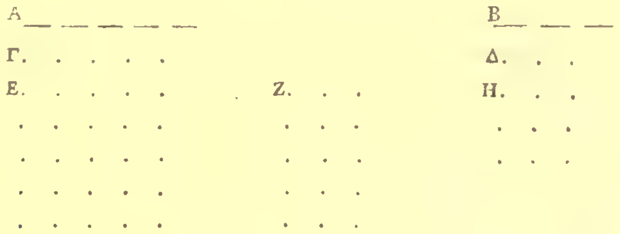
De plus, que le quarré de A au quarré de B n'ait pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; je dis que A est incommensurable en longueur avec B. Car si A était commensurable en longueur avec B, le quarré de A aurait avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Mais il ne l'a pas; donc A n'est pas commensurable en longueur avec B; donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Επεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει[1], λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εχέτω ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ[2] πολλαπλασιάς τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Επεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τούτεστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως[3] ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Αλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ τὸν Γ[4] πολλαπλασιάσας τὸν Ζ

ALITER.

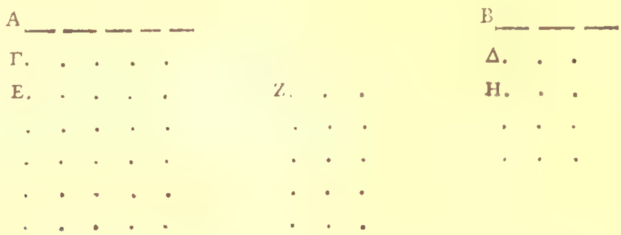
Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine, rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Γ ad Δ, et Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum E faciat, ipse autem Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Z faciat, et Δ se ipsum multiplicans ipsum H faciat. Quoniam itaque Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum E fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad Δ, hoc est ut A ad B ita E ad Z. Sed ut A ad B ita ex A quadratum ad rectangulum sub A, B; est igitur ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita E ad Z. Rursus, quoniam Δ se ipsum multiplicans ipsum H fecit, ipse vero Δ ipsum Γ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad



AUTREMENT.

Car puisque A est commensurable en longueur avec B, il a avec lui la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Que ce soit celle que Γ a avec Δ; que Γ se multipliant lui-même fasse E, que Γ multipliant Δ fasse Z, et que Δ se multipliant lui-même fasse H. Puisque Γ se multipliant lui-même fait E, et que Γ multipliant Δ fait Z, Γ est à Δ, c'est-à-dire A est à B comme E est à Z (17. 7). Mais A est à B comme le quarré de A est au rectangle sous A, B (1. 6); donc le quarré de A est au rectangle sous A, B comme E est à Z. De plus, puisque Δ se multipliant lui-même a fait H, et que Δ multipliant Γ a fait Z, Γ est à Δ, πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Η. Ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἐστὶν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Δ, hoc est ut A ad B, ita Z ad H. Sed ut A ad B ita sub A, B rectangulum ad quadratum ex B; est igitur ut sub A, B rectangulum ad quadratum ex B ita Z ad H. Sed ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B, ita erat E ad Z; ex æquo igitur ut ex A quadratum ad ipsum ex B ita erat E ad H. Est autem uterque ipsorum E, H quadratus, ipse quidem enim E ex Γ est, ipse vero H ex Δ; ergo ex A quadratum ad ipsum ex B rationem habet quam quadratus nu- ad quadratum numerum.



Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει[5]. Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ

At vero habeat ex A quadratum ad ipsum ex B rationem quam quadratus numerus E ad quadratum numerum H; dico commensurabilem esse A ipsi B longitudine. Sit enim ipsius quidem E latus ipse Γ, ipsius autem H ipse Δ,

c'est-à-dire A est à B comme Z est à H (17. 7). Mais A est à B comme le rectangle sous A, B est au quarré de B (1. 6); donc le rectangle sous A, B est au quarré de B comme Z est à H. Mais le quarré de A est au rectangle sous A, B comme E est à Z; donc par égalité le quarré de A est au quarré de B comme E est à H. Mais les nombres E, H sont des quarrés, car E est le quarré de Γ, et H le quarré de Δ; donc le quarré de A a avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Mais que le quarré de A ait avec le quarré de B la raison que le nombre quarré E a avec le nombre quarré H; je dis que A est commensurable en longueur avec B. Car que Γ soit le côté de E, et Δ le côté de H, et que Γ multi-τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μέσον ἀνάλογόν ἐστι[6] τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ως δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η[7], ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως[8] ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως[9] ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ[10]. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

et Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Z faciat; ergo E, Z, H deinceps sunt proportionales in ratione ipsius Γ ad Δ. Et quoniam ipsorum ex A, B medium proportionale est rectangulum sub A, B, ipsorum autem E, H ipse Z; est igitur ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita E ad Z. Ut autem sub A, B rectangulum ad quadratum ex B ita Z ad H, sed ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita A ad B; ergo A, B commensurabiles sunt, rationem enim habent quam numerus E ad numerum Z, hoc est quam Γ ad Δ; ut enim Γ ad Δ ita E ad Z; etenim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum E fecit, ipsum autem Δ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita E ad Z. Quod oportebat ostendere.

pliant Δ fasse Z, les nombres E, Z, H seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ (17. 7). Et puisque le rectangle sous A, B est moyen proportionnel entre les quarrés de A et de B (1. 6), et que Z l'est entre E et H (11. 8), le quarré de A sera au rectangle sous A, B comme E est à Z. Mais le rectangle sous A, B est au quarré de B comme Z est à H, et le quarré de A est au rectangle sous A, B comme A est à B; donc A et B sont commensurables, car ils ont la raison qu'a le nombre E avec le nombre Z, c'est-à-dire la raison que Γ a avec Δ; car Γ est à Δ comme E est à Z, puisque Γ se multipliant lui-même fait E, et que Γ multipliant Δ a fait Z; donc Γ est à Δ comme E est à Z (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν[1] ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται[2] ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι[3] οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει[4].

Εἴπερ γὰρ[5] τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν· ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶ[6] μήκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπεὶ οὖν[7] ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μήκει ἐδείχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα, τῷ τὰ τετράγωνα

COROLLARIUM.

Et manifestum ex demonstratis erit, rectas longitudine commensurabiles omnino et potentiâ, rectas autem potentiâ commensurabiles non semper et longitudine, et rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ incommensurabiles, rectas autem potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

Quoniam enim ex commensurabilibus longitudine rectis quadrata rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, magnitudines autem rationem habentes quam numerus ad numerum commensurabiles sunt; quare longitudine commensurabiles rectæ non solum sunt longitudine commensurabiles, sed etiam potentiâ.

Rursus, quoniam igitur quæcumque quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, longitudine ostensa sunt commensurabilia, et potentiâ latera existentia commensurabilia, cùm ipsorum qua-

COROLLAIRE.

D'après ce qui a été démontré, il est évident que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance; que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur; que celles qui sont incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, et que celles qui sont incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

Car puisque les quarrés des droites commensurables en longueur ont la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que les grandeurs qui ont la raison qu'un nombre a avec un nombre sont commensurables, les droites commensurables en longueur sont commensurables non seulement en longueur, mais encore en puissance.

De plus, puisqu'on a démontré que les quarrés qui sont entr'eux comme un nombre quarré est à un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur, et que des droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλ᾽ ἁπλῶς ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει[8], οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα[9] πάντως καὶ δυνάμει, τὰ[10] δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

drata rationem habeant quam numerus ad numerum; quæcumque igitur quadrata rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam numerus ad numerum, commensurabilia quidem erunt eadem quadrata potentiâ, non autem et longitudine; quare quadrata quidem longitudine commensurabilia omnino et potentiâ, quadrata autem potentiâ non semper et longitudine, nisi et rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ[11] αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει[12]. Ἐπεὶ δὴ γὰρ[13] αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν ὃν ἀριθμὸς[14] πρὸς ἀριθμὸν[15], καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ὥστε οὐχ αἱ τῷ[16] μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ μήκει δύνανται[17] οὖσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

Dico etiam rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ. Quoniam igitur rectæ potentiâ commensurabiles possunt rationem non habere quam numerus ad numerum, et idcirco potentiâ sunt commensurabiles, longitudine vero incommensurabiles; quare rectæ longitudine incommensurabiles non omnino et potentiâ, sed longitudine incommensurabiles existentes possunt potentiâ esse et commensurabiles et incommensurabiles.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει

Rectæ autem potentiâ incommensurabiles,

ont la raison qu'un nombre a avec un nombre, les quarrés qui n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et qui n'ont simplement que la raison qu'un nombre a avec un nombre, ont leurs côtés commensurables en puissance, mais non en longueur; donc les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, et les droites commensurables en puissance ne le sont pas toujours en longueur, à moins que leurs puissances n'ayent entre elles la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Je dis aussi que les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance; car elles peuvent n'avoir pas la raison qu'un nombre a avec un nombre, et elles sont à cause de cela commensurables en puissance et incommensurables en longueur; donc les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, mais les droites incommensurables en longueur peuvent être commensurables et incommensurables en puissance.

Mais les droites incommensurables en puissance sont toujours incommensuἀσύμμετροι· εἰ γὰρ μήκει[18] σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. Υπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι, ὅπερ ἄτοπον· αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει[19].

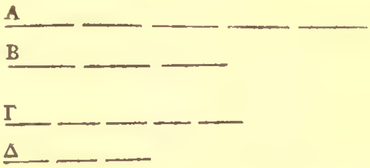
omnino et longitudine incommensurabiles; si enim commensurabiles, erunt et potentiâ commensurabiles. Supponuntur autem et incommensurabiles, quod est absurdum; rectæ igitur potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ[1] ἀσύμμετρον ἔσται.

PROPOSITIO X.

Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.



Εστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἔσται[2].

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, Γ, Δ, ut A ad B ita Γ ad Δ, ipsa A autem ipsi B commensurabilis sit; dico et Γ ipsi Δ commensurabilem fore.

rables en longueur; car si elles étaient commensurables en longueur, elles seraient commensurables en puissance. Mais on les suppose incommensurables, ce qui est absurde; donc les droites incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

PROPOSITION X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles A, B, Γ, Δ; que A soit à B comme Γ est à Δ; et que A soit commensurable avec B; je dis que Γ sera commensurable avec Δ.

Επεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Αλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται[3]. Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν[4]· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Εὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B, ergo A ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Atque est ut A ad B ita Γ ad Δ; et Γ igitur ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum; commensurabilis igitur est Γ ipsi Δ.

At vero A ipsi B incommensurabilis sit; dico et Γ ipsi Δ incommensurabilem fore. Quoniam enim incommensurabilis est A ipsi B; ergo A ad B rationem non habet quam numerus ad numerum. Atque est ut A ad B ita Γ ad Δ; neque Γ igitur ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum; incommensurabilis igitur est Γ ipsi Δ.

Si igitur quatuor, etc.

ΛΗΜΜΑ.

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

LEMMA.

Ostensum est in arithmeticis similes planos numeros inter se rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et si

Car puisque A est commensurable avec B, A a avec B la même raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ a avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc Γ est commensurable avec Δ (6. 10.)

Mais que A soit incommensurable avec B; je dis que Γ sera incommensurable avec Δ. Car puisque A est incommensurable avec B, A n'a pas avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (7. 10). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ n'a pas avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc Γ est incommensurable avec Δ; donc, etc.

LEMME.

On a démontré dans les livres d'arithmétique (26. 8) que les nombres plans semblables ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré;

μόν· καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. Καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἕξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes esse planos. Et manifestum est ex his non similes planos numeros, hoc est non proportionalia habentes latera, inter se rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim haberent, similes plani essent, quod non supponitur; ergo non similes plani inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Εστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὴ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

PROPOSITIO XI.

Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

Sit proposita recta A; oportet igitur ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine solum, alteram autem et potentiâ.

et que si deux nombres ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ces nombres sont des plans semblables. De là il est évident que des nombres plans non semblables, c'est-à-dire des nombres plans qui n'ont pas leurs côtés proportionnels, n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Car s'ils l'avaient, ils seraient des plans semblables, ce qui n'est pas supposé; donc des plans non semblables n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

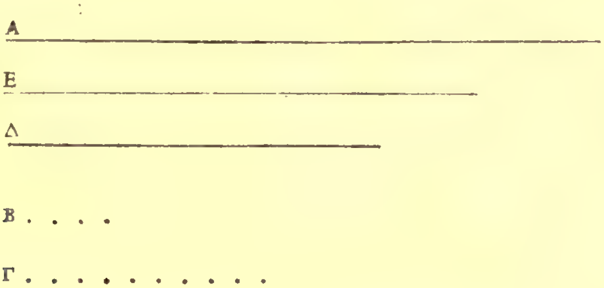
PROPOSITION XI.

Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

Soit A la droite proposée; il faut trouver deux droites incommensurables avec A, l'une en longueur seulement, et l'autre en longueur et en puissance.

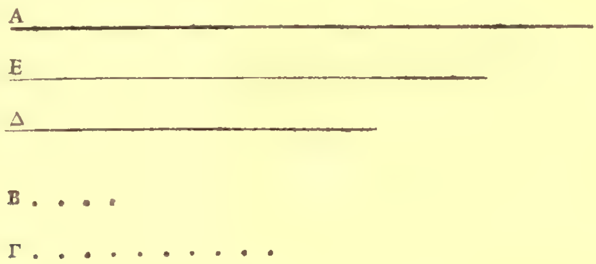
Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον, ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς[1] Α τῷ ἀπὸ τῆς[2] Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. Εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. Ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ

Exponantur enim duo numeri B, Γ, inter se rationem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est non similes plani, et fiat ut B ad Γ ita ex A quadratum ad quadratum ex Δ, hoc enim tradidimus; commensurabile igitur ex A quadratum ipsi ex Δ. Et quoniam B ad Γ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non igitur ex A quadratum ad ipsum ex Δ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est A ipsi Δ longitudine. Sumatur ipsarum A, Δ media proportionalis E; est igitur ut A ad Δ ita ex A quadratum ad ipsum ex E. Incommensurabilis autem est A ipsi Δ longitudine; incommensurabile igitur est



Car soient deux nombres B, Γ qui n'ayent pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, c'est-à-dire qui soient deux plans non semblables; et faisons en sorte que B soit à Γ comme le quarré de A est au quarré de Δ, ce que nous avons déjà enseigné (cor. 6. 10); le quarré de A sera commensurable avec le quarré de Δ. Et puisque B n'a pas avec Γ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de A n'aura pas avec le quarré de Δ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc A est incommensurable en longueur avec Δ (9. 10). Prenons une moyenne proportionnelle E entre A et Δ, A sera à Δ comme le quarré de A est au quarré de E (cor. 2. 6). Mais A est incommensurable en longueur avec Δ; donc le quarré de A est incommensurable avec le quarré τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς E τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ E δυνάμει·

et ex A quadratum ipsi ex E quadrato; incom mensurabilis igitur est A ipsi E potentiâ; erg



τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ A προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, E· μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ E[3]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

propositæ rectæ A inventæ sunt duæ rect incommensurabiles ipsæ Δ, E; longitudin quidem tantum ipsa Δ, potentiâ autem et long tudine scilicet ipsa E. Quod oportebat ostendere

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϐ'.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἑκάτερον γὰρ τῶν A, B τῷ Γ ἔστω σύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ A τῷ B ἐστὶ σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ A τῷ Γ, τὸ A ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς

PROPOSITIO XII.

Eidem magnitudini commmensurabiles inter se sunt commensurabiles.

Utraque enim ipsarum A, B ipsi Γ sit commen surabilis; dico et A ipsi B esse commensurabilem

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi Γ ergo A ad Γ rationem habet quam numerus a

de E (10. 10); donc A est incommensurable en puissance avec E. On a don trouvé pour la droite proposée A deux droites incommensurables Δ, E, savoi la droite Δ en longueur seulement, et la droite E en puissance et en longueur Ce qu'il fallait démontrer.

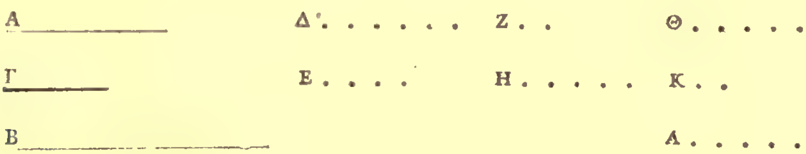
PROPOSITION XII.

Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont com mensurables entr'elles.

Que chacune des grandeurs A, B soit commensurable avec Γ; je dis que A es commensurable avec B.

Car puisque A est commensurable avec Γ, A a avec Γ la raison qu'un nombr ἀριθμόν. Ἐχέτω ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν, τοῦτε ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις, οἱ Θ, Κ, Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸν Λ.

numerum. Habeat quam Δ ad E. Rursus, quoniam commensurabilis est B ipsi Γ, ergo Γ ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Z ad H. Et rationibus datis quibuscumque, et ipsâ quam habet Δ ad E et Z ad H, sumantur numeri Θ, K, Λ deinceps in datis rationibus, et sit ut quidem Δ ad E ita Θ ad K, ut autem Z ad H ita K ad Λ.



Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ᾽ ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ[2] Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει

Quoniam igitur est ut A ad Γ ita Δ ad E, sed ut Δ ad E ita Θ ad K; est igitur et ut A ad Γ ita Θ ad K. Rursus, quoniam est ut Γ ad B ita Z ad H, sed ut Z ad H ita K ad Λ; et ut igitur Γ ad B ita K ad Λ. Est autem et ut A ad Γ ita Θ ad K; ex æquo igitur est ut A ad B ita Θ ad Λ; ergo A ad B rationem habet

a avec un nombre (5. 10.); qu'il ait celle que Δ a avec E. De plus, puisque B est commensurable avec Γ, Γ a avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre. Qu'il ait celle que Z a avec H. La raison que Δ a avec E, et celle que Z a avec H étant données, prenons les nombres Θ, K, Λ successivement proportionnels dans les raisons données, de manière que Δ soit à E comme Θ est à K, et que Z soit à H comme K est à Λ.

Puisque A est à Γ comme Δ st à E, et que Δ est à E comme Θ est à K, A sera à Γ comme Θ est à K. De plus, puisque Γ est à B comme Z est à H, et que Z est à H comme K est à Λ, Γ est à B comme K est à Λ. Mais A est à Γ comme Θ est à K; donc, par égalité, A est à B comme Θ est à Λ (23. 5); donc A a avec B la raison que le ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Α· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἑξῆς.

quam numerus Θ ad numerum A; commensurabilis igitur est A ipsi B.

Ergo eidem, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ.

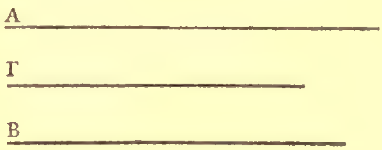
Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρόν ἐστιν.

PROPOSITIO XIII.

Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem commensurabilis est eidem, altera autem incommensurabilis; incommensurabiles erunt magnitudines.

Sint enim duæ magnitudines A, B, alia autem Γ, et quidem A ipsi Γ commensurabilis sit, sed B ipsi Γ incommensurabilis; dico et A ipsi B incommensurabilem esse.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν. Ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

Si enim est commensurabilis A ipsi B, est autem et Γ ipsi A; et Γ igitur ipsi B commensurabilis est. Quod non supponitur.

nombre Θ a avec le nombre A; donc A est commensurable avec B (6. 10). Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs seront incommensurables.

Soient les deux grandeurs A, B, et une autre grandeur Γ; que A soit commensurable avec Γ, et que B soit incommensurable avec Γ; je dis que A est incommensurable avec B.

Car si A était commensurable avec B, à cause que Γ est commensurable avec A, Γ serait commensurable avec B (12. 10). Ce qui n'est pas supposé.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Εὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Εστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλῳ[1] τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

PROPOSITIO XIV.

Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A, B; altera autem ipsarum A alii alicui Γ incommensurabilis sit; dico et reliquam B ipsi Γ incommensurabilem esse.

Εἰ γὰρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρόν ἐστι[2]· καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. Αλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

Εὰν ἄρα ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Si enim est commensurabilis B ipsi Γ, sed et A ipsi B commensurabilis est; et A igitur ipsi Γ commensurabilis est. Sed et incommensurabilis, quod impossibile; non igitur commensurabilis est B ipsi Γ; incommensurabilis igitur.

Si igitur sunt duæ magnitudines, etc.

PROPOSITION XIV.

Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

Soient les deux grandeurs commensurables A, B, et que l'une d'elles soit incommensurable avec Γ; je dis que la grandeur restante B sera aussi incommensurable avec Γ.

Car si B était commensurable avec Γ, à cause que A est commensurable avec B, A serait commensurable avec Γ (12. 10). Mais A est incommensurable avec Γ, ce qui est impossible; donc B n'est pas commensurable avec Γ; donc il lui est incommensurable. Donc, etc.

ΛΗΜΜΑ.

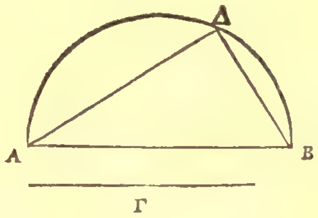
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὑρεῖν τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, Γ, *ὧν μείζων ἔστω ἡ* ΑΒ· *δεῖ δὴ εὑρεῖν τίνι μεῖζον δύναται ἡ* ΑΒ *τῆς* Γ.

LEMMA.

Duabus datis rectis inæqualibus, invenire id quo plus potest major quam minor.

Sint datæ duæ inæquales rectæ AB, Γ, quarum major sit AB; oportet igitur invenire id quo plus potest AB quam Γ.



Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ *ἡμικύκλιον, τὸ* ΑΔΒ, *καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ* Γ *ἴση ἡ* ΑΔ, *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ* ΔΒ. *Φανερὸν δὴ ὅτι ὀρθή ἐστιν*[1] *ἡ ὑπὸ* ΑΔΒ *γωνία, καὶ ὅτι ἡ* ΑΒ *τῆς* ΑΔ, *τουτέστι τῆς*[2] Γ, *μεῖζον δύναται τῇ* ΔΒ.

Ομοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμένη αὐτὰς εὑρίσκεται οὕτως.

Describatur super rectam AB semicirculus AΔB, et in eo aptetur ipsi Γ æqualis AΔ, et jungatur ΔB. Evidens igitur rectum esse AΔB angulum, et AB quam AΔ, hoc est quam Γ, plus posse quadrato ex ΔB.

Similiter autem et datis rectis, quæ potest ipsas invenietur hoc modo.

LEMME.

Deux droites inégales étant données, trouver ce dont le puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite.

Soient AB, Γ les deux droites inégales données ; que AB soit la plus grande ; il faut trouver ce dont la puissance de AB surpasse la puissance de Γ.

Décrivons sur AB le demi-cercle AΔB, adaptons dans ce demi-cercle une droite AΔ égale à Γ (1. 4), et joignons ΔB. Il est évident que l'angle AΔB est droit (31. 3), et que la puissance de AB surpasse la puissance de AΔ, c'est-à-dire de Γ, du quarré de ΔB (47. 1).

On trouvera de la même manière la droite dont la puissance égale la somme des puissances de deux droites données.

Εστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι δοθεῖσαι[3] αἱ ΑΔ, ΔΒ· καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὰς τὴν δυναμένην αὐτάς. Κείσθωσαν[4] γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ.

Sint duæ rectæ datæ ΑΔ, ΔΒ; et oporteat invenire rectam quæ possit ipsas. Ponantur enim, ut rectum angulum ΑΔΒ contineant, et jungatur ΑΒ; perspicuum est rursus, ipsas ΑΔ, ΔΒ rectam posse ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ[1]· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ[2]. Καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ[3]· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ[4].

Εστωσαν δὴ[5] τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ Α μὲν τῆς Β μεῖζον δυνάσθω τῷ

PROPOSITIO XV.

Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda, quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

Sint igitur quatuor rectæ proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Α quidem quam Β plus possit quadrato ex Ε, sed Γ quam Δ plus

Soient ΑΔ et ΔΒ les deux droites données, il faut trouver la droite dont la puissance égale la somme des puissances de ces deux droites; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprènent un angle droit ΑΔΒ, et joignons ΑΒ; il est évident encore que la puissance de ΑΒ égale la somme des puissances des droites ΑΔ, ΔΒ (47. 1).

PROPOSITION XV.

Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

Soient les quatre droites proportionnelles Α, Β, Γ, Δ, de manière que Α soit à Β comme Γ est à Δ; que la puissance de Α surpasse la puissance de Β du ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω ὅτι εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ[6] Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

possit quadrato ex Z; dico et si commensurabilis sit A ipsi E, commensurabilem esse et Γ ipsi Z; et si incommensurabilis sit A ipsi E incommensurabilem esse et Γ ipsi Z.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἔστιν ἄρα καὶ[7] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Α, Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ[8] τὰ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν[9] ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· διΐσου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Γ πρὸς

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ; est igitur et ut ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex Γ quadratum ad ipsum ex Δ. Sed ipsi quidem quadrato ex A æqualia sunt ex E, B quadrata, sed ex Γ quadrato æqualia sunt ex Z, Δ quadrata; sunt igitur ut ex E, B quadrata ad ipsum ex B ita ex Z, Δ quadrata ad ipsum ex Δ; dividendo igitur est ut ex E quadratum ad ipsum ex B ita ex Z quadratum ad ipsum ex Δ; est igitur et ut E ad B ita Z ad Δ; convertendo igitur est ut B ad E ita Δ ad Z. Est autem et ut A ad B ita Γ ad Δ; ex æquo igitur est ut A ad E ita Γ ad Z; et si igitur

quarré de la droite E, et que la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré de la droite Z; je dis que si A est commensurable avec E, Γ le sera avec Z; et que si A est incommensurable avec E, Γ le sera aussi avec Z.

Car puisque A est à B comme Γ est à Δ, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ (cor. 1. 22. 6). Mais la somme des quarrés de E et de B est égale au quarré de A, et la somme des quarrés de Z et de Δ est égale au quarré de Γ; donc la somme des quarrés de E et de B est au quarré de B comme la somme des quarrés de Z et de Δ est au quarré de Δ; donc, par soustraction, le quarré de E est au quarré de B comme le quarré de Z est au quarré de Δ (17. 5); donc E est à B comme Z est à Δ (22. 6); donc, par conversion, B est à E comme Δ est à Z (4. 5. Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc, par égalité, A est à E comme Γ est à Z (22. 6); donc si A est commensurable avec τὴν Ζ· εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν[10] ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἑξῆς.

commensurabilis est Α ipsi Ε, commensurabilis est et Γ ipsi Ζ; et si incommensurabilis est Α ipsi Ε, incommensurabilis est et Γ ipsi Ζ.

Si igitur quatuor, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

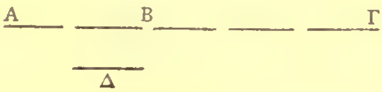
Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ σύμμετρον[1].

PROPOSITIO XVI.

Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles ΑΒ, ΒΓ; dico et totam ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ esse commensurabilem.



Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ

Quoniam enim commensurabiles sunt ΑΒ, ΒΓ, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metitur, et totam ΑΓ metietur. Metitur autem et ΑΒ, ΒΓ;

Ε, la droite Γ le sera avec Ζ; et si Α est incommensurable avec Ε, la droite Γ le sera avec Ζ (10. 10). Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme sera commensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est commensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront commensurables.

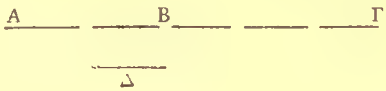
Ajoutons les deux grandeurs commensurables ΑΒ, ΒΓ; je dis que la grandeur entière ΑΓ est commensurable avec chacune des grandeurs ΑΒ, ΒΓ.

Car, puisque les grandeurs ΑΒ, ΒΓ sont commensurables, quelque grandeur les mesurera (déf. 1. 10). Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΑΒ et ΒΓ, il mesurera leur somme ΑΓ. Mais il mesure ΑΒ et ΒΓ, ΑΒ, ΒΓ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ[2] μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Αλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἔστω σύμμετρον, ἔστω δὴ τῷ ΑΒ[3]· λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

ergo Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ metitur; commensurabilis igitur est ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ.

At vero ΑΓ uni ipsarum ΑΒ, ΒΓ sit commensurabilis, sit igitur ipsi ΑΒ; dico et ΑΒ, ΒΓ commensurabiles esse.



Επεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Επεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam enim commensurabiles sunt ΑΓ, ΑΒ, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΓΑ, ΑΒ metitur, et reliquam igitur ΒΓ metietur. Metitur autem et ΑΒ; ergo Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metietur; commensurabiles igitur sunt ΑΒ, ΒΓ.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Εὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται. Κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incommensurabilis est, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

donc Δ mesure les grandeurs ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ; donc ΑΓ est commensurable avec ΑΒ et ΒΓ.

Mais que ΑΓ soit commensurable avec une des grandeurs ΑΒ, ΒΓ; qu'il le soit avec ΑΒ; je dis que les grandeurs ΑΒ, ΒΓ sont commensurables.

Car puisque les grandeurs ΑΓ, ΑΒ sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΓΑ et ΑΒ, il mesurera le reste ΒΓ. Mais il mesure ΑΒ; donc Δ mesure ΑΒ et ΒΓ; donc les grandeurs ΑΒ, ΒΓ sont commensurables. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

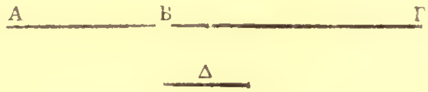
Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables, leur somme sera incommensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est incommensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront incommensurables.

Συγκείσθω[1] γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω, εἰ δυνατὸν, τὸ Δ[2]. Επεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον[3]· οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστι· τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles ΑΒ, ΒΓ; dico et totam ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ incommensurabilem esse.

Si enim non sunt incommensurabiles ΓΑ, ΑΒ, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit, si possibile, ipsa Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΓΑ, ΑΒ metitur, et reliquam igitur ΒΓ metietur. Metitur autem et ipsam ΑΒ; ergo Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metitur; commensurabiles igitur sunt ΑΒ, ΒΓ. Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile; non igitur ipsas ΓΑ, ΑΒ metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt ΓΑ, ΑΒ. Similiter utique demonstrabimus et ΑΓ, ΓΒ incommensurabiles esse; ergo ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ incommensurabilis est.



Αλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω, καὶ[4] πρῶτον τῷ ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. Εἰ γὰρ ἔσται[5] σύμ-

At vero ΑΓ uni ipsarum ΑΒ, ΒΓ incommensurabilis sit, et primum ipsi ΑΒ; dico et ΑΒ, ΒΓ incommensurabiles esse. Si enim essent

Soient ajoutées les deux grandeurs incommensurables ΑΒ, ΒΓ; je dis que leur somme ΑΓ est incommensurable avec chacune des grandeurs ΑΒ, ΒΓ.

Car si les grandeurs ΓΑ, ΑΒ ne sont pas incommensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ, si cela est possible. Puisque Δ mesure ΓΑ et ΑΒ, il mesurera le reste ΒΓ. Mais il mesure ΑΒ; donc Δ mesure ΑΒ et ΒΓ; donc ΑΒ et ΒΓ sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas ΓΑ et ΑΒ; donc ΓΑ et ΑΒ sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que ΑΓ et ΓΒ sont incommensurables; donc ΑΓ est incommensurable avec chacune des grandeurs ΑΒ, ΒΓ.

Mais que ΑΓ soit incommensurable avec une des grandeurs ΑΒ, ΒΓ, et qu'il le soit d'abord avec ΑΒ; je dis que ΑΒ et ΒΓ sont incommensurables. Car s'ils étaient μετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Επεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. Υπέκειτο[6] δὲ

commensurabiles, metiretur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metitur, et totam igitur ΑΓ metietur. Metitur autem et ipsam ΑΒ; ergo Δ ipsas ΓΑ, ΑΒ metitur; commensurabiles igitur sunt ΓΑ, ΑΒ.

καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἔσται[7].

Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile: non igitur ipsas ΑΒ, ΒΓ metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt ΑΒ, ΒΓ. Similiter utique demonstrabimus si ΑΓ ipsi ΓΒ incommensurabilis sit, etiam ΑΒ, ΒΓ incommensurabiles fore.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

ΛΗΜΜΑ.

Εὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γινομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

LEMMA.

Si ad aliquam rectam applicetur parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ; applicatum æquale est rectangulo sub factis ex applicatione partibus rectæ.

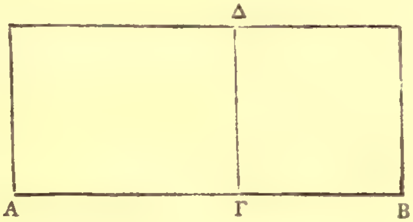
commensurables, quelque grandeur les mesurerait. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΑΒ et ΒΓ, il mesurera leur somme ΑΓ. Mais il mesure ΑΒ; donc Δ mesure ΓΑ et ΑΒ; donc ΓΑ et ΑΒ sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas ΑΒ et ΒΓ; donc ΑΒ et ΒΓ sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que si ΑΓ est incommensurable avec ΓΒ, les grandeurs ΑΒ, ΒΓ seront aussi incommensurables. Donc, etc.

LEMME.

Si à une droite quelconque on applique un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, le parallélogramme appliqué est égal au rectangle compris sous les parties de la droite faites par l'application.

Παρὰ γάρ τινα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ[1], ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Ad aliquam enim rectam AB applicetur parallelogrammum ΑΔ, deficiens figurâ quadratâ ΔΒ; dico æquale esse parallelogrammum ΑΔ rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ.



Καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ, καὶ ἔστι τὸ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ[2].

Εὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Atque est hoc evidens; quoniam enim quadratum est ΔΒ, æqualis est ΔΓ ipsi ΓΒ, atque est rectangulum ΑΔ sub ΑΓ, ΓΔ, hoc est sub ΑΓ, ΓΒ.

Si igitur ad aliquam rectam, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Εὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον[1] παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει[2]· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται

PROPOSITIO XVIII.

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus

Appliquons à une droite quelconque AB un parallélogramme ΑΔ qui soit défaillant d'une figure quarrée ΔΒ; je dis que le parallélogramme ΑΔ est égal au rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ.

Cela est évident; car puisque ΔΒ est un quarré, ΔΓ est égal à ΓΒ, et ΑΔ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΓΔ, c'est-à-dire sous ΑΓ, ΓΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XVIII.

Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, et si ce parallélogramme partage la plus grande droite en parties commensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῇ μήκει[3]. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται[4] τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει[5], τῷ δὲ τετάρτῳ[6] τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον[7] παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει[8].

poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον[9] παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει[10].

Sint duæ rectæ inæquales Α, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti ex minori Α quadrati, hoc est quadrato ex dimidiâ Α, æquale ad ΒΓ parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ, commensurabilis autem sit ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine; dico ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ[11] ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΖ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμηται εἰς

Secetur enim ΒΓ bifariam in puncto Ε, et ponatur ipsi ΔΕ æqualis ΕΖ; reliqua igitur ΔΓ æqualis est ipsi ΒΖ. Et quoniam recta ΒΓ secatur

sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande, et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

Soient les deux droites inégales Α, ΒΓ; que ΒΓ soit la plus grande; appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défaillant d'un quarré, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite Α, c'est-à-dire au quarré de la moitié de Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ, et que ΒΔ soit commensurable en longueur avec ΔΓ; je dis que la puissance de ΒΓ surpassera la puissance de Α du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΓ.

Partageons ΒΓ en deux parties égales au point Ε, et faisons ΕΖ égal à ΔΕ; le reste ΔΓ sera égal à ΒΖ. Et puisque la droite ΒΓ est coupée en deux parties μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν[12] ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ, καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ[13] ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ[14] ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ[15] ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι ἡ ΖΔ[16] τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ[17] ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΕΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α, ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῇ ΖΔ. Δεικτέον ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός

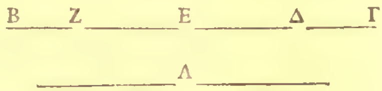
in partes quidem æquales ad Ε, in partes autem inæquales ad Δ; ergo sub ΒΔ, ΔΓ contentum rectangulum cum quadrato ex ΕΔ æquale est quadrato ex ΕΓ, et quadrupla; ergo quater sub ΒΔ, ΔΓ rectangulum cum quadruplo ex ΔΕ æquale est quater quadrato ex ΕΓ. Sed quidem quadruplo ipsius sub ΒΔ, ΔΓ æquale est ex Α quadratum, quadruplo autem ipsius ex ΔΕ æquale est ex ΔΖ quadratum, dupla enim est ΖΔ ipsius ΔΕ; et quadruplo quadrati ex ΕΓ æquale est ex ΒΓ quadratum, dupla enim est rursus ΒΓ ipsius ΕΓ; ergo ex Α, ΔΖ quadrata æqualia sunt ex ΒΓ quadrato; quare ex ΒΓ quadratum quam quadratum ex Α majus est quadrato ex ΔΖ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex ΖΔ. Ostendendum est et commensurabilem esse ΒΓ ipsi ΖΔ. Quoniam enim commensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine, commensurabilis igitur est et ΒΓ ipsi ΓΔ longitudine. Sed ΓΔ ipsis ΓΔ, ΒΖ est commensurabilis longitudine, æqualis enim est ΓΔ ipsi ΒΖ; et ΒΓ igitur commensurabilis est

égales en Ε, et en deux parties inégales en Δ, le rectangle compris sous ΒΔ, ΔΓ avec le quarré de ΕΔ sera égal au quarré de ΕΓ (5. 2). Mais les quadruples sont égaux aux quadruples; donc quatre fois le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ avec le quadruple quarré de ΔΕ est égal au quadruple quarré de ΕΓ. Mais le quarré de Α est quadruple du rectangle sous ΒΔ, ΔΓ, et le quarré de ΔΖ est égal au quadruple quarré de ΔΕ, car ΖΔ est double de ΔΕ; et de plus, le quarré de ΒΓ est égal au quadruple du quarré de ΕΓ; car ΒΓ est double de ΕΓ; donc la somme des quarrés des droites Α, ΔΖ est égale au quarré de ΒΓ; donc le quarré de ΒΓ surpasse le quarré de Α du quarré de ΔΖ; donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Il reste à démontrer que ΒΓ est commensurable avec ΖΔ. Car puisque ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ, ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (16. 10). Mais ΓΔ est commensurable en longueur avec la somme de ΓΔ et de ΒΖ; car ΓΔ égale ΒΖ (6. 10); donc ΒΓ est commen-ἐστι ταῖς ΒΖ, ΓΔ μήκει[18]· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει[19].

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει[20], τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

ipsis ΒΖ, ΓΔ longitudine; quare et reliquæ ΖΔ commensurabilis est ΒΓ longitudine; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

At vero ΒΓ quam Α plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti quadrati ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ. Ostendendum est commensurabilem esse ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δύναται δὲ ἡ ΒΓ μεῖζον τῆς Α[21] τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ[22]· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. Ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ σύμ-

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Sed plus potest ΒΓ quam Α quadrato ex rectâ sibi commensurabili; commensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΖΔ longitudine; quare et reliquæ utrique ΒΖ, ΔΓ commensurabilis est ΒΓ longitudine. Sed utraque ΒΖ, ΔΓ commen-

surable en longueur avec la somme de ΒΖ et de ΓΔ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec le reste ΖΔ (16. 10); donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΓ.

Mais que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite qui soit commensurable en longueur avec ΒΓ, et appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ. Il faut démontrer que ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Mais la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite qui est commensurable avec ΒΓ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec ΖΔ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (16. 10). Mais la somme des droites ΒΖ et ΔΓ est commensurable avec ΔΓ;

μετρός ἐστι τῇ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστὶ σύμμετρος μήκει.

Εὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

surabilis est ipsi ΔΓ; quare et ΒΓ ipsi ΓΔ commensurabilis est longitudine; et dividendo igitur ΒΔ ipsi ΔΓ est commensurabilis longitudine.

Si igitur duæ rectæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Εὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει[1]· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται[2] τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει[3].

PROPOSITIO XIX.

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sib incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

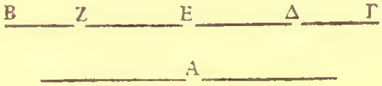
donc ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (12. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ (16. 10). Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Sint duæ rectæ inæquales A, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti ex minori A quadrati æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ rectangulum, incommensurabilis autem sit ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine; dico ΒΓ quam A plus posse quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον[4], ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δεικτέον ὅτι καὶ[5] ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει[6], ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. Αλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει, καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α

Iisdem enim constructis quæ suprà, similiter ostendemus ΒΓ quam A plus posse quadrato ex ΖΔ. Ostendendum est et incommensurabilem esse ΒΓ ipsi ΔΖ longitudine. Quoniam enim incommensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine, incommensurabilis igitur est et ΒΓ ipsi ΔΓ longitudine. Sed ΔΓ commensurabilis est utrisque ΒΖ, ΔΓ; et ΒΓ igitur incommensurabilis est utrisque ΒΖ, ΔΓ; quare et reliquæ ΖΔ incommensurabilis est ΒΓ longitudine, et ΒΓ quam A

Soient les deux droites inégales A, ΒΓ, et que ΒΓ soit la plus grande; appliquons à la plus grande un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite A; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ, et que ΒΔ soit incommensurable en longueur avec ΔΓ; je dis que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de A du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ.

Ayant fait la même construction qu'auparavant, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de A du quarré de ΖΔ. Il reste à démontrer que ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΖ. Car puisque ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ, ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (17. 10). Mais ΔΓ est commensurable avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (14. 10); donc ΒΓ est incommensurable avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ; donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec le reste ΖΔ (17. 10); mais μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἀλλ' ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ[8]· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. Ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἡ[9] ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς[10].

plus potest quadrato ex ΖΔ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

At plus possit rursus ΒΓ quam Α quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit quod sub ΒΔ, ΔΓ. Ostendendum est incommensurabilem esse ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Sed ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; incommensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΖΔ longitudine; quare et reliquæ utrique ΒΖ, ΔΓ incommensurabilis est ΒΓ. Sed utraque ΒΖ, ΔΓ ipsi ΔΓ commensurabilis est longitudine; ergo ΒΓ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine; quare et dividendo ΒΔ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine.

Si igitur sunt duæ rectæ inæquales, etc.

la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ; donc la puissance de ΒΓ surpassera la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ.

Mais que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de Α; et que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ; il faut démontrer que ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Mais la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΖΔ; donc ΒΓ est incommensurable avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (17. 10). Mais la somme de ΒΖ et de ΔΓ est commensurable avec ΔΓ (6. 10); donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (14. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (17. 10). Donc, etc.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ[1] δέδεικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει[2] οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει[3] σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι· φανερὸν ὅτι ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ[4] μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὖσα δυνάμει, μήκει αὐτῇ[5] ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος[6].

SCHOLIUM.

Quoniam demonstratum est rectas longitudine commensurabiles omninò et potentiâ esse commensurabiles, rectas autem potentiâ non semper et longitudine, at vero posse longitudine commensurabiles esse et incommensurabiles; evidens est si expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit longitudine, vocari rationalem et commensurabilem ipsi non solùm longitudine sed et potentiâ, quoniam rectæ longitudine commensurabiles omninò et potentiâ. Si autem expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit potentiâ, si quidem et longitudine, dicitur et sic rationalis et commensurabilis ipsi longitudine et potentiâ. Si autem expositæ rursùs rationali commensurabilis aliqua existens potentiâ, longitudine ipsi fuerit incommensurabilis, dicitur et sic rationalis potentiâ solùm commensurabilis.

SCHOLIE.

Puisqu'on a démontré que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur, quoiqu'elles puissent être commensurables et incommensurables en longueur (cor. 9. 10), il est évident que si une droite est commensurable en longueur avec la rationelle proposée, elle est appelée rationelle, et elle est commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance avec la rationelle proposée, puisque les grandeurs commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable non seulement en puissance, mais encore en longueur, avec la rationelle proposée, elle est dite rationelle et commensurable en longueur et en puissance avec la rationelle proposée. Et si enfin une droite commensurable en puissance avec la rationelle proposée lui est incommensurable en longueur, elle est dite rationelle commensurable en puissance seulement.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

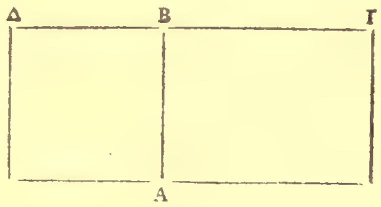
Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατά τινα τῶν εἰρημένων[1] τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.

PROPOSITIO XX.

Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundùm aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

Sub rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis ΑΒ, ΒΓ rectangulum contineatur ΑΓ; dico rationale esse ΑΓ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· σύμμετρος δέ ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ[2]· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ[3] τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ[4] καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationale igitur est ΑΔ. Et quoniam commensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, æqualis autem est ΑΒ ipsi ΒΔ; commensurabilis igitur est ΒΔ ipsi ΒΓ longitudine. Atque est ut ΒΔ ad ΒΓ ita ΔΑ ad ΑΓ; commensurabilis autem est ΒΔ ipsi ΒΓ, commensurabile igitur est et ΔΑ ipsi ΑΓ. Rationale autem ΔΑ; rationale igitur est et ΑΓ.

Ergo sub rationalibus, etc.

PROPOSITION XX.

Le rectangle compris sous des droites rationelles commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est rationel.

Que le rectangle ΑΓ soit compris sous les droites rationelles ΑΒ, ΒΓ commensurables en longueur; je dis que ΑΓ est rationel.

Car décrivons sur ΑΒ le quarré ΑΔ; le quarré ΑΔ sera rationel (déf. 6 et cor. 9. 10). Puisque ΑΒ est commensurable en longueur avec ΒΓ, et que ΑΒ égale ΒΔ, ΒΔ est commensurable en longueur avec ΒΓ. Mais ΒΔ est à ΒΓ comme ΔΑ est à ΑΓ (1. 6), et ΒΔ est commensurable avec ΒΓ; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ (10. 10). Mais ΔΑ est rationel; donc ΑΓ est aussi rationel (déf. 9 et pr. 12. 10). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

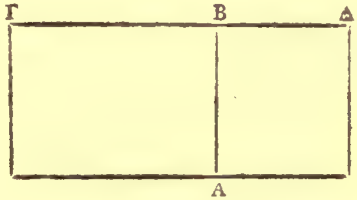
Εὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ σύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ῥητὸν γὰρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατά τινα πάλιν τῶν προειρημένων[1] τρόπων τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω, πλάτος ποιοῦν ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

PROPOSITIO XXI.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationalem, et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

Rationale enim ΑΓ ad rationalem ΑΒ secundùm aliquem rursus prædictorum modorum applicetur, latitudinem faciens ΒΓ; dico rationalem esse ΒΓ, et commensurabilem ipsi ΑΒ longitudine.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationale igitur est ΑΔ. Rationale autem et ΑΓ; commensurabile igitur est ΔΑ ipsi ΑΓ. Atque est ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΔΒ ad ΒΓ; commensurabilis igitur est et ΔΒ ipsi ΒΓ. Æqualis autem ΔΒ

PROPOSITION XXI.

Si une surface rationelle est appliquée à une droite rationelle, elle fera une largeur rationelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

Que la surface rationelle ΑΓ soit appliquée, suivant quelqu'un des modes dont nous avons encore parlé, à la rationelle ΑΒ, faisant la largeur ΒΓ; je dis que ΒΓ est rationel et commensurable en longueur avec ΑΒ.

Car décrivons sur ΑΒ le quarré ΑΔ; ΑΔ sera rationel (déf. 6 et cor. 9. 10). Mais ΑΓ est rationel; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ (déf. 9 et pr. 12. 10). Mais ΔΑ est à ΑΓ comme ΔΒ est à ΒΓ (1. 6); donc ΔΒ est commensurable avec ΒΓ (10. 10). Mais

Ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ· σύμμετρος ἄρα[2] καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsi ΒΑ; commensurabilis igitur et ΑΒ ipsi ΑΓ. Rationalis autem est ΑΒ; rationalis igitur est et ΒΓ, et commensurabilis ipsi ΑΒ longitudine.

Si igitur rationale, etc.

ΛΗΜΜΑ.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι.

Δυνάσθω γὰρ ἡ Α ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ· λέγω ὅτι ἡ Α ἄλογός ἐστιν.

LEMMA.

Recta quæ potest irrationale spatium, irrationalis est.

Possit enim recta Α irrationale spatium, hoc est ex Α quadratum æquale sit irrationali spatio; dico Α irrationalem esse.

A

Εἰ γὰρ ἔσται[1] ῥητὴ ἡ Α, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, οὕτως γάρ ἐστιν[2] ἐν τοῖς ὅροις. Οὐκ ἔστι δέ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Α[3]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι[4].

Si enim esset rationalis Α, rationale esset ex ipsâ quadratum, sic enim est in definitionibus. Non est autem; irrationalis igitur est Α. Quod oportebat ostendere.

ΔΒ est égal à ΒΑ; donc ΑΒ est commensurable avec ΑΓ. Mais ΑΒ est rationel; donc ΒΓ est aussi rationel, et commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. 6 et pr. 12. 10). Donc, etc.

LEMME.

La droite dont la puissanee est une surface irrationelle, est irrationelle.

Que la puissance de Α soit une surface irrationelle, c'est-à-dire que le quarré de Α soit égal à une surface irrationelle; je dis que Α est irrationel.

Car si Α était rationel, le quarré de Α serait rationel, ainsi que cela est dit dans les définitions (déf. 8 et cor. 9. 10). Mais il ne l'est pas; donc Α est irrationel. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϐ'.

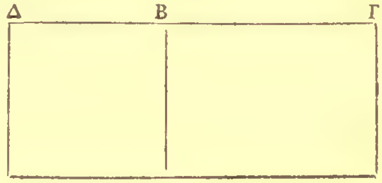
Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογος ἔσται[1]· καλείσθω δὲ μέση.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ μέση.

PROPOSITIO XXII.

Sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum irrationale est, et recta quæ potest ipsum irrationalis erit; ea autem vocetur media.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm commensurabilibus rectis AB, BΓ quadratum contineatur AΓ; dico irrationale esse AΓ, et rectam quæ potest ipsum irrationalem esse; ea autem vocetur media.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως

Describatur enim ex AB quadratum AΔ; rationale igitur est AΔ. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi BΓ longitudine, potentiâ enim solùm eæ supponuntur commensurabiles, æqualis autem AB ipsi BΔ; incommensurabilis igitur est et ΔB ipsi BΓ longitudine. Atque est ut BΔ ad

PROPOSITION XXII.

Le rectangle compris sous des droites rationelles, commensurables en puissance seulement, est irrationel, et la droite dont la puissance égale ce rectangle sera irrationelle ; cette droite s'appèlera médiale.

Que le rectangle AΓ soit compris sous les droites rationelles AB, BΓ commensurables en puissance seulement; je dis que le rectangle AΓ est irrationel, et que la droite dont la puissance est égale à ce rectangle est irrationelle; que cette droite soit appelée médiale.

Car décrivons sur AB le quarré AΔ; AΔ sera irrationnel. Et puisque AB est incommensurable en longueur avec BΓ; car on a supposé que ces deux droites étaient commensurables en puissance seulement, et que de plus AB est égal à BΔ, ΔB sera incommensurable en longueur avec BΓ. Mais BΔ est à BΓ comme AΔ est à AΓ τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη, ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέση[2]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι[3].

ΒΓ ita ΑΔ ad ΑΓ; incommensurabile igitur est ΔΑ ipsi ΑΓ. Rationale autem ΔΑ; irrationale igitur est ΑΓ; quare et recta quæ potest ipsum ΑΓ, hoc est recta quæ potest æquale ipsi quadratum, irrationalis est. Ea autem vocetur media. Quod oportebat ostendere.

ΛΗΜΜΑ.

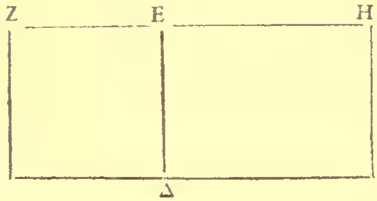
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔστιν[1] ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ, est ut prima ad secundam ita quadratum ex primâ ad rectangulum sub duabus rectis.

Sint duæ rectæ ΖΕ, ΕΗ; dico esse ut ΖΕ ad ΕΗ ita ex ΖΕ quadratum ad rectangulum sub ΖΕ, ΕΗ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΔ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΔΗ

Describatur enim ex ΖΕ quadratum ΔΖ, et compleatur ΗΔ. Quoniam igitur est ut ΖΕ ad ΕΗ ita ΖΔ ad ΔΗ, atque est quidem ΖΔ quadratum ex ΖΕ, ΔΗ vero rectangulum sub

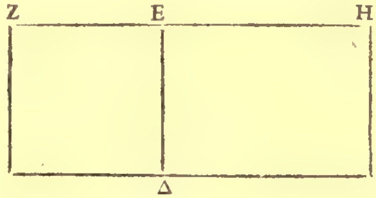
(1. 6); donc ΔΑ est incommensurable avec ΑΓ (10. 10); mais ΔΑ est rationel; donc ΑΓ est irrationnel (déf. 10 et pr. 13. 10); donc la droite dont la puissance égale ΑΓ, c'est-à-dire la droite dont la puissance est un quarré égal à ΑΓ est irrationelle (déf. 11. 10). Cette droite sera appelée médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

LEMME.

Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le quarré de la première est au rectangle compris sous ces deux droites.

Soient les deux droites ΖΕ, ΕΗ; je dis que ΖΕ est à ΕΗ comme le quarré de ΖΕ est au rectangle compris sous ΖΕ, ΕΗ.

Décrivons sur ΖΕ le quarré ΔΖ, et achevons ΗΔ. Puisque ΖΕ est à ΕΗ comme ΖΔ est à ΔΗ (1. 6); que ΖΔ est le quarré de ΖΕ, et que ΔΗ est le rectangle sous ΔΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως



τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. Ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι[2].

ΔΕ, ΕΗ, hoc est sub ΖΕ, ΕΗ; est igitur ut ΖΕ ad ΕΗ ita ex ΖΕ quadratum ad rectangulum sub ΖΕ, ΕΗ. Similiter autem et ut sub ΗΕ, ΕΖ rectangulum ad quadratum ex ΕΖ, hoc est ut ΗΔ ad ΖΔ ita ΗΕ ad ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον[1] πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον[2] τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

PROPOSITIO XXIII.

Quadratum ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

Sit media quidem Α, rationalis autem ΓΒ; et quadrato ex Α æquale ad ΒΓ applicetur spatium rectangulum ΒΔ latitudinem faciens ΓΔ; dico rationalem esse ΓΔ, et incommensurabilem ipsi ΓΒ longitudine.

ΕΗ, c'est-à-dire sous ΖΕ, ΕΗ, la droite ΖΕ est à ΕΗ comme le quarré de ΖΕ est au rectangle sous ΖΕ, ΕΗ. Semblablement le rectangle sous ΗΕ, ΕΖ est au quarré de ΕΖ, c'est-à-dire ΗΔ est à ΖΔ comme ΗΕ est à ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

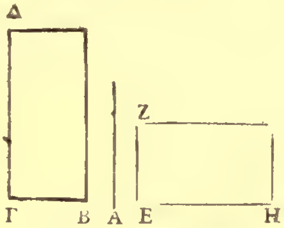
PROPOSITION XXIII.

Le quarré d'une médiale appliqué à une rationelle fait une longueur rationelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

Soit la médiale Α, et la rationelle ΓΒ; appliquons à ΒΓ un rectangle ΒΔ, qui soit égal au quarré de Α, et qui fasse la largeur ΓΔ; je dis que la droite ΓΔ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΓΒ.

Επεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. Δυνάσθω τὸ ΗΖ. Δύναται δὲ καὶ τὸ ΔΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΒ τῷ ΗΖ. Εστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς

Quoniam enim media est Α, potest spatium contentum sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus. Possit ΗΖ. Potest autem et ΔΒ; æquale igitur est ΔΒ ipsi ΗΖ. Est autem illi et æquiangulum, æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera quæ circùm æquales angulos; proportionaliter igitur est ut ΒΓ ad ΕΗ ita ΕΖ ad ΓΔ; est igitur et ut ex ΒΓ quadratum

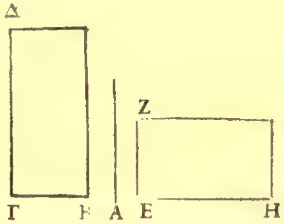


τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ρητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ

ad ipsum ex ΕΗ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex ΓΔ. Commensurabile autem est ex ΓΒ quadratum quadrato ex ΕΗ, rationalis enim est utraque ipsarum; commensurabile igitur est et ex ΕΖ quadratum quadrato ex ΓΔ. Rationale autem est quadratum ex ΕΖ; rationale igitur est et quadratum ex ΓΔ; rationalis igitur est ΓΔ. Et quoniam incommensurabilis est ΕΖ ipsi ΕΗ longitudine, potentiâ enim solùm sunt commensurabiles, ut autem ΕΖ ad ΕΗ ita ex ΕΖ quadratum

Car, puisque la droite Α est médiale, sa puissance égale une surface comprise sous des rationelles commensurables en puissance seulement (22. 10). Que sa puissance soit égale à ΗΖ; mais sa puissance égale aussi ΔΒ; donc ΔΒ égale ΗΖ. Mais ΔΒ est équiangle avec ΗΖ; et dans les parallélogrammes équiangles et égaux, les côtés qui comprènent des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ΒΓ est à ΕΗ comme ΕΖ est à ΓΔ; donc le quarré de ΒΓ est au quarré de ΕΗ comme le quarré de ΕΖ est au quarré de ΓΔ (22. 6). Mais le quarré de ΓΒ est commensurable avec le quarré de ΕΗ; car chacune de ces droites est rationelle (22. 10); donc le quarré de ΕΖ est aussi commensurable avec le quarré de ΓΔ (10. 10). Mais le quarré de ΕΖ est rationel; donc le quarré de ΓΔ est rationel aussi; donc ΓΔ est rationel. Et puisque la droite ΕΖ est incommensurable en longueur avec ΕΗ; car celle-ci ne lui est commensurable qu'en puissance, et que πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ[3] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΖ σύμμετρόν ἐστι[4] τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, ἴσα γάρ

ad rectangulum sub ZE, EH; incommensurabile igitur est ex EZ quadratum rectangulo sub ZE, EH. Sed quadrato quidem ex EZ commensurabile est quadratum ex ΓΔ, rationales enim sunt potentiâ, rectangulo autem sub ZE, EH commensurabile est rectangulum sub ΔΓ, ΓB;



ἐστι[5] τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ περιεχομένῳ[6]. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

æqualia enim sunt quadrato ex A; incommensurabile igitur est et ex ΓΔ quadratum rectangulo sub ΔΓ, ΓB contento. Ut autem ex ΓΔ quadratum ad rectangulum sub ΔΓ, ΓB ita est ΔΓ ad ΓB; incommensurabilis igitur est ΔΓ ipsi ΓB longitudine; rationalis igitur est ΓΔ et incommensurabilis ipsi ΓB longitudine. Quod oportebat ostendere.

EZ est à EH comme le quarré de EZ est au rectangle sous ZE, EH (lem. 22. 10), le quarré de EZ est incommensurable avec le rectangle sous ZE, EH (10. 10). Mais le quarré de ΓΔ est commensurable avec le quarré de EZ, car ces droites sont rationelles en puissance, et le rectangle sous ΔΓ, ΓB est commensurable avec le rectangle sous ZE, EH, car ils sont égaux chacun au quarré de A; donc le quarré de ΓΔ est incommensurable avec le rectangle sous ΔΓ, ΓB (13. 10). Mais le quarré de ΓΔ est au rectangle sous ΔΓ, ΓB comme ΔΓ est à ΓB (lem. 22); donc ΔΓ est incommensurable en longueur avec ΓB; donc ΓΔ est rationel et incommensurable en longueur avec ΓB (déf. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Η τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.

Ἔστω μέση ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν.

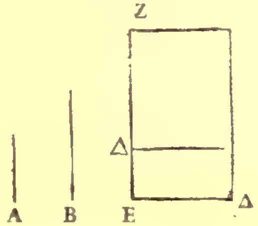
Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΔ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ[1] τὸ ΓΖ· σύμ-

PROPOSITIO XXIV.

Recta mediæ commensurabilis media est.

Sit media A, et ipsi A commensurabilis sit B; dico et B mediam esse.

Exponatur enim rationalis ΓΔ, et quadrato quidem ex A æquale ad ΓΔ applicetur spatium rectangulum ΓE latitudinem faciens EΔ; rationalis igitur est EΔ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Quadrato autem ex B æquale ad ΔΓ applicetur spatium rectangulum ΓZ latitudinem faciens ZΔ. Quoniam igitur commensurabilis est A ipsi B, commensurabile est et ex A quadratum quadrato ex B. Sed quadrato quidem ex A æquale est EΓ, quadrato autem



PROPOSITION XXIV.

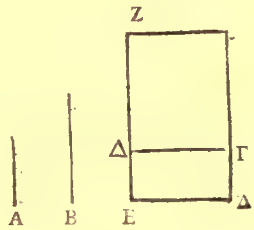
Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

Soit la médiale A, et que B soit commensurable avec A; je dis que la droite B est médiale.

Car soit la rationelle ΓΔ, et soit appliqué à ΓΔ un rectangle ΓE qui, faisant la largeur EΔ, soit égal au quarré de A; la droite EΔ sera rationelle et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Soit aussi appliqué à ΔΓ un rectangle ΓZ qui, faisant la largeur ZΔ, soit égal au quarré de B. Puisque A est commensurable avec B, le quarré de A sera commensurable avec le quarré de B (cor. 9. 10). Mais EΓ est égal au quarré de A, et ΓZ est égal au quarré de B;

μετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΓΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. Ρητὴ δέ ἐστιν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει

ex B æquale ΓZ; commensurabile igitur est EΓ ipsi ΓZ. Atque est ut EΓ ad ΓZ ita EΔ ad ΔZ; commensurabilis igitur est EΔ ipsi ΔZ longitudine. Rationalis autem est EΔ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; rationalis igitur est et ΔZ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; ergo ΓΔ, ΔZ rationales sunt, potentiâ



μόνον σύμμετροι. Η δὲ τὸ[2] ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυναμένη μέση ἐστίν[3]· ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυναμένη μέση ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ Β.

solùm commensurabiles. Recta autem quæ potest rectangulum sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus media est; recta igitur quæ potest rectangulum sub ΓΔ, ΔZ media est, et potest rectangulum sub ΓΔ, ΔZ ipsa B; media igitur est B.

donc EΓ est commensurable avec ΓZ. Mais EΓ est à ΓZ comme EΔ est à ΔZ (1. 6); donc EΔ est commensurable en longueur avec ΔZ (10. 10). Mais la droite EΔ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (23. 10); donc la droite ΔZ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (13. 10); donc les droites ΓΔ, ΔZ sont rationelles et commensurables en puissance seulement. Mais la droite dont la puissance égale un rectangle sous des rationelles commensurables en puissance seulement, est une médiale (22. 10); donc la droite, dont la puissance égale le rectangle sous ΓΔ, ΔZ, est une médiale; mais la puissance de B égale le rectangle sous ΓΔ, ΔZ; donc la droite B est une médiale.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστί. Δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν. Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ τὴν τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσην, καὶ[1] σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει[2]. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι[3].

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est spatium medio spatio commensurabile medium esse. Possunt enim ipsa rectæ quæ sunt potentiâ commensurabiles, quarum altera media; quare et reliqua media est. Congruenter autem ipsis in rationalibus dictis, et in mediis quoque colligetur, rectam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, et commensurabilem ipsi non solùm longitudine sed et potentiâ, quoniam universè rectæ longitudine commensurabiles semper et potentiâ. Si autem mediæ commensurabilis aliqua recta fuerit potentiâ, siquidem et longitudine, dicuntur et sic mediæ et commensurabiles longitudine et potentiâ. Si autem potentiâ solùm, dicuntur mediæ potentiâ solùm commensurabiles.

COROLLAIRE.

De là il est évident qu'une surface commensurable avec une surface médiale est médiale. Car les droites dont les puissances sont égales à ces surfaces sont commensurables en puissance, et l'une de ces droites est médiale; donc la droite restante est médiale. Mais d'après ce qui a été dit dans les rationelles, on peut conclure dans les médiales qu'une droite commensurable à une médiale est une médiale, cette droite lui étant commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance; car généralement les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable en puissance avec une médiale, et si elle l'est aussi en longueur, les médiales sont dites commensurables en longueur et en puissance. Mais si elles ne sont commensurables qu'en puissance, elles sont dites médiales commensurables en puissance seulement.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

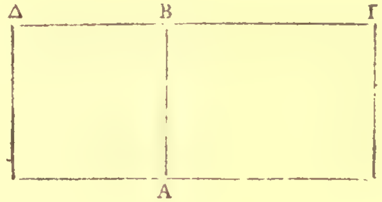
Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων[1] περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν.

Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν.

PROPOSITIO XXV.

Sub mediis longitudine commensurabilibus secundùm aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, medium est.

Sub mediis enim longitudine commensurabilibus rectis AB, BΓ contineatur rectangulum AΓ; dico AΓ medium esse.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστι[2] ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ σύμμετρόν ἐστι. Μέσον δὲ τὸ ΔΑ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΑΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Describatur enim ex AB quadratum AΔ; medium igitur est AΔ. Et quoniam commensurabilis est AB ipsi BΓ longitudine, æqualis autem AB ipsi BΔ; commensurabilis igitur est est et ΔB ipsi BΓ longitudine; quare et ΔA ipsi AΓ commensurabile est. Medium autem ΔA; medium igitur et AΓ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXV.

Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

Que le rectangle AΓ soit compris sous les droites médiales AB, BΓ commensurables en longueur; je dis que AΓ est médial.

Décrivons sur AB le quarré AΔ, AΔ sera médial (cor. 24. 10). Et puisque AB est commensurable en longueur avec BΓ, et que AB est égal à BΔ, la droite ΔB est commensurable en longueur avec BΓ; donc ΔA est commensurable avec AΓ. Mais ΔA est médial (cor. 24. 10); donc AΓ est aussi médial. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

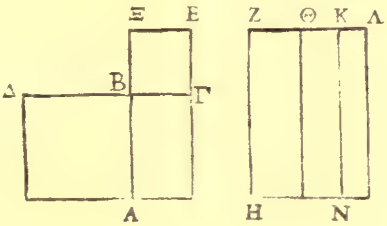
Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν[1] περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ὑπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον[2] τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν[3].

PROPOSITIO XXVI.

Sub mediis potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum, vel rationale vel medium est.

Sub mediis enim potentiâ solùm commensurabilibus rectis ΑΒ, ΒΓ contineatur rectangulum ΑΓ; dico ΑΓ vel rationale vel medium esse.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τὰ ΑΔ, ΒΕ· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΑΔ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘΜ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΜΚ

Describantur enim ex ΑΒ, ΒΓ quadrata ΑΔ, ΒΕ; medium igitur est utrumque ipsorum ΑΔ, ΒΕ. Et exponatur rationalis ΖΗ, et ipsi quidem ΑΔ æquale ad ΖΗ applicetur rectangulum parallelogrammum ΗΘ latitudinem faciens ΖΘ, ipsi autem ΑΓ æquale ad ΘΜ applicetur rectangulum parallelogrammum ΜΚ latitudinem fa-

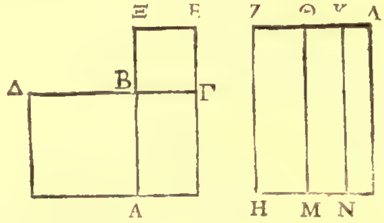
PROPOSITION XXVI.

Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationel ou médial.

Que le rectangle ΑΓ soit compris sous les droites médiales ΑΒ, ΒΓ, commensurables en puissance seulement; je dis que ΑΓ est ou rationel ou médial.

Car décrivons sur les droites ΑΒ, ΒΓ les quarrés ΑΔ, ΒΕ; chacun des quarrés ΑΔ, ΒΕ sera médial. Soit la rationelle ΖΗ; appliquons à ΖΗ le parallélogramme rectangle ΗΘ, qui ayant ΖΘ pour largeur, soit égal à ΑΔ; appliquons aussi à ΘΜ le parallélogramme rectangle ΜΚ, qui ayant ΘΚ pour largeur, soit égal à πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἔτι τῷ ΒΕ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παραβεβλήσθω τὸ ΝΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῷ

ciens ΘΚ, et adhuc ipsi ΒΕ æquale similiter ad ΚΝ applicetur ΝΛ latitudinem faciens ΚΛ; in rectâ igitur sunt ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum ΑΔ, ΒΕ, atque est æquale quidem ΑΔ ipsi ΗΘ, ipsum



ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῷ ΝΛ· μέσον ἄρα[4] καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ, ΝΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΚΛ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ[5] σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΔ τῷ ΒΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῷ ΝΛ. Καὶ ἔστιν[6] ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΚΛ μήκει· αἱ ΖΘ, ΚΛ ἄρα ῥηταί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΞΒ τῇ ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς

autem ΒΕ ipsi ΝΛ; medium igitur et utrumque ipsorum ΗΘ, ΝΛ, et ad rationalem ΖΗ applicatur; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΖΘ, ΚΛ, et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine. Et quoniam commensurabile est ΑΔ ipsi ΒΕ; commensurabile igitur est et ΗΘ ipsi ΝΛ. Atque est ut ΗΘ ad ΝΛ ita ΖΘ ad ΚΛ; commensurabilis igitur est ΖΘ ipsi ΚΛ longitudine; ergo ΖΘ, ΚΛ rationales sunt longitudine commensurabiles; rationale igitur est rectangulum sub ΖΘ, ΚΛ. Et quoniam æqualis est quidem ΒΔ ipsi ΒΑ, ipsa autem ΞΒ ipsi ΒΓ; est igitur ut ΔΒ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΞ. Sed ut ΔΒ ad ΒΓ

ΑΓ, et enfin appliquons semblablement à ΚΝ le parallélogramme rectangle ΝΛ, qui ayant ΚΛ pour largeur, soit égal à ΒΕ (45. 1); les droites ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ seront en ligne droite (14. 1). Puisque chacun des quarrés ΑΔ, ΒΕ est médial; que ΑΔ est égal à ΗΘ, et ΒΕ égal à ΝΛ, chacun des rectangles ΗΘ, ΝΛ sera médial; mais ils sont appliqués sur la rationelle ΖΗ; donc chacune des droites ΖΘ, ΚΛ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10). Mais ΑΔ est commensurable avec ΒΕ; donc ΗΘ est commensurable avec ΝΛ. Mais ΗΘ est à ΝΛ comme ΖΘ est à ΚΛ (1. 6); donc ΖΘ est commensurable en longueur avec ΚΛ (10. 10); donc les droites ΖΘ, ΚΛ sont des rationelles commensurables en longueur; le rectangle sous ΖΘ, ΚΛ est donc rationel. Et puisque ΒΔ est égal à ΒΑ, et ΞΒ égal à ΒΓ, ΔΒ sera à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΞ; mais ΔΒ est à ΒΓ τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ. Ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι[7] τῇ ΖΗ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΘΝ. Εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ, ΘΜ[8] ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΝ· τὸ ΘΝ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν[9]. Ἴσον δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστί.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

ita ΔΑ ad ΑΓ; ut autem ΑΒ ad ΒΞ ita ΑΓ ad ΓΞ; est igitur ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΞ. Æquale autem est quidem ΑΔ ipsi ΗΘ, ipsum vero ΑΓ ipsi ΜΚ, ipsum et ΓΞ ipsi ΝΛ; est igitur ut ΗΘ ad ΜΚ ita ΜΚ ad ΝΛ; est igitur et ut ΖΘ ad ΘΚ ita ΘΚ ad ΚΛ; rectangulum igitur sub ΖΘ, ΚΛ æquale est quadrato ex ΘΚ. Rationale autem rectangulum sub ΖΘ, ΚΛ; rationale igitur est et quadratum ex ΘΚ; rationalis igitur est ΘΚ. Et si quidem commensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine, rationale est ΘΝ. Si autem incommensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine, ipsæ ΚΘ, ΘΜ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est ΘΝ; ergo ΘΝ vel rationale vel medium est. Æquale autem ΘΝ ipsi ΑΓ; ergo ΑΓ vel rationale vel medium est.

Ergo sub mediis, etc.

comme ΔΑ est à ΑΓ, et ΑΒ est à ΒΞ comme ΑΓ est à ΓΞ (1. 6); donc ΔΑ est à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΞ. Mais ΑΔ est égal à ΗΘ, ΑΓ égal à ΜΚ, et ΓΞ égal à ΝΛ; donc ΗΘ est à ΜΚ comme ΜΚ est à ΝΛ; donc ΖΘ est à ΘΚ comme ΘΚ est à ΚΛ; le rectangle compris sous ΖΘ, ΚΛ est donc égal au quarré de ΘΚ (17. 6). Mais le rectangle sous ΖΘ, ΚΛ est rationel (20. 10); donc le quarré de ΘΚ est rationnel; donc la droite ΘΚ est rationelle. Et si ΘΚ est commensurable en longueur avec ΖΗ, la surface ΘΝ sera rationelle. Mais si ΘΚ est incommensurable en longueur avec ΖΗ, les droites ΚΘ, ΘΜ seront des rationelles commensurables en puissance seulement, et la surface ΘΝ sera médiale (22. 10); donc ΘΝ est rationel ou médial. Mais ΘΝ est égal à ΑΓ; donc ΑΓ est ou rationel ou médial. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

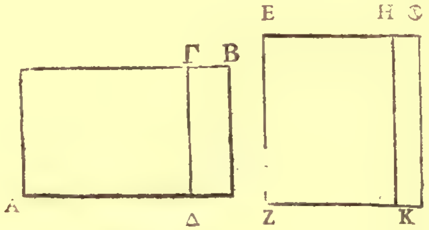
Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἐστὶν ἴσον[1]. Ρητὸν δέ ἐστι τὸ ΔΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. Επεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται[2]· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ

PROPOSITIO XXVII.

Medium non medium superat rationali.

Si enim possibile, medium AB medium AΓ superet rationali ΔB, et exponatur rationalis EZ, et ipsi AB æquale ad EZ applicetur parallelogrammum rectangulum ZΘ latitudinem faciens EΘ, ipsi autem AΓ æquale auferatur ZH; reliquum igitur BΔ reliquo KΘ est æquale. Rationale autem est ΔB; rationale igitur est et KΘ. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum AB, AΓ, atque est quidem AB ipsi ZΘ æquale, ipsum autem AΓ ipsi ZH; medium igitur et utrumque ipsorum ZΘ, ZH. Et ad rationalem EZ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum EΘ, EH, et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam rationale est



PROPOSITION XXVII.

Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationelle.

Car, que la surface médiale AB, s'il est possible, surpasse la surface médiale AΓ d'une surface rationelle ΔB; soit la rationelle EZ; appliquons à EZ le parallélogramme rectangle ZΘ, qui, étant égal à AB, ait EΘ pour largeur (45. 1); et de ZΘ retranchons ZH égal à AΓ; le reste BΔ sera égal au reste KΘ. Mais ΔB est rationel donc KΘ est rationel. Et puisque chacune des surfaces AB, AΓ est médiale, que AB est égal à ZΘ, et que AΓ est égal à ZH, chacune des surfaces ZΘ, ZH sera médiale. Mais ces surfaces sont appliquées à EZ; donc chacune des droites EΘ, EH est rationelle et incommensurable en longueur avec EZ (23. 10). Et puisque ΔB est ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΚΘ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ[3]· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τάτε ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ[4] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. Ἀλλὰ καὶ ῥητή, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα μέσου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΔΒ, atque est æquale ipsi ΚΘ; rationale igitur est et ΚΘ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΗΘ, et commensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Sed et ΕΗ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine; incommensurabilis igitur est ΕΗ ipsi ΗΘ longitudine. Atque est ut ΕΗ ad ΗΘ ita ex ΕΗ quadratum ad rectangulum sub ΕΗ, ΗΘ; incommensurabile igitur est ex ΕΗ quadratum rectangulo sub ΕΗ, ΗΘ. Sed quadrato quidem ex ΕΗ commensurabilia sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata, rationalia enim utraque, rectangulo autem sub ΕΗ, ΗΘ commensurabile est rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, duplum enim est ipsius; incommensurabilia igitur sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata rectangulo bis sub ΕΗ, ΗΘ; et utraque igitur ex ΕΗ, ΗΘ quadrata et rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, quod est quadratum ex ΕΘ, incommensurabilia sunt quadratis ex ΕΗ, ΗΘ. Rationalia autem quadrata ex ΕΗ, ΗΘ; irrationale igitur est quadratum ex ΕΘ; irrationalis igitur est ΕΘ. Sed et rationalis, quod est impossibile.

Medium igitur medium, etc.

rationel, et qu'il est égal à ΚΘ, ΚΘ sera rationel; mais il est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΗΘ est rationel et commensurable en longueur avec ΕΖ (21. 10). Mais ΕΗ est rationel et incommensurable en longueur avec ΕΖ; donc ΕΗ est incommensurable en longueur avec ΗΘ (13. 10). Mais ΕΗ est à ΗΘ comme le quarré de ΕΗ est au rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (1. 6); donc le quarré de ΕΗ est incommensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (10. 10). Mais la somme des quarrés des droites ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le quarré de ΕΗ, car ces quarrés sont rationels et le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, car il en est le double; donc la somme des quarrés de ΕΗ et de ΗΘ est incommensurable avec le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (14. 10); donc la somme des quarrés des droites ΕΗ, ΗΘ, du double du rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, qui est le quarré de ΕΘ (4. 2), est incommensurable avec la somme des quarrés des droites ΕΗ, ΗΘ (17. 10). Mais les quarrés de ΕΗ et de ΗΘ sont rationels; donc le quarré de ΕΘ est irrationel (déf. 10. 10); donc ΕΘ est irrationel. Mais il est rationel, ce qui est impossible. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

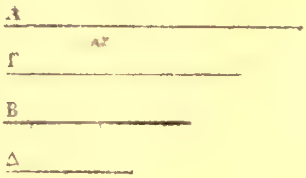
Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ.

PROPOSITIO XXVIII.

Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes.

Exponantur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles A, B, et sumatur ipsarum A, B media proportionalis Γ, et fiat ut A ad B ita Γ ad Δ.



Καὶ ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Γ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως[1] ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α, Β δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ· αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον

Et quoniam A, B rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, rectangulum igitur sub A, B, hoc est quadratum ex Γ, medium est; media igitur Γ. Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, ipsæ autem A, B potentiâ solùm commensurabiles; et Γ, Δ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Atque est media Γ; media igitur et Δ; ergo Γ, Δ mediæ sunt potentiâ

PROPOSITION XXVIII.

Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui contiènent une surface rationelle.

Soient A, B deux rationelles commensurables en puissance seulement; prenons une moyenne proportionnelle Γ entre A et B (13. 6), et faisons en sorte que A soit à B comme Γ est à Δ (12. 6).

Puisque les rationelles A, B sont commensurables en puissance seulement, le rectangle sous A, B (22. 10), c'est-à-dire le quarré de Γ, est médial (17. 6); donc Γ est médial. Et puisque A est à B comme Γ est à Δ, et que les droites A, B ne sont commensurables qu'en puissance; les droites Γ, Δ ne sont commensurables qu'en puissance (10. 10). Mais Γ est médial; donc Δ est médial (24. 10); donc les droites Γ, Δ sont des médiales commensurables en puissance σύμμετροι. Λέγω δὴ[2] ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως[3] ἡ Β πρὸς τὴν Δ. Αλλὰ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως[4] ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ[5] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Οπερ ἔδει δεῖξαι[6].

solùm commensurabiles. Dico etiam et ipsas rationale continere. Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ, permutando igitur est ut A ad Γ ita B ad Δ. Sed ut A ad Γ ita Γ ad B; et ut igitur Γ ad B ita B ad Δ; rectangulum igitur sub Γ, Δ æquale est quadrato ex B. Rationale autem quadratum ex B; rationale igitur est et rectangulum sub Γ, Δ.

Inventæ sunt igitur mediæ potentiâ solùm commensurabiles. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας.

Εκκείσθωσαν τρεῖς[1] ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως[2] ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Επεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι

PROPOSITIO XXIX.

Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes.

Exponantur tres rationales potentiâ solùm commensurabiles A, B, Γ, et sumatur ipsarum A, B media proportionalis Δ, et fiat ut B ad Γ ita Δ ad E.

Quoniam A, B rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, rectangulum igitur sub A, B,

seulement (24. 10). Je dis aussi qu'elles comprènent une surface rationelle. Car puisque A est à B comme Γ est à Δ, par permutation A est à Γ comme B est à Δ (16. 5). Mais A est à Γ comme Γ est à B; donc Γ est à B comme B est à Δ; donc le rectangle sous Γ, Δ est égal au quarré de B (17. 6). Mais le quarré de B est rationel; le rectangle sous Γ, Δ est donc aussi rationel.

On a donc trouvé des médiales commensurable en puissance seulement. Ce qu'il fallait faire.

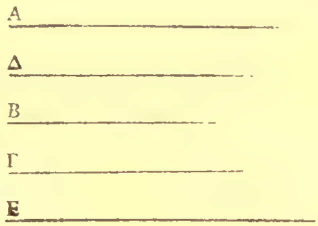
PROPOSITION XXIX.

Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprènent une surface médiale.

Soient les trois rationelles A, B, Γ commensurables en puissance seulement; prenons une moyenne proportionnelle Δ entre A et B (13. 6), et faisons en sorte que B soit à Γ comme Δ est à E (12. 6).

Puisque les droites A, B sont des rationelles commensurables en puissance seulement, le rectangle sous A, B (22. 10), c'est-à-dire le quarré de Δ (17. 6) τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Δ. Καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως[3] ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσί[4]. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὴ ὅτι μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν

hoc quadratum ex Δ, medium est; media igitur Δ. Et quoniam Β, Γ potentiâ solùm sunt commensurabiles, atque est ut Β ad Γ ita Δ ad Ε; ergo Δ, Ε commensurabiles potentiâ solùm sunt. Media autem Δ; media igitur et Ε; ergo Δ, Ε mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Dico etiam ipsas medium con-



ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως[5] ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως[6] ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. Ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως[7] ἡ Δ πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α οὕτως[8] ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι[9].

tinere. Quoniam enim est ut Β ad Γ ita Δ ad Ε, permutando igitur ut Β ad Δ ita Γ ad Ε. Ut autem Β ad Δ ita Δ ad Α, et ut igitur Δ ad Α ita Γ ad Ε; rectangulum igitur sub Α, Γ æquale est rectangulo sub Δ, Ε. Medium autem rectangulum sub Α, Γ; medium igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur mediæ potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes. Quod oportebat facere.

sera médial; donc la droite Δ est médiale. Et puisque les droites Β, Γ ne sont commensurables qu'en puissance, et que Β est à Γ comme Δ est à Ε, les droites Δ, Ε ne sont commensurables qu'en puissance (10. 10). Mais Δ est médial; donc Ε est médial (24. 10); donc les droites Δ, Ε sont des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis aussi qu'elles comprènent une surface médiale; car puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε, par permutation Β est à Δ comme Γ est à Ε. Mais Β est à Δ comme Δ est à Α; donc Δ est à Α comme Γ est à Ε; donc le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε (16. 6). Mais le rectangle sous Α, Γ est médial (22. 10); donc le rectangle sous Δ, Ε est médial.

On a donc trouvé des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprènent une surface médiale. Ce qu'il fallait faire.

ΛΗΜΜΑ α΄.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμοὺς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔστωσαν δὲ[1] ἤτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. Καὶ ἐπεὶ ἐάντε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάντε ἀπὸ περιττοῦ περιττὸς, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. Εστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ[2] τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ[3] ἀπὸ τοῦ ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΒ τετραγώνῳ. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπειδήπερ ἐδείχθη ὅτι ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ, ὅ, τε ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, οἳ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετράγωνον. Οπερ ἔδει ποιῆσαι[4].

LEMMA I.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut et compositus ex ipsis sit quadratus.

Exponantur duo numeri ΑΒ, ΒΓ, sint autem vel pares vel impares. Et quoniam sive à pari par auferatur, sive ab impari impar, reliquus par est; reliquus igitur ΑΓ par est. Secetur ΑΓ bifariam in Δ. Sint autem et ΑΒ, ΒΓ vel similes plani vel quadrati, qui et ipsi similes plani sunt; ergo sub ΑΒ, ΒΓ numerus cum quadrato ex ΓΔ æqualis est ex ΔΒ quadrato. Atque est quadratus ex ΑΒ, ΒΓ numerus, quoniam ostensum est si duo similes plani sese multiplicantes faciant aliquem, factum quadratum esse; inventi sunt igitur duo quadrati numeri, et quadratus ex ΑΒ, ΒΓ, et quadratus ex ΓΔ, qui compositi faciunt ex ΒΔ quadratum. Quod oportebat facere.

Α. . . . . Δ. . . . . Γ. . . . . Β

LEMME I.

Trouver deux nombres quarrés, de manière que leur somme soit un quarré.

Soient les deux nombres ΑΒ, ΒΓ; qu'ils soient ou pairs ou impairs. Puisque si d'un nombre pair on ôte un nombre pair, ou si d'un nombre impair on ôte un impair, le reste est pair (24, et 26. 9); le reste ΑΓ est donc pair. Partageons ΓΑ en deux parties égales en Δ. Que les nombres ΑΒ, ΒΓ soient ou des plans semblables ou des quarrés qui sont eux-mêmes des plans semblables; le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΔ sera égal au quarré de ΔΒ (6. 2). Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ est un quarré; car on a démontré que si deux plans semblables se multipliant eux-mêmes font un nombre, le produit est un quarré (1. 9); on a donc trouvé deux nombres quarrés, savoir le produit de ΑΒ par ΒΓ, et le quarré de ΓΔ, dont la somme égale le quarré de ΒΔ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν ὅτι εὕρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν[1] ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ὦσιν ἐπίπεδοι[2]. Οταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηνται δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ[3] ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνος[4].

COROLLARIUM.

Et manifestum est inventos esse rursùs duos quadratos, et quadratum ex ΒΔ et quadratum ex ΓΔ, ita ut excessus ipsorum sub ΑΒ, ΒΓ sit quadratus, quando ΑΒ, ΒΓ similes sunt plani. Quando autem non sunt similes plani, inventi sunt duo quadrati, et quadratus ex ΒΔ et quadratus ex ΓΔ, quorum excessus sub ΑΒ, ΒΓ non est quadratus.

ΛΗΜΜΑ β'.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμοὺς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Εστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Δ[1]· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ[2] ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[3]

LEMMA II.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut ex ipsis compositus non sit quadratus.

Sit enim sub ΑΒ, ΒΓ, ut dicebamus, quadratus, et par ipse ΓΑ, et secetur ΓΑ bifariam in Δ; evidens est utique ex ΑΒ, ΒΓ quadratum

COROLLAIRE.

Il est évident de plus qu'on a trouvé deux quarrés, savoir le quarré de ΒΔ et celui de ΓΔ, de manière que leur différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, est un quarré, lorsque les nombres ΑΒ, ΒΓ sont des plans semblables. Mais lorsque ces nombres ne sont pas des plans semblables, on trouve deux quarrés, celui de ΒΔ et celui de ΓΔ, dont la différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, n'est pas un quarré.

LEMME II.

Trouver deux nombres quarrés, dont la somme ne soit pas un quarré.

Que le produit de ΑΒ par ΒΓ soit un quarré, comme nous l'avons dit; que ΓΑ soit un nombre pair; partageons ΓΑ en deux parties égales en Δ. Il est évident que le quarré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré

ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ[4] ΒΔ τετραγώνῳ. Ἀφῃρήσθω[5] μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος[6] μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[7] ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ[8] ΒΔ τετραγώνου. Λέγω οὖν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[9] ΓΕ οὐκ ἐστὶ[10] τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ[11] ΒΕ ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΕ[12], οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μήτε τμηθῇ ἡ μονάς[13].

cum quadrato ex ΓΔ æqualem esse quadrato ex ΒΔ. Auferatur unitas ΔΕ; ergo ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ minor est quadrato ex ΒΔ. Dico igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratum cum quadrato ex ΓΕ non esse quadratum.

Si enim fuerit quadratus, vel æqualis est quadrato ex ΒΕ vel minor quadrato ex ΒΕ, non autem et major, ut ne secetur unitas. Sit, si possibile, primum ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΒΕ, et sit ipsius ΔΕ unitatis duplus ΗΑ. Quoniam igitur totus ΑΓ totius ΓΔ est duplus, ipse autem ΑΗ ipsius ΔΕ est duplus; et reliquus igitur ΗΓ reliqui ΕΓ est duplus; bifariam igitur secatur ΗΓ in Ε; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Sed et ex ΑΒ, ΒΓ

Α . , Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ . . . . Β

Ἔστω εἰ δυνατὸν πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίων ὁ ΗΑ[14]. Ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίων, ὁ δὲ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστὶ διπλασίων[15]· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίων· δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[16] ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ[17] ΒΕ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ,

de ΓΔ est égal au quarré de ΒΔ (6. 2). Retranchons l'unité ΔΕ; le quarré qui résultera du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ sera plus petit que le quarré de ΒΔ. Et je dis que le quarré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ n'est pas un quarré.

Car si ce nombre est un quarré, ou il est égal au quarré de ΒΕ, ou il est plus petit que lui; mais il ne peut pas être plus grand; car, si cela était, l'unité serait partagée. Que le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ soit d'abord égal au quarré de ΒΕ, si cela est possible, et que ΗΑ soit double de l'unité ΔΕ. Puisque ΑΓ tout entier est double de ΓΔ tout entier, et que ΑΗ est double de ΔΕ, le reste ΗΓ sera double du reste ΕΓ; donc ΗΓ est partagé en deux parties égales en Ε; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ est égal au quarré de ΒΕ (6. 2).

ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[18] ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[19] ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν[20] ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[21] ΓΕ. Καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τοῦ[22] ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ[23], ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[24] ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ[25] ΒΕ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ[26] ΒΕ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ[27] ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ

quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis supponitur quadrato ex ΒΕ; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ. Et detracto communi quadrato ex ΓΕ, concludetur ΑΒ æqualis ipsi ΗΒ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Dico etiam neque minorem quadrato ex ΒΕ. Si enim possibile, sit quadrato ex ΒΖ æqualis, et ipsius

Α . . Η . . Θ . Δ . Ξ . Ζ . . . Γ . . . . Β

διπλασίων[28] ὁ ΘΑ. Καὶ[29] συναχθήσεται πάλιν διπλασίων[30] ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ, ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Ζ· καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[31] ΖΓ ἴσον γενέσθαι τῷ ἀπὸ τοῦ[32] ΒΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[33] ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ[34] ΖΒ· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ[35], ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα

ΔΖ duplus ΘΑ. Et concludetur rursus duplus ΘΓ ipsius ΓΖ, ita ut et ΓΘ bifariam dividatur in Ζ; et ob id ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΖΓ æqualis fit quadrato ex ΒΖ. Supponitur autem et ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΖΒ; quare et ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΖ æqualis erit quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus

Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ est supposé égal au quarré de ΒΕ; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ est égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ. Le quarré commun de ΓΕ étant retranché, on conclura que ΑΒ est égal à ΗΒ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ n'est pas égal au quarré de ΒΕ. Je dis, de plus, qu'il n'est pas plus petit que le quarré de ΒΕ. Car, si cela est possible, qu'il soit égal au quarré de ΒΖ, et que ΘΑ soit double de ΔΖ. On conclura encore que ΘΓ est double de ΓΖ, de manière que ΓΘ sera partagé en deux parties égales en Ζ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le quarré de ΖΓ sera égal au quarré de ΒΖ (6. 2). Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ est supposé égal au quarré de ΖΒ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΖ sera égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[36] ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ[37] ἐλάττονι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ[38] τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ· [39]οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[40] ΓΕ τετράγωνός ἐστι. Δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος[41], ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπιπλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.

cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato minori quam est ipse ex ΒΕ. Ostensum est autem neque ipsi quadrato ex ΒΕ, neque majori quam est ipse; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ quadratus est. Cùm autem possibile sit, et in pluribus modis quod dictum demonstrare, sufficiat nobis expositus, ut ne longam tractationem longiùs producamus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λʹ.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Εκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν[1] ΓΕ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ

PROPOSITIO XXX.

Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Exponantur enim aliqua rationalis ΑΒ, et duo quadrati numeri ΓΔ, ΔΕ, ita ut excessus ipsorum ΓΕ non sit quadratus, et describatur super rectam ΑΒ semicirculus ΑΖΒ, et fiat

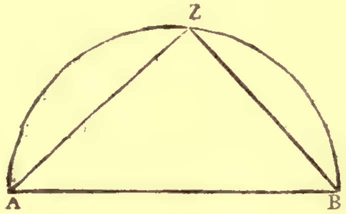
par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ n'est pas égal à un plus petit quarré que celui de ΒΕ. Mais on a démontré qu'il n'est pas égal au quarré de ΒΕ, ni à un quarré plus grand. Donc le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ n'est pas un quarré. Ce lemme peut se démontrer de plusieurs manières; je me contenterai de celle que je viens d'exposer, afin de ne pas être trop long.

PROPOSITION XXX.

Trouver deux rationelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Soient une rationelle ΑΒ, et deux nombres quarrés ΓΔ, ΔΕ, de manière que leur excès ΓΕ ne soit pas un quarré (cor. 29. 10). Sur ΑΒ décrivons le demiπεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον[2], καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ.

ut ΔΓ ad ΓΕ ita ex ΒΑ quadratum ad quadratum ex ΑΖ, et jungatur ΖΒ.



Γ . . . . . E . . . . Δ

Επεὶ οὖν[3] ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει

Quoniam igitur est ut ex ΒΑ quadratum ad ipsum ex ΑΖ ita ΔΓ ad ΓΕ, ex ΒΑ igitur quadratum ad ipsum ex ΑΖ rationem habet quam numerus ΔΓ ad numerum ΓΕ; commensurabile igitur est ex ΒΑ quadratum quadrato ex ΑΖ. Rationale autem quadratum ex ΑΒ; rationale igitur et quadratum ex ΑΖ; rationalis igitur et ΑΖ. Et quoniam ΔΓ ad ΓΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex ΒΑ igitur quadratum ad ipsum ex ΑΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΑ ipsi ΑΖ longitudine; ipsæ ΒΑ, ΑΖ igitur rationales sunt potentiâ solùm

cercle ΑΖΒ; faisons en sorte que ΔΓ soit à ΓΕ comme le quarré de ΒΑ est au quarré de ΑΖ (6. 10), et joignons ΖΒ.

Car, puisque le quarré de ΒΑ est au quarré de ΑΖ comme ΔΓ est à ΓΕ, le quarré de ΒΑ aura avec le quarré de ΑΖ la raison que le nombre ΔΓ a avec le nombre ΓΕ; le quarré de ΒΑ sera donc commensurable avec le quarré de ΑΖ (6. 10). Mais le quarré de ΑΒ est rationel (déf. 8. 10); donc le quarré de ΑΖ est rationel (déf. 9. 10); donc la droite ΑΖ est rationelle (déf. 6. 10). Et puisque ΔΓ n'a pas avec ΓΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΒΑ n'aura pas avec le quarré de ΑΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc ΒΑ est incommensurable en longueur avec ΑΖ (9. 10); donc les rationelles ΒΑ, ΑΖ ne sont commensurables qu'en puissance (déf. 3. 10). Et μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεί ἐστιν[4] ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Ο δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει[5].

Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μεῖζον[6] δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει. Οπερ ἔδει ποιῆσαι[7].

commensurabiles. Et quoniam est ut ΔΓ ad ΓΕ ita ex ΒΑ quadratum ad ipsum ex ΑΖ; convertendo igitur ut ΓΔ ad ΔΕ ita ex ΑΒ quadratum ad ipsum ex ΒΖ. Ipse autem ΓΔ ad ΔΕ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ex ΑΒ igitur quadratum ad ipsum ex ΒΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΑΒ ipsi ΒΖ longitudine. Atque est quadratum ex ΑΒ æquale quadratis ex ΑΖ, ΖΒ; ipsa ΑΒ igitur quam ΑΖ plus potest quadrato ex rectâ ΒΖ sibi commensurabili longitudine.

Inventæ sunt igitur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles ΒΑ, ΑΖ, ita ut major ΑΒ quam minor ΑΖ plus possit quadrato ex rectâ ΒΖ sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

puisque ΔΓ est à ΓΕ comme le quarré de ΑΒ est au quarré de ΑΖ; par conversion ΓΔ est à ΔΕ comme le quarré de ΑΒ est au quarré de ΒΖ (19. 5 et 47. 1). Mais ΓΔ a avec ΔΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc le quarré de ΑΒ a avec le quarré de ΒΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc ΑΒ est commensurable en longueur avec ΒΖ (9. 10). Mais le quarré de ΑΒ est égal à la somme des quarrés de ΑΖ et de ΖΒ (47. 1); donc la puissance de ΑΒ surpasse la puissance de ΑΖ du quarré de la droite commensurable en longueur avec ΑΒ.

On a donc trouvé deux rationelles ΒΑ, ΑΖ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande ΒΑ surpasse la puissance de la plus petite ΑΖ du quarré de la droite ΒΖ commensurable en longueur avec ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

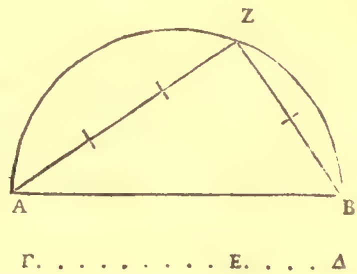
Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ AB, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ[1] οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ πεποιείσθω ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BZ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὡς[2] ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ BA, AZ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν

PROPOSITIO XXXI.

Invenire duas rationales potentià solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectà sibi incommensurabili longitudine.

Exponantur rationalis AB, et duo quadrati numeri ΓE, EΔ, ita ut ΓΔ compositus ex ipsis non sit quadratus, et describatur super rectam AB semicirculus AZB, et fiat ut ΓΔ ad ΓE ita ex AB quadratum ad ipsum ex AZ, et jungatur BZ; similiter utique demonstrabimus, ut in antecedente, rectas BA, AZ rationales esse potentià solùm commensurabiles. Et quoniam est ut ΔΓ ad ΓE ita ex BA quadratum ad ipsum ex AZ; convertendo igitur ut ΓΔ ad ΔE ita



PROPOSITION XXXI.

Trouver deux rationelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

Soient la rationelle AB, et les deux nombres quarrés ΓE, EΔ, de manière que leur somme ΓΔ ne soit pas un quarré (lem. 2. 29. 10); sur la droite AB, décrivons le demi-cercle AZB; faisons en sorte que ΓΔ soit à ΓE comme le quarré de AB est au quarré de AZ (cor. 6. 10), et joignons BZ. Nous démontrerons semblablement comme auparavant que les rationelles BA, AZ ne sont commensurables qu'en puissance. Puisque ΔΓ est à ΓE comme le quarré de BA est au quarré de AZ, par conversion

ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Ο δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· αἱ ΑΒ, ΒΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ[3] ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Οπερ ἔδει ποιῆσαι[4].

ex AB quadratum ad ipsum ex BZ. Ipse autem ΓΔ ad ΔΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BZ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est AB ipsi BZ longitudine. Et plus potest AB quam AZ quadrato ex rectâ ZB sibi incommensurabili; ipsæ AB, BZ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et AB quam AZ plus potest quadrato ex rectâ ZB sibi incommensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϐ΄.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Εκκείσθωσαν γάρ[1] δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμ-

PROPOSITIO XXXII.

Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Exponantur enim duæ rationales potentiâ solùm

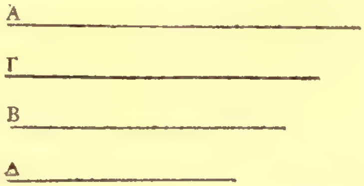
ΓΔ sera à ΔΕ comme le quarré de AB est au quarré de BZ. Mais ΓΔ n'a pas avec ΔΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc le quarré de de AB n'a pas avec le quarré de BZ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc AB est incommensurable en longueur avec BZ (9. 10); donc la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du quarré d'une droite ZB incommensurable avec AB; donc les rationelles AB, BZ ne sont commensurables qu'en puissance, et la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du quarré de la droite ZB incommensurable en longueur avec AB. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent un rectangle rationel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Soient les deux rationelles A, B commensurables en puissance seulement, μετροι αἱ Α, Β, ὥστε τὴν Α μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς Β μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ. Μέσον δὲ τὸ[2] ὑπὸ τῶν Α, Β· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Γ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ[3] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν

commensurabiles A, B, ita ut A major existens quam minor B plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et rectangulo sub A, B æquale sit quadratum ex Γ. Medium autem rectangulum sub A, B; medium igitur et quadratum ex Γ; media igitur et Γ. Quadrato autem ex B æquale sit rectangulum sub Γ, Δ, rationale autem quadratum ex B; rationale igitur est et rectangulum sub Γ, Δ. Et quoniam est ut A ad B ita sub A, B rectangulum ad quadratum



Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ

ex B; sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex Γ, quadrato autem ex B æquale rectangulum sub Γ, Δ; ut igitur A ad B ita ex Γ quadratum ad rectangulum sub Γ, Δ. Ut autem ex Γ quadratum ad rectangulum sub Γ, Δ ita Γ ad Δ; et ut igitur A ad B ita Γ ad Δ. Commensurabilis autem A ipsi B potentiâ solùm;

de manière que la puissance de la plus grande A surpasse la puissance de la plus petite B du quarré d'une droite commensurable en longueur avec A (30. 10). Que le quarré de Γ soit égal au rectangle sous A, B. Mais le rectangle sous A, B est médial (22. 10); donc le quarré de Γ est médial; donc la droite Γ est médiale. Que le rectangle sous Γ, Δ soit égal au quarré de B; puisque le quarré de B est rationel, le rectangle sous Γ, Δ sera rationel. Et puisque A est à B comme le rectangle sous A, B est au quarré de B (1. 6), que le quarré de Γ est égal au rectangle sous A, B, et que le rectangle sous Γ, Δ est égal au quarré de B, la droite A sera à la droite B comme le quarré de Γ est au rectangle sous Γ, Δ. Mais le quarré de Γ est au rectangle sous Γ, Δ comme Γ est à Δ; donc A est à B comme Γ est à Δ. Mais A n'est commensurable avec B qu'en puissance; donc Γ n'est ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. Καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως[4] ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου[5] ἑαυτῇ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δύναται[6] τῷ ἀπὸ συμμέτρου[7] ἑαυτῇ.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ, ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ[8] μήκει. Οπερ ἔδει ποιῆσαι[9].

Ομοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν τῆς Β μεῖζον δύνηται ἡ Α τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ[10].

commensurabilis igitur et Γ ipsi Δ potentiâ solùm. Atque est media Γ; media igitur et Δ. Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, ipsa autem A quam B plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et Γ igitur quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles Γ, Δ, rationale continentes, et Γ quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

Similiter utique ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando quam B plus potest ipsa A quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

commensurable avec Δ qu'en puissance (10. 10). Mais Γ est médial; donc Δ est médial (24. 10). Et puisque A est à B comme Γ est à Δ, et que la puissance de A surpasse la puissance de B du quarré d'une droite commensurable avec A, la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré d'une droite commensurable avec Γ (15. 10).

On a donc trouvé deux médiales Γ, Δ commensurables en puissance seulement, qui comprènent un rectangle rationel; et la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec Γ. Ce qu'il fallait faire.

Si la puissance de A surpassait la puissance de B du quarré d'une droite incommensurable avec A, on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent un rectangle rationel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

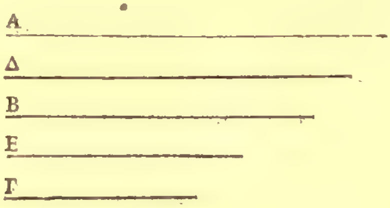
Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ[1], ὥστε τὴν Α τῆς Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ[2]· μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστί. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον[3] τὸ ὑπὸ

PROPOSITIO XXXIII.

Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Exponantur tres rationales potentiâ solùm commensurabiles A, B, Γ, ita ut A quam Γ plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et rectangulo quidem sub A, B æquale sit quadratum ex Δ; medium igitur quadratum ex Δ; et Δ igitur media est. Rectangulo autem sub B, Γ æquale sit rectangulum sub Δ, E. Et quoniam est ut sub A, B rectangulum ad ipsum sub B, Γ ita A ad Γ, sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex Δ, rectangulo autem sub B, Γ æquale



PROPOSITION XXXIII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable avec la plus grande.

Soient les trois rationelles A, B, Γ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de A surpasse la puissance de Γ du quarré d'une droite commensurable avec A (30. 10); que le quarré de Δ soit égal au rectangle sous A, B (14. 2); le quarré de Δ sera médial (22. 10), et la droite Δ médiale. Que le rectangle sous Δ, E soit égal au rectangle sous B, Γ (45. 1). Puisque le rectangle sous A, B est au rectangle sous B, Γ comme A est à Γ (1. 6), que le quarré de Δ est égal au rectangle sous A, B, et que le rectangle sous Δ, E est égal au rectangle τῶν Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Ως δὲ[4] τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει μόνον[5]· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως[6] ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Επεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ[7] ὑπὸ τῶν Β, Γ τῷ[8] ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μέσον δὲ τὸ[9] ὑπὸ τῶν Β, Γ· αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι[10]· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε, μέσον περιέχουσαι· ὥστε τὴν μείζονα[11] τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι[12].

rectangulum sub Δ, Ε; est igitur ut Α ad Γ ita ex Δ quadratum ad rectangulum sub Δ, Ε. Ut autem ex Δ quadratum ad rectangulum sub Δ, Ε ita Δ ad Ε; et ut igitur Α ad Γ ita Δ ad Ε. Commensurabilis autem Α ipsi Γ potentiâ solùm; commensurabilis igitur et Δ ipsi Ε potentiâ solùm. Media autem Δ; media igitur et Ε. Et quoniam est ut Α ad Γ ita Δ ad Ε, ipsa autem Α quam Γ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et Δ igitur quam Ε plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Dico etiam et medium esse rectangulum sub Δ, Ε. Quoniam enim æquale est sub Β, Γ rectangulum rectangulo sub Δ, Ε, medium autem rectangulum sub Β, Γ; ipsæ enim Β, Γ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles Δ, Ε, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Quod oportebat facere.

sous Β, Γ, la droite Α est à Γ comme le quarré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε. Mais le quarré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε comme Δ est à Ε (32. 10); donc Α est à Γ comme Δ est à Ε. Mais Α n'est commensurable avec Γ qu'en puissance; donc Δ n'est commensurable avec Ε qu'en puissance (10. 10); mais Δ est médial; donc Ε est médial (24. 10). Et puisque Α est à Γ comme Δ est à Ε, et que la puissance de Α surpasse la puissance de Γ du quarré d'une droite commensurable avec Α, la puissance de Δ surpassera la puissance de Ε du quarré d'une droite commensurable avec Δ (15. 10). Je dis aussi que le rectangle sous Δ, Ε est médial. Car puisque le rectangle sous Β, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε, et que le rectangle sous Β, Γ est médial, parce que les rationelles Β, Γ ne sont commensurables qu'en puissance, le rectangle sous Δ, Ε sera médial.

On a donc trouvé deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable avec la plus grande. Ce qu'il fallait faire.

Ομοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ[13].

Similiter utique rursus ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando Α quam Γ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

ΛΗΜΜΑ.

Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω[1] κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ἔτι τὸ[2] ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ[3]. Καὶ πρῶτον τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ[4] τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Επεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως

LEMMA.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum habens sub ΒΑΓ angulum, et ducatur perpendicularis ΑΔ; dico rectangulum quidem sub ΓΒ, ΒΔ æquale esse quadrato ex ΒΑ, rectangulum autem sub ΒΓ, ΓΔ æquale quadrato ex ΓΑ, et rectangulum sub ΒΔ, ΔΓ æquale quadrato ex ΑΔ, et adhuc rectangulum sub ΒΓ, ΑΔ æquale esse rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Et primum rectangulum sub ΓΒ, ΒΔ æquale esse quadrato ex ΒΑ.

Quoniam enim in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducitur ΑΔ, ipsa ΑΒΔ, ΑΔΓ igitur triangula similia sunt et toti triangulo ΑΒΓ et inter se. Et quoniam simile est ΑΒΓ triangulum triangulo ΑΒΔ, est igitur ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΒΔ; rectangulum

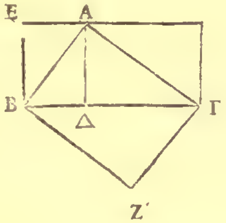
Si la puissance de Α surpassait la puissance de Γ du quarré d'une droite incommensurable avec Α, on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande.

LEMME.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, dont l'angle droit est ΒΑΓ; menons la perpendiculaire ΑΔ; je dis que le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au quarré de ΒΑ, que le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ est égal au quarré de ΓΑ, que le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est égal au quarré de ΑΔ, et enfin que le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Je dis d'abord que le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au quarré de ΒΑ.

Car puisque dans un triangle rectangle on a mené de l'angle droit la droite ΑΔ perpendiculaire à la base, les deux triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables au triangle entier ΑΒΓ, et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΓΒ est à ΒΑ comme ΒΑ est à ΒΔ (déf. 1. 6); donc le ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

igitur sub ΓΒ, ΒΔ æquale est quadrato ex ΑΒ. Propter eadem utique et rectangulum sub ΒΓ, ΓΔ æquale est quadrato ex ΑΓ. Et quoniam si in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducatur, ducta inter basis segmenta media proportionalis est; est igitur ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΑΔ ad ΔΓ; rectangulum igitur sub ΒΔ, ΔΓ æquale est quadrato ex ΔΑ. Dico



λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Ἐπεὶ γὰρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Καὶ ὅτι[5] ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπλη-

et rectangulum sub ΒΓ, ΑΔ æquale esse rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Quoniam enim, ut dicebamus, simile est ΑΒΓ ipsi ΑΒΔ, est igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΒΑ ad ΑΔ. Si autem quatuor rectæ proportionales sunt, rectangulum sub extremis æquale est rectangulo sub mediis; rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ æquale est rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Dico et si describamus ΕΓ rectangulum parallelogrammum, et com-

rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au quarré de ΑΒ (17. 6). Par la même raison, le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ est égal au quarré de ΑΓ. Et puisque si de l'angle droit d'un triangle rectangle on mène une perpendiculaire à la base, la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les segments de la base (cor. 8. 6), la droite ΒΔ est à ΔΑ comme ΑΔ est à ΔΓ (18. 6); donc le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est égal au quarré de ΔΑ. Je dis enfin que le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Car puisque, comme nous l'avons dit, ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΒΓ est à ΓΑ comme ΒΑ est à ΑΔ. Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle sous les extrêmes est égal au rectangle sous les moyennes (16. 6); donc le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ sera égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Je dis encore que, si nous décrivons le parallélogramme rectangle ΕΓ, et si nous ρώσομεν τὸ ΑΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν[6] ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Οπερ ἔδει δεῖξαι[7].

pleamus ΑΖ, æquale fore ΕΓ ipsi ΑΖ, utrumque enim ipsorum duplum est trianguli ΑΒΓ; atque est rectangulum quidem ΕΓ sub ΒΓ, ΑΔ, rectangulum autem ΑΖ sub ΒΑ, ΑΓ; rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ æquale est rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Εκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ἑποτέρας τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ

PROPOSITIO XXXIV.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

Exponantur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles ΑΒ, ΒΓ, ita ut major ΑΒ quam minor ΒΓ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et secetur ΒΓ bifariam ad Δ, et quadrato ab alterutrâ ipsarum ΒΔ, ΔΓ æquale ad rectam ΑΒ applicetur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, et describatur super

achevons ΑΖ, le rectangle ΕΓ sera égal au rectangle ΑΖ, car chacun d'eux est double du triangle ΑΒΓ; mais ΕΓ est le rectangle compris sous ΒΓ, ΑΔ, et ΑΖ le rectangle compris sous ΒΑ, ΑΓ; donc le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIV.

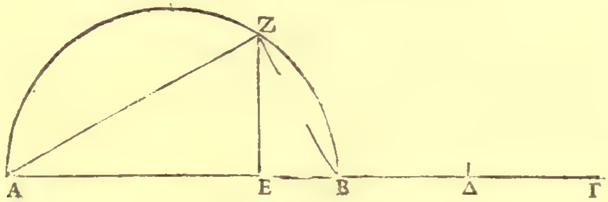
Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit rationelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

Soient les deux rationelles ΑΒ, ΒΓ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande ΑΒ surpasse la puissance de la plus petite ΒΓ du quarré d'une droite incommensurable avec ΑΒ (31, 10); coupons ΒΓ en deux parties égales en Δ; appliquons à ΑΒ un parallélogramme qui, étant égal à l'un ou à l'autre des quarrés des droites ΒΔ, ΔΓ, soit défaillant d'une figure quarrée (26. 6), et que ce soit le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ; décrivons τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ.

Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἡ ΑΒ τῆς[1] ΒΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ[2] τῆς ΒΓ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ[3] ΑΕ τῇ ΕΒ. Καὶ ἐπεί[2] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν[4] ΑΒ, ΒΕ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· αἱ ΑΖ, ΖΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ῥητή ἐστι, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ

rectam AB semicirculus AZB, et ducatur ipsi AB ad rectos angulos ipsa EZ, et jungantur AZ, ZB.

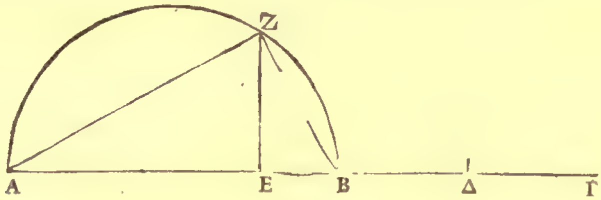
Et quoniam duæ rectæ inæquales sunt AB, BΓ, et AB quam BΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; quartæ autem parti quadrati ex BΓ, hoc est quadrato dimidiæ ipsius, æquale ad AB applicatur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et facit rectangulum sub AE, EB; incommensurabilis igitur est AE ipsi EB. Et quoniam est ut AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE, sed æquale quidem sub AB, AE rectangulum quadrato ex AZ, ipsum autem sub AB, BE rectangulum quadrato ex BZ; incommensurabile igitur est ex AZ quadratum quadrato ex ZB; ergo AZ, ZB potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam AB rationalis est, rationale igitur est et



sur la droite AB le demi-cercle AZB; menons la droite EZ perpendiculaire à AB, et joignons AZ, ZB.

Puisque les deux droites AB, BΓ sont inégales; que la puissance de AB surpasse la puissance de BΓ du quarré d'une droite incommensurable avec AB; qu'on a appliqué à AB un parallélogramme qui, étant égal à la quatrième partie du quarré de BΓ, c'est-à-dire au quarré de la moitié de cette droite, est défaillant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme est contenu sous AE, EB, la droite AE sera incommensurable avec EB (19. 10). Et puisque AE est à EB comme le rectangle sous BA, AE est au rectangle sous AB, BE (1. 6), que le rectangle sous AB, AE est égal au quarré de AZ, que le rectangle sous AB, BE est égal au quarré de BZ, le quarré de AZ sera incommensurable avec le quarré de ZB; donc les droites AZ, ZB sont incommensurables en puissance. Et puisque la droite AB est ratio-τὸ ἀπὸ τῆς AB· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AZ, ZB ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB καὶ τῷ ἀπὸ τῆς BΔ ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZE τῇ BΔ· διπλῆ ἄρα ἡ BΓ τῆς EZ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ

quadratum ex AB; quare et compositum ex quadratis ipsarum AZ, ZB rationale est. Et quoniam rursus rectangulum sub AE, EB æquale est quadrato ex EZ, supponitur autem sub AE, EB rectangulum et quadrato ex BΔ æquale; æqualis igitur est ZE ipsi BΔ; dupla igitur BΓ



τῶν AB, BΓ σύμμετρόν ἐστι τῷ[5] ὑπὸ τῶν AB, EZ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, EZ. Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, EZ τῷ ὑπὸ τῶν AZ, ZB· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZB. Ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ, ZB, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ipsius EZ; quare et rectangulum sub AB, BΓ commensurabile est rectangulo sub AB, EZ. Medium autem rectangulum sub AB, BΓ; medium igitur et rectangulum sub AB, EZ. Æquale autem sub AB, EZ rectangulum rectangulo sub AZ, ZB; medium igitur et rectangulum sub AZ, ZB. Ostensum est autem et rationale compositum ex ipsarum quadratis.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AZ, ZB, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium. Quod oportebat facere.

nelle, le quarré de AB est rationel; donc la somme des quarrés de AZ et de ZB est rationelle. Et de plus, puisque le rectangle sous AE, EB est égal au quarré de EZ, et que le rectangle sous AE, EB est supposé égal au quarré de BΔ, la droite ZE est égale à BΔ; donc BΓ est double de EZ; donc le rectangle sous AB, BΓ est commensurable avec le rectangle sous AB, EZ (1. 6). Mais le rectangle sous AB, BΓ est médial (22. 10); donc le rectangle sous AB, EZ est médial. Mais le rectangle sous AB, EZ est égal au rectangle sous AZ, ZB (lem. 1. 35); donc le rectangle sous AZ, ZB est médial. Mais on a démontré que la somme des quarrés de AZ et de ZB est rationelle.

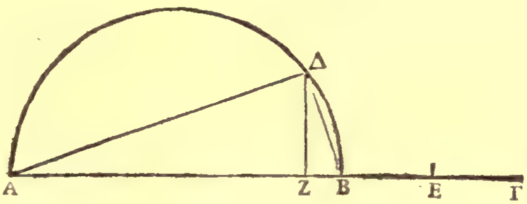
On a donc trouvé deux droites AZ, ZB incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés est rationelle, et que le rectangle sous ces mêmes droites est médial. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λέ.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

PROPOSITIO XXXV.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale.



Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΒ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει. Καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ[1] Ζ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Exponantur duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles AB, BΓ, rationale continentes sub ipsis, ita ut AB quam BΓ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et describatur super rectam AB semicirculus AΔB, et secetur BΓ bifariam in E, et applicetur ad AB quadrato ex BE æquale parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, rectangulum sub AZ, ZB; incommensurabilis igitur est AZ ipsi ZB longitudine. Et ducatur à puncto Z ipsi AB ad rectos angulos ipsa ZΔ, et jungantur AΔ, ΔB.

PROPOSITION XXXV.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle qu'elles comprènent soit rationel.

Soient deux médiales AB, BΓ commensurables en puissance seulement, et comprenant un rectangle rationel, de manière que la puissance de AB surpasse la puissance de BΓ du quarré d'une droite incommensurable avec AB (32. 10); sur AB décrivons le demi-cercle AΔB; coupons BΓ en deux parties égales en E; appliquons à AB un parallélogramme qui, étant égal au quarré de BE, soit défaillant d'une figure quarrée (28. 6), et que ce soit le rectangle sous AZ, ZB; la droite AZ sera incommensurable en longueur avec ZB (19. 10). Du point Z menons ZΔ perpendiculaire à AB, et joignons AΔ, ΔB.

Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ[2]. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ[3] ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ[4]. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ[5]· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ[6]· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν[7] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam incommensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΒ, incommensurabile igitur est et sub ΒΑ, ΑΖ rectangulum rectangulo sub ΑΒ, ΒΖ. Sed æquale quidem sub ΒΑ, ΑΖ rectangulum quadrato ex ΑΔ, sed sub ΑΒ, ΒΖ rectangulum quadrato ex ΔΒ; incommensurabile igitur est et ex ΑΔ quadratum quadrato ex ΔΒ. Et quoniam medium est quadratum ex ΑΒ, medium igitur et compositum ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis. Et quoniam dupla est ΒΓ ipsius ΔΖ, duplum igitur et sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum rectanguli sub ΑΒ, ΖΔ. Rationale autem rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ; rationale igitur et rectangulum sub ΑΒ, ΖΔ. Rectangulum autem sub ΑΒ, ΖΔ æquale rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ; quare et rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ rationale est.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles ΑΔ, ΔΒ, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale. Quod oportebat facere.

Puisque ΑΖ est incommensurable avec ΖΒ, le rectangle sous ΒΑ, ΑΖ est incommensurable avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΖ (1. 6, et 10. 10). Mais le rectangle sous ΒΑ, ΑΖ est égal au quarré de ΑΔ, et le rectangle sous ΑΒ, ΒΖ est égal au quarré de ΔΒ (34. lem. 1. 10); le quarré de ΑΔ est donc incommensurable avec le quarré de ΔΒ. Mais le quarré de ΑΒ est médial; donc la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ est médiale. Et puisque ΒΓ est double de ΔΖ, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle sous ΑΒ, ΖΔ (1. 6). Mais le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est rationel; donc le rectangle sous ΑΒ, ΖΔ est rationel. Mais le rectangle sous ΑΒ, ΖΔ est égal au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (34. lem. 3. 10); le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ est donc rationel.

On a donc trouvé deux droites ΑΔ, ΔΒ incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

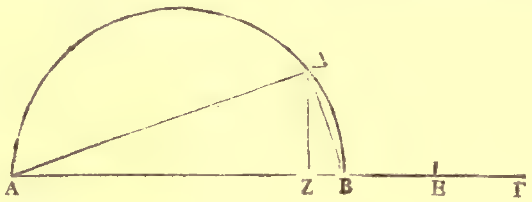
Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς[1] ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω ὁμοίως[2] εἰρημένοις.

PROPOSITIO XXXVI.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Exponantur duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles ΑΒ, ΒΓ, medium continentes, ita ut ΑΒ quam ΒΓ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et describatur super rectam ΑΒ semicirculus ΑΔΒ, et reliqua fiant congruenter iis superiùs dictis.



Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν[3] ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ[4] τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ ἴσον

Et quoniam incommensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΒ longitudine, incommensurabilis est et ΑΔ ipsi ΔΒ potentiâ. Et quoniam medium est quadratum ex ΑΒ, medium igitur et compositum ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam rectangulum sub ΑΖ, ΖΒ æquale est quadrato

PROPOSITION XXXVI.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des quarrés de ces mêmes droites.

Soient deux médiales ΑΒ, ΒΓ commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale, de manière que la puissance de ΑΒ surpasse la puissance de ΒΓ du quarré d'une droite incommensurable avec ΑΒ (33. 10); et sur ΑΒ décrivons le demi-cercle ΑΔΒ, et faisons le reste comme il a été dit auparavant.

Puisque ΑΖ est incommensurable en longueur avec ΖΒ, la droite ΑΔ est incommensurable en puissance avec ΔΒ. Et puisque le quarré de ΑΒ est médial, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ est médiale. Et puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΒ est ἐστὶ[5] τῷ ἀφ' ἑκατέρας τῶν BE, ΔZ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ BE τῇ ΔZ[6]· διπλῆ ἄρα ἡ BΓ τῆς ZΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ· καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB, μέσον ἄρα[7] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ BΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓB τῇ BE· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AB τῇ BE μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, BE ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τῷ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB[8].

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ AΔ, ΔB[9] δυνάμει ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων[10] μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ex alterutrâ ipsarum BE, ΔZ, æqualis igitur est BE ipsi ΔZ; dupla igitur BΓ ipsius ZΔ; quare et rectangulum sub AB, BΓ duplum est rectanguli sub AB, ZΔ. Medium autem rectangulum sub AB, BΓ; medium igitur et rectangulum sub AB, ZΔ; atque est æquale rectangulo sub AΔ, ΔB, medium igitur et rectangulum sub AΔ, ΔB. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi BΓ longitudine, commensurabilis autem ΓB ipsi BE; incommensurabilis igitur et AB ipsi BE longitudine; quare et ex AB quadratum rectangulo sub AB, BE incommensurabile est. Sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quadrata ex AΔ, ΔB, rectangulo autem sub AB, BE æquale est rectangulum sub AB, ZΔ, hoc est rectangulum sub AΔ, ΔB; incommensurabile igitur est compositum ex ipsarum AΔ, ΔB quadratis rectangulo sub AΔ, ΔB.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ AΔ, ΔB potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Quod oportebat facere.

égal au quarré de l'une ou de l'autre des droites BE, ΔZ, la droite BE est égale à ΔZ; donc BΓ est double de ZΔ; le rectangle sous AB, BΓ est donc double du rectangle sous AB, ZΔ. Mais le rectangle sous AB, BΓ est médial; le rectangle sous AB, ZΔ est donc médial; mais il est égal au rectangle sous AΔ, ΔB (34. lem. 1. 10.); le rectangle sous AΔ, ΔB est donc médial. Et puisque AB est incommensurable en longueur avec BΓ, et que ΓB est commensurable avec BE, la droite AB est incommensurable en longueur avec BE; le quarré de AB est donc incommensurable avec le rectangle sous AB, BE (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des quarrés de AΔ et de ΔB est égale au quarré de AB, et le rectangle sous AB, ZΔ, c'est-à-dire le rectangle sous AΔ, ΔB, est égal au rectangle sous AB, BE; la somme des quarrés de AΔ et de ΔB est donc incommensurable avec le rectangle sous AΔ, ΔB.

On a donc trouvé deux droites AΔ, ΔB incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme des quarrés de ces mêmes droites. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

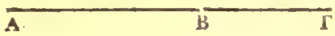
Εἀν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω[1] δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ὅλη[2] ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis nominibus.

Componantur enim duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles ΑΒ, ΒΓ; dico totam ΑΓ irrationalem esse.



Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Αλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα

Quoniam enim incommensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, potentiâ enim solùm sunt commensurabiles, ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum ad quadratum ex ΒΓ; incommensurabile igitur est sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum quadrato ex ΒΓ. Sed rectangulo quidem sub ΑΒ, ΒΓ commensurabile est rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ, quadrato autem ex ΒΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; ipsæ enim ΑΒ, ΒΓ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; incommensurabile igitur est bis sub ΑΒ,

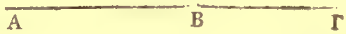
PROPOSITION XXXVII.

Si l'on ajoute deux rationelles commensurables en puissance seulement, leur somme sera irrationelle, et sera appelée droite de deux noms.

Ajoutons les deux rationelles ΑΒ, ΒΓ commensurables en puissance seulement; je dis que leur somme ΑΓ est irrationelle.

Car puisque ΑΒ est incommensurable en longueur avec ΒΓ, ces deux droites n'étant commensurables qu'en puissance, et que ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est au quarré de ΒΓ (1. 6), le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est incommensurable avec le quarré de ΒΓ (10. 10). Mais le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est commensurable avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (6. 10), et la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est commensurable avec le quarré de ΒΓ (16. 10), car les droites ΑΒ, ΒΓ sont des rationelles commensurables en puissance seulement; le double ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ[3], καὶ συνθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ

ΒΓ rectangulum quadratis ex ΑΒ, ΒΓ, et componendo, rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ cum quadratis ex ΑΒ, ΒΓ, hoc est quadratum ex ΑΓ



ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ[4] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων[5].

incommensurabile est composito ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis. Rationale autem compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis; irrationale igitur est quadratum ex ΑΓ; quare et ΑΓ irrationalis est; vocetur autem ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Εὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα[1] ἀσύμ-

PROPOSITIO XXXVIII.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles ΑΒ, ΒΓ, rationale continentes; dico totam ΑΓ irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ igitur

rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est donc incommensurable avec la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ; donc, par addition, le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ avec la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ, c'est-à-dire le quarré de ΑΓ (4. 2), est incommensurable avec la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ (17. 10). Mais la somme des quarrés de ΑΒ, ΒΓ est rationelle; le quarré de ΑΓ est donc irrationel (déf. 10. 10); la droite ΑΓ est donc irrationelle (déf. 11. 10), et sera appelée droite de deux noms.

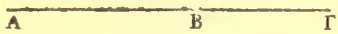
PROPOSITION XXXVIII.

Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent une surface rationelle, leur somme sera irrationelle, et sera la première de deux médiales.

Ajoutons les deux médiales ΑΒ, ΒΓ, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent une surface rationelle; je dis que leur somme ΑΓ est irrationelle.

Car, puisque ΑΒ est incommensurable en longueur avec ΒΓ, la somme des μετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ συνθέντι[2] τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς

incommensurabilia sunt rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; et componendo, quadrata ex ΑΒ, ΒΓ cum



ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Ρητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι[3]· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη[4].

rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, quod est quadratum ex ΑΓ, incommensurabile est rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ. Rationale autem rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, supponuntur enim ipsæ ΑΒ, ΒΓ rationale continere; irrationale igitur quadratum ex ΑΓ; irrationalis igitur ΑΓ, vocetur autem ex binis mediis prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, μέσον περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, μέσον περιέχουσαι· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

PROPOSITIO XXXIX.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, medium continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis secunda.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles ΑΒ, ΒΓ, medium continentes; dico irrationalem esse ΑΓ.

quarrés de AB et de BΓ est incommensurable avec le double rectangle sous AB, BΓ (13. 10); donc, par addition, la somme des quarrés de AB et de BΓ avec le double rectangle sous AB, BΓ, c'est-à-dire le quarré de AΓ (4. 2), est incommensurable avec le rectangle sous AB, BΓ. Mais le rectangle sous AB, BΓ est rationel, car les droites AB, BΓ sont supposées comprendre un rectangle rationel; le quarré de AΓ est donc irrationnel; la droite AΓ sera donc irrationelle, et sera appelée la première de deux médiales.

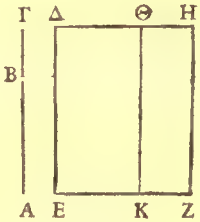
PROPOSITION XXXIX.

Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent une surface médiale, leur somme sera irrationelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

Ajoutons les deux médiales AB, BΓ, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent une surface médiale; je dis que la droite AΓ est irrationelle.

Εκκείσθω γάρ[1] ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραϐεϐλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραϐεϐλήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ[2] ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσα ἄρα ἐστὶ[3] καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν

Exponatur enim rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΓ æquale ad ΔΕ applicetur ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ. Et quoniam quadratum ex ΑΓ æquale est et quadratis ex ΑΒ, ΒΓ et rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, applicetur etiam quadratis ex ΑΒ, ΒΓ ad ΔΕ æquale ΕΘ; reliquum igitur ΖΘ æquale est rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ. Et quoniam media est utraque ipsarum ΑΒ, ΒΓ; media igitur sunt et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ. Medium autem supponitur et rectangulum



ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ· μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται[4]· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ, ΘΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Επεὶ οὖν[5] ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ

bis sub ΑΒ, ΒΓ, atque est quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale ΕΘ, rectangulo verò bis sub ΑΒ, ΒΓ æquale ΖΘ; medium igitur utrumque ipsorum ΕΘ, ΘΖ, et ad rationalem ΔΕ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum ΔΘ, ΘΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Quoniam igitur incommensurabilis est

Soit la rationelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un parallélogramme ΔΖ, qui étant égal au quarré de ΑΓ, ait ΔΗ pour largeur (45. 1). Puisque le quarré de ΑΓ est égal à la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ, et du double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (4. 2), appliquons à ΔΕ un rectangle ΕΘ égal à la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ, le rectangle restant ΖΘ sera égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ. Mais chacune des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, les quarrés de ΑΒ et de ΒΓ sont donc médiaux. Et puisque, par supposition, le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, que ΕΘ est égal à la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ, et que ΖΘ est égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, chacun des rectangles ΕΘ, ΘΖ est médial, et ils sont appliqués à la rationelle ΔΕ; chacune des droites ΔΘ, ΘΗ est donc rationelle (23. 10) et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΒ est incom-

ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ[6] ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. Ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί[7]· αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΔΗ ἄλογός ἐστι. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον· [8]καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ[9] ἄλογός ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα[10].

ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, atque est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΑΒ quadratum ad rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ; incommensurabile igitur est ex ΑΒ quadratum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ. Sed quadrato quidem ex ΑΒ commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ, rectangulo autem sub ΑΒ, ΒΓ commensurabile est rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ; incommensurabile igitu est compositum ex quadratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ. Sed quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsum ΕΘ, rectangulo autem bis sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsum ΘΖ; incommensurabile igitur est ΕΘ ipsi ΘΖ; quare et ΔΘ ipsi ΘΗ incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem rationales; ipsæ ΔΘ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare ΔΗ irrationalis est. Rationalis autem ΔΕ, sed sub irrationali et rationali contentum rectangulum irrationale est; irrationale igitur est ΔΖ spatium; et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΖ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem ex binis mediis secunda.

mensurable en longueur avec ΒΓ, et que ΑΒ est à ΒΓ comme le quarré de ΑΒ est au rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (1. 6), le quarré de ΑΒ sera incommensurable avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (10. 10). Mais la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est commensurable avec le quarré de ΑΒ, et le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est commensurable avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (14. 10). Mais ΕΘ est égal à la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ, et ΘΖ est égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; donc ΕΘ est incommensurable avec ΘΖ; la droite ΔΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘΔ. Mais on a démontré que ces droites sont rationelles; les droites ΔΘ, ΘΗ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΔΗ est donc irrationelle (37. 10). Mais la droite ΔΕ est rationelle, et un rectangle compris sous une irrationelle et sous une rationelle est irrationel; la surface ΔΖ est donc irrationelle, et par conséquent la droite qui peut cette surface. Mais la puissance de ΑΓ est égale à ΔΖ; la droite ΑΓ est donc irrationelle, et elle sera appelée la seconde de deux médiales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ΑΒ, ΒΓ, *ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ* ΑΓ.

PROPOSITIO XL.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium; tota recta irrationalis est, vocetur autem major.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AB, BΓ, facientes proposita; dico irrationalem esse AΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ *μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ δὶς ἄρα*[1] *ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ *μέσον ἐστί. Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ *ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ *τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ· *ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ *μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ, *ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς* ΑΓ, *ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ[2]· *ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς* ΑΓ· *ὥστε καὶ ἡ* ΑΓ *ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μείζων.*

Quoniam enim rectangulum sub AB, BΓ medium est, et rectangulum igitur bis sub AB, BΓ medium est. Sed compositum ex quadratis ipsarum AB, BΓ rationale; incommensurabile igitur est rectangulum bis sub AB, BΓ composito ex quadratis ipsarum AB, BΓ; quare et ex AB, BΓ quadrata cum rectangulo bis sub AB, BΓ, quod est quadratum ex AΓ, incommensurabilia sunt composito ex quadratis ipsarum AB, BΓ; irrationale igitur est quadratum ex AΓ; quare et AΓ irrationalis est, vocetur autem major.

PROPOSITION XL.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la droite entière sera irrationelle, et sera appelée majeure.

Ajoutons les deux droites AB, BΓ incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AΓ est irrationelle.

Puisque le rectangle sous AB, BΓ est médial, le double rectangle sous AB, BΓ sera médial (24. cor. 10). Mais la somme des quarrés de AB et de BΓ est rationelle; le double rectangle sous AB, BΓ est donc incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de BΓ; donc la somme des quarrés de AB et de BΓ avec le double rectangle sous AB, BΓ, c'est-à-dire le quarré de AΓ (4. 2), est incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de BΓ (17. 10); le quarré de AΓ est donc irrationel; la droite AΓ est donc irrationelle, et elle sera appelée majeure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

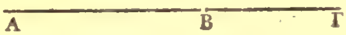
Εὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω[1] δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, *ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ* ΑΓ.

PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est, vocetur autem rationale et medium potens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AB, BΓ, facientes proposita; dico irrationalem esse AΓ.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ *μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ *ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ *τῷ δὶς ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ· *ὥστε καὶ συνθέντι[2] τὸ ἀπὸ τῆς* ΑΓ *ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ. *Ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ· *ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς* ΑΓ· *ἄλογος ἄρα ἡ* ΑΓ, *καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη[2].*

Quoniam enim compositum ex quadratis ipsarum AB, BΓ medium est, rectangulum autem bis sub AB, BΓ rationale; incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum AB, BΓ rectangulo bis sub AB, BΓ; quare et componendo, quadratum ex AΓ incommensurabile est rectangulo bis sub AB, BΓ. Rationale autem rectangulum bis sub AB, BΓ; irrationale igitur quadratum ex AΓ; irrationalis igitur AΓ, vocetur autem rationale et medium potens.

PROPOSITION XLI.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel, la droite entière sera irrationelle, et sera appelée celle qui peut une rationelle et une médiale.

Ajoutons les deux droites AB, BΓ incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AΓ est irrationelle.

Car puisque la somme des quarrés des droites AB, BΓ est médiale, et que le double rectangle sous AB, BΓ est rationel, la somme des quarrés de AB et de BΓ sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BΓ; donc, par addition, le quarré de AΓ est incommensurable avec le double rectangle sous AB, BΓ (17. 10). Mais le double rectangle sous AB, BΓ est rationel; le quarré de AΓ est donc irrationel; la droite AΓ est donc irrationelle, et elle est appelée celle qui peut une rationelle et une médiale.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϐ'.

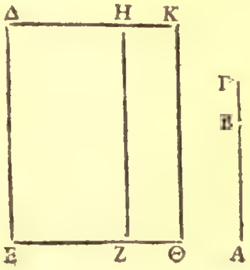
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων[1]· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα[2]· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

PROPOSITIO XLII.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis; tota recta irrationalis est, vocetur autem bina media potens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ incommensurabiles ΑΒ, ΒΓ, facientes proposita; dico ΑΓ irrationalem esse.



Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραϐεϐλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ,

Exponatur rationalis ΔΕ, et applicetur ad ΔΕ quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale ipsum ΔΖ, rectangulo autem bis sub ΑΒ, ΒΓ æquale ipsum ΗΘ; totum igitur ΔΘ æquale est quadrato ex ΑΓ. Et quoniam medium est compositum ex qua-

PROPOSITION XLII.

Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés, la droite entière sera irrationelle, et sera appelée celle qui peut deux médiales.

Ajoutons les deux droites ΑΒ, ΒΓ incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite ΑΓ est irrationelle.

Soit la rationelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un rectangle ΔΖ égal à la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ, et que ΗΘ soit égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; le rectangle entier ΔΘ sera égal au quarré de ΑΓ (4. 2). Et puisque la somme des

ΒΓ, καὶ ἔστιν[3] ἴσον τῷ ΔΖ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ[4] ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα[5] ἐστὶ τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΘ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη[6].

dratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ, atque est æquale ipsi ΔΖ; medium igitur est et ΔΖ; et ad rationalem ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Propter eadem utique et ΗΚ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΗΖ, hoc est ipsi ΔΕ, longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; incommensurabile igitur est ΔΖ ipsi ΗΘ; quare et ΔΗ ipsi ΗΚ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ΔΗ, ΗΚ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; irrationalis igitur est ΔΚ quæ appellatur ex binis nominibus. Rationalis autem ΔΕ; irrationale igitur est ΔΘ, et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΘ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem bina media potens.

quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΖ, le rectangle ΔΖ est médial, et il est appliqué à la rationelle ΔΕ; donc ΔΗ est rationel (23. 10), et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Par la même raison, la rationelle ΗΚ est incommensurable en longueur avec ΗΖ, c'est-à-dire avec ΔΕ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le rectangle ΔΖ est incommensurable avec ΗΘ; donc ΔΗ est incommensurable avec ΗΚ (1. 6, et 10. 10). Mais ces droites sont rationelles; les droites ΔΗ, ΗΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; donc ΔΚ est la droite irrationelle appelée de deux noms (37. 10). Mais ΔΕ est rationel; donc ΔΘ est irrationel (39. 10), et par conséquent la droite qui peut ΔΘ. Mais ΑΓ peut ΔΘ; donc ΑΓ est irrationel, et cette droite est appelée celle qui peut deux médiales.

ΛΗΜΜΑ.

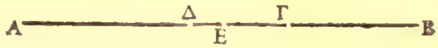
Εκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ'[1] ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, καὶ ὑποκείσθω μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ· καὶ[2] λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν[3] ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ· τὰ Γ, Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἶσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ[4]· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα

LEMMA.

Exponatur recta AB, et secetur tota in partes inæquales ad utrumque punctorum Γ, Δ, et supponatur major AΓ quam ΔB; dico quadrata ex AΓ, ΓB majora esse quadratis ex AΔ, ΔB.

Secetur enim AB bifariam in E. Et quoniam major est AΓ quam ΔB, communis auferatur ΔΓ; et reliqua igitur AΔ quam reliqua ΓB major est. Æqualis autem AE ipsi EB; minor igitur est ΔE quam EΓ; ergo Γ, Δ puncta non æqualiter distant à bipartitâ sectione. Et quoniam sub AΓ, ΓB rectangulum cum quadrato ex EΓ æquale est quadrato ex EB, sed et sub AΔ, ΔB rectangulum cum quadrato ex ΔE æquale quadrato ex EB; ergo sub AΓ, ΓB rectangulum cum quadrato ex EΓ æquale est sub AΔ, ΔB rectangulo cum quadrato ex ΔE. Quorum quadratum ex ΔE minus est quadrato ex EΓ; et



LEMME.

Soit la droite AB, que cette droite entière soit coupée en parties inégales aux points Γ, Δ, et supposons AΓ plus grand que ΔB; je dis que la somme des quarrés AΓ et de ΓB est plus grande que la somme des quarrés de AΔ et de ΔB.

Coupons AB en deux parties égales en E. Puisque AΓ est plus grand que ΔB, retranchons la partie commune ΔΓ; le reste AΔ sera plus grand que le reste ΓB. Mais AE est égal à EB; donc ΔE est plus petit que EΓ; les points Γ, Δ ne sont donc pas également éloignés du point qui coupe AB en deux parties égales. Et puisque le rectangle sous AΓ, ΓB avec le quarré de EΓ est égal au quarré de EB, et que le rectangle sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΔE est égal au quarré de EB (5. 2), le rectangle sous AΓ, ΓB avec le quarré de EΓ sera égal au rectangle sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΔE. Mais le quarré de ΔE est plus petit que le quarré de EΓ; le recτὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Οπερ ἔδει δεῖξαι[5].

reliquum igitur rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ; quare et rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ; et reliquum igitur compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ majus est composito ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Η ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Εστω ἐκ δύο ὀνόματων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

PROPOSITIO XLIII.

Recta ex binis nominibus ad unum solùm punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis nominibus recta ΑΒ divisa in nomina ad Γ; ergo ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Dico ΑΒ ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentiâ solùm commensurabiles.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον

Si enim possibile, dividatur in Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ rationales sint potentiâ solùm com-

tangle restant sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; la somme restante des quarrés de ΑΓ et de ΒΓ est donc plus grande que la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIII.

La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

Que la droite ΑΒ de deux noms soit divisée en ses noms au point Γ; les droites rationelles ΑΓ, ΓΒ ne seront commensurables qu'en puissance; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être coupée en un autre point en deux rationelles commensurables en puissance seulement.

Car si cela se peut, qu'elle soit coupée au point Δ, de manière que les raσυμμέτρους. Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΓ[1] τῇ ΔΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, καὶ ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τμῆμα κατὰ τὸ Γ[2] διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἡ αὐτή· διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας[3]· ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν[4] ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ διαφέρει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ,

mensurabiles. Evidens utique est ΑΓ cum ipsâ ΔΒ non esse eamdem. Si enim possibile, sit; erit igitur et ΑΔ cum ipsâ ΓΒ eadem; et erit ut ΑΓ ad ΓΒ ita ΒΔ ad ΔΑ, et erit ΑΒ in idem segmentum divisa in puncto Γ atque in puncto Δ, quod non supponitur; non igitur ΑΓ cum ipsâ ΔΒ est eadem; ob id igitur et Γ, Δ puncta non æqualiter distant à bipartitâ sectione; quo igitur differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, hoc differt et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, propterea quòd et ex ΑΓ, ΓΒ quadrata cum rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ et ex ΑΔ, ΔΒ quadrata cum rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ æqualia sunt quadrato ex ΑΒ. Sed ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ differunt rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis igitur sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo

tionelles ΑΔ, ΔΒ ne soient commensurables qu'en puissance. Il est évident que ΑΓ n'est pas égal à ΔΒ. Car que cela soit, si c'est possible; la droite ΑΔ sera alors égale à ΓΒ, la droite ΑΓ sera à la droite ΓΒ comme ΒΔ est à ΔΑ, et la droite ΑΒ sera coupée en segments égaux au point Δ qu'au point Γ, ce qui n'est pas supposé; donc ΑΓ n'est pas égale à ΔΒ; donc les points Γ, Δ ne sont pas également éloignés du point qui coupe ΑΒ en deux parties égales; donc la différence de la somme des quarrés de ΑΓ et de ΒΓ, à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΑΒ, est égale à la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; parce que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, et la somme des quarrés de ΑΔ et ΔΒ avec le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, sont égales chacune au quarré de ΑΒ (4. 2). Mais la différence de la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ, est une surface rationelle; car ces deux sommes sont rationelles; donc la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est une surface

ΓΒ διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ[5] μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾿ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ᾿ ἓν ἄρα μόνον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

bis sub ΑΓ, ΓΒ differt rationali, media existentia, quod absurdum; medium enim non medium superat rationali; non igitur recta ex binis nominibus ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur solùm. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδʹ.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ᾿ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται[1].

Ἔστω[2] ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾿ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

PROPOSITIO XLIV.

Ex binis mediis prima ad unum solùm punctum dividitur.

Sit ex binis mediis prima ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediæ sint potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ mediæ sint potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ

rationelle, ces surfaces étant médiales, ce qui est absurde; car une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une rationelle (27. 10); une droite de deux noms ne peut donc pas être divisée en plus d'un point; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIV.

La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite ΑΒ, première de deux médiales, soit divisée en Γ, de manière que les médiales ΑΓ, ΓΒ, commensurables en puissance seulement, comprènent une surface rationelle; je dis que la droite ΑΒ ne peut être divisée en un autre point.

Car, si cela est possible, qu'elle soit divisée au point Δ, de manière que les médiales ΑΔ, ΔΒ, commensurables en puissance seulement, comprènent une surface rationelle. Puisque la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, rationali autem differt rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, rationalia enim utraque; rationali igitur differunt et ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, media existentia, quod absurdum; non igitur ex binis mediis prima ad aliud et aliud punctum dividitur in nomina; ad unum igitur solùm. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μέ.

Η ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται[1].

Εστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φα-

PROPOSITIO XLV.

Ex binis mediis secunda ad unum solùm punctum dividitur.

Sit ex binis mediis secunda ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediæ sint potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes;

double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est égale à la différence de la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ à la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ, et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ diffèrent d'une surface rationelle; car l'une et l'autre de ces grandeurs sont rationelles; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ diffère donc d'une surface rationelle de la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est absurde (27. 10); donc une première de deux médiales ne peut pas être divisée en ses noms en deux points différents; elle ne peut donc l'être qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLV.

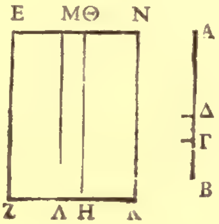
La seconde de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que ΑΒ, seconde de deux noms, soit divisée au point Γ, de manière que les médiales ΑΓ, ΓΒ, qui comprènent une surface médiale, ne soient commensuνερὸν δὴ ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ[2] οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω καὶ[3] κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ. Δῆλον δὴ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ[4], ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. Καὶ[5] ἐκκείσθω ῥητὴ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον[6] παραβεβλήσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἅπερ

evidens est utique punctum Γ non esse in bipartitâ sectione, quoniam non sunt longitudine commensurabiles; dico AB in alio puncto non dividi.

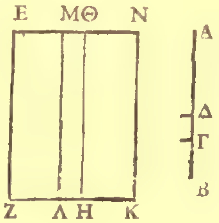
Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut AΓ cum ipsâ ΔB non sit eadem, sed AΓ major ex hypothesi. Evidens est utique quadrata ex AΔ, ΔB minora esse quadratis ex AΓ, ΓB, ut suprà ostendimus, et AΔ, ΔB medias esse potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes. Et exponatur rationalis EZ, et quadrato quidem ex AB æquale ad EZ parallelogrammum rectangulum applicetur EK, quadratis autem ex AΓ, ΓB æquale auferatur EH; reliquum igitur ΘK æquale est rectangulo bis sub AΓ, ΓB. Rursus et quadratis ex AΔ, ΔB, quæ minora os-



rables qu'en puissance. Il est évident que le point Γ n'est pas le milieu de AB, parce que les droites AΓ, ΓB ne sont pas commensurables en longueur; je dis que la droite AB ne peut pas être divisée en un autre point.

Car si cela est possible, qu'elle soit divisée au point Δ, de manière que AΓ ne soit pas égal à ΔB, et supposons que AΓ est plus grand que ΔB. Il est évident que la somme des quarrés de AΔ et de ΔB est plus petite que la somme des quarrés de AΓ et de ΓB, comme nous l'avons démontré plus haut (lem. 43. 10), et que les médiales AΔ, ΔB, qui comprènent une surface médiale, ne sont commensurables qu'en puissance (43. 10). Soit la rationelle EZ; appliquons à EZ un rectangle EK égal au quarré de AB, et retranchons EH égal à la somme des quarrés de AΓ et de ΓB; le reste ΘK sera égal au double rectangle sous AΓ, ΓB (4. 2). De plus, retranchons EΛ égal à la somme des quarrés de AΔ et ΔB, qui est plus petite que ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον ἐστὶ[7] τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα καὶ[8] τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμε-

tensa sunt quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, æquale auferatur ΕΛ; et reliquum igitur ΜΚ æquale est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam media sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ; medium igitur et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propter eadem utique et ΘΝ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam ΑΓ, ΓΒ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles; incommensu-



τρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ

rabilis igitur est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine. Ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabile igitur est ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadrato quidem ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, potentiâ enim sunt commensurabiles ΑΓ, ΓΒ; rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est rectangulum bis

la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, comme on l'a démontré; le reste ΜΚ sera égal au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale, le rectangle ΕΗ sera médial; mais ce rectangle est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΕΘ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais les médiales ΑΓ, ΓΒ ne sont commensurables qu'en puissance; donc ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ. Mais ΑΓ est à ΓΒ comme le quarré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (1. 6); le quarré de ΑΓ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (10. 10). Mais la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le quarré de ΑΓ (16. 10), car les droites ΑΓ, ΓΒ sont commensurables en puissance, et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commenτῶν ΑΒ, ΓΒ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ[9] τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα[10] ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη, τό, τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτὴ, ἐπειδήπερ[11] τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τοῦ ΜΚ·

sub ΑΓ, ΓΒ; et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ igitur incommensurabilia sunt rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale est ΕΗ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale est ΘΚ; incommensurabile igitur est ΕΗ ipsi ΘΚ; quare et ΕΘ ipsi ΘΝ incommensurabilis est longitudine; et sunt rationales; ergo ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Si autem duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus; recta ΕΝ igitur ex binis nominibus est divisa in Θ. Propter eadem utique ostendentur et ΕΜ, ΜΝ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et erit ΕΝ ex binis nominibus ad aliud et aliud divisa, et ad Θ et ad Μ, et non est ΕΘ cum ipsâ ΜΝ eadem, quoniam quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt quadratis ex ΑΔ, ΔΒ. Sed quadrata ex ΑΔ, ΔΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ; multò igitur et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΕΗ, majus est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc est

surable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais ΕΗ est égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, et ΘΚ est égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc ΕΗ est incommensurable avec ΘΚ; donc ΕΘ est incommensurable en longueur avec ΘΝ; mais ces droites sont rationelles; les rationelles ΕΘ, ΘΝ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais si l'on ajoute deux rationelles commensurables en puissance seulement, leur somme est irrationelle, et est appelée droite de deux noms (37. 10); la droite ΕΝ de deux noms est donc divisée au point Θ. On démontrera semblablement que les rationelles ΕΜ, ΜΝ sont commensurables en puissance seulement, et que la droite ΕΝ de deux noms sera divisée en deux points; savoir, en Θ et en Μ; mais ΕΘ n'est pas égal à ΜΝ, puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus grande que la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ (43. 10). Mais la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire le rectangle ΕΗ, est donc plus grande que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; c'est-à-dire, ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipso MK; quare et EΘ quàm MN major est; ergo EΘ cum ipsâ MN non est eadem. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται[1].

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

PROPOSITIO XLVI.

Major ad idem solùm punctum dividitur.

Sit major AB divisa in puncto Γ, ita ut AΓ, ΓB potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum AΓ, ΓB rationale, rectangulum autem sub AΓ, ΓB medium; dico AB in alio puncto non dividi.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω καὶ[2] κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. Καὶ

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut AΔ, ΔB potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum AΔ, ΔB rationale, rectangulum autem

que le rectangle MK; donc EΘ est plus grand que MN; donc EΘ n'est pas égal à MN. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVI.

La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite majeure soit divisée en Γ, de manière que les droites AΓ, ΓB soient incommensurables en puissance seulement, la somme des quarrés de AΓ et de BΓ étant rationelle, et le rectangle sous AΓ, ΓB étant médial; je dis que la droite AB ne peut pas être divisée en un autre point.

Car, qu'elle soit divisée au point Δ, si cela est possible, de manière que les droites AΔ, ΔB soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de AΔ et de ΔB étant rationelle, et le rectangle sous ΔA, ΔB étant médial.

ἐπεὶ ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ[5], μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον διαιρεῖται. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

sub ipsis medium. Et quoniam quo differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, hoc differt et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; sed quadrata ex ΑΓ, ΓΒ quadrata ex ΑΔ, ΔΒ superant rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, media existentia, quod est impossibile; non igitur major ad aliud et aliud punctum dividitur; ad idem solùm dividitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

Η ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται[1].

Εστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμε-

PROPOSITIO XLVII.

Recta rationale et medium potens ad unum solùm punctum dividitur.

Sit rationale et medium potens ipsa ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex

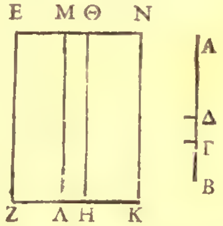
Puisque la différence de la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ (4. 2), est égale à la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, et que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ surpasse d'une surface rationelle la somme des quarrés de ΑΔ, et de ΔΒ, car ces surfaces sont rationelles, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est impossibe (27. 10); une majeure ne peut donc pas être divisée en deux points; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVII.

La droite qui peut une rationelle et une médiale ne peut être divisée qu'en un point.

Que la droite ΑΒ, pouvant une rationelle et une médiale, soit divisée au point Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ soient incommensurables en puisτῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα

ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΚ; totum igitur ΕΚ æqua est quadrato ex ΑΒ. Rursus et applicetur ΕΖ quadratis ex ΑΔ, ΔΒ æquale ΕΛ; rel quum igitur rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ re quo ΜΚ æquale est. Et quoniam medium su ponitur compositum ex quadratis ipsarum Α ΓΒ; medium igitur est et ΕΗ, et ad ration lem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΘΕ,



ἐστὶν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται,

incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propte eadem utique et ΘΝ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam incommensurabile est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; et ΕΗ igitur ipsi ΘΚ incommensurabile est; quare et ΕΗ ipsi ΘΝ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΕΝ ex binis nominibus est divisa in Θ. Similiter utique ostendemus et

ΑΓ et de ΓΒ, et ΘΚ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme entier ΕΗ sera égal au quarré de ΑΒ (4. 2). De plus, appliquons à ΕΖ le parallélogramme ΕΛ égal à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ; le double rectangle restant sous ΑΔ, ΔΒ sera égal au reste ΜΚ (4. 2). Et puisque on a supposé que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale, ΕΗ sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΘΕ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc ΕΗ est incommensurable avec ΘΚ; donc ΕΘ est incommensurable avec ΘΝ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles; les rationelles ΕΘ, ΘΝ ne sont donc commensurables qu'en puissance; le droite ΕΝ de deux noms est donc divisée au point Θ. Nous démontrerons semblablement qu'elle est divisée au point Μ; mais καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ τῶν[3] δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διήρεται, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsam in M dividi, et non est ΕΘ cum ipsâ MN eadem; recta igitur ex binis nominibus ad aliud et aliud punctum dividitur, quod est absurdum; non igitur bina media potens ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur solùm punctum dividitur. Quod oportebat ostendere.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

α΄. Υποκειμένης ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

β΄. Εὰν δὲ τὸ ἐλάσσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Expositâ rationali, et rectâ ex binis nominibus divisâ in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si autem minus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secunda.

ΕΘ n'est pas égal avec MN; la droite de deux noms est donc divisée en un point et encore en un autre point, ce qui est absurde (43. 10); une droite qui peut deux médiales n'est donc pas divisée en un point et encore en un autre point; elle n'est donc divisée qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

γʹ. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δʹ. Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος[1] μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

εʹ. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλαττον, πέμπτη.

ϛʹ. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη[2].

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθʹ.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν[1] τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω τὶς ῥητὴ ἡ Δ, καὶ

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursùs et si majus nomen quàm minus plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si verò neutrum, sexta.

PROPOSITIO XLIX.

Invenire ex binis nominibus primam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ipsum quidem ΒΓ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΓΑ verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur quædam rationalis Δ, et ipsi Δ

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

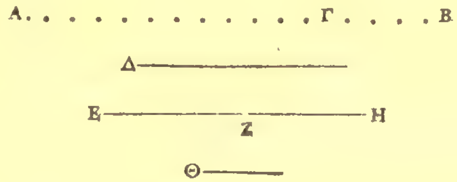
6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

PROPOSITION XLIX.

Trouver la première de deux noms.

Soient les deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que leur somme n'ait pas avec ΓΑ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré (30. lem. 1. 10); soit exposée une rationelle Δ, et que ΕΖ soit commenτῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ[2] ἡ ΕΖ. Καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ

commensurabilis sit longitudine ipsa EZ; rationalis igitur est et EZ. Et fiat ut BA numerus ad AΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH. Ipse autem AB ad AΓ rationem habet quam numerus ad numerum; et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex ZH rationem habet quam numerus ad numerum; quare commen-



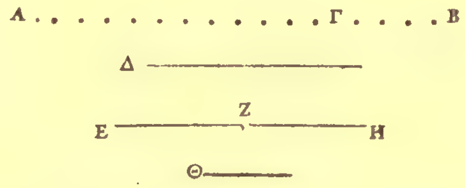
ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. Λέγω ὅτι καὶ πρώτη.

surabile est ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Atque est rationalis EZ; rationalis igitur et ZH. Et quoniam BA ad AΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi ZH longitudine; ergo EZ, ZH rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est EH. Dico et primam esse.

rable en longueur avec Δ; la droite EZ sera rationelle (déf. 6. 10). Faisons en sorte que le nombre BA soit à AΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH (cor. 6. 6). Mais AB a avec AΓ la raison qu'un nombre a avec un nombre; le quarré de EZ a donc avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre a avec un nombre; le quarré de EZ est donc commensurable avec le quarré de ZH (6. 10). Mais EZ est rationel; donc ZH est rationel. Et puisque BA n'a pas avec AΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de EZ n'aura pas avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite EZ est donc incommensurable en longueur avec ZH (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc rationelles commensurables en puissance seulement; la droite EH est donc de deux noms (37. 10); et je dis qu'elle est la première de deux noms.

τῆς ΖΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est HZ ipsi ZE longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ipsa EH. Ostendendum est et secundam esse.



Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ[2] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἀλλ᾽ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει·

Quoniam enim invertendo est ut AB numerus ad ipsum AΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam AΓ; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB ad BΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Sed AB ad BΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare

qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; la droite HZ est donc incommensurable en longueur avec ZE (9. 10) ; les droites EZ, ZH sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement ; EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la seconde de deux noms.

Car puisque, par inversion, le nombre AB est à AΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH, et que BA est plus grand que AΓ, le quarré de EZ est plus grand que le quarré de ZH. Que la somme des quarrés des droites ZH, Θ soit égale au quarré de EZ ; par conversion, AB sera à BΓ comme le quarré de EZ est au quarré de Θ. Mais AB a avec BΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; le quarré de EZ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; la droite EZ est donc commensusurable en longueur avec Θ (9. 10);

ὥστε ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ[3] τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

EZ quam ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt rationales EZ, ZH potentiâ solùm commensurabiles, et ZH minus nomen commensurabile est expositæ rationali Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να΄.

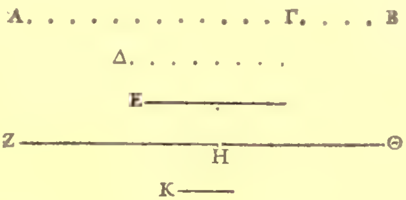
Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον

PROPOSITIO LI.

Invenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut AB compositus ex ipsis ad BΓ quidem rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad AΓ autem rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; exponatur autem quidam et alius non quadratus numerus Δ, et ad utrumque ipsorum



(9. 10); la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ZH du quarré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ZH est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Δ; la droite EH est donc une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

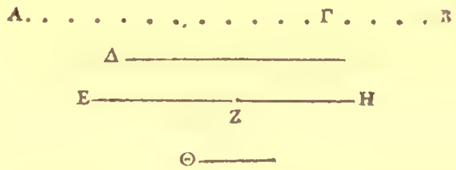
PROPOSITION LI.

Trouver une troisième de deux noms.

Soient deux nombres AΓ, ΓB, de manière que leur somme AB ait avec BΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que leur somme AB n'ait pas avec AΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un quarré, et que ce nombre n'ait pas avec chacun des nom-

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Εστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ

Quoniam enim est ut BA numerus ad ipsum AΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quàm AΓ; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ. Et quoniam est ut BA ad AΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; convertendo igitur est ut AB ad BΓ ita



τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad BΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; ergo EZ quam ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt rationales EZ, ZH, et commensurabilis EZ ipsi Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est prima. Quod oportebat ostendere.

Car puisque le nombre BA est à AΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH, et que BA est plus grand que AΓ; le quarré de EZ sera plus grand que le quarré de ZH. Que la somme des quarrés des droites ZH, Θ soit égale au quarré de EZ. Puisque BA est à AΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH, par conversion, AB sera à BΓ comme le quarré de EZ est au quarré de Θ. Mais AB a avec BΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de EZ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite EZ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10); la puissance de EZ surpasse la puissance de ZH du quarré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont rationelles, et EZ est commensurable en longueur avec Δ; la droite EH est donc la première de deux noms (déf. secondes. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

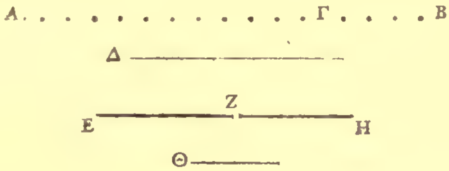
Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ΖΗ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. Γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ

PROPOSITIO L.

Invenire ex binis nominibus secundam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ΒΓ quidem rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΑΓ verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis Δ, et ipsi Δ commensurabilis sit ΖΗ longitudine; rationalis igitur est ΖΗ. Fiat et ut ΓΑ numerus ad ipsum ΑΒ ita ex ΗΖ quadratum ad ipsum ex ΖΕ; commensurabile igitur est ex ΗΖ quadratum quadrato ex ΖΕ; rationalis igitur est et ΖΕ. Et quoniam ΓΑ numerus ad ipsum ΑΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΗΖ quadratum ad ipsum ex

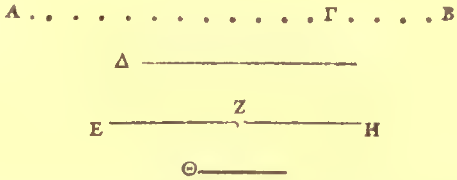


PROPOSITION L.

Trouver la seconde de deux noms.

Soient les deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré (30 lem. 1. 10), et que ΑΒ n'ait pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit la rationelle Δ, et que ΖΗ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite ΖΗ sera rationelle. Faisons en sorte que le nombre ΓΑ soit au nombre ΑΒ comme le quarré de ΗΖ est au quarré de ΖΕ (6. cor. 10); le quarré de ΗΖ sera commensurable avec le quarré de ΖΕ (6. 10); la droite ΖΕ est donc rationelle (déf. 6. 10). Et puisque le nombre ΓΑ n'a pas avec le nombre ΑΒ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΗΖ n'aura pas non plus avec le quarré de ΖΕ la raison τῆς ZE λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE μήκει· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH. Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est HZ ipsi ZE longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ipsa EH. Ostendendum est et secundam esse.



Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν AΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, μείζων δὲ ὁ BA τοῦ AΓ· μεῖζον ἄρα καὶ[2] τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. Ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἀλλ' ὁ AB πρὸς τὸν BΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει·

Quoniam enim invertendo est ut AB numerus ad ipsum AΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam AΓ; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB ad BΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Sed AB ad BΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare

qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; la droite HZ est donc incommensurable en longueur avec ZE (9. 10) ; les droites EZ, ZH sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement ; EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la seconde de deux noms.

Car puisque, par inversion, le nombre AB est à AΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH, et que BA est plus grand que AΓ, le quarré de EZ est plus grand que le quarré de ZH. Que la somme des quarrés des droites ZH, Θ soit égale au quarré de EZ ; par conversion, AB sera à BΓ comme le quarré de EZ est au quarré de Θ. Mais AB a avec BΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; le quarré de EZ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; la droite EZ est donc commensusurable en longueur avec Θ (9. 10);

ὥστε ἡ EZ τῆ ZH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ EZ, ZH δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ZH ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ[3] τῆ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

EZ quam ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt rationales EZ, ZH potentiâ solùm commensurabiles, et ZH minus nomen commensurabile est expositæ rationali Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να.

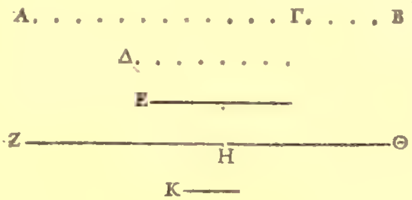
Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον

PROPOSITIO LI.

Invenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut AB compositus ex ipsis ad ΒΓ quidem rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΑΓ autem rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; exponatur autem quidam et alius non quadratus numerus Δ, et ad utrumque ipsorum



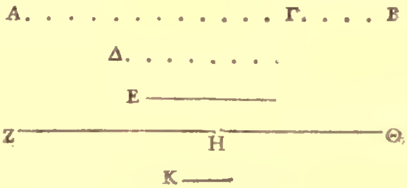
(9. 10); la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ZH du quarré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ZH est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Δ; la droite EH est donc une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LI.

Trouver une troisième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme AB ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que leur somme AB n'ait pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un quarré, et que ce nombre n'ait pas avec chacun des nom-μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε[2]· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον

ΒΑ, ΑΓ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur quædam rationalis recta Ε, et fiat ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ; commensurabile igitur est ex Ε quadratum quadrato ex ΖΗ. Atque est rationalis Ε; rationalis igitur est et ΖΗ. Et quoniam Δ ad ΑΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex Ε quadratum ad ipsum ex



ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γεγονέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ

ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΖΗ longitudine. Fiat autem rursùs ut ΒΑ numerus ad ipsum ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; commensurabile igitur est quadratum ex ΖΗ ad ipsum ex ΗΘ. Rationalis autem ΖΗ; rationalis igitur et ΗΘ. Et quoniam ΑΒ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ ratio-

bres ΒΑ, ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; soit enfin une droite rationelle Ε, et faisons en sorte que Δ soit à ΑΒ comme le quarré de Ε est au quarré de ΖΗ; le quarré de Ε sera commensurable avec le quarré de ΖΗ. Mais la droite Ε est rationelle ; la droite ΖΗ est donc rationelle (6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec ΑΒ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de Ε n'a pas non plus avec le quarré de ΖΗ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, la droite Ε sera incommensurable en longueur avec ΖΗ (9. 10). Faisons en sorte que le nombre ΒΑ soit à ΑΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ ; le quarré de ΖΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΘ. Mais la droite ΖΗ est rationelle; la droite ΗΘ est donc rationelle. Et puisque ΑΒ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de ΖΗ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν[3] ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν[4] ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-

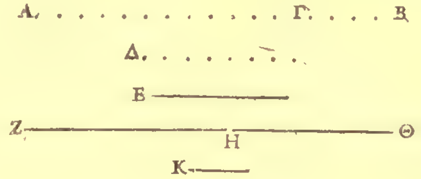
nem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΖΘ ex binis nominibus est. Dico et tertiam esse.

Quoniam enim est ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut autem ΑΒ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Δ ad ΑΓ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Δ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΗΘ longitudine. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; majus igitur ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Sint igitur quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ; convertendo igitur est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΑΒ ad ΒΓ rationem habet quam quadratus numerus ad

n'a pas non plus avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, la droite ΖΗ sera incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); les droites ΖΗ, ΗΘ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; ΖΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une troisième de deux noms.

Car, puisque Δ est à ΑΒ comme le quarré de Ε est au quarré de ΖΗ, et que ΑΒ est à ΑΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; par égalité, Δ sera à ΑΓ comme le quarré de Ε est au quarré de ΗΘ. Mais Δ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et le quarré de Ε n'a pas non plus avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite Ε est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ, le quarré de ΖΗ sera plus grand que le quarré de ΗΘ. Que la somme des quarrés de ΗΘ et de Κ soit égale au quarré de ΖΗ; par conversion ΑΒ sera à ΒΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de Κ. Mais ΑΒ a avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre γωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν[5] ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον

quadratum numerum; et quadratum ex ZH igitur ad quadratum ex K rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ZH ipsi K longitudine; ergo ZH quam HΘ plus potest quadrato



δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt ZH, HΘ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est ipsi E longitudine; ergo ZΘ ex binis nominibus est tertia. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ[1] ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ

PROPOSITIO LII.

Invenire ex binis nominibus quartam.

Exponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut AB ad BΓ rationem non habeat, neque quidem ad AΓ, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis Δ, et ipsi Δ

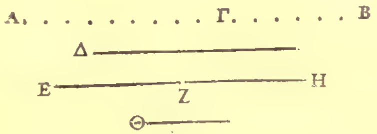
quarré; le quarré de ZH a donc avec le quarré de K la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ZH est donc commensurable en longueur avec K; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de HΘ du quarré d'une droite commensurable avec ZH. Mais les droites ZH, HΘ sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec E; la droite ZΘ est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 3. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LII.

Trouver une quatrième de deux noms.

Soient deux nombres AΓ, ΓB, de manière que AB n'ait pas avec BΓ ni avec AΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit la rationelle Δ, τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν καὶ[2] ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς[3] πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν[1]· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

commensurabilis sit longitudine ipsa EZ; rationalis igitur est et EZ. Et fiat ut BA numerus ad ipsum AΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; commensurabile igitur est ex EZ quadratum quadrato ex ZH; rationalis igitur est et ZH. Et quoniam BA ad AΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi ZH longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare EH ex binis nominibus est. Dico et quartam esse.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς[4] ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ

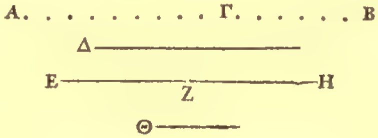
Quoniam enim est ut BA ad AΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam AΓ; majus igitur ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur ut

et que la droite EZ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite EZ sera rationelle. Faisons en sorte que le nombre BA soit à AΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH; le quarré de EZ sera commensurable avec le quarré de ZH; la droite ZH est donc rationelle. Et puisque BA n'a pas avec AΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de EZ n'a pas non plus avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre quarré a avec nombre quarré, la droite EZ sera incommensurable en longueur avec ZH (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une quatrième de deux noms.

Car, puisque BA est à AΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH, et que BA est plus grand que AΓ, le quarré de EZ est plus grand que le quarré de ZH. Que la somme des quarrés de ZH et de Θ soit égale au quarré de EZ; par con-

ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς[5] πρὸς τε-

AB numerus ad ipsum BΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad BΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-



τράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν[6]· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν[7] ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

tum numerum; neque igitur ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; ergo EZ quàm ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt EZ, ZH rationales potentiâ solùm commensurabiles, et EZ ipsi Δ commensurabilis est longitudine; ergo EH ex binis nominibus est quarta. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν

PROPOSITIO LIII.

Invenire ex binis nominibus quintam.

Exponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut AB ad utrumque ipsorum rationem non habeat

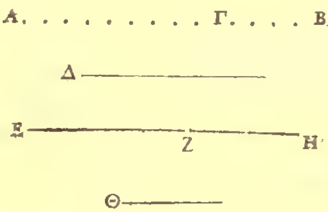
version, le nombre AB sera à BΓ comme le quarré de EZ est au quarré de Θ. Mais AB n'a pas avec BΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de EZ n'a donc pas avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite EZ est donc incommensurable en longueur avec Θ; la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ZH du quarré d'une droite incommensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et EZ est commensurable en longueur avec Δ; la droite EH est donc une quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10). Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION LIII.

Trouver une cinquième de deux noms.

Soient deux nombres AΓ, ΓB, de manière que AB n'ait pas avec chacun de ces τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητή τις εὐθεῖα[1] ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΗΖ[2]· ῥητὴ ἄρα ἡ ΗΖ. Καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ[3] ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἄρα[4] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα[5] ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis quædam recta Δ, et ipsi Δ commensurabilis sit longitudine ipsa ΗΖ; rationalis igitur ΗΖ. Et fiat ut ΓΑ ad ΑΒ ita ex ΗΖ quadratum ad ipsum ex ΖΕ; rationalis igitur est et ΖΕ. Et quoniam ΓΑ ad ΑΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex ΗΖ quadratum ad ipsum ex ΖΕ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ipsæ ΕΖ, ΖΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΕΗ. Dico et quintam esse.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ἀνάπαλιν ἄρα[6] ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

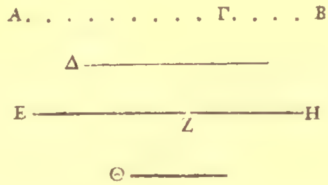
Quoniam enim est ut ΓΑ ad ΑΒ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΖΕ; invertendo igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex ΖΗ; majus igitur ex ΕΖ quadratum quadrato

nombres la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit une droite rationelle Δ, et que ΗΖ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite ΗΖ sera rationelle. Faisons en sorte que ΓΑ soit à ΑΒ comme le quarré de ΗΖ est au quarré de ΖΕ; la droite ΖΕ sera rationelle. Et puisque ΓΑ n'a pas avec ΑΒ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de ΗΖ n'a pas non plus avec le quarré de ΖΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, les droites ΕΖ, ΖΗ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (9. 10); ΕΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une cinquième de deux noms.

Car puisque ΓΑ est à ΑΒ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΖΕ, par inversion, ΒΑ est à ΑΓ comme le quarré de ΕΖ est au quarré de ΖΗ; le quarré de ΕΖ

ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ τῶν δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB numerus ad ipsum BΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad BΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare EZ quàm ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt EZ, ZH rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ZH minus nomen commensurabile est expositæ rationali Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est quinta. Quod oportebat facere.



est donc plus grand que le quarré de ZH. Que la somme des quarrés de ZH et de Θ soit égale au quarré de EZ ; par conversion, le nombre AB sera au nombre BΓ comme le quarré de EZ est au quarré de Θ. Mais AB n'a pas avec BΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; le quarré de EZ n'a donc pas avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite EZ est donc incommensurable en longueur avec Θ ; la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ZH du quarré d'une droite incommensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ZH est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Δ ; la droite EH est donc une cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10). Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

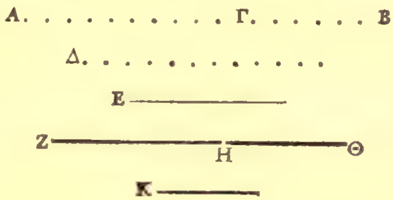
Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν, μήτε[1] πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε,

PROPOSITIO LIV.

Invenire ex binis nominibus sextam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumque ipsorum rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; sit autem et alius numerus Δ non quadratus existens, et non ad utrumque ipsorum ΒΑ, ΑΓ rationem habens quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur



καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ[2]. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

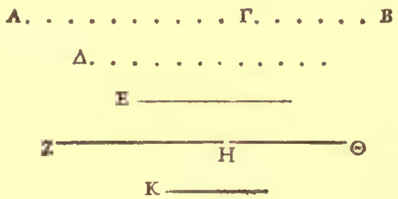
quædam rationalis recta Ε, et fiat ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ; commensurabile igitur est ex Ε quadratum quadrato ex ΖΗ. Atque est rationalis Ε; rationalis igitur et ΖΗ. Et quoniam non habet Δ ad ΑΒ rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum,

PROPOSITION LIV.

Trouver la sixième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que ΑΒ n'ait pas avec chacun de ces nombres la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un quarré, et qui n'ait pas avec chacun des nombres ΒΑ, ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit aussi la droite rationelle Ε; et faisons en sorte que Δ soit à ΑΒ comme le quarré de Ε est au quarré de ΖΗ; le quarré de Ε sera commensurable avec le quarré de ΖΗ. Mais la droite Ε est rationelle; la droite ΖΗ est donc rationelle (déf. 6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec ΑΒ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ

neque quadratum ex E igitur ad quadratum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est E ipsi ZH longitudine. Fiat igitur rursus ut BA ad AΓ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ. Commensurabile igitur ex ZH quadratum quadrato ex HΘ. Rationale autem quadratum



ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ[3] τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα[4] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ. Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

ex ZH; rationale igitur et quadratum ex HΘ; rationalis igitur HΘ. Et quoniam BA ad AΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ZH igitur ad quadratum ex HΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi HΘ longitudine; ipsæ ZH, HΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ZΘ. Ostendendum est et sextam esse.

quarré, le quarré de E n'aura pas avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite E est donc incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). De plus, faisons en sorte que BA soit à AΓ comme le quarré de ZH est au quarré de HΘ; le quarré de ZH sera commensurable avec le quarré de HΘ. Mais le quarré de ZH est rationel; le quarré de HΘ est donc rationel; la droite HΘ est donc rationelle. Et puisque BA n'a pas avec AΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ZH n'aura pas non plus avec le quarré de HΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec HΘ (9. 10); les droites ZH, HΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ZΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la sixième de deux noms.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι᾽ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς[5] ΗΘ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς[6] ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς[7] ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

Quoniam enim est ut Δ ad AB ita ex E quadratum ad ipsum ex ZH, est autem et ut BA ad AΓ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ; ex æquo igitur est ut Δ ad AΓ ita ex E quadratum ad ipsum ex HΘ. Ipse autem Δ ad AΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E igitur ad quadratum ex HΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est E ipsi HΘ longitudine. Ostensa est autem et ipsi ZH incommensurabilis; utraque igitur ipsarum ZH, HΘ incommensurabilis est ipsi E longitudine. Et quoniam est ut BA ad AΓ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ; majus igitur ex ZΘ quadratum quadrato ex HΘ. Sint itaque quadrato ex ZH æqualia quadrata ex HΘ, K; convertendo igitur ut AB ad BΓ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex K. Ipse autem AB ad BΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare neque ex ZH quadratum ad ipsum ex K rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum nume-

Car puisque Δ est à AB comme le quarré de E est au quarré de ZH, et que BA est à AΓ comme le quarré de ZH est au quarré de HΘ; par égalité, Δ sera à AΓ comme le quarré de E est au quarré de HΘ. Mais Δ n'a pas avec AΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de E n'a donc pas avec le quarré de HΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite E est donc incommensurable en longueur avec HΘ (9, 10). Mais on a démontré qu'elle est incommensurable avec ZH; chacune des droites ZH, HΘ est donc incommensurable en longueur avec E. Et puisque BA est à AΓ comme le quarré de ZH est au quarré de HΘ, le quarré de ZΘ sera plus grand que le quarré de HΘ. Que la somme des quarrés de HΘ et de K soit égale au quarré de ZH; par conversion, AB sera à BΓ comme le quarré de ZH est au quarré de K. Mais AB n'a pas avec BΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ZH n'a donc pas avec le quarré de K la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré;

πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν[8] σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Ε· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

rum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi K longitudine; ergo ZH quam HΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ZH, HΘ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est longitudine expositæ rationali E; ergo ZΘ ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat facere.

ΛΗΜΜΑ.

Εστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ, καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῇ ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΒΗ[1]· ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλῃ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση. Αλλ' ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΘ, ΚΓ ἐστὶν

LEMMA.

Sint duo quadrata AB, BΓ, et ponantur ita ut in directum sit ΔB ipsi BE; in directum igitur est et ZB ipsi BH. Et compleatur AΓ parallelogrammum; dico quadratum esse AΓ, et ipsorum AB, BΓ medium proportionale esse ΔH, et adhuc ipsorum AΓ, ΓB medium proportionale esse ΔΓ.

Quoniam enim æqualis est quidem ΔB ipsi BZ, ipsa verò BE ipsi BH; tota igitur ΔE toti ZH est æqualis. Sed quidem ΔE utrique

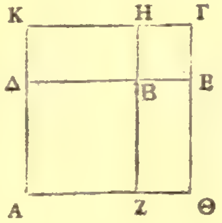
la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec K; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de HΘ du quarré d'une droite incommensurable avec ZH; mais les droites ZH, HΘ sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée E; la droite ZΘ est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait faire.

LEMME.

Soient les deux quarrés AB, BΓ; plaçons-les de manière que la droite ΔB soit dans la direction de BE; la droite ZB sera dans la direction de BH. Achevons le parallélogramme AΓ; je dis que AΓ est un quarré, que ΔH est moyen proportionnel entre AB et BΓ, et que ΔΓ est aussi moyen proportionnel entre AΓ et ΓB.

Puisque la droite ΔB est égale à BZ, et que BE est égale à BH, la droite entière ΔE sera égale à la droite entière ZH. Mais la droite ΔE est égale à chacune des ἴση· ἡ δὲ ZH ἑκατέρᾳ τῶν AK, ΘΓ ἐστὶν ἴση[2]· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AΘ, KΓ ἑκατέρᾳ τῶν AK, ΘΓ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ AΓ παραλληλόγραμμον. Ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ AΓ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ZB πρὸς τὴν BH οὕτως ἡ ΔB πρὸς τὴν BE, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ZB πρὸς τὴν BH οὕτως

ipsarum AΘ, KΓ est æqualis; ipsa verò ZH utrique ipsarum AK, ΘΓ est æqualis; et utraque igitur ipsarum AΘ, KΓ utrique ipsarum AK, ΘΓ est æqualis; æquilaterum igitur est AΓ parallelogrammum. Est autem et rectangulum; quadratum igitur est AΓ. Et quoniam est ut ZB ad BH ita ΔB ad BE, sed ut quidem ZB ad BH



τὸ AB πρὸς τὸ ΔH, ὡς δὲ ἡ ΔB πρὸς τὴν BE οὕτως τὸ ΔH πρὸς τὸ BΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB πρὸς τὸ ΔH οὕτως τὸ ΔH πρὸς τὸ BΓ· τῶν AB, BΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔH. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῶν AΓ, ΓB μέσον ἀνάλογόν ἐστι[3] τὸ ΔΓ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ AΔ πρὸς τὴν ΔK οὕτως ἡ KH πρὸς τὴν HΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ[4]· καὶ συνθέντι ὡς ἡ AK πρὸς τὴν KΔ οὕτως ἡ KΓ πρὸς τὴν ΓH[5]. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AK πρὸς τὴν KΔ οὕτως τὸ AΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ KΓ πρὸς τὴν ΓH οὕτως τὸ

ita AB ad ΔH, ut verò ΔB ad BE ita ΔH ad BΓ; et ut igitur AB ad ΔH ita ΔH ad BΓ; ipsorum AB, BΓ igitur medium proportionale est ΔH. Dico et ipsorum AΓ, ΓB medium proportionale esse ΔΓ. Quoniam enim est ut AΔ ad ΔK ita KH ad HΓ, æqualis enim est utraque utrique; et componendo ut AK ad KΔ ita KΓ ad ΓH. Sed ut quidem AK ad KΔ ita AΓ ad ΓΔ, ut verò KΓ ad ΓH ita ΔΓ ad ΓB; et ut

droites AΘ, KΓ, et la droite ZH est aussi égale à chacune des droites AK, ΘΓ; chacune des droites AΘ, KΓ est donc égale à chacune des droites AK, ΘΓ; donc AΓ est un parallélogramme équilatéral. Mais il est aussi rectangle; donc AΓ est un quarré. Et puisque ZB est à BH comme ΔB est à BE, que ZB est à BH comme AB est à ΔH (1. 6), et que ΔB est à BE comme ΔH est à BΓ, le quarré AB est à ΔH comme ΔH est à BΓ; donc ΔH est moyen proportionnel entre AB et BΓ. Je dis aussi que ΔΓ est moyen proportionnel entre AΓ et ΓB. Car puisque AΔ est à ΔK comme KH est à HΓ, à cause que chacune des droites AΔ, ΔK est égale à chacune des droites KH, HΓ, par addition, AK sera à KΔ comme KΓ est à ΓH. Mais AK est à KΔ comme AΓ est à ΓΔ (1. 6), et KΓ est à ΓH comme ΔΓ est à ΓB; donc

ΔΓ πρὸς τὴν[6] ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΓ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ. Οπερ προύκειτο δεῖξαι.

igitur ΑΓ ad ΔΓ ita ΔΓ ad ΒΓ; ipsorum ΑΓ, ΓΒ igitur medium proportionale est ΔΓ. Quod proponebatur demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νέ.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ[1] περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ[2] πρώτη ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. Φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ

PROPOSITIO LV.

Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus primâ ΑΔ; dico, rectam quæ potest spatium ΑΓ irrationalem esse, quæ appellatur ex binis nominibus.

Quoniam enim ex binis nominibus est prima ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, et sit majus nomen ΑΕ. Evidens utique est ΑΕ, ΕΔ rationales esse potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus posse quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΑΕ commensura-

ΑΓ est à ΔΓ comme ΔΓ est à ΒΓ; donc ΔΓ est moyen proportionnel entre ΑΓ et ΓΒ. Ce qu'on s'était proposé de démontrer.

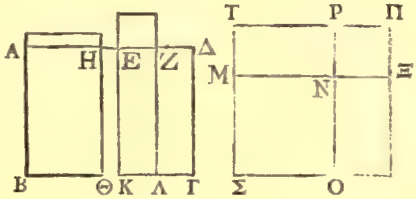
PROPOSITION LV.

Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite de deux noms.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationelle ΑΒ et sous la droite ΑΔ première de deux noms; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationelle appelée la droite de deux noms.

Puisque la droite ΑΔ est première de deux noms; qu'elle soit divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom. Il est évident que les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement, que la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et que ΑΕ sera commensurable en longueur avec la rationelle ῥητῇ τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω δὴ[3] ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ[4] ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τοῦ[5] ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ[6]. Παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον

bilem esse expositæ rationali AB longitudine. Secetur utique EΔ bifariam in puncto Z. Et quoniam AE quam EΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, si igitur quartæ parti quadrati ex minori, hoc est quadrati ex EZ, æquale ad majorem AE applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Applicetur igitur ad AE qua-



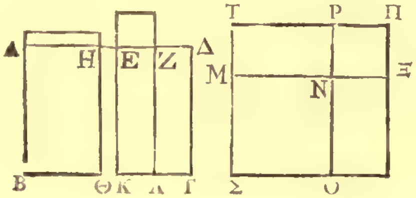
τὸ ὑπὸ τῶν[7] ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ[8] τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ· καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΝΡ τῇ

drato ex EZ æquale parallelogrammum sub AH, HE; commensurabilis igitur est AH ipsi EH longitudine. Et ducantur a punctis H, E, Z alterutri ipsarum AB, ΓΔ parallelæ HΘ, EK, ZΛ; et quidem AΘ parallelogrammo æquale quadratum constituatur ΣN, quadrato autem HK æquale ipsum NΠ, et ponantur ita ut in directum sit MN ipsi NΞ; in directum igitur est et NP ipsi

exposée AB (déf. sec. 1. 10). Coupons EΔ en deux parties égales au point Z. Puisque la puissance de AE surpasse la puissance de EΔ du quarré d'une droite commensurable avec AE, si nous appliquons à la plus grande AE un parallélogramme qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, c'est-à-dire du quarré de EZ, et défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera cette droite en parties commensurables (18. 10). Que le parallélogramme sous AH, HE, égal au quarré de EZ, soit appliqué à AE (28. 6); la droite AH sera commensurable en longueur avec EH. Des points H, E, Z menons les droites HΘ, EK, ZΛ parallèles à l'une ou à l'autre des droites AB, ΓΔ (14. 2). Faisons le quarré ΣN égal au parallélogramme AΘ, le quarré NΠ égal au parallélogramme HK, et faisons en sorte que la droite MN soit dans la direction de NΞ; la droite NP sera dans la direction

ΝΟ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν[9] ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν[10] ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ οὕτως τὸ ΕΛ πρὸς τὴν ΚΗ[11]· τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ[12], τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. Ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστίν[13]. Ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἡ ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ.

ΝΟ. Et compleatur ΣΠ parallelogrammum; quadratum igitur est ΣΠ. Et quoniam rectangulum sub ΑΗ, ΗΕ æquale est quadrato ex ΕΖ; est igitur ut ΑΗ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΕΗ; et ut igitur ΑΘ ad ΕΛ ita ΕΛ ad ΚΗ; ipsorum ΑΘ, ΗΚ igitur medium proportionale est ΕΛ. Sed quidem ΑΘ æquale est ipsi ΣΝ, ipsum verò ΗΚ æquale est ipsi ΝΠ; ipsorum ΣΝ, ΝΠ igitur medium proportionale est ΕΛ. Est autem eorumdem ΣΝ, ΝΠ medium proportionale et ΜΡ; æquale igitur est ΕΛ ipsi ΜΡ; quare et ipsi ΟΞ æquale est. Sunt autem et ΑΘ, ΗΚ ipsis ΣΝ, ΝΠ æqualia; totum igitur ΑΓ æquale est toti ΣΠ, hoc est quadrato ex ΜΞ; ipsum ΑΓ igitur potest ipsa ΜΞ; dico ΜΞ ex binis nominibus esse. Quoniam enim commensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, commensurabilis est et ΑΕ utrique



de ΝΟ (14. 1). Achevons le parallélogramme ΣΠ, le parallélogramme ΣΠ sera un quarré (lem. précéd.). Puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΕ est égal au quarré de ΕΖ, la droite ΑΗ sera à ΕΖ comme ΕΖ est à ΕΗ (17. 6); donc ΑΘ est à ΕΛ comme ΕΛ est à ΚΗ (1. 6); donc ΕΛ est moyen proportionnel entre ΑΘ et ΗΚ. Mais ΑΘ est égal à ΣΝ, et ΗΚ est égal à ΝΠ; donc ΕΛ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ. Mais ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ (lem. précéd.); donc ΕΛ est égal à ΜΡ, et par conséquent à ΟΞ (4. 3. 1). Mais la somme des rectangles ΑΘ, ΗΚ est égale à la somme des quarrés ΣΝ, ΝΠ; donc ΑΓ tout entier est égal à ΣΠ tout entier, c'est-à-dire au quarré de ΜΞ; la droite ΜΞ peut donc le parallélogramme ΑΓ; je dis que ΜΞ est une droite de deux noms. Car puisque ΑΗ est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des

Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει[14]· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. Καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ[15] καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἔστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ[16]· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν[17]. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς ΝΡ[18]· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΜ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμ-

ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Supponitur autem et ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis longitudine; et ΑΗ, ΗΕ igitur ipsi ΑΒ commensurabiles sunt. Atque est rationalis ΑΒ; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ; rationale igitur est utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ, et est commensurabile ΑΘ ipsi ΗΚ. Sed quidem ΑΘ ipsi ΣΝ æquale est, ipsum verò ΗΚ ipsi ΝΠ; et ΣΝ, ΝΠ igitur, hoc est quadrata ex ΜΝ, ΝΞ, rationalia sunt et commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, sed quidem ΑΕ ipsi ΑΗ est commensurabilis, ipsa verò ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis; incommensurabilis igitur et ΑΗ ipsi ΕΖ; quare et ΑΘ ipsi ΕΛ incommensurabile est. Sed quidem ΑΘ ipsi ΣΝ est æquale, ipsum verò ΕΛ ipsi ΜΡ; et ipsum ΣΝ igitur ipsi ΜΡ incommensurabile est. Sed ut ΣΝ ad ΜΡ ita ΟΝ ad ΝΡ; incommensurabilis igitur est ΟΝ ipsi ΝΡ. Æqualis utique quidem ΟΝ ipsi ΝΜ, ipsa verò ΝΡ ipsi ΝΞ; incommensurabilis igitur est ΜΝ ipsi ΝΞ. Atque est quadratum ex ΜΝ commensurabile

droites ΑΗ, ΗΕ (16. 10). Mais on a supposé que ΑΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ; les droites ΑΗ, ΗΕ sont donc commensurables avec ΑΒ (12. 10). Mais la droite ΑΒ est rationelle; chacune des droites ΑΗ, ΗΕ est donc rationelle; chacun des parallélogrammes ΑΘ, ΗΚ est donc rationel (20. 10); ΑΘ est donc commensurable avec ΗΚ (10. 10). Mais ΑΘ est égal à ΣΝ, et ΗΚ est égal à ΝΠ; les quarrés ΣΝ, ΝΠ, c'est-à-dire les quarrés des droites ΜΝ, ΝΞ, sont donc rationels et commensurables. Et puisque ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ (37. 10), que ΑΕ est commensurable avec ΑΗ, et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΑΗ sera incommensurable avec ΕΖ; donc ΑΘ est incommensurable avec ΕΛ. Mais ΑΘ est égal à ΣΝ, et ΕΛ égal à ΜΡ; donc ΣΝ est incommensurable avec ΜΡ. Mais ΣΝ est à ΜΡ comme ΟΝ est à ΝΡ; donc ΟΝ est incommensurable avec ΝΡ (10. 10). Mais la droite ΟΝ est égale à ΝΜ, et ΝΡ est égal à ΝΞ; donc ΜΝ est incommensurable avec ΝΞ. Mais le quarré de ΜΝ est commensurable avec le quarré de ΝΞ, et ils sont rationels l'un et l'autre;

μετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

quadrato ex ΝΞ, et rationale utrumque; ergo ΜΝ, ΝΞ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΜΞ ex binis nominibus est, et potest ipsum ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Εὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ[1] μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου

PROPOSITIO LVI.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secundâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

Contineatur enim spatium ΑΒΓΔ sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus secundâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, ex binis mediis primam esse.

Quoniam enim ex binis nominibus secunda est ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ

les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΜΞ est donc une droite de deux noms (37. 10), et elle peut le parallélogramme ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

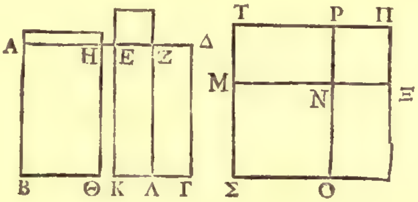
PROPOSITION LVI.

Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la première de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationelle ΑΒ et sous la seconde de deux noms ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est la première de deux médiales.

Car puisque ΑΔ est la seconde de deux noms, divisons cette droite en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit son plus grand nom; les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρόν[2] ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΔΓ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ

sibi commensurabili, et minus nomen ΕΔ commensurabile est ipsi ΑΒ longitudine. Secetur ipsa ΕΔ bifariam in Ζ, et quadrato ex ΕΖ æquale ad ΑΕ applicetur deficiens figurâ quadratâ, parallelogrammo sub ΑΗ, ΗΕ; commensurabilis igitur ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine. Et per puncta Η, Ε, Ζ parallelæ ducantur ipsis ΑΒ, ΔΓ ipsæ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, et parallelogrammo quidem ΑΘ æquale quadratum constituatur ΣΝ, ipsi verò ΗΚ æquale



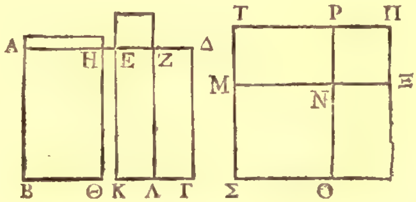
ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ[3] καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν[4] ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ· δεικτέον δὴ ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη.

quadratum ΝΠ, et ponatur ita ut in directum sit ΜΝ ipsi ΝΞ; in directum igitur est et ΡΝ ipsi ΝΟ. Et compleatur ΣΠ quadratum; evidens utique est ex iis demonstratis, ipsum ΜΡ medium proportionale esse ipsorum ΣΝ, ΝΠ, et æquale ipsi ΕΛ, et ΑΓ spatium posse ipsam ΜΞ; ostendendum est et ΜΞ ex binis mediis esse

le plus petit nom ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 2. 10). Coupons ΕΔ en deux parties égales en Ζ, et appliquons à ΑΕ un parallélogramme, qui étant égal au quarré de ΕΖ, soit défaillant d'une figure quarrée; que ce soit le parallélogramme sous ΑΗ, ΗΕ; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec ΗΕ (18. 10). Par les points Η, Ε, Ζ menons les droites ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles aux droites ΑΒ, ΔΓ; faisons le quarré ΣΝ égal au parallélogramme ΑΘ; le quarré ΝΠ égal au parallélogramme ΗΚ, et plaçons ΜΝ dans la direction de ΝΞ; la droite ΡΝ sera dans la direction de ΝΟ. Achevons le quarré ΣΠ; il est évident, d'après ce qui a été démontré (55. 10), que le rectangle ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ; que ΜΡ est égal à ΕΛ, et que ΜΞ peut la surface ΑΓ; il faut démontrer que ΜΞ est la première de deux médiales. Car puisque ΑΕ est incommensurable en

Ἐπεὶ γὰρ[5] ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπεὶ[6] σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΕ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ· αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ[7], ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ· ὥστε ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἐστί· καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσί. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν[8] ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ[9] ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ[10].

primam. Quoniam enim incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, commensurabilis autem ΕΔ ipsi ΑΒ; incommensurabilis igitur ΑΕ ipsi ΑΒ longitudine. Et quoniam commensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, commensurabilis est et ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Atque est rationalis ΑΕ; rationalis igitur et utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΑΒ, commensurabilis autem ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ; ergo ΑΗ, ΗΕ incommensurabiles sunt ipsi ΑΒ longitudine; ergo ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare medium est utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ; quare utrumque ipsorum ΣΝ, ΝΠ medium est; et ΜΝ, ΝΞ igitur mediæ sunt. Et quoniam commensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine, commensurabile est et ΑΘ ipsi ΗΚ, hoc est ΣΝ ipsi ΝΠ, hoc est ex ΜΝ quadratum quadrato ex ΝΞ; quare potentiâ



longueur avec ΕΔ (37. 10), et que ΕΔ est commensurable avec ΑΒ, la droite ΑΕ sera incommensurable en longueur avec ΑΒ (14. 10). Et puisque ΑΗ est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ (16. 10). Mais ΑΕ est rationel; chacune des droites ΑΗ, ΗΕ est donc rationelle. Et puisque ΑΕ est incommensurable avec ΑΒ, et que ΑΕ est commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ, les droites ΑΗ, ΗΕ seront incommensurables en longueur avec ΑΒ; les droites ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; chacun des rectangles ΑΘ, ΗΚ est donc médial (22. 10); chacun des quarrés ΣΝ, ΝΠ est donc médial; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc médiales. Et puisque ΑΗ est commensurable en longueur avec ΗΕ, le rectangle ΑΘ sera commensurable avec le rectangle ΗΚ (1. 6, et 10. 10), c'est-à-dire le quarré ΣΝ avec le quarré ΝΠ; c'est-à-dire le quarré de ΜΝ avec le quarré de ΝΞ; les droites ΜΝ, Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος[11]· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. Εδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Επεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ[12] καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ. Καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα καὶ[13] τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τὸ δὲ ΜΡ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Εὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ἡ ἄρα ΜΞ[14] ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

sunt commensurabiles MN, NΞ. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi EΔ longitudine, sed quidem AE commensurabilis est ipsi AH, ipsa verò ΔE ipsi EZ commensurabilis; incommensurabilis igitur AH ipsi EZ; quare et AΘ ipsi EΛ incommensurabile est, hoc est ΣN ipsi MP, hoc est ON ipsi NP, hoc est MN ipsi NΞ incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem MN, NΞ et mediæ existentes et potentiâ commensurabiles; ergo MN, NΞ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Dico et eas rationale continere. Quoniam enim ΔE supponitur utrique ipsarum AB, EZ commensurabilis; commensurabilis igitur est et ZE ipsi EK. Et rationalis utraque ipsarum; rationale igitur et EΛ, hoc est MP, sed MP est rectangulum sub MN, NΞ. Si verò duæ mediæ potentiâ commensurabiles componantur rationale continentes, tota irrationalis est, appellatur autem ex binis mediis prima; ergo MΞ ex binis mediis est prima. Quod oportebat ostendere.

NΞ sont donc commensurables en puissance. Et puisque AE est incommensurable en longueur avec EΔ, que AE est commensurable avec AH, et que ΔE l'est avec EZ, la droite AH sera incommensurable avec EZ; le rectangle AΘ est donc incommensurable avec le rectangle EΛ, c'est-à-dire le quarré ΣN avec MP, c'est-à-dire la droite ON avec la droite NP, c'est-à-dire que la droite MN est incommensurable en longueur avec NΞ (1. 6). Mais on a démontré que les droites MN, NΞ sont et médiales et commensurables en puissance; les droites MN, NΞ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis enfin qu'elles comprènent une surface rationelle. Car puisque ΔE est supposé commensurable avec chacune des droites AB, EZ, la droite ZE sera commensurable avec EK. Mais chacune d'elles est rationelle; le rectangle EΛ est donc rationel (20. 10), c'est-à-dire le rectangle MP qui est compris sous MN, NΞ. Mais si l'on ajoute deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprènent une surface rationelle, leur somme est irrationelle, et s'appèle première de deux médiales (38. 10); donc MΞ est une première de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ.

Εὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω[1] τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ ΑΔ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός ἐστι[2] τῇ ΑΒ μήκει. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις δείξομεν ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν

PROPOSITIO LVII.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus tertiâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ ΑΓ spatium potest, irrationalem esse, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Construantur enim eadem quæ suprà. Et quoniam ex binis nominibus est tertia ΑΔ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΑΕ, ΕΔ commensurabilis est ipsi ΑΒ longitudine. Congruenter utique suprà ostensis ostendemus

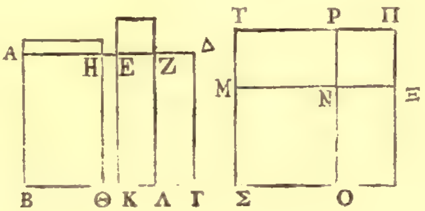
PROPOSITION LVII.

Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la seconde de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationelle ΑΒ et sous la troisième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationelle appelée la seconde de deux médiales.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite ΑΔ est la troisième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement, la droite ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et de plus aucune des droites ΑΕ, ΕΔ ne sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 3. 10). Nous démontrerons de la même ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστί[3]. Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ

rectam ΜΞ esse quæ spatium ΑΓ potest; et ΜΝ, ΝΞ medias esse potentiâ solùm commensurabiles; quare ΜΞ ex binis mediis est. Ostendendum est et secundam esse. Et quoniam incommensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine, hoc est ipsi ΕΚ, commensurabilis autem ΔΕ



ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος[4] ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. Καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ[5] τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ[7] δευτέρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsi ΕΖ; incommensurabilis igitur est ΕΖ ipsi ΕΚ longitudine. Et sunt rationales; ipsæ ΖΕ, ΕΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est ΕΛ, hoc est ΜΡ, et continetur sub ΜΝ, ΝΞ. Medium igitur est rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ; ergo ΜΞ ex binis mediis est secunda. Quod oportebat ostendere.

manière que nous l'avons déjà fait que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ (3. 10), et que les droites ΜΝ, ΝΞ sont des médiales commensurables en puissance seulement; la droite ΜΞ est donc une droite de deux médiales. Il faut démontrer qu'elle en est la seconde. Puisque ΔΕ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-à-dire avec ΕΚ, et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΕΖ sera incommensurable en longueur avec ΕΚ. Mais ces droites sont rationelles; les droites ΖΕ, ΕΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le rectangle ΕΛ, c'est-à-dire le rectangle ΜΡ, est donc médial; mais il est compris sous ΜΝ, ΝΞ; le rectangle compris sous ΜΝ, ΝΞ est donc médial (39. 10); la droite ΜΞ est donc une seconde de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νή.

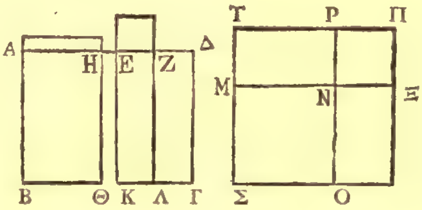
Εὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

PROPOSITIO LVIII.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

Spatium enim ΑΓ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus quartâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, irrationalem esse, quæ appellatur major.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. Τετμήσθω δὴ ἡ ΔΕ

Quoniam enim ΑΔ ex binis nominibus est quarta, ipsæ ΑΕ, ΕΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quam ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis est longitudine. Secetur utique ΔΕ bifariàm

PROPOSITION LVIII.

Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée majeure.

Que la surface ΑΓ soit comprise sous la rationelle ΑΒ, et sous la quatrième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationelle appelée majeure.

Car, puisque ΑΔ est la quatrième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement, et la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, et de plus ΑΕ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 4. 10). Coupons ΔΕ en δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν[1] ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Ηχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὴ[2] ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. Επεὶ[3] ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει[4] εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ[5] καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν[6] ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρός ἐστι τῇ[7] ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει· αἱ ΚΕ, ΕΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται

in Z, et quadrato ex EZ æquale ad AE applicetur parallelogrammum sub AH, HE; incommensurabilis igitur est AH ipsi HE longitudine. Ducantur ipsi AB parallelæ HΘ, EK, ZΛ, et reliqua eadem quæ suprà fiant; evidens est utique spatium AΓ posse MΞ. Ostendendum est utique MΞ irrationalem esse, quæ vocatur major. Quoniam incommensurabilis est AH ipsi EH longitudine, incommensurabile est et AΘ ipsi HK, hoc est ΣN ipsi NΠ; ipsæ MN, NΞ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam commensurabilis est AE ipsi AB longitudine, rationale est AK, atque est æquale quadratis ex MN, NΞ; rationale igitur est et compositum ex quadratis ipsarum MN, NΞ. Et quoniam incommensurabilis est ΔE ipsi AB longitudine, hoc est ipsi EK, sed ΔE commensurabilis est ipsi EZ; incommensurabilis igitur EZ ipsi EK longitudine; ipsæ KE, EZ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur AE, hoc est MP, et continetur sub MN, NΞ.

deux parties égales en Z, et appliquons à AE un parallélogramme sous AH, HE qui soit égal au quarré de EZ; la droite AH sera incommensurable en longueur avec HE (19. 10). Conduisons les droites HΘ, EK, ZΛ parallèles à AB, et faisons le reste comme auparavant; il est évident que la droite MΞ peut la surface AΓ. Il faut démontrer que MΞ est l'irrationelle appelée majeure. Puisque AH est incommensurable en longueur avec EH, la surface AΘ sera incommensurable avec HK, c'est-à-dire le quarré ΣN avec le quarré NΠ (1. 6, et 10. 10); les droites MN, NΞ sont donc incommensurables en puissance. Et puisque AE est commensurable en longueur avec AB, le rectangle AK sera rationel; mais il est égal à la somme des quarrés des droites MN, NΞ; la somme des quarrés de MN et de NΞ est donc rationelle. Et puisque ΔE est incommensurable en longueur avec AB, c'est-à-dire avec EK; et que ΔE est commensurable avec EZ; la droite EZ sera incommensurable en longueur avec EK; les droites KE, EZ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le rectangle AE, c'est-à-dire MP, est donc médial (22. 10);

ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον[8] ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, καὶ εἴσιν ἀσύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ[9] δυνάμει. Εαν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι. Καλεῖται δὲ μείζων· ἡ ΜΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

medium igitur est rectangulum sub MN, NΞ, et rationale compositum ex quadratis ipsarum MN, NΞ, et sunt incommensurabiles MN, NΞ potentiâ. Si verò duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium, tota irrationalis est. Vocatur autem major; ergo MΞ irrationalis est quæ appellatur major, et potest spatium AΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

Εαν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε,

PROPOSITIO LIX.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

Spatium enim AΓ contineatur sub rationali AB, et ex binis nominibus quintâ AΔ, divisâ in nomina ad E, ita ut majus nomen sit

mais il est contenu sous les droites MN, NΞ; le rectangle sous MN, NΞ est donc médial, la somme des quarrés de MN et de NΞ étant rationelle, et les droites MN, NΞ étant incommensurables en puissance. Mais si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la somme de ces droites sera irrationelle. Mais cette somme est appelée majeure (40. 10); la droite MΞ est donc l'irrationelle appelée majeure, et elle peut la surface AΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LIX.

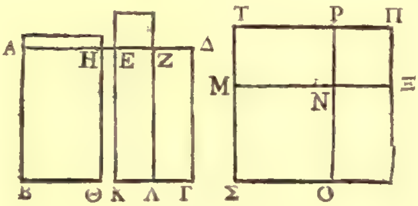
Si une surface est comprise sous une rationelle et sous une cinquième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Que la surface AΓ soit comprise sous la rationelle AB et sous une cinquième de deux noms AΔ, divisée en ses noms au point E, de manière que AE soit le plus ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα[1] ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς[2] ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἔστιν ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει[3]. Ἀλλ' ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει[4], καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΕ ἄρα[5] ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-

ΑΕ; dico rectam, quæ potest spatium ΑΓ, irrationalem esse, quæ vocatur rationale et medium potens.

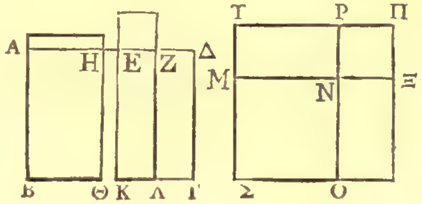
Construantur enim eadem quæ suprà; evidens est utique spatium ΑΓ posse ΜΞ. Ostendendum est autem ΜΞ esse quæ rationale et medium potest. Quoniam enim incommensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, incommensurabile igitur est et ΑΘ ipsi ΘΕ, hoc est ex ΜΝ quadratum quadrato ex ΝΞ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam ΑΔ ex binis nominibus est quinta, atque est minor ipsius portio ΕΔ; commensurabilis igitur ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine. Sed ΑΕ ipsi ΕΔ est incommensurabilis longitudine, et ΑΒ igitur ipsi ΑΕ est incommensurabilis longitudine; ipsæ ΒΑ, ΑΕ igitur rationales sunt potentiâ solùm com-



grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationelle appelée la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Faisons la même construction qu'auparavant; il est évident que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ. Il faut démontrer que la droite ΜΞ est celle qui peut une surface rationelle et une surface médiale. Car puisque ΑΗ est incommensurable avec ΗΕ, ΑΘ sera incommensurable avec ΘΕ, c'est-à-dire le quarré de ΜΝ avec le quarré de ΝΞ (10. 10); les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance. Et puisque la droite ΑΔ est la cinquième de deux noms, et que ΕΔ en est le plus petit segment, la droite ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 5. 10). Mais ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ; donc ΑΒ est incommensurable en longueur avec ΑΕ (13. 10); les droites ΒΑ, ΑΕ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le recτροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλ' ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρός ἐστι· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι. Καὶ

mensurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Et quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine, hoc est ipsi ΕΚ, sed ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis est; et ΕΖ igitur ipsi ΕΚ com-



ῥητὴ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

mensurabilis est. Et rationalis ΕΚ; rationale igitur et ΕΛ, hoc est ΜΡ, hoc est rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; ipsa ΜΞ igitur rationale et medium potest, et potest spatium ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

tangle ΑΚ, c'est-à-dire la somme des quarrés de ΜΝ et de ΝΞ, est donc médial (22. 10). Et puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-à-dire avec ΕΚ; que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΕΖ sera commensurable avec ΕΚ. Mais la droite ΕΚ est rationelle, le rectangle ΕΛ, c'est-à-dire ΜΡ (20. 10), c'est-à-dire le rectangle sous ΜΝ, ΝΞ, est donc rationel; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle compris sous ces droites étant rationel; donc ΜΞ est la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale (41. 10), et elle peut la surface ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστί.

Κατεσκευάσθω γὰρ[1] τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ[2] τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν[3] ΜΝ, ΝΞ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα[4] ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ

PROPOSITIO LX.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus sextâ ΑΔ, divisâ in nomina ad Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; dico rectam, quæ potest ipsum ΑΓ, bina media posse.

Construantur enim eadem quæ suprà. Evidens est utique ipsum ΑΓ posse ΜΞ, et incommensurabilem esse ΜΝ ipsi ΝΞ potentiâ. Et quoniam incommensurabilis est ΕΑ ipsi ΑΒ longitudine; ipsæ ΕΑ, ΑΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Rursùs, quoniam incommensurabilis est ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine, incommensu-

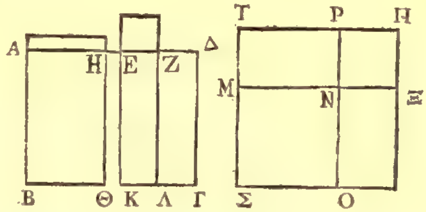
PROPOSITION LX.

Si une surface est comprise sous une rationelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite qui peut deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationelle ΑΒ et sous une sixième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit le plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est celle qui peut deux médiales.

Faisons la même construction qu'auparavant. Il est évident que ΜΞ peut la surface ΑΓ, et que ΜΝ est incommensurable en puissance avec ΝΞ. Et puisque ΕΑ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, les droites ΕΑ, ΑΒ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; le rectangle ΑΚ, c'est-à-dire la somme des quarrés de ΜΝ et de ΝΞ, sera donc médial (22. 10). De plus, puisque ΕΔ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, la droite ΕΖ sera incommensurable τῇ ΕΚ· καὶ[5] αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ.

rabilis igitur est et EZ ipsi EK; et ipsæ ZE, EK igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est EA, hoc est MP, hoc est



Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν[6] ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἔστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ[7] δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

rectangulum sub MN, NΞ. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi EZ, et AK ipsi EA incommensurabile est. Sed quidem AK est compositum ex quadratis ipsarum MN, NΞ, ipsum verò EA est rectangulum sub MN, NΞ; incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum MN, NΞ rectangulo sub MN, NΞ. Atque est medium utrumque ipsorum, et MN, NΞ potentiâ sunt incommensurabiles; ergo MΞ bina media potest, et potest ipsum AΓ. Quod oportebat ostendere.

avec EK, les droites ZE, EK sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le rectangle EA, c'est-à-dire MP, c'est-à-dire le rectangle sous MN, NΞ, sera donc médial. Et puisque AE est incommensurable avec EZ, le rectangle AK sera incommensurable avec EA. Mais AK est composé de la somme des quarrés de MN, NΞ, et EA est le rectangle sous MN, NΞ; la somme des quarrés de MN, NΞ est donc incommensurable avec le rectangle sous MN, NΞ. Mais l'une et l'autre de ces grandeurs est médiale; les droites MN, NΞ sont donc incommensurables en puissance; donc MΞ est la droite qui peut deux médiales, et elle peut la surface AΓ (42. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

LEMMA.

Si recta linea secetur in partes inæquales, ipsarum inæqualium quadrata majora sunt rectangulo bis contento sub ipsis inæqualibus.

Sit recta linea ΑΒ, et secetur in partes inæquales ad punctum Γ, et sit major ΑΓ; dico quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora esse rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς[1] ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς[2] ΑΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς[3] ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ[4]. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν[5] ΑΓ, ΓΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Secetur enim ΑΒ bifariàm in Δ. Quoniam igitur recta linea secatur in partes quidem æquales ad Δ, in partes verò inæquales ad Γ; rectangulum igitur sub ΑΓ, ΓΒ cum quadrato ex ΔΓ æquale est quadrato ex ΑΔ; quare rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ minus est quadrato ex ΑΔ; rectangulum igitur bis sub ΑΓ, ΓΒ minus est quàm duplum quadrati ex ΑΔ. Sed quadrata ex ΑΓ, ΓΒ dupla sunt quadratorum ex ΑΔ, ΔΓ; ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Quod oportebat ostendere.

LEMME.

Si une ligne droite est coupée en parties inégales, la somme des quarrés de ces parties inégales est plus grande que le double rectangle compris sous ces parties.

Soit la droite ΑΒ; coupons-la en parties inégales au point Γ, et que ΑΓ soit la plus grande; je dis que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ.

Que la droite ΑΒ soit coupée en deux parties égales en Δ. Puisque la ligne droite ΑΒ est coupée en parties égales au point Δ, et en parties inégales au point Γ, le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ avec le quarré de ΔΓ sera égal au quarré de ΑΔ (5. 2); le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le quarré de ΑΔ; le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le double quarré de ΑΔ. Mais la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est double de la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΓ (9. 2); la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξά.

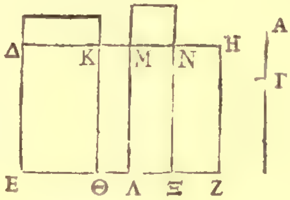
Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Εστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

PROPOSITIO LXI.

Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus ipsa AB, divisa in nomina ad Γ, ita ut majus nomen sit AΓ, et exponatur rationalis ΔE, et quadrato ex AB æquale ad ΔE applicetur ipsum ΔEZH, latitudinem faciens ΔH; dico ΔH ex binis nominibus esse primam.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΖ. Τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ ἑκατέρᾳ τῶν ΜΛ, ΗΞ[1]· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΜΞ, ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ

Applicetur enim ad ΔE quadrato quidem ex AΓ æquale ΔΘ, ipsi verò ex BΓ æquale KΛ; reliquum igitur rectangulum bis sub AΓ, ΓB æquale est ipsi MZ. Secetur MH bifariàm in N, et parallela ducatur ipsa NΞ alterutri ipsarum MΛ, HΞ; utrumque igitur ipsorum MΞ,

PROPOSITION LXI.

Le quarré d'une droite de deux noms appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

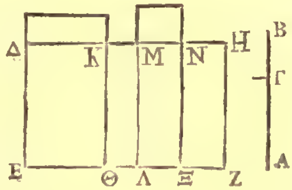
Soit la droite AB de deux noms, divisée en ses noms au point Γ, de manière que AΓ soit son plus grand nom; soit exposée la rationelle ΔE, et appliquons à la rationelle ΔE un rectangle ΔEZH égal au quarré de AB, et faisant la largeur ΔH; je dis que la droite ΔH est une première de deux noms.

Appliquons à la rationelle ΔE un rectangle ΔΘ égal au quarré de AΓ (45. 1), et un rectangle KΛ égal au quarré de BΓ; le double rectangle restant sous AΓ, ΓB sera égal au rectangle MZ (4. 2). Coupons MH en deux parties égales en N, et menons à l'une ou à l'autre des droites MΛ, HΞ la parallèle NΞ; chacun des rectangles ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητά ἐστι[2] καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ[3]. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστὶ[4], καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. Εστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. Καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον

ΘΖ æquale est rectangulo semel sub ΑΓ, ΓΒ. Et quoniam ex binis nominibus est ΑΒ divisa in nomina ad Γ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationalia sunt et commensurabilia inter se; quare et compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ commensurabile est quadratis ex ΑΓ, ΓΒ. Atque est æquale ipsi ΔΛ; rationale igitur est ΔΛ, et ad rationalem ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΜ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursùs, quoniam ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ. Et ad rationalem ΜΛ applicatur; rationalis igitur et ΜΗ est, et incommensurabilis ipsi ΜΛ, hoc est ipsi ΔΕ, longitudine. Est autem et ΜΔ rationalis, et ipsi ΔΕ longitudine commensurabilis; incommensurabilis igitur est ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine. Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΔΗ. Ostendendum est

ΜΞ, ΝΖ sera égal au rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Et puisque la droite ΑΒ de deux noms est divisée en ses noms au point Γ, les droites ΑΓ, ΓΒ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (37. 10); les quarrés de ΑΓ et de ΓΒ sont donc rationels, et commensurables entre eux; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc commensurable avec la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ (16. 10). Mais elle est égale au rectangle ΔΛ; le rectangle ΔΛ est donc rationel, et il est appliqué à la rationelle ΔΕ; la droite ΔΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10). De plus, puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont des rationelles commensurables en puissance seulement, le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire le rectangle ΜΖ, sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΜΛ; la droite ΜΗ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΜΛ, c'est-à-dire avec ΔΕ (23. 10). Mais la droite ΜΔ est rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ (13. 10). Mais ces droites sont rationelles; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer δὴ ὅτι καὶ πρώτη. Ἐπεὶ γάρ[5] τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως[6] ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι μήκει[7]. Καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει[8] τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει[9]. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ

et primam esse. Quoniam enim quadratorum ex ΑΓ, ΓΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ipsorum ΔΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΜΞ; est igitur ut ΔΘ ad ΜΞ ita ΜΞ ad ΚΛ, hoc est ut ΔΚ ad ΜΝ ita ΜΝ ad ΜΚ; rectangulum igitur sub ΔΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ. Et quoniam commensurabile est ex ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ, commensurabile est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ commensurabilis est longitudine. Et quoniam majora sunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; majus igitur et ΔΛ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ ipsâ ΜΗ major est. Atque est æquale rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΜΗ, et commensurabilis ΔΚ ipsi ΚΜ longitudine. Si autem sunt duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex mi-



qu'elle est aussi une première de deux noms. Car puisque le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est moyen proportionel entre les quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ (55. lem. 10), le rectangle ΜΞ sera moyen proportionel entre les rectangles ΔΘ, ΚΛ; le rectangle ΔΘ est donc à ΜΞ comme ΜΞ est à ΚΛ, c'est-à-dire ΔΚ est à ΜΝ comme ΜΝ est à ΜΚ; le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΜΝ (17. 6). Et puisque le quarré de ΑΓ est commensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commensurable avec le rectangle ΚΛ (14. 10); la droite ΔΚ est donc commensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (61. lem. 10), le rectangle ΔΛ sera plus grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΜΗ, et la droite ΔΚ est commensurable en longueur avec ΚΜ; or, si l'on a deux droites inégales, ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ[10]. Καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα οὖσα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

nori æquale ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat, major quàm minor plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; ipsa ΔΜ igitur quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt rationales ΔΜ, ΜΗ, et ΔΜ majus nomen existens commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est prima. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Εστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας[1] κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ παρα-

PROPOSITIO LXII.

Quadratum primæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

Sit ex binis mediis prima ΑΒ, divisa in medias ad Γ, quarum major sit ΑΓ, et exponatur rationalis ΔΕ, et ad ipsam ΔΕ applicetur

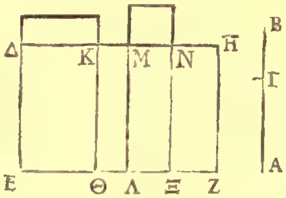
si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, si ce parallélogramme est défaillant d'une figure quarrée, et s'il partage la plus grande en parties commensurables, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande (18. 10); la puissance de ΔΜ surpasse donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ. Mais les droites ΔΜ, ΜΗ sont rationelles, et ΔΜ, qui est le plus grand nom, est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une première de deux noms (déf. sec. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXII.

Le quarré de la première de deux médiales appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la seconde de deux noms.

Soit ΑΒ la première de deux médiales, divisée en ses médiales au point Γ; que la droite ΑΓ soit la plus grande; soit exposée la rationelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un βεβλήσθω τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τὸ[2] παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΔZ; latitudinem faciens ΔH; dico ΔH ex binis nominibus esse secundam.



Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστί· μέσον ἄρα τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται[3]· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητόν ἐστι[4] καὶ τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ[5] καὶ ἡ ΜΗ, καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ

Construantur enim eadem quæ suprà. Et quoniam AB ex binis mediis est prima, divisa ad Γ; ipsæ AΓ, ΓB igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles rationale continentes; quare et quadrata ex AΓ, ΓB media sunt; medium igitur ΔΛ, et ad rationalem ΔE applicatur; rationalis igitur est MΔ, et incommensurabilis ipsi ΔE longitudine. Rursùs, quoniam rationale est rectangulum bis sub AΓ, ΓB, rationale est et MZ, et ad rationalem MΛ applicatur; rationalis igitur est et MH, et longitudine commensurabilis ipsi MΛ, hoc est ipsi ΔE; incommensurabilis igitur est ΔM ipsi MH longi-

parallélogramme ΔZ égal au quarré de AB, ce parallélogramme ayant ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une seconde de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB, qui est divisée au point Γ, est la première de deux médiales, les droites AΓ, ΓB seront des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprendront une surface rationelle (38. 10); les quarrés de AΓ et de ΓB sont donc médiaux; le rectangle ΔΛ est donc médial, et il est appliqué à la rationelle ΔE; la droite MΔ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous AΓ, ΓB est rationel, le rectangle MZ sera rationel, et il est appliqué à la rationelle MΛ; la droite MH est donc rationelle, et commensurable en longueur avec MΛ (21. 10), c'est-à-dire avec ΔE; la droite ΔM est donc incommensurable en longueur avec MH (13. 10). Mais ces droites sont rationelles;

μήκει. Καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. Επεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι. Καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

tudine. Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et secundam esse. Quoniam enim quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; majus igitur et ΔΛ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ ipsâ ΜΗ. Et quoniam commensurabile est ex ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ, commensurabile est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ commensurabilis est. Atque est rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Atque est ΜΗ commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

PROPOSITIO LXIII.

Quadratum secundæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

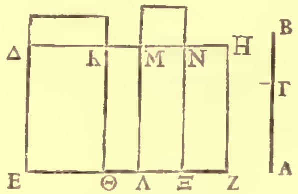
les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi la seconde de deux noms. Car puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (lem. 61. 10), le rectangle ΔΛ sera plus grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Et puisque le quarré de ΑΓ est commensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commensurable avec ΚΛ; la droite ΔΚ est donc commensurable avec ΚΜ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ surpasse donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10). Mais la droite ΜΗ est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXIII.

Le quarré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la troisième de deux noms.

Εστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Sit ex binis mediis secunda AB, divisa in medias ad Γ, ita ut majus segmentum sit AΓ, rationalis autem aliqua sit ΔE, et ad ipsam ΔE quadrato ex AB æquale parallelogrammum applicetur ΔZ, latitudinem faciens ΔH; dico ΔH ex binis nominibus esse tertiam.



Κατεσκευάσθω γάρ[1] τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα[2] ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ[3]· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ[4] ἡ ΔΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα

Construantur enim eadem quæ suprà. Et quoniam ex binis mediis est secunda AB, divisa ad Γ; ipsæ AΓ, ΓB igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; quare et compositum ex quadratis ipsarum AΓ, ΓB medium est. Atque est æquale ipsi ΔΛ; medium igitur et ΔΛ; et applicatur ad rationalem ΔE; rationalis igitur est et ΔM, et incommensurabilis ipsi ΔE longitudine. Propter eadem utique et MH rationalis est, et incommensurabilis ipsi MΛ, hoc est ipsi ΔE, longitudine; rationalis igitur est utraque ipsa-

Soit AB la seconde de deux médiales, divisée en ses médiales au point Γ, de manière que AΓ soit son plus grand segment; soit aussi la rationelle ΔE; appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ égal au quarré de AB, ce parallélogramme ayant ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une troisième de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque AB est une seconde de deux médiales, divisée au point Γ; les droites AΓ, ΓB seront des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprendront une surface médiale (39. 10); la somme des quarrés de AΓ et de ΓB est donc médiale. Mais elle est égale au rectangle ΔΛ; le rectangle ΔΛ est donc médial; et il est appliqué à la rationelle ΔE; la droite ΔM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (23. 10). Par la même raison, la droite MH est rationelle, et incommensurable en longueur avec MΛ, c'est-à-dire avec ΔE; chacune des droites ΔM, MH τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε καὶ[5] ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον δὴ[6] ὅτι καὶ τρίτη. Ὁμοίως δὴ τοῖς προτέροις[7] ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν[8] ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

rum ΔΜ, ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Et quoniam incommensurabilis est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine, ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabile igitur et ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ; quare et compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ incommensurabile est, hoc est ΔΛ ipsi ΜΖ; quare et ΔΜ ipsi ΜΗ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et tertiam esse. Congruenter utique præcedentibus concludemus majorem esse ΔΜ ipsâ ΜΗ, et commensurabilem ΔΚ ipsi ΚΜ. Atque est rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est tertia. Quod oportebat ostendere.

est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ, et que ΑΓ est à ΓΒ comme le quarré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, le quarré de ΑΓ sera incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΔΛ avec ΜΖ; la droite ΔΜ est donc incommensurable avec ΜΗ. Mais ces droites sont rationelles; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi une troisième de deux noms. Nous conclurons comme auparavant que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que ΔΚ est commensurable avec ΚΜ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ est donc plus grande que la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10). Mais aucune des droites ΔΜ, ΜΗ n'est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 3. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξδ'.

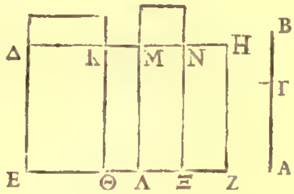
Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Εστω μείζων ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

PROPOSITIO LXIV.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit major AB, divisa ad Γ, ita ut major sit AΓ quàm ΓB, rationalis autem aliqua sit ΔE, et quadrato ex AB æquale ad ipsam ΔE applicetur ΔZ parallelogrammum, latitudinem faciens ΔH; dico ΔH ex binis nominibus esse quartam.



Κατεσκευάσθω γάρ[2] τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν

Construantur enim eadem quæ suprà. Et quoniam major est AB divisa ad Γ, ipsæ AΓ, ΓB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium.

PROPOSITION LXIV.

Le quarré d'une majeure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

Soit la majeure AB, divisée en Γ, la droite AΓ étant plus grande que ΓB; soit aussi une rationelle ΔE; appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ, qui étant égal au quarré de AB, ait la droite ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une quatrième de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la majeure AB est divisée au point Γ, les droites AΓ, ΓB seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites μέσον. Ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα καὶ[2] τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ[3] καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται[4]· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα[5] ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον δὴ[6] ὅτι καὶ τετάρτη. Ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον[7], ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ[8] καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ[9]. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ[10] ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ

Quoniam igitur rationale est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, rationale igitur et ΔΛ; rationalis igitur est et ΔΜ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ, et ad rationalem ΜΛ applicatur; rationalis igitur est et ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; incommensurabilis igitur est et ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et quartam. Congruenter utique præcedentibus ostendemus, majorem esse ΔΜ quam ΜΗ, et rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΜΝ. Quoniam igitur incommensurabile est ex ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ; incommensurabile igitur est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare incommensurabilis est et ΚΔ ipsi ΚΜ. Si autem sint duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommen-

médial (40. 10). Puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est rationelle, le rectangle ΔΛ sera rationel; la droite ΔΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΜΖ, est médial, et qu'il est appliqué à la rationelle ΜΛ, la droite ΜΗ sera rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10); la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer qu'elle est aussi la quatrième de deux noms. Nous démontrerons, comme auparavant, que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ. Et puisque le quarré de ΑΓ est incommensurable avec le quarré de ΙΒ, le rectangle ΔΘ sera incommensurable avec ΚΛ (10. 10); la droite ΚΔ est donc incommensurable avec ΚΜ. Mais si deux droites sont inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme, étant défaillant d'une figure quarrée, partage la plus grande droite en parties incom-μήκει[11], ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

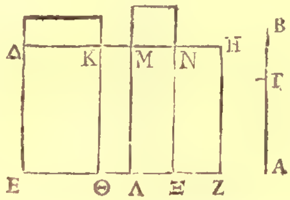
surabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; ergo ΔΜ quam ΜΗ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΔΜ, ΜΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ΔΜ commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ; ergo ΔΗ ex binis nominibus est quarta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξέ.

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

PROPOSITIO LXV.

Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



Εστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ

Sit rationale et medium potens ΑΒ, divisa in rectas ad Γ, ita ut major sit ΑΓ, et exponatur rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΒ

mensurables en longueur, la puissance de la plus grande droite surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la plus grande droite (19. 10); la puissance de ΔΜ surpassera donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite incommensurable avec ΔΜ. Mais les droites ΔΜ, ΜΗ sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et ΔΜ est commensurable avec la rationelle exposée ΔΕ; ΔΗ est donc une quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXV.

Le quarré d'une droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est la cinquième de deux noms.

Que la droite ΑΒ, pouvant une surface rationelle et une surface médiale, soit divisée en ses droites au point Γ, la droite ΑΓ étant la plus grande; soit exposée la ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω γάρ[1] τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΛ· ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ ΔΜ, καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν[2] ἡ ΜΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει[3]· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. Ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ

æquale ad ipsam ΔE applicetur ΔZ, latitudinem faciens ΔH; dico ΔH ex binis nominibus esse quintam.

Construantur enim eadem quæ suprà. Quoniam igitur rationale et medium potens est AB, divisa ad Γ; ergo AΓ, ΓB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale. Quoniam igitur medium est compositum ex quadratis ipsarum AΓ, ΓB; medium igitur est et ΔΛ; quare rationalis est ΔM, et longitudine incommensurabilis ipsi ΔE. Rursus, quoniam rationale est rectangulum bis sub AΓ, ΓB, hoc est MZ; rationalis igitur est MH, et commensurabilis ipsi ΔE longitudine; incommensurabilis igitur ΔM ipsi MH; ipsæ ΔM, MH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔH. Dico et quintam esse. Similiter enim demonstrabitur rectangulum sub ΔK, KM æquale esse quadrato ex MN, et incommensurabilem ΔK ipsi KM longitu-

rationelle ΔE, et appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ égal au quarré de AB, ce parallélogramme ayant ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une cinquième de deux noms.

Car faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB, qui est divisée au point Γ, peut une surface rationelle et une surface médiale, les droites AΓ, ΓB seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (41. 10). Puisque la somme des quarrés des droites AΓ, ΓB est médiale, le rectangle ΔΛ sera médial; la droite ΔM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous AΓ, ΓB, c'est-à-dire MZ, est rationel, la droite MH sera rationelle et commensurable en longueur avec ΔE (21. 10); la droite ΔM est donc incommensurable avec MH (13. 10); les droites ΔM, MH sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΔH est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis qu'elle est aussi une cinquième de deux noms. Car nous démontrerons semblablement que le rectangle sous ΔK, KM est égal au quarré de MN, et que ΔK est in-

ΔΜ τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

eadem utique ΔΜ quam ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξζ'.

Η τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Εστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ

PROPOSITIO LXVII.

Recta quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine eadem.

Sit ex binis nominibus ipsa ΑΒ, et ipsi ΑΒ longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico ΓΔ ex binis nominibus esse et ordine eamdem ipsi ΑΒ.

Quoniam enim ex binis nominibus est ΑΒ, dividatur in nomina ad Ε, et sit majus nomen ΑΕ; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Fiat ut

même raison, la puissance de ΔΜ surpassera la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΔΜ (19. 10). Mais aucune des droites ΔΜ, ΜΗ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

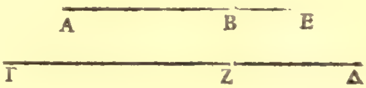
PROPOSITION LXVII.

La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

Soit ΑΒ une droite de deux noms, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite de deux noms, et qu'elle est du même ordre que ΑΒ.

Car, puisque ΑΒ est une droite de deux noms, qu'elle soit divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; les droites ΑΕ, ΕΒ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (37. 10). Faisons en sorte que πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν

AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ; et reliqua igitur EB ad reliquam ZΔ est ut AB ad ΓΔ. Commensurabilis verò AB ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur est et quidem AE ipsi ΓZ, ipsa verò EB ipsi ZΔ. Et sunt rationales AE, EB; rationales igitur sunt et ΓZ, ZΔ. Et quoniam est ut AE ad ΓZ ita EB ad ZΔ; permutando



ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ[1]· αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ[2] σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὴ ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Η γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται ἤτοι[3] τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναταί[4] τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν

igitur est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; ipsæ autem AE, EB potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ΓZ, ZΔ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et sunt rationales; ex binis igitur nominibus est ΓΔ. Dico et ordine esse eamdem ipsi AB.

Vel enim AE quam EB plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Si quidem igitur AE quam EB plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΓZ quam ZΔ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si

AB soit à ΓΔ comme AE est à ΓZ; la droite restante EB sera à la droite restante ZΔ comme AB est à ΓΔ (19. 5). Mais AB est commensurable en longueur avec ΓΔ; la droite AE est donc commensurable avec ΓZ, et EB avec ZΔ (10. 10). Mais les droites AE, EB sont rationelles; les droites ΓZ, ZΔ sont donc rationelles. Et puisque AE est à ΓZ comme EB est à ZΔ; par permutation, AE est à EB comme ΓZ est à ZΔ. Mais les droites AE, EB ne sont commensurables qu'en puissance; les droites ΓZ, ZΔ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais elles sont rationelles; ΓΔ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que AB.

Car la puissance de AE surpasse la puissance de EB du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec AE. Si la puissance de AE surpasse la puissance de EB du quarré d'une droite commensurable avec AE, la puissance de ΓZ surpassera la puissance de ZΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΓZ (15. 10);

ΔΜ τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

eadem utique ΔΜ quam ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine ; ergo ΔΗ ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξζ.

Η τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Εστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ

PROPOSITIO LXVII.

Recta quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine eadem.

Sit ex binis nominibus ipsa AB, et ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico ΓΔ ex binis nominibus esse et ordine eamdem ipsi AB.

Quoniam enim ex binis nominibus est AB, dividatur in nomina ad E, et sit majus nomen AE; ipsæ AE, EB igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Fiat ut

même raison, la puissance de ΔM surpassera la puissance de MH du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΔM (19. 10). Mais aucune des droites ΔM, MH n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔE ; la droite ΔH est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXVII.

La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

Soit AB une droite de deux noms, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec AB ; je dis que ΓΔ est une droite de deux noms, et qu'elle est du même ordre que AB.

Car, puisque AB est une droite de deux noms, qu'elle soit divisée en ses noms au point E, et que AE soit son plus grand nom; les droites AE, EB seront des rationelles commensurables en puissance seulement (37. 10). Faisons en sorte que πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν

AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ; et reliqua igitur EB ad reliquam ZΔ est ut AB ad ΓΔ. Commensurabilis verò AB ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur est et quidem AE ipsi ΓZ, ipsa verò EB ipsi ZΔ. Et sunt rationales AE, EB; rationales igitur sunt et ΓZ, ZΔ. Et quoniam est ut AE ad ΓZ ita EB ad ZΔ; permutando

ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ[1]· αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ[2] σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὴ ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Η γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται ἤτοι[3] τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται[4] τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν

igitur est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; ipsæ autem AE, EB potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ΓZ, ZΔ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et sunt rationales; ex binis igitur nominibus est ΓΔ. Dico et ordine esse eamdem ipsi AB.

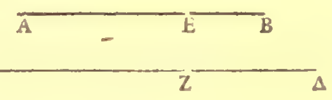
Vel enim AE quam EB plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Si quidem igitur AE quam EB plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΓZ quam ZΔ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si

AB soit à ΓΔ comme AE est à ΓZ; la droite restante EB sera à la droite restante ZΔ comme AB est à ΓΔ (19. 5). Mais AB est commensurable en longueur avec ΓΔ; la droite AE est donc commensurable avec ΓZ, et EB avec ZΔ (10. 10). Mais les droites AE, EB sont rationelles; les droites ΓZ, ZΔ sont donc rationelles. Et puisque AE est à ΓZ comme EB est à ZΔ; par permutation, AE est à EB comme ΓZ est à ZΔ. Mais les droites AE, EB ne sont commensurables qu'en puissance; les droites ΓZ, ZΔ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais elles sont rationelles; ΓΔ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que AB.

Car la puissance de AE surpasse la puissance de EB du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec AE. Si la puissance de AE surpasse la puissance de EB du quarré d'une droite commensurable avec AE, la puissance de ΓZ surpassera la puissance de ZΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΓZ (15. 10);

σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται[5]· καὶ διὰ τοῦτο ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἔσται[6] ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. Εἰ δὲ

quidem commensurabilis est AE expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis eidem erit; et ob id utraque ipsarum AB, ΓΔ ex binis nominibus est prima, hoc est ordine eadem. Si verò EB commensurabilis est expositæ rationali, et ΖΔ commensurabilis est eidem, et ob id rursus ordine eadem erit ipsi AB, utraque enim ipsarum erit ex binis nominibus secunda. Si autem



οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τρίτη. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δύναται[7] τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τετάρτη.

neutra ipsarum AE, EB commensurabilis sit expositæ rationali, neutra ipsarum ΓΖ, ΖΔ commensurabilis eidem erit, et est utraque tertia. Si verò AE quam EB plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem AE commensurabilis est expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis est eidem, et est utraque quarta. Si autem

et si la droite AE est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΓΖ sera aussi commensurable avec elle (12. 10). Chacune des droites AB, ΓΔ est donc la première de deux noms, c'est-à-dire que ces droites sont du même ordre. Si la droite EB est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΖΔ sera aussi commensurable avec elle, et la droite ΓΔ sera encore du même ordre que AB, car chacune d'elles sera une seconde de deux noms. Mais si aucune des droites AE, EB n'est commensurable avec la rationelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une troisième de deux noms. Si la puissance de AE surpasse la puissance de EB du quarré d'une droite incommensurable avec AE, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΓΖ (15. 10). Si la droite AE est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une quatrième de deux noms. Si la droite EB est commensurable avec la

Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρός ἐστι[8] τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ωστε ἡ τῇ ἐκ δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξή.

Η τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ[1] ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Εστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω[2] εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ[3]· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν

ΕΒ, et ΖΔ, et erit utraque quinta. Si verò neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, et ipsarum ΓΖ, ΖΔ neutra commensurabilis est expositæ rationali, et erit utraque sexta.

Quare recta ei quæ est ex binis, etc.

PROPOSITIO LXVIII.

Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

Sit ex binis mediis ipsa ΑΒ, et ipsi ΑΒ commensurabilis sit longitudine ipsa ΓΔ; dico ΓΔ ex binis mediis esse, et ordine eamdem ipsi ΑΒ.

Quoniam enim ex binis mediis est ΑΒ, dividatur in medias ad Ε; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et fiat ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΕ ad ΓΖ; et reliqua igitur ΕΒ ad reliquam ΖΔ est ut ΑΒ ad ΓΔ.

rationelle exposée, la droite ΖΔ le sera aussi, et chacune d'elles sera une cinquième de deux noms; et enfin si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable avec la rationelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une sixième de deux noms. Donc, etc.

PROPOSITION LXVIII.

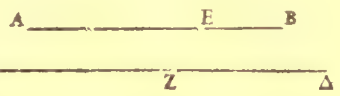
La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

Soit ΑΒ une droite de deux médiales, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite de deux médiales, et que cette droite est du même ordre que ΑΒ.

Car puisque ΑΒ est une droite de deux médiales, qu'elle soit divisée en ses médiales au point Ε; les droites ΑΕ, ΕΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement (38 et 39. 10). Faisons en sorte que ΑΒ soit à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ; la droite restante ΕΒ sera à la droite restante ΖΔ comme ΑΒ est à ΓΔ.

ΖΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ[4]. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ[5]· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ[6], αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσι[7]· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν[8]. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ ΑΒ.

Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur et utraque ipsarum AE, EB utrique ipsarum ΓZ, ZΔ; mediæ verò AE, EB; mediæ igitur et ΓZ, ZΔ. Et quoniam est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ, ipsæ autem AE, EB potentià solùm commensurabiles sunt; et ΓZ, ZΔ igitur potentià solùm commensurabiles sunt. Ostensæ sunt verò et mediæ; ergo ΓΔ ex binis mediis est. Dico et ordine eamdem esse ipsi AB.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ[9]· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα[10] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ

Quoniam enim est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; et ut igitur ex AE quadratum ad rectangulum sub AE, EB ita ex ΓZ quadratum ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ; permutando igitur ex AE quadratum ad ipsum ex ΓZ ita sub AE, EB rectangulum ad ipsum sub ΓZ, ZΔ. Commensurabile autem ex AE quadratum quadrato ex ΓZ; commensurabile igitur et sub AE, EB rectangulum rectangulo sub ΓZ, ZΔ. Sive

Mais AB est commensurable en longueur avec ΓΔ; chacune des droites AE, EB est donc commensurable avec chacune des droites ΓZ, ZΔ. Mais les droites AE, EB sont médiales; les droites ΓZ, ZΔ sont donc médiales (24. 10). Et puisque AE est à EB comme ΓZ est à ZΔ, et que les droites AE, EB ne sont commensurables qu'en puissance, les droites ΓZ, ZΔ ne seront commensurables qu'en puissance. Mais on a démontré qu'elles sont médiales; la droite ΓΔ est donc une droite de deux médiales (38 et 39. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que AB.

Car puisque AE est à EB comme ΓZ est à ZΔ, le quarré de AE sera au rectangle sous AE, EB comme le quarré de ΓZ est au rectangle sous ΓZ, ZΔ (11. 5, et 1. 6); donc, par permutation, le quarré de AE est au quarré de ΓZ comme le rectangle sous AE, EB est au rectangle sous ΓZ, ZΔ. Mais le quarré de AE est commensurable avec le quarré de ΓZ; le rectangle sous AE, EB est donc commensurable avec le rectangle sous ΓZ, ZΔ. Si donc le rectangle sous AE, EB est rationel, le rectangle ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ῥητόν ἐστι· καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη. Εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή[11]. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

igitur rationale est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ rationale est; et ob id est ex binis mediis prima. Sive medium rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, medium et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ. Atque est utraque secunda; et ob id ΓΔ ipsi ΑΒ ordine eadem. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

Η τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.

Εστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ[1] ἡ ΓΔ μείζων ἐστί.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. Γεγονέτω γάρ[2] τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἥτε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ[3]· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ

PROPOSITIO LXIX.

Recta majori commensurabilis et ipsa major est.

Sit major ΑΒ, et ipsi ΑΒ commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ majorem esse.

Dividatur ΑΒ ad Ε; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium. Fiant enim eadem quæ suprà. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΓΔ ita et ΑΕ ad ΓΖ et ΕΒ ad ΖΔ; et ut igitur ΑΕ ad ΓΖ ita ΕΒ ad ΖΔ.

sous ΓΖ, ΖΔ sera rationel; et ΓΔ sera, par conséquent, une première de deux médiales (38. 10). Si le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera médial. Mais les droites ΓΔ, ΔΒ sont l'une et l'autre la seconde de deux médiales (39. 10); la droite ΓΔ sera, par conséquent aussi, du même ordre que la droite ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

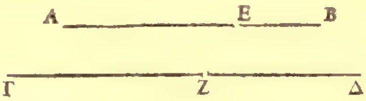
PROPOSITION LXIX.

Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

Soit la majeure ΑΒ; et que ΓΔ soit commensurable avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite majeure.

Divisons ΑΒ au point Ε; les droites ΑΕ, ΕΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial (40. 10). Car faisons les mêmes choses qu'auparavant. Puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ, et comme ΕΒ est à ΖΔ, la droite οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ[4], καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ[5] οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν[6] ΖΔ· καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν[7] ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ[8]· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ

Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ; commensurabilis igitur et utraque ipsarum AE, EB utrique ipsarum ΓZ, ZΔ. Et quoniam est ut AE ad ΓZ ita EB ad ZΔ, et permutando ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; et componendo igitur est ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔZ; et ut igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BE ita ex ΓΔ



ἀπὸ τῆς ΒΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ,

quadratum ad ipsum ex ΔZ. Similiter utique demonstrabimus et ut ex AB quadratum ad ipsum ex AE ita esse ex ΓΔ quadratum ad ipsum ex ΓZ; et ut igitur ex AB quadratum ad ipsa ex AE, EB ita ex ΓΔ quadratum ad ipsa ex ΓZ, ZΔ; et permutando igitur est ut ex AB quadratum ad ipsum ex ΓΔ ita ex AE, EB quadrata ad ipsa ex ΓZ, ZΔ. Commensurabile autem ex AB quadratum quadrato ex ΓΔ; commensurabilia igitur et ex AE, EB quadrata

AE sera à ΓZ comme EB est à ZΔ (11.5). Mais AB est commensurable avec ΓΔ; chacune des droites AE, EB est donc commensurable avec chacune des droites ΓZ, ZΔ. Et puisque AE est à ΓZ comme EB est à ZΔ; par permutation, AE sera à EB comme ΓZ est à ZΔ; donc, par addition, AB est à BE comme ΓΔ est à ΔZ; le quarré de AB est donc au quarré de BE comme le quarré de ΓΔ est au quarré de ΔZ (22.6). Nous démontrerons semblablement que le quarré de AB est au quarré de AE comme le quarré de ΓΔ est au quarré de ΓZ; le quarré de AB est donc à la somme des quarrés des droites AE, EB comme le quarré de ΓΔ est à la somme des quarrés des droites ΓZ, ZΔ; donc, par permutation, le quarré de AB est au quarré de ΓΔ comme la somme des quarrés des droites AE, EB est à la somme des quarrés des droites ΓZ, ZΔ. Mais le quarré de AB est commensurable avec le quarré de ΓΔ; la somme des quarrés des droites AE, EB est donc com-

ΖΔ. Καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστιν. Ομοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι[9], ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἅμα[10] ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

quadratis ex ΓΖ, ΖΔ. Et sunt quadrata ex ΑΕ, ΕΒ simul rationalia; et quadrata ex ΓΖ, ΖΔ simul rationalia sunt. Similiter verò et rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ commensurabile est rectangulo bis sub ΓΖ, ΖΔ. Atque est medium rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ; medium igitur et rectangulum bis sub ΓΖ, ΖΔ; ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; tota igitur ΓΔ irrationalis est, quæ vocatur major.

Η ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Recta igitur majori commensurabilis major est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ο΄.

PROPOSITIO LXX.

Η τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ[1] ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

mensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ. Mais la somme des quarrés des droites ΑΕ, ΕΒ est rationelle (40. 10); la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc rationelle (déf. 9. 10). Par la même raison, le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est commensurable avec le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial (40. 10); le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ est donc médial (24. 10); les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial; la droite entière ΓΔ est donc l'irrationelle appelée la droite majeure (40. 10).

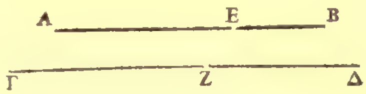
Une droite commensurable avec la majeure, est donc elle-même une droite majeure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXX.

Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· δεικτέον ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί.

Sit rationale et medium potens ΑΒ, et ipsi ΑΒ commensurabilis sit ΓΔ; ostendendum est et ΓΔ rationale et medium potentem esse.



Διῃρήσθω ἡ ΑΒ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν[2] ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ μὲν[3] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΓΔ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Dividatur ΑΒ in rectas ad Ε; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; et eadem construantur quæ suprà. Similiter utique demonstrabimus et ΓΖ, ΖΔ potentiâ esse incommensurabiles, et commensurabile quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΕ, ΕΒ composito ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ, rectangulum verò sub ΑΕ, ΕΒ rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ; quare et quidem compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis est medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; rationale igitur et medium potens est ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

Que la droite ΑΒ puisse une surface rationelle et une surface médiale, et que ΓΔ soit commensurable avec ΑΒ; il faut démontrer que la droite ΓΔ peut aussi une surface rationelle et une surface médiale.

Divisons ΑΒ en ses droites au point Ε; les droites ΑΕ, ΕΒ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (41. 10). Faisons la même construction qu'auparavant. Nous démontrerons semblablement que les droites ΓΖ, ΖΔ sont incommensurables en puissance, que la somme des quarrés des droites ΑΕ, ΕΒ est commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ; la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc médiale, et le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ rationel (24. 10); la droite ΓΔ peut donc une surface rationelle et une surface médiale (41. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οά.

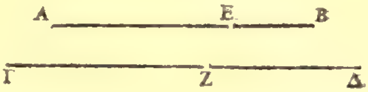
Η τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Εστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ, *καὶ τῇ* ΑΒ *σύμμετρος ἡ* ΓΔ· *δεικτέον δὴ*[1] *ὅτι καὶ ἡ* ΓΔ *δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.*

PROPOSITIO LXXI.

Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

Sit bina media potens AB, et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; ostendendum est et ΓΔ bina media potentem esse.



Επεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ, *διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ* Ε· *αἱ* ΑΕ, ΕΒ, *ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων*[2] *μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΒ *τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΒ· *καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ* ΓΖ, ΖΔ *δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον*

Quoniam enim bina media potens est AB, dividatur in rectas ad E; ipsæ AE, EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsarum AE, EB quadratis rectangulo sub AE, EB; et construantur eadem quæ suprà. Similiter utique demonstrabimus et ΓZ, ZΔ potentiâ esse incommensurabiles, et commensurabile quidem

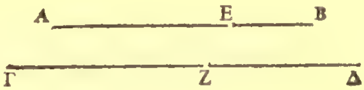
PROPOSITION LXXI.

Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

Que la droite AB puisse deux surfaces médiales, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; il faut démontrer que ΓΔ peut aussi deux surfaces médiales.

Car, puisque la droite AB peut deux surfaces médiales, qu'elle soit divisée en ses droites au point E; les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le rectangle sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des quarrés des droites AE, EB étant incommensurable avec le rectangle sous les droites AE, EB (42. 10). Faisons la même construction qu'auparavant. Nous démontrerons semblablement que les droites ΓZ, ZΔ sont incommensurables en puissance; que la somme des quarrés des droites AE, EB est ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ[3] ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ συγ-

compositum ex quadratis ipsarum AE, EB composito ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ, rectangulum verò sub AE, EB rectangulo sub ΓZ, ZΔ;



κείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἡ ἄρα ΓΔ[4] δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

quare et compositum ex ipsarum ΓZ, ZΔ quadratis medium est, et rectangulum sub ΓZ, ZΔ medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsarum ΓZ, ZΔ quadratis rectangulo sub ΓZ, ZΔ; ergo ΓΔ bina media potens est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οϐ΄.

Ρητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου, τέσσαρες ἄλογοι γίνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Εστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ

PROPOSITIO LXXII.

Rationali et medio compositis, quatuor irrationales fiunt, vel ex binis nominibus recta, vel ex binis mediis prima, vel major, vel et rationale et medium potens.

Sit rationale quidem ipsum AB, medium verò ΓΔ; dico rectam, quæ AΔ spatium potest, vel

commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ; la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc médiale, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ médial aussi, et la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ incommensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ (24. 10); la droite ΓΔ peut donc deux surfaces médiales (42. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXXII.

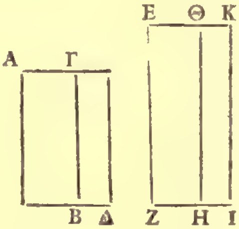
Si l'on ajoute une surface rationelle avec une surface médiale, on aura quatre droites irrationelles; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Soit la surface rationelle ΑΒ, et la surface médiale ΓΔ; je dis que la droite qui δύο ὀνομάτων ἐστὶν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. Ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ΑΒ ἴσον τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· τῷ δὲ ΓΔ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ, τουτέστι τὴν ΘΗ[1],

ex binis nominibus esse, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale et medium potentem.

Etenim AB quam ΓΔ vel majus est, vel minus. Sit primum majus; et exponatur rationalis EZ, et applicetur ad ipsam EZ ipsi AB æquale EH, latitudinem faciens EΘ; ipsi autem ΓΔ æquale ad EZ, hoc est ΘH, applicetur ΘI latitu-



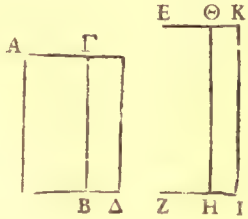
παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΕΗ[2]· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν[3] τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα ῥητή ἐστι[4] καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ[5] τὸ ΓΔ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΙ[6]· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, τουτέστι τὴν ΘΗ[7], πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα

dinem faciens ΘK. Et quoniam rationale est AB, et est æquale ipsi EH; rationale igitur et EH, et ad rationalem EZ applicatur latitudinem faciens EΘ; ipsa EΘ igitur rationalis est et commensurabilis ipsi EZ longitudine. Rursus, quoniam medium est ΓΔ, et est æquale ipsi ΘI; medium igitur est et ΘI, et ad rationalem EZ applicatur, hoc est ad ΘH, latitudinem faciens ΘK; rationalis igitur

peut la surface AΔ, est ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou une droite majeure, ou la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Car la surface AB est ou plus grande ou plus petite que ΓΔ. Qu'elle soit d'abord plus grande. Soit exposée la rationelle EZ; appliquons à EZ un parallélogramme EH égal à AB, ce parallélogramme ayant la droite EΘ pour largeur; appliquons aussi à EZ, c'est-à-dire à ΘH, un parallélogramme ΘI égal à ΓΔ, ce parallélogramme ayant la droite ΘK pour largeur. Puisque AB est rationel et égal à EH, le parallélogramme EH sera rationel; mais il est appliqué à la rationelle EZ, et il a pour largeur la droite EΘ; la droite EΘ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec EZ (21. 10). De plus, puisque ΓΔ est médial, et qu'il est égal à ΘI, le parallélograme ΘI sera médial; mais il est appliqué à la rationelle EZ, c'est-à-dire ἐστὶν ἡ ΘΚ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων

est ΘΚ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam medium est ΓΔ, rationale autem ΑΒ; incommensurabile igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ; quare et ΕΗ incommensurabile est ipsi ΘΙ. Ut autem ΕΗ ad ΘΙ ita est ΕΘ ad ΘΚ; incommensurabilis igitur est et ΕΘ ipsi ΘΚ longitudine; et sunt ambæ rationales; ipsæ ΕΘ, ΘΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΕΚ divisa



ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. Ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ[8] μείζων ἡ ΘΕ σύμμετρος

ad Θ. Et quoniam majus est ΑΒ quam ΓΔ, æquale verò ΑΒ quidem ipsi ΕΗ, ipsum verò ΓΔ ipsi ΘΙ; majus igitur et ΕΗ quam ΘΙ; et ΕΘ igitur major est quam ΘΚ. Vel igitur ΕΘ quam ΘΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et est major

à ΘΗ, et il a pour largeur la droite ΘΚ; la droite ΘΚ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Et puisque ΓΔ est médial, et que ΑΒ est rationel, ΑΒ sera incommensurable avec ΓΔ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΙ. Mais ΕΗ est à ΘΙ comme ΕΘ est à ΘΚ; la droite ΕΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘΚ (1. 6). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΕΘ, ΘΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΚ divisée au point Θ est donc une droite de deux noms. Et puisque ΑΒ est plus grand que ΓΔ, que ΑΒ est égal à ΕΗ, et que ΓΔ est égal à ΘΙ, le parallélogramme ΕΗ est plus grand que ΘΙ; la droite ΕΘ sera par conséquent plus grande que ΘΚ. La puissance de ΕΘ surpasse donc celle de ΘΚ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable en longueur avec ΕΘ. Que la puissance de ΕΘ surpasse d'abord la puissance de ΘΚ du quarré d'une droite commensurable τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΓ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ· ἤτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ,

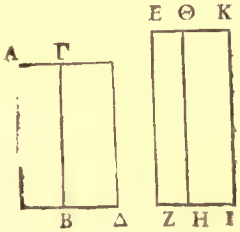
ΘΕ commensurabilis expositæ rationali EZ; ergo EK ex binis nominibus est prima, rationalis verò EZ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ, recta spatium potens ex binis nominibus est; recta igitur ipsum EI potens ex binis nominibus est; quare et recta ipsum AΔ potens ex binis nominibus est. Sed EΘ quam ΘK plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et est major EΘ commensurabilis expositæ rationali EZ longitudine; ergo EK ex binis nominibus est quarta, rationalis verò EZ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus quartâ, recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur major; recta igitur spatium EI potens major est; quare et recta ipsum AΔ potens major est.

Sed et sit minus AB quam ΓΔ; et EH igitur minus est quam ΘI; quare et EΘ minor est quam ΘK; vel autem ΘK quam EΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel qua-

avec EΘ; mais ΘE, plus grand que ΘK, est commensurable avec la rationelle exposée EZ; la droite EK est donc une première de deux noms (déf. sec. 1. 10); mais la droite EZ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est une droite de deux noms (55. 10); la droite qui peut la surface EI est donc une droite de deux noms; la droite qui peut la surface AΔ sera par conséquent une droite de deux noms. Mais que la puissance de EΘ surpasse la puissance de ΘK du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec EΘ, puisque EΘ, plus grand que ΘK, est commensurable en longueur avec la rationelle exposée EZ; la droite EK sera la quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10); mais la droite EZ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous une quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée majeure (58. 10); la droite qui peut la surface EI est donc une droite majeure; la droite qui peut la surface AΔ est donc aussi une droite majeure.

Mais que la surface AB soit plus petite que la surface ΓΔ; la surface EH sera plus petite que la surface ΘI; la droite EΘ sera par conséquent plus petite que ΘK; or, la puissance de ΘK surpasse la puissance de EΘ du quarré d'une droite commen-ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἔστιν[10] ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται[11] ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων

drato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; et est minor ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est secunda, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus secundâ, recta spatium potens ex binis mediis est prima; recta igitur spatium ΕΙ



ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον[12] δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ἀλλὰ δὴ ἡ ΚΘ τῆς ΕΘ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν[13] ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων

potens ex binis mediis est prima; quare et recta spatium ΑΔ potens ex binis mediis est prima. Sed et ΚΘ quam ΕΘ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et est minor ΕΘ commmensurabilis expositæ rationali ΕΖ; ergo ΕΚ ex binis nominibus est quinta, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis

surable ou incommensurable en longueur avec ΘΚ. Que la puissance de ΘΚ surpasse d'abord la puissance de ΕΘ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΘΚ, puisque la droite ΕΘ, plus petite que ΘΚ, est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10); mais la droite ΕΖ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous une seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est la première de deux médiales (56. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc la première de deux médiales; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent la première de deux médiales. Mais que la puissance de ΚΘ surpasse la puissance de ΕΘ du quarré d'une droite incommensurable avec ΚΘ; puisque ΕΘ, plus petit que ΚΘ, est commensurable avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ sera la cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10); mais la droite ΕΖ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la cinquième de deux πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί.

Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου, καὶ τὰ ἑξῆς.

nominibus quintâ, recta spatium potens rationale et medium potens est; recta igitur spatium EI potens rationale et medium potens est; quare et recta spatium ΑΔ potens rationale et medium potens est.

Rationali igitur et medio, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται· ἤτοι ἡ[1] ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα, ἢ ἡ[2] δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. Ἔστω[3] πρότερον μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον

PROPOSITIO LXXIII.

Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incommensurabilia inter se ΑΒ, ΓΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΔ potest, vel ex binis mediis esse secundam, vel bina media potentem.

Etenim ΑΒ quam ΓΔ vel majus est, vel minus. Sit primum majus ΑΒ quam ΓΔ; et exponatur rationalis ΕΖ, et ipsi quidem ΑΒ

noms, la droite qui peut cette surface est celle qui peut une surface rationelle et une surface médiale (59. 10); la droite qui peut la surface EI est donc celle qui peut une surface rationelle et une surface médiale; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale. Donc, etc.

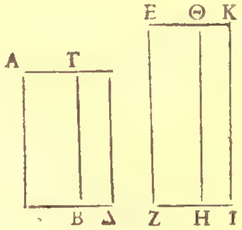
PROPOSITION LXXIII.

Deux surfaces médiales incommensurables entre elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

Ajoutons les deux surfaces médiales ΑΒ, ΓΔ qui sont incommensurables entre elles; je dis que la droite qui peut la surface ΑΔ est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

Car la surface ΑΒ est ou plus grande ou plus petite que la surface ΓΔ. Que ΑΒ soit d'abord plus grand que ΓΔ; soit exposée la rationelle ΕΖ; et appliquons à ΕΖ un παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον ΑΒ, ΓΔ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καὶ ἔστιν

æquale ad EZ applicetur EH latitudinem faciens EΘ, ipsi verò ΓΔ æquale ΘI latitudinem faciens ΘK. Et quoniam medium est utrumque ipsorum AB, ΓΔ; medium igitur et utrumque ipsorum EH, ΘI, et ad rationalem EZ applicantur, quæ latitudinem faciunt EΘ, ΘK; utraque igitur ipsarum EΘ, ΘK rationalis est, et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam incommensurabile est AB ipsi ΓΔ, et est æquale



ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. Ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυ-

quidem AB ipsi EH, ipsum verò ΓΔ ipsi ΘI; incommensurabile igitur est et EH ipsi ΘI. Ut autem EH ad ΘI ita est EΘ ad ΘK; incommensurabilis igitur est EΘ ipsi ΘK longitudine; ipsæ EΘ, ΘK igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est EK. Vel autem EΘ quam ΘK plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ

parallélogramme EH égal à AB, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite EΘ; appliquons aussi à EZ un parallélogramme ΘI égal à ΓΔ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΘK. Puisque les surfaces AB, ΓΔ sont médiales l'une et l'autre, les surfaces EH, ΘI seront aussi médiales l'une et l'autre; mais ces surfaces sont appliquées à EZ, et elles ont pour largeur les droites EΘ, ΘK; les droites EΘ, ΘK sont donc rationelles l'une et l'autre (23. 10), et incommensurables en longueur avec EZ. Et puisque AB est incommensurable avec ΓΔ, que AB est égal à EH, et que ΓΔ est égal à ΘI, la surface EH sera incommensurable avec ΘI. Mais EH est à ΘI comme EΘ est à ΘK; la droite EΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘK; les droites EΘ, ΘK sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; EK est donc une droite de deux noms. Or, la puissance de EΘ surpasse la puissance de ΘK du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable νάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. Αλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει, ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. Εὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ[4] δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ[5] ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἡ[6] δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι, κᾂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶ, δύο ἢ μέσα δυναμένη.

Δύο ἄρα μέσων, καὶ τὰ ἑξῆς[7].

incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et neutra ipsarum ΕΘ, ΘΚ commensurabilis est expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est tertia, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens ex binis mediis est secunda; recta igitur ipsum ΕΙ, hoc est ΑΔ potens, ex binis mediis est secunda. Sed ΕΘ quam ΘΚ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et incommensurabilis est utraque ipsarum ΕΘ, ΘΚ ipsi ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est sexta. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens bina media potens est; quare et spatium ΑΔ potens bina media potens est. Similiter utique demonstrabimus, et si minus sit ΑΒ quam ΓΔ, rectam quæ spatium ΑΔ potest, vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem.

Duobus igitur mediis, etc.

avec ΕΘ. Que la puissance de ΕΘ surpasse d'abord la puissance de ΘΚ d'une droite commensurable en longueur avec ΕΘ; or, les droites ΕΘ, ΘΚ ne sont ni l'une ni l'autre commensurables en longueur avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la troisième de deux noms; mais la droite ΕΖ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la seconde de deux médiales (57. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ, c'est-à-dire ΑΔ, est donc la seconde de deux médiales. Mais que la puissance de ΕΘ surpasse la puissance de ΘΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΕΘ; or, les droites ΕΘ, ΘΚ sont l'une et l'autre incommensurables en longueur avec ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Mais si une surface est comprise sous une rationelle et sous une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la droite qui peut deux médiales (60. 10); la droite qui peut la surface ΑΔ est donc la droite qui peut deux médiales. Si ΑΒ était plus petit que ΓΔ, nous démontrerions semblablement que la droite qui peut la surface ΑΔ est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

Εὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἀποτομή.

Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς ΑΒ ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή.

PROPOSITIO LXXIV.

Si à rationali rationalis auferatur, poter solùm commensurabilis existens toti; reli irrationalis est, vocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur potentiâ solùm commensurabilis existens to dico reliquam AΓ irrationalem esse, quæ catur apotome.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ[1]· καὶ

Quoniam enim incommensurabilis est AB i BΓ longitudine, atque est ut AB ad BΓ ex AB quadratum ad rectangulum sub AB, I incommensurabile igitur est ex AB quadrat rectangulo sub AB, BΓ; sed quadrato quide ex AB commensurabilia sunt ex AB, BΓ qu drata, rectangulo verò sub AB, BΓ commens rabile est rectangulum bis sub AB, BΓ; quadr igitur ex AB, BΓ incommensurabilia sunt re

PROPOSITION LXXIV.

Si une droite rationelle est retranchée d'une droite rationelle, cette droi n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière; la droite restan sera irrationelle, et sera appelée apotome.

Que la rationelle BΓ, commensurable en puissance seulement avec la droi entière, soit retranchée de la droite AB; je dis que la droite restante AΓ, appel apotome, est irrationelle.

Car puisque AB est incommensurable en longueur avec BΓ, et que AB est à comme le quarré de AB est au rectangle sous AB, BΓ (1.6), le quarré de AB se incommensurable avec le rectangle sous AB, BΓ; mais la somme des quarrés de et de BΓ est commensurable avec le quarré de AB (16. 10), et le double re tangle sous AB, BΓ est commensurable avec le rectangle sous AB, BΓ; la somn des quarrés des droites AB, BΓ est donc incommensurable avec le double re ιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ α ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ὸ τῆς ΑΓ². Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἀποτομή.

tangulo bis sub AB, BΓ; et reliquo igitur quadrato ex AΓ incommensurabilia sunt quadrata ex AB, BΓ; quoniam et quadrata ex AB, BΓ æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BΓ cum quadrato ex AΓ. Rationalia autem sunt quadrata ex AB, BΓ; irrationalis igitur est AΓ, vocetur autem apotome.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οέ.

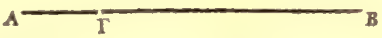
Εὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόν σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τὸν περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ Γ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ,

PROPOSITIO LXXV.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

A mediâ enim AB media auferatur BΓ, potentiâ solùm commensurabilis existens ipsi AB,



ετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τῶν Β, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, ελείσθω[1] δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

et cum eâ AB rationale faciens rectangulum sub AB, BΓ; dico reliquam AΓ irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome prima.

ngle sous AB, BΓ (14. 10); la somme des quarrés des droites AB, BΓ est donc ncommensurable avec le quarré restant de la droite AΓ (17. 10), parce que la omme des quarrés des droites AB, BΓ est égale au double rectangle sous AB, BΓ, onjointement avec le quarré de AΓ (7. 2). Mais la somme des quarrés des droites B, BΓ est rationelle; la droite AΓ est donc irrationelle (déf. 11. 10), et elle sera ppelée apotome.

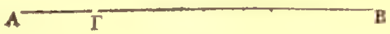
PROPOSITION LXXV.

Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seuement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface ationelle, la droite restante est irrationelle, et elle s'appèlera le premier apoome de la médiale.

De la médiale AB retranchons la médiale BΓ, commensurable en puissance eulement avec AB, et faisant avec AB le rectangle sous AB, BΓ rationel; je dis que a droite restante AΓ est irrationelle, et elle sera appelée le premier apotome le la médiale.

Επεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσὶ, μέσα ἐστὶ[2] καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Ρητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν[3] ΑΒ, ΒΓ· ἐπεὶ κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. Ρητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν[4] ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ[5] μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Quoniam enim ΑΒ, ΒΓ mediæ sunt, media sunt et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ. Rationale autem rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ; incommensurabilia igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadrata rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; et reliquo igitur quadrato ex ΑΓ



incommensurabile est rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ; quoniam et si tota magnitudo cum unâ ipsarum incommensurabilis sit, et quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt. Rationale autem bis rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ; irrationale igitur quadratum ex ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem mediæ apotome prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ος'.

Εὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχῃ[1]· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

PROPOSITIO LXXVI.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ medium continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

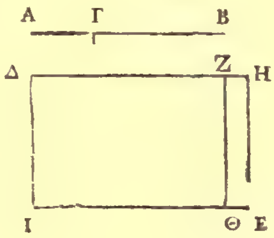
Car, puisque les droites ΑΒ, ΒΓ sont médiales, les quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ seront médiaux. Mais le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est rationel; la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est donc incommensurable avec le quarré restant de la droite ΑΓ (7. 2); parce que si une grandeur entière est incommensurable avec l'une de celles qui la composent, les grandeurs composantes sont incommensurables (17. 10). Mais le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est rationel; le quarré de ΑΓ est donc irrationel; la droite ΑΓ est donc irrationelle, et elle sera appelée le premier apotome de la médiale.

PROPOSITION LXXVI.

Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface médiale, la droite restante est irrationelle, et elle s'appèlera le second apotome de la médiale.

Απὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς[2] ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

A mediâ enim AB media auferatur BΓ, potentiâ solùm commensurabilis existens toti AB, et cum totâ AB medium continens rectangulum sub AB, BΓ; dico reliquam AΓ irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome secunda.



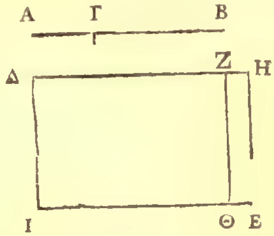
Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ[3] τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον

Exponatur enim rationalis ΔI, et quadratis quidem ex AB, BΓ æquale ad ipsam ΔI applicetur ΔE latitudinem faciens ΔH, rectangulo verò bis sub AB, BΓ æquale ad ipsam ΔI applicetur ΔΘ latitudinem faciens ΔZ; reliquum igitur ZE æquale est quadrato ex AΓ. Et quoniam media sunt quadrata ex AB, BΓ; medium igitur et ΔE. Et ad rationalem ΔI applicatur latitudinem faciens ΔH; rationalis igitur est ΔH, et incommensurabilis ipsi ΔI longitudine.

De la médiale AB retranchons la médiale BΓ, commensurable en puissance seulement avec la droite entière AB, et comprenant avec la droite entière AB le rectangle médial sous AB, BΓ; je dis que la droite restante AΓ est irrationelle, et elle sera appelée le second apotome de la médiale.

Soit exposée la rationelle ΔI; appliquons à ΔI un parallélogramme ΔE égal à la somme des quarrés des droites AB, BΓ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΔH; appliquons aussi à la droite ΔI un parallélogramme ΔΘ égal au double rectangle sous AB, BΓ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΔZ; le reste ZE sera égal au quarré de AΓ (7. 2). Et puisque les quarrés des droites AB, BΓ sont médiaux, le parallélogramme ΔE sera médial (24. cor. 10). Mais il est appliqué à la rationelle ΔI, et il a pour largeur la droite ΔH; la droite ΔH est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΔI (23. 10). De plus, puisque le ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΒΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ[5]. Ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ[6] τὸ ΔΕ τῷ

Rursus, quoniam medium est rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ; et rectangulum bis igitur sub ΑΒ, ΒΓ medium est. Atque est æquale ipsi ΔΘ; et ΔΘ igitur medium est, et ad rationalem ΔΙ applicatur latitudinem faciens ΔΖ; rationalis igitur est ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Et quoniam ΑΒ, ΒΓ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est ΑΒ et ipsi ΒΓ longitudine; incommensurabile igitur et ex ΑΒ quadratum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ. Sed quadrato quidem ex ΑΒ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ, rectangulo autem sub ΑΒ, ΒΓ commensurabile est rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ; incommensurabile igitur est rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ quadratis ex ΑΒ, ΒΓ. Æquale verò quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ ipsum ΔΕ, rectangulo autem bis sub ΑΒ, ΒΓ ipsum ΔΘ; incommensurabile igitur est ΔΕ ipsi



rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ sera médial (24. cor. 10). Mais il est égal à ΔΘ; le parallélogramme ΔΘ est donc médial, et il est appliqué à la rationelle ΔΙ, sa largeur étant la droite ΔΖ; la droite ΔΖ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΔΙ. Et puisque les droites ΑΒ, ΒΓ ne sont commensurables qu'en puissance, la droite ΑΒ sera incommensurable en longueur avec ΒΓ; le quarré de ΑΒ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (1.6, et 10. 10). Mais la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est commensurable avec le quarré de ΑΒ (16. 10), et le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est commensurable avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (6. 10); le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est donc incommensurable avec la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ. Mais ΔΕ est égal à la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ, et ΔΘ égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; le parallélogramme ΔΕ est donc incommensurable avec ΔΘ. Mais

ΔΘ. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ μήκει[7]. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστι. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΙ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον[8] ἄλογόν ἐστι· καὶ ἡ δυναμένη ἄρα[9] αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης[10] ἀποτομὴ δευτέρα.

ΔΘ. Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita ΗΔ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΗΔ ipsi ΔΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ergo ΗΔ, ΔΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΖΗ apotome est. Rationalis autem ΔΙ, et sub rationali et irrationali contentum rectangulum irrationale est; et recta potens igitur ipsum irrationalis est. Et potest ipsum ΖΕ ipsa ΑΓ; ergo ΑΓ irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα

PROPOSITIO LXXVII.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

A rectâ enim ΑΒ recta auferatur ΒΓ, potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum

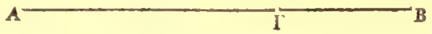
ΔΕ est à ΔΘ comme ΗΔ est à ΔΖ ; la droite ΗΔ est donc incommensurable en longueur avec ΔΖ. Mais ces droites sont rationelles ; les droites ΗΔ, ΔΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΖΗ est donc un apotome (74. 10). Mais la droite ΔΙ est rationelle, et le rectangle compris sous une rationelle et sous une irrationelle est irrationel (39. 10) ; la droite qui peut ce rectangle est donc irrationelle. Mais ΑΓ peut ΖΕ ; la droite ΑΓ est donc irrationelle, et elle sera appelée le second apotome de la médiale.

PROPOSITION LXXVII.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationelle, et elle sera appelée mineure.

De la droite ΑΒ retranchons la droite ΒΓ, qui étant incommensurable en puissance μετὰ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα μέσον[1]· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ[2] ἐλάσσων.

totâ AB compositum quidem ex quadratis ipsarum AB, BΓ simul rationale, rectangulum verò bis sub AB, BΓ simul medium; dico reliquam AΓ irrationalem esse, vocetur autem minor.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ[3]. Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ[4], καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum AB, BΓ quadratis rationale est, rectangulum verò bis sub AB, BΓ medium; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex AB, BΓ rectangulo bis sub AB, BΓ; et convertendo incommensurabilia sunt ex AB, BΓ quadrata quadrato ex AΓ. Rationalia autem quadrata ex AB, BΓ; irrationale igitur quadratum ex AΓ; irrationalis igitur AΓ, vocetur autem minor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οή.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν

PROPOSITIO LXXVIII.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium,

avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés des droites AB, BΓ rationelle, et le double rectangle sous AB, BΓ médial; je dis que la droite restante AΓ est irrationelle, et elle sera appelée mineure.

Car puisque la somme des quarrés des droites AB, BΓ est rationelle, et que le double rectangle sous AB, BΓ est médial, la somme des quarrés des droites AB, BΓ sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BΓ; donc, par conversion, la somme des quarrés des droites AB, BΓ est incommensurable avec le quarré de AΓ (17. 10). Mais la somme des quarrés des droites AB, BΓ est rationelle; le quarré de AΓ est donc irrationel; la droite AΓ est donc irrationelle, et elle sera appelée mineure.

PROPOSITION LXXVIII.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Απὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν[1]· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα[2].

rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

A rectâ enim AB recta auferatur BΓ, potentiâ incommensurabilis existens toti AB, faciens quidem compositum ex ipsarum AB, BΓ quadratis medium, rectangulum verò bis sub AB, BΓ rationale; dico reliquam AΓ irrationalem esse, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

Επεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ[3] τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ[4] λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum AB, BΓ quadratis medium est, rectangulum verò bis sub AB, BΓ rationale; incommensurabilia igitur sunt ex AB, BΓ quadrata rectangulo bis sub AB, BΓ; et reliquum igitur quadratum ex AΓ incommensurabile est rectangulo bis sub AB, BΓ. Atque est rectangulum bis sub AB, BΓ rationale; quadratum igitur ex AΓ irrationale est; irrationalis igitur est AΓ, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationel, la droite restante sera irrationelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

De la droite AB retranchons la droite BΓ, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière AB, fasse la somme des quarrés de AB et de BΓ médiale, et le double rectangle sous AB, BΓ rationel; je dis que la droite restante AΓ est irrationelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car, puisque la somme des quarrés des droites AB, BΓ est médiale, et que le double rectangle sous AB, BΓ est rationel, la somme des quarrés des droites AB, BΓ sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BΓ; le quarré restant de la droite AΓ est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB, BΓ (17. 10). Mais le double rectangle sous AB, BΓ est rationel; le quarré de AΓ est donc irrationel; la droite AΓ est donc irrationelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οθ'.

Εαν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν[1] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ[2] δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Απὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὰ προκείμενα[3]· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα[4].

Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ ῥητὴν[5] τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΔΘ

PROPOSITIO LXXIX.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurablis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

A rectâ enim AB recta auferatur BΓ, potentiâ incommensurabilis existens ipsi AB, faciens proposita; dico reliquam AΓ irrationalem esse, quæ vocatur cum medio medium totum faciens.

Exponatur enim rationalis ΔI, et quadratis quidem ex AB, BΓ æquale ad rationalem ΔI applicetur ΔE latitudinem faciens ΔH, rectangulo autem bis sub AB, BΓ æquale auferatur ΔΘ

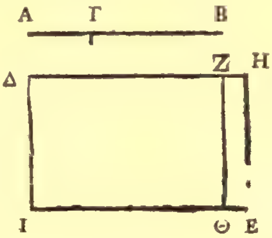
PROPOSITION LXXIX.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des quarrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

De la droite AB retranchons la droite BΓ, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière AB, fasse ce qui est proposé; je dis que la droite restante AΓ est irrationelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Car soit exposée la rationelle ΔI; appliquons à la rationelle ΔI un parallélogramme ΔE égal à la somme des quarrés des droites AB, BΓ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΔH; retranchons de ΔE un parallélogramme ΔΘ égal au double rectangle compris sous AB, BΓ, ce parallélogramme ayant pour largeur la πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ[6]· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΕ· μέσον ἄρα ἐστὶ[7] τὸ ΔΕ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ

latitudinem faciens ΔΖ; reliquum igitur ΖΕ æquale est quadrato ex ΑΓ; quare ipsa ΑΓ potest ipsum ΖΕ. Et quoniam compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium est, atque est æquale ipsi ΔΕ; medium igitur est ΔΕ, et ad rationalem ΔΙ applicatur, latitudinem faciens ΔΗ; ratio-



ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΘ· τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ[8] καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ[9]. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἐστὶ[10] ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ[11]· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. Καὶ εἰσιν

nalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Rursus, quoniam rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ medium est, atque est æquale ipsi ΔΘ; ergo ΔΘ medium est, et ad rationalem ΔΙ applicatur latitudinem faciens ΔΖ; rationalis igitur est ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, incommensurabile igitur est et ΔΕ ipsi ΔΘ. Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita est et ΔΗ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΔΗ

droite ΔΖ, le parallélogramme restant ΖΕ sera égal au quarré de ΑΓ (7. 2); la droite ΑΓ peut donc la surface ΖΕ. Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΕ, le parallélogramme ΔΕ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΔΙ, et il a ΔΗ pour largeur; la droite ΔΗ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ (23.10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, et qu'il est égal à ΔΘ, le parallélogramme ΔΘ sera médial; mais il est appliqué à la rationelle ΔΙ, et il a ΔΖ pour largeur; la droite ΔΖ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ. Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le parallélogramme ΔΕ sera incommensurable avec le parallélogramme ΔΘ. Mais ΔΕ est à ΔΘ comme ΔΗ est à ΔΖ (1.6); la droite ΔΗ est donc incommensurable ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον[12] ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

ipsi ΔΖ. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΗΔ, ΔΖ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΖΗ, rationalis autem ΖΘ. Sed sub rationali et apotome contentum rectangulum irrationale est, et recta potens ipsum irrationalis est, et potest ipsum ΖΕ ipsa ΑΓ; ergo ΑΓ irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον[1] προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ[2] αἱ

PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ una solùm congruit recta rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Sit apotome ΑΒ, congruens autem eidem ipsa ΒΓ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere rationalem, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti.

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ,

avec ΔΖ (10. 10). Mais ces deux droites sont rationelles; les droites ΗΔ, ΔΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΖΗ est donc un apotome (74. 10), et ΖΘ une rationelle. Puisque le rectangle compris sous une rationelle et un apotome est irrationel (14. 10), que la droite qui peut ce rectangle est irrationelle, et que ΑΓ peut la surface ΖΕ (39. 10), la droite ΑΓ sera irrationelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROPOSITION LXXX.

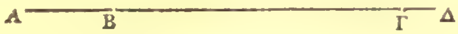
Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

Soit l'apotome ΑΒ, et que ΒΓ lui conviène; les droites ΑΓ, ΓΒ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (74. 10); je dis qu'une autre rationelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière ne convient pas avec ΑΒ.

Que la droite ΒΔ, si cela est possible, conviène avec ΑΒ; les droites ΑΔ, ΔΒ

ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφότερα ὑπερέχει· ἐναλλὰξ ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν

ΑΔ, ΔΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quoniam quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc superant et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; eodem enim quadrato ex ΑΒ utraque superant; permutando igitur quo su-



ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ[3] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Τὰ[4] δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὴ γὰρ ἀμφότερα[5]· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

perant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ. Quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali; rationalis enim utraque; et rectangulum bis igitur sub ΑΔ, ΔΒ superat rationali rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, quod est impossibile, media enim utraque, medium autem medium non superat rationali; ergo ipsi ΑΒ altera non congruit rationalis, potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Media igitur, etc.

seront des rationelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ de la même grandeur dont la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, car ces deux excès sont égaux chacun au quarré de ΑΒ (7. 2), par permutation, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces deux sommes sont rationelles ; le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse donc le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle ; ce qui est impossible, parce que ces deux grandeurs sont médiales, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationelle (27. 10) ; une autre rationelle, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, ne peut donc pas convenir avec ΑΒ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα΄.

Τῇ μέσῃ ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον[1] προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εστω γὰρ μέση ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα[2] μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

PROPOSITIO LXXXI.

Mediæ apotomæ primæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

Sit enim media apotome prima AB, et ipsi AB congruat BΓ; ipsæ AΓ, ΓB igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub AΓ, ΓB; dico ipsi AB alteram non congruere mediam, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti, et cum totâ rationale contineat.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΔΒ· αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ

Si enim possibile, congruat et ΔB; ergo AΔ, ΔB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub AΔ, ΔB. Et quoniam quo superant quadrata ex AΔ, ΔB rectangulum bis sub AΔ, ΔB, hoc

PROPOSITION LXXXI.

Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationelle.

Soit AB un premier apotome médial, et que BΓ conviène avec AB; les droites AΓ, ΓB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous AΓ, ΓB (75. 10); je dis qu'une autre médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec AB.

Que la droite ΔB conviène avec AB, si cela est possible; les droites AΔ, ΔB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface rationelle sous AΔ, ΔB (75. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites AΔ, ΔB surpasse le double rectangle sous AΔ, AB de la même grandeur dont ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ[3] ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἐναλλὰξ ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσῃ, καὶ τὰ ἑξῆς.

superant et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; superant enim eodem ex ΑΒ quadrato; permutando igitur quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ. Rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim utraque; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est impossibile, media enim utraque, medium autem medium non superat rationali.

Mediæ igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πϛ΄.

Τῇ μέσῃ[1] ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα[2] τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ apotomæ secundæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ medium continens.

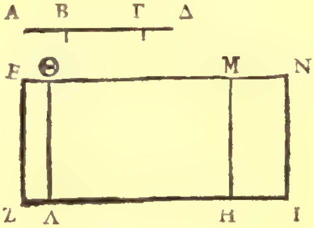
la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, car ces excès sont chacun le quarré de ΑΒ (7. 2); par permutation, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces surfaces sont rationelles l'une et l'autre; la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse donc la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle; ce qui est impossible, parce que ces surfaces sont médiales l'une et l'autre, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationelle (27. 10). Il n'y a donc, etc.

PROPOSITION LXXXII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome médial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

Εστω μέση[3] ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Sit media apotome secunda AB, et ipsi AB congruat BΓ; ipsæ igitur AΓ, ΓB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes rectangulum sub AΓ, ΓB; dico ipsi AB alteram non congruere rectam mediam quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti, et cum totâ medium contineat.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΒΔ· καὶ[4] αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν[5] ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ

Si enim possibile, congruat BΔ; et ipsæ igitur AΔ, ΔB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes rectangulum sub AΔ, ΔB. Et exponatur rationalis EZ, et quadratis quidem ex AΓ, ΓB æquale ad ipsam EZ applicetur EH, latitudinem faciens EM; rectangulo autem bis sub AΓ, ΓB æquale auferatur ΘH, latitudinem faciens ΘM; reliquum igitur EΛ æquale est quadrato ex AB; quare AB potest ipsum EΛ. Rursus utique quadratis ex AΔ, ΔB

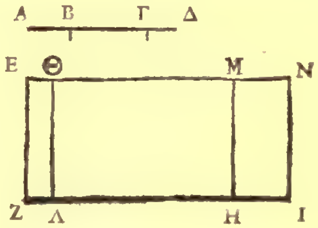
Soit un second apotome médial AB, et que la droite BΓ conviène avec AB; les droites AΓ, ΓB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous AΓ, ΓB (76. 10); je dis qu'une autre droite médiale commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec AB.

Que BΔ conviène avec AB, si cela est possible; les droites AΔ, ΔB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous AΔ, ΔB (76. 10). Soit exposée la rationelle EZ; appliquons à EZ un parallélogramme EH égal à la somme des quarrés de AΓ et de ΓB, qui ait pour largeur la droite EM, et retranchons de EH un parallélogramme ΘH égal au double rectangle sous AΓ, ΓB, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΘM; le reste EΛ sera égal au quarré de AB (7. 2); la droite AB pourra donc la surface EΛ. De plus, appliquons à EZ un parallélogramme EI égal à la somme des quarrés des τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΓΒ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἔστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν[6], ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἐστὶ[7] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ[8] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμ-

æquale ad ipsam EZ applicetur EI, latitudinem faciens EN; est autem et EΛ æquale ex AB quadrato; reliquum igitur ΘI æquale est rectangulo bis sub AΔ, ΔB. Et quoniam mediæ sunt AΓ, ΓB, media igitur sunt et quadrata ex AΓ, ΓB. Et sunt æqualia ipsi EH; medium igitur et EH, et ad rationalem EZ applicatur, latitudinem faciens EM; rationalis igitur est EM, et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum sub AΓ, ΓB, et rectangulum bis sub AΓ, ΓB medium est. Atque est æquale ipsi ΘH; et ΘH igitur medium est, et ad rationalem EZ applicatur, latitudinem faciens ΘM; rationalis igitur est et ΘM, et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam AΓ, ΓB potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est AΓ ipsi ΓB longitudine. Ut autem AΓ ad ΓB ita est ex AΓ quadratum ad rectangulum sub AΓ, ΓB; incommensurabile igitur est ex AΓ quadratum rectangulo sub AΓ, ΓB. Sed quadrato quidem

droites AΔ, ΔB, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite EN; mais EΛ est égal au quarré de AB; le reste ΘI est donc égal au double rectangle sous AΔ, ΔB (7. 2). Et puisque les droites AΓ, ΓB sont médiales, les quarrés des droites AΓ, ΓB seront médiaux. Mais la somme de ces quarrés est égale au parallélogramme EH; le parallélogramme EH est donc médial (cor. 24. 10), et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite EM, est appliqué à EZ; la droite EM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec EZ (23. 10). De plus, puisque le rectangle sous AΓ, ΓB est médial, le double rectangle sous AΓ, ΓB sera médial (cor. 24. 10). Mais ce rectangle est égal au parallélogramme ΘH; le parallélogramme ΘH est donc médial; et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite ΘM, est appliqué à la rationelle EZ; la droite ΘM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec EZ (23. 10). Et puisque les droites AΓ, ΓB sont commensurables en puissance seulement, la droite AΓ sera incommensurable en longueur avec ΓB. Mais AΓ est à ΓB comme le quarré de AΓ est au rectangle sous AΓ, ΓB; le quarré de AΓ est donc incommensurable avec le rectangle sous AΓ, ΓB. Mais la somme des quarrés des droites AΓ, ΓB est commen-μετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ. Ως δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος

ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Atque est quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ΕΗ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΗ; incommensurabile igitur est ΕΗ ipsi ΘΗ. Ut autem ΕΗ ad ΘΗ ita est



ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΘΜ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΜ, ΘΜ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσης, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΕΜ ad ΘΜ; incommensurabilis igitur est ΕΜ ipsi ΘΜ longitudine. Et sunt utræque rationales; ipsæ ΕΜ, ΘΜ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demonstrabimus et ΘΝ ipsi congruere; apotomæ igitur alia et alia congruit recta, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quod est impossibile.

Mediæ igitur, etc.

surable avec le quarré de ΑΓ (16. 10); et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais ΕΗ est égal à la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et ΘΗ est égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ. Mais ΕΗ est à ΘΗ comme ΕΜ est à ΘΜ (1. 6); la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΘΜ. Mais ces deux droites sont rationelles; les droites ΕΜ, ΘΜ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome, et ΘΜ convient avec cet apotome (74. 10). Nous démontrerions semblablement que ΘΝ lui convient aussi; deux droites différentes, commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui est impossible (80. 10). Il n'y a donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

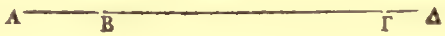
Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

PROPOSITIO LXXXIII.

Minori una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum totâ compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium.

Sit minor AB, et ipsi AB congruens sit BΓ; ipsæ igitur AΓ, ΓB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium; dico ipsi AB alteram rectam non congruere, quæ eadem faciat.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ[1] αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὰ προειρημένα[2]. Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ

Si enim possibile, congruat BΔ; et ipsæ AΔ, ΔB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes ea quæ dicta sunt. Et quoniam quo superant quadrata ex AΔ, ΔB quadrata ex AΓ, ΓB, hoc superat et rectangulum bis sub AΔ, ΔB

PROPOSITION LXXXIII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites rationelle, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Soit la mineure AB, et que BΓ conviène avec AB; les droites AΓ, ΓB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationelle, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant médial (77. 10); je dis qu'aucune autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec AB.

Que BΔ conviène avec AB, si cela est possible; les droites AΔ, ΔB seront incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui vient d'être dit (77. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites AΔ, ΔB surpasse la somme des quarrés des droites AΓ, ΓB de la même grandeur dont le double rectangle sous τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων[3] ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γάρ ἐστιν[4] ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γάρ ἐστιν[5] ἀμφότερα.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι, καὶ τὰ ἑξῆς[6].

rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, rationalia enim sunt utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, quod est impossibile, media enim sunt utraque.

Minori igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Εστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ[1]· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

PROPOSITIO LXXXIV.

Ei quæ cum rationali medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale.

Sit recta ΑΒ cum rationali medium totum faciens, congruens autem ΒΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΓ, ΓΒ rationale; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere eadem facientem.

ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (7. 2), et que la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpassera d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce qui est impossible (27. 10); car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre. Donc, etc.

PROPOSITION LXXXIV.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Que ΑΒ fasse avec une surface rationelle un tout médial, et que ΒΓ conviène avec ΑΒ, les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ étant médiale, et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant rationel (78. 10); je dis qu'une autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec ΑΒ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν[2]. Ἐπεὶ οὖν ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀκολούθως τοῖς[3] πρὸ αὐτοῦ· τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν[4] ἀμφότερα· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει[5]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ, ΔΒ igitur rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΔ, ΔΒ rationale. Quoniam igitur quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, congruenter præcedentibus; rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim sunt utraque; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est impossibile; media enim sunt utraque; non igitur ipsi ΑΒ altera congruet recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens ea quæ dicta sunt; una igitur solùm congruet. Quod oportebat ostendere.

Que ΒΔ conviène avec ΑΒ, si cela est possible; les droites ΑΔ, ΔΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ médiale, et le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ rationel (78. 10). Puisque la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, comme dans ce qui précède (7. 2), et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle; ce qui est impossible; car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre (27. 10). Il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière ce qu'on a dit; il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πέ.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον[1] προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

Εστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὰ προειρημένα[2]· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα[3] οὐ προσαρμόσει, ποιοῦσα τὰ προειρημένα[4].

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα[5] ἅμα μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀσύμμετρα[6] τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ,

PROPOSITIO LXXXV.

Ei quæ cum medio medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Sit recta AB cum medio medium totum faciens, ipsi autem congruens BΓ; ipsæ igitur AΓ, ΓB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes ea quæ dicta sunt; dico ipsi AB alteram rectam non congruere, facientem ea quæ dicta sunt.

Si enim possibile, congruat BΔ, ita ut et AΔ, ΔB potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem ex AΔ, ΔB quadrata simul media, et rectangulum bis sub AΔ, ΔB medium, et adhuc quadrata ex AΔ, ΔB incommensurabilia rectangulo bis sub AΔ, ΔB. Et exponatur ra-

PROPOSITION LXXXV.

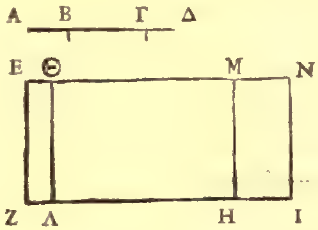
Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et commensurable avec la somme de leurs quarrés.

Que la droite AB fasse avec une surface médiale un tout médial, et que BΓ convième avec AB ; les droites AΓ, ΓB seront incommensurables en puissance, et feront ce qui vient d'être dit (79. 10); je dis qu'une autre droite, faisant ce qui vient d'être dit, ne convient point avec AB.

Que BΔ, s'il est possible, convième avec AB, les droites AΔ, ΔB étant incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés médiale, le double rectangle sous AΔ, ΔB médial, et la somme des quarrés des droites AΔ, ΔB incommensurable avec le double rectangle sous AΔ, ΔB. Soit exposée la rationelle EZ ;

καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω[7] τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν, τοῖς μὲν[8] ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ,

tionalis ΕΖ, et quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ad ipsam ΕΖ applicetur ΕΗ, latitudinem faciens ΕΜ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΘΗ, latitudinem faciens ΘΜ; reliquum igitur quadratum ex ΑΒ æquale est ipsi ΕΛ; ipsa igitur ΑΒ potest ipsum ΕΛ. Rursus, quadratis quidem ex ΑΔ, ΔΒ æquale ad ipsam ΕΖ applicetur ΕΙ, latitudinem

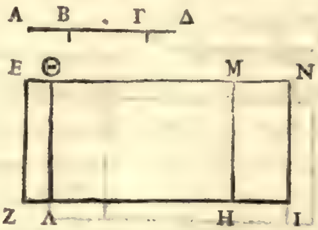


πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΙ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ

faciens ΕΝ. Est autem et quadratum ex ΑΒ æquale ipsi ΕΛ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ æquale est ipsi ΘΙ. Et quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et est æquale ipsi ΕΗ; medium igitur est et ΕΗ; et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΕΜ; rationalis igitur est ΕΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis

appliquons à ΕΖ un parallélogramme ΕΗ égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΜ; et retranchons de ΕΗ un parallélogramme ΘΗ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce parallélogramme ayant ΘΜ pour largeur; le quarré restant de ΑΒ sera égal au parallélogramme ΕΛ (7. 2); la droite ΑΒ pourra donc le parallélogramme ΕΛ. De plus, appliquons à ΕΖ un parallélogramme ΕΙ égal à la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΝ. Mais le quarré de ΑΒ est égal au parallélogramme ΕΛ; le double parallélogramme restant compris sous ΑΔ, ΔΒ est donc égal à ΘΙ (7. 2). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est médiale, et que cette somme est égale à ΕΗ, le parallélogramme ΕΗ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à ΕΖ, et il a pour largeur la droite ΕΜ; la droite ΕΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est médial, et qu'il δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ[9] ΘΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα[10] ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ

sub ΑΓ, ΓΒ, et est æquale ipsi ΘΗ; medium igitur et ΘΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΘΜ; rationalis igitur est ΘΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, incommensurabile igitur est et ΕΗ ipsi ΘΗ; in-



τῇ ΜΘ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστι, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος[11] οὖσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα· τῇ ἄρα ΑΒ μία

commensurabilis igitur est et ΕΜ ipsi ΜΘ longitudine. Et sunt utræque rationales; ipsæ igitur ΕΜ, ΜΘ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demonstrabimus ΕΘ rursus apotomen esse, et ΘΝ congruentem ipsi; apotomæ igitur alia et alia congruit rationalis, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quod demonstratum est impossibile; non igitur ipsi ΑΒ altera congruet

est égal à ΘΗ, le parallélogramme ΘΗ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a pour largeur la droite ΘΜ; la droite ΘΜ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Mais la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ; la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΘ (1.6). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΕΜ, ΜΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome (74. 10), et ΘΜ convient avec ΕΘ. Nous démontrerions semblablement que ΕΘ est encore un apotome, et que ΘΝ convient avec ΕΘ; des rationelles différentes commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui a été démontré impossible (80. 10); une autre droite ne convient donc pas avec ΑΒ;

μόνον προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τά τε ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα[12] ἅμα μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι[13] τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

recta; ipsi igitur AB una solùm congruet recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et ex ipsis quadrata simul media, et rectangulum bis sub ipsis medium, et adhuc ex ipsis quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis. Quod oportebat ostendere.

ΟΡΟΙ ΤΡΙΤΟΙ.

α΄. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ[1] τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β. Εὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ΄. Εὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκει-

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Expositâ rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit ex-

il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec AB, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière AB, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial, et la somme des quarrés incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites. Ce qu'il fallait démontrer.

DÉFINITIONS TROISIÈMES.

1. Une rationelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appèlera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la

μένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει[2], ἐὰν μὲν ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

έ. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς'.

Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΖΔ[1] μὴ ἔστω

positæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, si quidem tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome quarta.

5. Si verò sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

PROPOSITIO LXXXVI.

Invenire primam apotomen.

Exponatur rationalis A, et ipsi A longitudine commensurabilis sit BH; rationalis igitur est et BH. Et exponantur duo quadrati numeri ΔE, EZ, quorum excessus ZΔ non sit quadratus;

rationelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable avec la droite entière, le reste s'appèlera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera quatrième apotome.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera cinquième apotome.

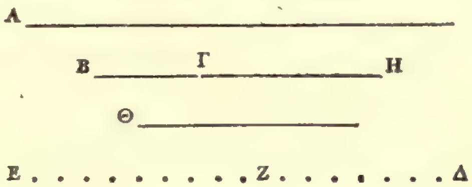
6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera sixième apotome.

PROPOSITION LXXXVI.

Trouver un premier apotome.

Soit exposée la rationelle A, et que BH soit commensurable en longueur avec A, la droite BH sera rationelle. Soient exposés deux nombres quarrés ΔE, EZ, dont l'excès ZΔ ne soit pas un nombre quarré (30. lem. 1. 10), le nombre ΔE n'aura pas avec ΔZ τετράγωνος· οὐδ᾽ ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον[2]· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ·

neque igitur ΕΔ ad ΔΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad quadratum ex ΗΓ; commensurabile igitur est ex ΒΗ quadratum quadrato ex ΗΓ. Rationale autem quadratum ex ΒΗ; rationale igitur et quadratum



ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι. Λέγω ὅτι καὶ πρώτη. Ω γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Καὶ ἐπεί ἐστιν

ex ΗΓ; rationalis igitur est et ΗΓ. Et quoniam ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et primam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ.

la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Faisons en sorte que ΕΔ soit à ΔΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ; le quarré de ΒΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΓ (6. 10). Mais le quarré de ΒΗ est rationel; le quarré de ΗΓ est donc aussi rationel; la droite ΗΓ est donc rationelle. Et puisque ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΒΗ n'aura pas avec le quarré de ΗΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré (9. 10); la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi que cette droite est un premier apotome. Car que l'excès du quarré de ΒΗ sur le quarré de ΗΓ soit le ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ[3]· καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει[4]· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι[5].

Et quoniam est ut ΔΕ ad ΖΔ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ; et convertendo igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΗΒ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, uterque enim quadratus est; et quadratum ex ΗΒ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΗΒ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est tota ΒΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est prima.

Inventa est igitur prima apotome ΒΓ. Quod oportebat facere.

quarré de Θ. Puisque ΔΕ est à ΖΔ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ, par conversion, ΔΕ sera à ΕΖ comme le quarré de ΗΒ est au quarré de Θ (19. cor. 5). Mais le nombre ΔΕ a avec le nombre ΕΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, car ces nombres sont des quarrés l'un et l'autre; le quarré de ΗΒ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΗΒ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la droite entière ΒΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10).

On a donc trouvé un premier apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ.

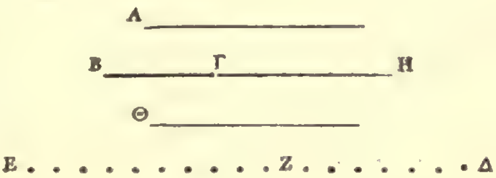
Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ[1] ἡ ΗΓ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ[2]· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον[3] τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνῳ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ[4] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ· Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ[5] τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα[6]

PROPOSITIO LXXXVII.

Invenire secundam apotomen.

Exponatur rationalis A, et ipsi A commensurabilis longitudine ipsa HΓ; rationalis igitur est et HΓ. Et exponantur duo quadrati numeri ΔE, EZ, quorum excessus ΔZ non sit quadratus. Et fiat ut ZΔ ad ΔE ita ex ΓH quadratum ad ipsum ex HB; commensurabile igitur est ex ΓH quadratum quadrato ex HB. Rationale autem quadratum ex ΓH; rationale igitur est et ex HB; rationalis igitur est HB. Et quoniam ex ΓH quadratum ad ipsum ex HB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, incommensurabilis est ΓH ipsi HB longitudine. Et sunt utræque rationales; ipsæ ΓH,



PROPOSITION LXXXVII.

Trouver un second apotome.

Soit exposée la rationelle A, et que la droite HΓ soit commensurable en longueur avec A; la droite HΓ sera rationelle (30. lem. 1. 10). Soient exposés deux nombres quarrés ΔE, EZ, dont l'excès ΔZ ne soit pas un quarré. Faisons en sorte que ZΔ soit à ΔE comme le quarré de ΓH est au quarré de HB; le quarré de ΓH sera commensurable avec le quarré de HB (6. 10). Mais le quarré de ΓH est rationel; le quarré de HB est donc rationel; la droite HB est donc rationelle. Et puisque le quarré de ΓH n'a pas avec le quarré de HB la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, la droite ΓH sera incommensurable en longueur avec HB (9. 10). Mais ces droites sont ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. Καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει[7]· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΗΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et secundam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ ita ΕΔ numerus ad numerum ΔΖ; convertendo igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ ita ΔΕ ad ΕΖ. Atque est uterque ipsorum ΔΕ, ΕΖ quadratus; quadratum igitur ex ΒΗ ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est congruens ΓΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est secunda.

Inventa est igitur secunda apotome ΒΓ. Quod oportebat facere.

rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΗ, ΗΒ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi que cette droite est un second apotome. Car que l'excès du quarré de ΒΗ sur le quarré de ΗΓ soit le quarré de Θ. Puisque le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ comme le nombre ΕΔ est au nombre ΔΖ, par conversion, le quarré de ΒΗ sera au quarré de Θ comme ΔΕ est à ΕΖ. Mais ΔΕ et ΕΖ sont des quarrés l'un et l'autre; le quarré de ΒΗ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la congruente ΓΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un second apotome (déf. trois. 2. 10).

On a donc trouvé un second apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πή.

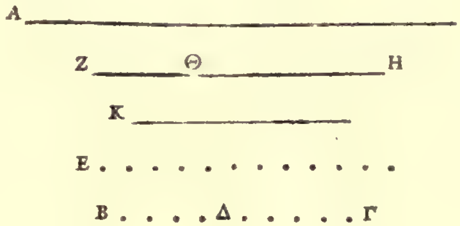
Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ

PROPOSITIO LXXXVIII.

Invenire tertiam apotomen.

Exponatur rationalis A, et exponantur tres numeri E, BΓ, ΓΔ, rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ipse autem ΓB ad BΔ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et fiat ut quidem E ad BΓ ita ex



ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετράγωνον[1]· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετραγώνῳ[2]. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον[3]· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐχ ἔχει

A quadratum ad quadratum ex ZH, ut verò BΓ ad ΓΔ ita ex ZH quadratum ad quadratum ex HΘ; commensurabile igitur est ex A quadratum quadrato ex ZH. Rationale autem ex A quadratum; rationale igitur et quadratum ex ZH; rationalis igitur est ZH. Et quoniam E ad BΓ rationem non habet quam quadratus

PROPOSITION LXXXVIII.

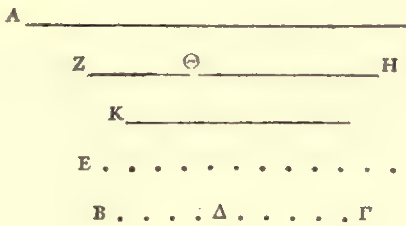
Trouver un troisième apotome.

Soient exposés la rationelle A, et les trois nombres E, BΓ, ΓΔ, qui n'ayent pas entre eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; que ΓB ait avec BΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; faisons en sorte que E soit à BΓ comme le quarré de A est au quarré de ZH, et que BΓ soit à ΓΔ comme le quarré de ZH est au quarré de HΘ; le quarré de A sera commensurable avec le quarré de ZH (6. 10). Mais le quarré de A est rationel; le quarré de ZH est donc rationel; la droite ZH est donc rationelle. Et puisque E n'a pas ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον[4] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον[5] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ'[6] ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν[7] ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν

numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Α ipsi ΖΗ longitudine. Rursus, quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; commensurabile igitur est ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Rationale autem quadratum ex ΖΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΘ; rationalis igitur est ΗΘ. Et quoniam ΒΓ ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΖΘ. Dico et tertiam. Quoniam enim est ut quidem Ε ad ΒΓ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Ε ad ΓΔ ita

avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de Α n'aura pas avec le quarré de ΖΗ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite Α est donc incommensurable en longueur avec ΖΗ (9. 10). De plus, puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ, le quarré de ΖΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΘ. Mais le quarré de ΖΗ est rationel; le quarré de ΗΘ est donc rationel; la droite ΗΘ est donc rationelle. Et puisque ΒΓ n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΖΗ n'aura pas avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΖΗ, ΗΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΖΘ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi qu'elle est un troisième apotome. Car puisque Ε est à ΒΓ comme le quarré de Α est au quarré de ΖΗ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; par égalité, Ε sera à ΓΔ ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει[8]. Ω οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ

ex A quadratum ad ipsum ex ΘH. Ipse autem E ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex A quadratum ad ipsum ex HΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur A ipsi HΘ longitudine; neutra igitur ipsarum ZH, HΘ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine. Quo igitur majus est quadratum ex ZH quadrato



τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον[9] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·

ex HΘ, sit quadratum ex K. Quoniam igitur est ut BΓ ad ΓΔ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ; convertendo igitur est ut ΓB ad BΔ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex K. Ipse autem ΓB ad BΔ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex ZH igitur ad quadratum ex K rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur

comme le quarré de A est au quarré de ΘH (22. 5); mais E n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de A n'a donc pas avec le quarré de HΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite A est donc incommensurable en longueur avec HΘ (9. 10); aucune des droites ZH, HΘ n'est donc commensurable en longueur avec la rationelle exposée A. Que le quarré de K soit la grandeur dont le quarré de ZH surpasse le quarré de HΘ. Puisque BΓ est à ΓΔ comme le quarré de ZH est au quarré de HΘ; par conversion, ΓB sera à BΔ comme le quarré de ZH est au quarré de K (19. 5). Mais ΓB a avec BΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ZH a donc avec le quarré de K la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ΄.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ· ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τὸν ΔΖ, ΖΕ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ

est ZH ipsi K longitudine. Et ZH quam HΘ plus potest quadrato ex K; ergo ZH quam HΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ZH, HΘ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine; ergo ZΘ apotome est tertia.

Inventa est igitur tertia apotome ZΘ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO LXXXIX.

Invenire quartam apotomen.

Exponatur rationalis A, et ipsi A longitudine commensurabilis BH; rationalis igitur est et BH. Et exponantur duo numeri ΔZ, ZE; ita ut totus ΔE ad utrumque ipsorum ΔZ, ZE rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΔE ad EZ ita ex BH quadratum ad ipsum ex HΓ; commensurabile igitur

ZH est donc commensurable en longueur avec K (9. 10). Mais la puissance de ZH surpasse la puissance de HΘ du quarré de K; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de HΘ du quarré d'une droite commensurable avec ZH; mais aucune des droites ZH, HΘ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée A; la droite ZΘ est donc un troisième apotome (déf. trois. 3. 10).

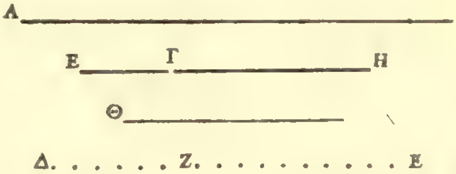
On a donc trouvé un troisième apotome ZΘ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION LXXXIX.

Trouver un quatrième apotome.

Soit exposée la rationelle A, et que BH soit commensurable en longueur avec A; la droite BH sera rationelle. Soient exposés les deux nombres ΔZ, ZE, de manière que le nombre entier ΔE n'ait pas avec chacun des nombres ΔZ, ZE la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; et faisons en sorte que ΔE soit à EZ comme le quarré de BH est au quarré de HΓ; le quarré de BH sera commensurable τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος

est quadratum ex ΗΓ. Rationale autem quadratum ex ΒΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΓ; rationalis igitur est ΗΓ. Et quoniam ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum



ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη[1]. Ὧ οὖν μεῖζόν ἐστι[2] τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ[3] ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν[4] ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

numerum; incómmensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΒΓ. Dico et quartam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ, et convertendo igitur est ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-

avec le quarré de ΗΓ (6. 10). Mais le quarré de ΒΗ est rationel, le quarré de ΗΓ est donc rationel; la droite ΗΓ est donc rationelle. Et puisque ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΒΗ n'aura pas non plus avec le quarré de ΗΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un quatrième apotome. Que le quarré de Θ soit ce dont le quarré de ΒΗ surpasse le quarré de ΗΓ. Puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ, par conversion, ΕΔ sera à ΔΖ comme le quarré ΒΗ est au quarré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΒΗ n'a donc pas non plus avec le quarré de μόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καί ἐστιν ἡ[5] ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΒΓ[6] ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ΒΓ[7] τετάρτη ἀποτομή. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

tum numerum; neque igitur ex BH quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est BH ipsi Θ longitudine; et BH quam HΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo BH quam HΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Atque est tota BH commensurabilis expositæ rationali A longitudine; ergo BΓ apotome est quarta.

Inventa est igitur BΓ quarta apotome. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟ'.

Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει[1] σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν[2] ἡ ΓΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς

PROPOSITIO XC.

Invenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis A, et ipsi A longitudine commensurabilis sit ΓH; rationalis igitur est ΓH. Et exponantur duo numeri ΔZ, ZE, ita ut ΔE ad utrumque ipsorum ΔZ, ZE rationem rursus non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut ZE ad EΔ

Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite BH est donc incommensurable en longueur avec Θ (9. 10); mais la puissance de BH surpasse la puissance de HΓ du quarré de Θ; la puissance de BH surpasse donc la puissance de HΓ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec BH. Mais la droite entière BH est commensurable en longueur avec la rationelle exposée A; la droite BΓ est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10).

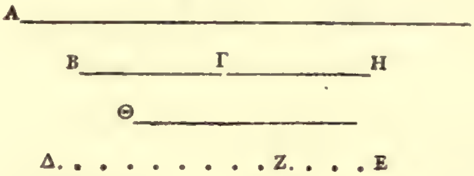
On a donc trouvé un quatrième apotome BΓ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XC.

Trouver un cinquième apotome.

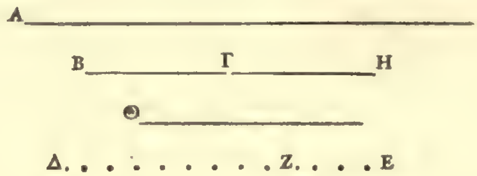
Soit exposée la rationelle A, et que ΓH soit commensurable en longueur avec A; la droite ΓH sera rationelle. Soient exposés aussi deux nombres ΔZ, ZE, de manière que ΔE n'ait ni avec l'un ni avec l'autre des nombres ΔZ, ZE la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; et faisons en sorte que ZE soit à τὸν[3] ΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ[4]· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα[5] τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. Ω γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ

ita ex ΓΗ quadratum ad ipsum ex ΗΒ; commensurabile igitur est ex ΓΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Rationale autem quadratum ex ΓΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΒ; rationalis igitur est et ΒΗ. Et quoniam est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ, ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et quintam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex



ΕΔ comme le quarré de ΓΗ est au quarré de ΗΒ; le quarré de ΓΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΒ (6. 10). Mais le quarré de ΓΗ est rationel; le quarré de ΗΒ est donc rationel; la droite ΒΗ est donc rationelle. Et puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ, et que ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΒΗ n'aura pas non plus avec le quarré de ΗΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ (9. 10). Mais elles sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΗ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un cinquième apotome. Que le quarré de Θ soit ce dont le quarré de ΒΗ surpasse le quarré de ΗΓ. Puisque le ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος

ΗΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, convertendo igitur est ut ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus



ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον[6] τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Atque est congruens ΓΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est quinta.

Inventa est igitur quinta apotome ΒΓ. Quod oportebat facere.

quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ comme ΔΕ est à ΕΖ; par conversion, ΕΔ sera à ΔΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΒΗ n'a donc pas non plus avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la congruente ΓΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10).

On a donc trouvé un cinquième apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϞΑ΄.

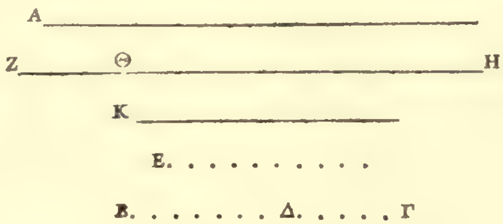
Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν[1]· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ[2], ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ.

PROPOSITIO XCI.

Invenire sextam apotomen.

Exponatur rationalis Α, et tres numeri Ε, ΒΓ, ΓΔ rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum; adhuc autem et ΓΒ ad ΒΔ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut quidem Ε ad ΒΓ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ.



Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ῥητὸν δὲ τῷ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ

Quoniam igitur est ut Ε ad ΒΓ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ; commensurabile igitur ex Α quadratum quadrato ex ΖΗ. Rationale autem quadratum ex Α; rationale igitur et

PROPOSITION XCI.

Trouver un sixième apotome.

Soient exposés la rationelle Α, et trois nombres Ε, ΒΓ, ΓΔ, qui n'ayent pas entre eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; de plus, que ΓΒ n'ait pas avec ΒΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; faisons en sorte que Ε soit à ΒΓ comme le quarré de Α est au quarré de ΖΗ, et que ΒΓ soit à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ.

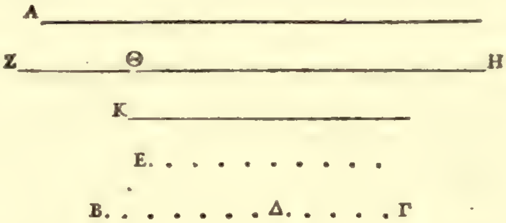
Puisque Ε est à ΒΓ comme le quarré de Α est au quarré de ΖΗ, le quarré de Α sera commensurable avec le quarré de ΖΗ. Mais le quarré de Α est rationel; le ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ

quadratum ex ZH; rationalis igitur est et ZH. Et quoniam E ad BΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex A quadratum ad ipsum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est A ipsi ZH longitudine. Rursus, quoniam est ut BΓ ad ΓΔ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ; commensurabile igitur ex ZH quadratum quadrato ex HΘ. Rationale autem quadratnm ex ZH; rationale igitur et quadratum ex HΘ; rationalis igitur et HΘ. Et quoniam BΓ ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi HΘ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ZH, HΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ZΘ apotome est. Dico et sextam. Quoniam enim est ut quidem E ad BΓ ita ex A quadratum ad ipsum ex

quarré de ZH est donc rationel; la droite ZH est donc rationelle. Et puisque E n'a pas avec BΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de A n'aura pas non plus avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite A est donc incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). De plus, puisque BΓ est à ΓΔ comme le quarré de ZH est au quarré de HΘ; le quarré de ZH sera commensurable avec le quarré de HΘ. Mais le quarré de ZH est rationel; le quarré de HΘ est donc rationel (6. 10); la droite HΘ est donc rationelle. Et puisque BΓ n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ZH n'aura pas non plus avec le quarré de HΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec HΘ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ZH, HΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ZΘ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un sixième apotome. Car puisque E est à BΓ comme le quarré de A est au

ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ

ΖΗ, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Ε ad ΓΔ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Ε ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex Α quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur

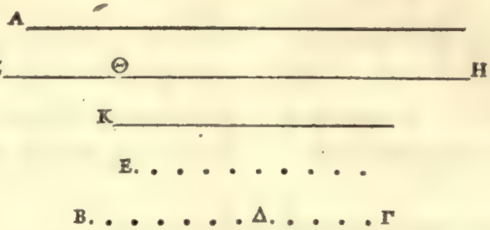


Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα[3] τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ Α ῥητῇ μήκει. Ὧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ

est Α ipsi ΗΘ longitudine; neutra igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est rationali Α longitudine. Quo enim majus est quadratum ex ΖΗ quadrato ex ΗΘ, sit quadratum ex Κ. Quoniam igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ, convertendo igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΓΒ ad ΒΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΖΗ qua-

quarré de ΖΗ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ, par égalité, Ε sera à ΓΔ comme le quarré de Α est au quarré de ΗΘ. Mais Ε n'a n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de Α n'aura donc pas avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite Α est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est donc commensurable en longueur avec Α. Que le quarré de Κ soit ce dont le quarré de ΖΗ surpasse le quarré de ΗΘ. Puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; par conversion, ΓΒ sera à ΒΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de Κ. Mais ΓΒ n'a pas avec ΒΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ

dratum ad ipsum ex K rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi K longi-



μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

tudine. Et ZH quam HΘ plus potest quadrato ex K; ergo ZH quam HΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ZH, HΘ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine; ergo ZΘ apotome est sexta.

Inventa est igitur sexta apotome ZΘ. Quod oportebat facere.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρησιν τῶν εἰρημένων ἓξ ἀποτομῶν. Καὶ δὴ ἔστω εὑρεῖν τὴν πρώτην, ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνο-

SCHOLIUM.

Licet autem et expeditius demonstrare inventionem dictarum sex apotomarum. Et igitur oporteat invenire primam apotomen, exponatur

ZH n'a donc pas non plus avec le quarré de K la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec K (9. 10). Mais la puissance de la droite ZH surpasse la puissance de la droite HΘ du quarré de K; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de HΘ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ZH. Mais aucune des droites ZH, HΘ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée A; la droite ZH est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10).

On a donc trouvé un sixième apotome ZΘ. Ce qu'il fallait faire.

SCHOLIE.

On peut démontrer plus brièvement la recherche des six apotomes dont nous venons de parler. Car qu'il faille trouver un premier apotome; soit exposé μάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῆς

ex binis nominibus prima ΑΓ, cujus majus nomen ipsa ΑΒ, et ipsi ΒΓ æqualis ponatur ΒΔ; ergo ΑΒ, ΒΓ, hoc est ΑΒ, ΒΔ, rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ΑΒ quam ΒΓ, hoc

ΒΔ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΒ[2]. Ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν, ἐκθέμενοι τὰς ἰσαρίθμους ἐκ δύο ὀνομάτων.

est quam ΒΔ, plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et ΑΒ commensurabilis est expositæ rationali longitudine; apotome igitur prima est ΑΒ. Similiter utique et reliquas apotomas inveniemus, exponendo eas quæ sunt ejusdem ordinis ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟβʹ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης[1] τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

PROPOSITIO XCII.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome primâ, recta spatium potens apotome est.

Contineatur enim spatium ΑΒ sub rationali ΑΓ et apotome primâ ΑΔ; dico rectam quæ spatium ΑΒ potest apotomen esse.

la première de deux noms ΑΓ; que son plus grand nom soit ΑΒ (49. 10), et faisons ΒΔ égal à ΒΓ; les droites ΑΒ, ΒΓ, c'est-à-dire ΑΒ, ΒΔ, seront des rationelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10); la puissance de ΑΒ surpassera la puissance de ΒΓ, c'est-à-dire de ΒΔ, du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΒ; mais la droite ΑΒ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée; la droite ΑΒ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Nous trouverons semblablement les autres apotomes en exposant les droites de deux noms qui sont du même ordre (50, 51, 52, 53, et 54. 10).

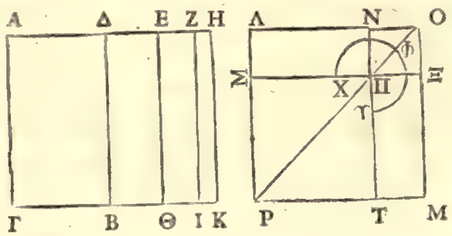
PROPOSITION XCII.

Si une surface est comprise sous une rationelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationelle ΑΓ et sous un premier apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est un apotome.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστι πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραλληλόγραμμον[2] παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ[3]. Τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ

Quoniam enim apotome est prima ΑΔ, sit ipsi congruens ΔΗ; ipsæ ΑΗ, ΗΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et tota ΑΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ, et ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad ΑΗ parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur ΔΗ bifariam in Ε, et quadrato ex ΕΗ æquale ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; commensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ. Et per puncta Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ parallelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam commensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine; et

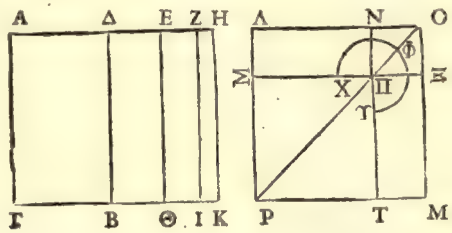


Car, puisque ΑΔ est un premier apotome, que ΔΗ lui conviène; les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (déf. trois. 1. 10). Mais la droite entière ΑΗ est commensurable avec la rationelle exposée ΑΓ, et la puissance de ΑΗ surpasse la puissance de ΗΔ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΗ; si donc on applique à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔΗ, soit défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties commensurables (18. 10). Que ΔΗ soit coupé en deux parties égales au point Ε; appliquons à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal au quarré de ΕΗ, soit défaillant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle compris sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera commensurable avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque ΑΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ, AZ τῇ ZH μήκει· καὶ ἡ AH ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. Ἀλλὰ ἡ AH σύμμετρός ἐστι τῇ AΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι τῇ AΓ μήκει. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ AΓ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AZ, ZH· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν AI, ZK ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔE τῇ EH μήκει, καὶ ἡ ΔH ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔE, EH σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔH, καὶ ἀσύμμετρος τῇ AΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔE, EH, καὶ ἀσύμμετρος τῇ AΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, EK μέσον ἐστί. Κείσθω δὴ τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM, τῷ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ ΛOM, τὸ NΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ AM, NΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς EH τετραγώνῳ[4], ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν[5] EH οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως τὸ AI πρὸς τὸ EK, ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH οὕτως ἐστὶ[6]

AH igitur utrique ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Sed AH commensurabilis est ipsi AΓ; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH commensurabilis est ipsi AΓ longitudine. Atque est rationalis AΓ; rationalis igitur et utraque ipsarum AZ, ZH; quare et utrumque ipsorum AI, ZK rationale est. Et quoniam commensurabilis est ΔE ipsi EH longitudine, et ΔH igitur utrique ipsarum ΔE, EH commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΔH, et incommensurabilis ipsi AΓ longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum ΔE, EH, et incommensurabilis ipsi AΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, EK medium est. Ponatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum AM, ipsi verò ZK æquale quadratum NΞ auferatur, communem angulum AOM habens cum ipso; ergo circa eamdem diametrum sunt quadrata AM, NΞ. Sit ipsorum diameter OP, et describatur figura. Quoniam igitur æquale est sub AZ, ZH contentum rectangulum quadrato ex EH, est igitur ut AZ ad EH ita EH ad ZH. Sed ut quidem AZ ad EH ita AI ad EK, ut verò

la droite AH sera commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est commensurable avec AΓ; chacune de droites AZ, ZH est donc commensurable en longueur avec AΓ (12. 10). Mais AΓ est rationelle; les droites AZ, ZH sont donc rationelles l'une et l'autre; les parallélogrammes AI, ZK sont donc aussi rationels l'un et l'autre (20. 10). Et puisque ΔE est commensurable en longueur avec EH, la droite ΔH est donc commensurable en longueur avec chacune des droites ΔE, EH. Mais ΔH est rationelle et incommensurable en longueur avec AΓ; chacune des droites ΔE, EH est donc rationelle et incommensurable en longueur avec AΓ; chacun des rectangles ΔΘ, EK est donc médial (22. 10). Faisons le quarré AM égal au parallélogramme AI (14. 2), et retranchons de AM un quarré NΞ égal au parallélogramme ZK, le quarré NΞ ayant l'angle commun AOM; les quarrés AM, NΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que OP soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous AZ, ZH est égal au quarré de EH, la droite AZ sera à EH comme EH est à ZH (17. 6). Mais AZ est à EH comme AI est τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΚΖ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καὶ ἔστι τὸ μὲν[7] ΑΙ τῷ ΑΜ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ ΔΘ ἐστὶν ἴσον[8], τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΛΞ· τὸ ἄρα ΔΚ

ΕΗ ad ΖΗ ita est ΕΚ ad ΚΖ; ipsorum igitur ΑΙ, ΚΖ medium proportionale est ΕΚ. Est autem et ipsorum ΑΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, ut superius demonstratum est, atque est quidem ΑΙ quadrato ΑΜ æquale, ipsum verò ΖΚ ipsi ΝΞ; et ΜΝ igitur ipsi ΕΚ æquale est. Sed quidem ΕΚ ipsi ΔΘ est æquale, ipsum verò ΜΝ ipsi ΛΞ; ergo ΔΚ æquale est



ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ τετραγώνοις· λοιπὸν[9] ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ· τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἐστὶ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ[10] ἡ ΑΝ ἀποτομή ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστι, τουτέστι

gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ. Est autem et ΑΚ æquale quadratis ΑΜ, ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ; sed ΣΤ ex ΑΝ est quadratum; ergo ex ΑΝ quadratum æquale est ipsi ΑΒ; ipsa ΑΝ igitur potest ipsum ΑΒ. Dico et ΑΝ apotomen esse. Quoniam enim rationale est utrumque ipsorum ΑΙ, ΖΚ, atque est æquale quadratis ΑΜ, ΝΞ; et utrumque igitur ipsorum ΑΜ, ΝΞ rationale est, hoc est quadratum ex

à ΕΚ, et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΚΖ (1.6); le parallélogramme ΕΚ est donc moyen proportionel entre les parallélogrammes ΑΙ, ΚΖ. Et puisque ΜΝ est moyen proportionel entre ΑΜ et ΝΞ, ainsi qu'on l'a démontré plus haut (55. 10), que ΑΙ est égal au quarré ΑΜ, et que ΖΚ l'est à ΝΞ, le parallélogramme ΜΝ sera égal à ΕΚ. Mais ΕΚ est égal à ΔΘ (37. 1), et ΜΝ à ΛΞ (43. 1); le parallélogramme ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Mais le parallélogramme ΑΚ est égal à la somme des quarrés ΑΜ, ΝΞ; le parallélogramme restant ΑΒ est donc égal à ΣΤ. Mais ΣΤ est le quarré de ΑΝ; le quarré de ΑΝ est donc égal à ΑΒ; la droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Je dis aussi que ΑΝ est un apotome. Car puisque chacun des parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ est rationel, et qu'ils sont égaux aux quarrés ΑΜ, ΝΞ, chacun des quarrés ΑΜ, ΝΞ, c'est-à-dire chacun des quarrés des τὸ ἀπὸ ἑκατέρων[11] τῶν ΛΟ, ΟΝ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητή ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΛΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. Επεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ[12] τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΝ. Καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Εὰν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἑξῆς[13].

utrisque ΛΟ, ΟΝ; et utraque igitur ipsarum ΛΟ, ΟΝ rationalis est. Rursus, quoniam medium est ΔΘ, atque est æquale ipsi ΛΞ; medium igitur est et ΛΞ. Quoniam igitur quidem ΛΞ medium est, ipsum verò ΝΞ rationale, incommensurabile igitur est et ΛΞ ipsi ΝΞ; ut autem ΛΞ ad ΝΞ ita est ΛΟ ad ΟΝ; incommensurabilis igitur est ΛΟ ipsi ΟΝ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΛΟ, ΟΝ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΛΝ. Et potest spatium ΑΒ; recta igitur spatium ΑΒ potens apotome est.

Si igitur spatium, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟγ'.

Εὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

PROPOSITIO XCIII.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est prima.

Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ et apotome secundâ ΑΔ; dico rectam quæ spatium ΑΒ potest mediæ apotomen esse primam.

droites ΛΟ, ΟΝ sera rationel; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc rationelles l'une et l'autre. De plus, puisque le parallélogramme ΔΘ est médial, et qu'il est égal à ΛΞ, le parallélogramme ΛΞ sera aussi médial. Et puisque ΛΞ est médial, et que ΝΞ est rationel, le parallélogramme ΛΞ sera incommensurable avec le quarré ΝΞ; mais ΛΞ est à ΝΞ comme ΛΟ est à ΟΝ (1. 6); la droite ΛΟ est donc incommensurable en longueur avec ΟΝ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΛΝ est donc un apotome (74. 10). Mais cette droite peut la surface ΑΒ; la droite qui peut la surface ΑΒ est donc un apotome. Si donc, etc.

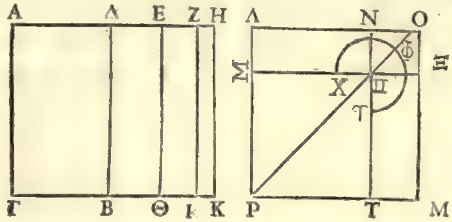
PROPOSITION XCIII.

Si une surface est comprise sous une rationelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous la rationelle ΑΓ et sous le second apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est un premier apotome d'une médiale.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ[1] τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει[2]· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ

Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et congruens ΔΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ, sed tota ΑΗ quam congruens ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; quoniam igitur ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si



μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ[3]. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τῷ[4] ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ,

igitur quartæ parti quadrati ex ΗΔ æquale parallelogrammum ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔΗ bifariam in Ε; et quadrato ex ΕΗ æquale parallelogrammum ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; commensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine. Et per puncta Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ paral-

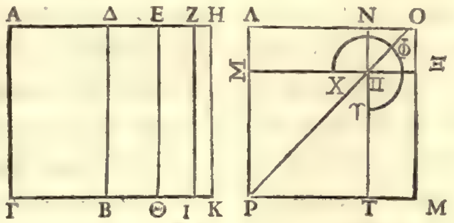
Que la droite ΔΗ conviène avec ΑΔ, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; la congruente ΔΗ sera commensurable avec la rationelle exposée ΑΓ, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΗΔ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΗ (déf. trois. 2. 10), puisque la puissance de ΑΗ surpasse la puissance de ΗΔ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΗ, si nous appliquons à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΗΔ, soit défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties commensurables (18. 10). Coupons ΔΗ en deux parties égales au point Ε; appliquons à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal au quarré de ΕΗ soit défaillant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera commensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les

ZI, HK. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστι ἡ AZ τῇ ZH μήκει[5]· καὶ ἡ AH ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ AH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα τῶν AZ, ZH ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ AΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν AI, ZK μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔE τῇ EH, καὶ ἡ ΔH ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔE, EH σύμμετρός ἐστιν. Ἀλλ᾽ ἡ ΔH σύμμετρός ἐστι τῇ AΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔE, EH, καὶ σύμμετρος τῇ AΓ μήκει[6]· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, EK ῥητόν ἐστι. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM, τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ NΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ AM, τὴν ὑπὸ τῶν AOM[7]· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ AM, NΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὰ AI, ZK μέσα ἐστὶ, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις[8], καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν AO, ON· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AO, ON ἄρα[9]

lelæ ducantur EΘ, ZI, HK. Et quoniam commensurabilis est AZ ipsi ZH longitudine; et AH igitur utrique ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Rationalis autem AH et incommensurabilis ipsi AΓ longitudine; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH rationalis est, et incommensurabilis ipsi AΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum AI, ZK medium est Rursus, quoniam commensurabilis est ΔE ipsi EH, et ΔH igitur utrique ipsarum ΔE, EH commensurabilis est. Sed ΔH commensurabilis est ipsi AΓ longitudine; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΔE, EH, et commensurabilis ipsi AΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, EK rationale est. Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum AM, ipsi verò ZK æquale auferatur NΞ, circa eumdem angulum AOM cum ipso AM; ergo circa eamdem diametrum sunt quadrata AM, NΞ. Sit ipsorum diameter OP, et describatur figura. Quoniam igitur AI, ZK media sunt, et commensurabilia inter se, et sunt æqualia quadratis ex AO, ON; et qua-

droites EΘ, ZI, HK parallèles à AΓ. Puisque AZ est commensurable en longueur avec ZH, la droite AH sera aussi commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est rationelle et incommensurable en longueur avec AΓ; chacune des droites AZ, ZH est donc rationelle et incommensurable en longueur avec AΓ; chacun des parallélogrammes AI, ZK sera par conséquent médial (22. 10). De plus, puisque ΔE est commensurable avec EH, la droite ΔH sera commensurable avec chacune des droites ΔE, EH. Mais la droite ΔH est commensurable en longueur avec AΓ; chacune des droites ΔE, EH est donc rationelle et commensurable en longueur avec AΓ; chacun des parallélogrammes ΔΘ, EK est donc rationel. Faisons le quarré AM égal au parallélogramme AI (14. 2), et retranchons de AM un quarré NΞ égal au parallélogramme ZK, ce quarré étant dans le même angle que AM; savoir, dans l'angle AOM; les quarrés AM, NΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit OP, et décrivons la figure. Puisque les parallélogrammes AI, ZK sont médiaux et commensurables entre eux, et qu'ils sont égaux aux quarrés des droites AO, ON, les quarrés des droites AO, ON μέσα ἐστί· καὶ αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσί. Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐπεὶ γάρ[10] τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ. Ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ[11] τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ

drata ex ΛΟ, ΟΝ igitur media sunt; et ΛΟ, ΟΝ igitur mediæ sunt. Dico et potentiâ solùm commensurabiles. Quoniam enim rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, est igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ; sed ut quidem ΑΖ ad ΕΗ ita ΑΙ ad ΕΚ. Ut autem ΕΗ ad ΖΗ, ita est ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale est ΕΚ. Est autem et



τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ[12] τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ. Ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι

quadratorum ΛΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, atque est æquale quidem ΑΙ ipsi ΛΜ, ipsum verò ΖΚ ipsi ΝΞ; et ΜΝ igitur æquale est ipsi ΕΚ. Sed ipsi quidem ΕΚ æquale est ΔΘ, ipsi verò ΜΝ æquale ΛΞ; totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ. Quoniam igitur totum ΑΚ æquale est quadratis ΛΜ, ΝΞ, quorum ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est

seront médiaux ; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales. Je dis que ces droites sont commensurables en puissance seulement. Car puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ est égal au quarré de ΕΗ, la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ (1. 6), et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ ; le parallélogramme ΕΚ est donc moyen proportionel entre les parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ. Mais ΜΝ est aussi moyen proportionnel entre ΛΜ et ΝΞ (55. 10), et ΑΙ est égal à ΛΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ ; le parallélogramme ΜΝ est donc égal à ΕΚ. Mais ΔΘ est égal à ΕΚ (37. 1), et ΛΞ égal à ΜΝ (43. 1), le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Et puisque le parallélogramme ΑΚ tout entier est égal à la somme des quarrés ΛΜ, ΝΞ, et que la partie ΔΚ est égale au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ, le parallélogramme restant τῷ[13] ἀπὸ τῆς ΑΝ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ[14] ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ[15] ΑΒ χωρίον. Λέγω δὴ[16] ὅτι ἡ ΑΝ μέσης[17] ἀποτομή ἐστι πρώτη. Επεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΜΝ, τουτέστι[18] τῷ ΛΞ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ[19] τὸ ΛΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. Μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ[20] τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἄρα ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ΑΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

quadrato ex AN; quadratum igitur ex AN æquale est spatio AB; ergo AN potest spatium AB. Dico et AN mediæ apotomen esse primam. Quoniam enim rationale est EK, atque est æquale ipsi MN, hoc est ipsi ΛΞ; rationale igitur est ΛΞ, hoc est rectangulum sub ΛΟ, ΟΝ. Medium autem ostensum est ΝΞ; incommensurabile igitur est ΛΞ ipsi ΝΞ; ut verò ΛΞ ad ΝΞ ita est ΛΟ ad ΟΝ; ipsæ ΛΟ, ΟΝ igitur incommensurabiles sunt longitudine; ipsæ igitur ΛΟ, ΟΝ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; ergo AN mediæ apotome est prima, et potest spatium AB; recta igitur spatium AB potens mediæ apotome est prima. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟδ'.

Εὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

PROPOSITIO XCIV.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

AB sera égal à ΣΤ, c'est-à-dire au quarré de AN; le quarré de AN est donc égal à la surface AB; la droite AN peut donc la surface AB. Or, je dis que AN est un premier apotome d'une médiale. Car, puisque le parallélogramme EK est rationel et égal à MN, c'est-à-dire à ΛΞ, le parallélogramme ΛΞ, c'est-à-dire le rectangle sous ΛΟ, ΟΝ, sera rationel. Mais on a démontré que ΝΞ est médial; le parallélogramme ΛΞ est donc incommensurable avec ΝΞ; mais ΛΞ est à ΝΞ comme ΛΟ est à ΟΝ (1.6); les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc incommensurables en longueur; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprènent une surface rationelle; la droite AN est donc un premier apotome d'une médiale (75. 10), et elle peut la surface AB; la droite qui peut la surface AB est donc un premier apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCIV.

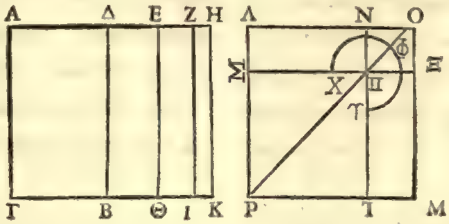
Si une surface est comprise sous une rationelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Επεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω

Spatium enim AB contineatur sub rationali AΓ et apotome tertiâ AΔ; dico rectam, quæ spatium AB potest, mediæ apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi AΔ congruens ΔH; ipsæ AH, HΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum AH, HΔ commensurabilis est longitudine expositæ rationali AΓ, tota autem AH quam congruens ΔH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Quoniam igitur AH quam ΔH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔH bifariam in E, et quadrato ex EH æquale



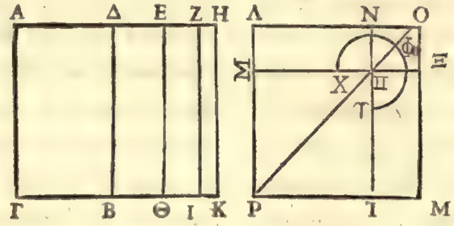
Que la surface AB soit comprise sous une rationelle AΓ et un troisième apotome AΔ; je dis que la droite qui peut la surface AB est un second apotome d'une médiale.

Car que ΔH conviène avec AΔ; les droites AH, HΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; aucune des droites AH, HΔ ne sera commensurable en longueur avec la rationelle exposée AΓ, et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente ΔH du quarré d'une droite commensurable avec la droite entière AH (déf. trois. 3. 10). Et puisque la puissance de AH surpasse la puissance de ΔH du quarré d'une droite commensurable avec AH, si nous appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔH, soit défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera AH en parties commensurables (18. 10). Coupons ΔH en deux parties égales au point E, et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ[1] ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει[2]. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ. Αλλὰ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει,

ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ. Et ducantur per puncta Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ parallelæ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ; commensurabiles igitur sunt ΑΖ, ΖΗ; commensurabile igitur et ΑΙ ipsi ΖΚ. Et quoniam ΑΖ, ΖΗ commensurabiles sunt longitudine, et ΑΗ igitur utrique ipsarum ΑΖ, ΖΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΑΗ et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; et utraque igitur ipsarum ΑΖ, ΖΗ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; et utrumque igitur ipsorum ΑΙ, ΖΚ medium est. Rursus, quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΕΗ longitudine, et ΔΗ igitur utrique ipsarum ΔΕ, ΕΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΔΗ et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum ΔΕ, ΕΗ, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ medium est. Et quoniam ΑΗ, ΗΔ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est longitudine ipsa ΑΗ ipsi ΔΗ. Sed quidem ΑΗ ipsi ΑΖ commen-

égal au quarré de ΕΗ, soit défaillant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ; les droites ΑΖ, ΖΗ seront commensurables; le parallélogramme ΑΙ sera donc commensurable avec ΖΚ. Et puisque les droites ΑΖ, ΖΗ sont commensurables en longueur, la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec chacune des droites ΑΖ, ΖΗ (16. 10). Mais ΑΗ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΑΖ, ΖΗ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ est donc médial (22. 10). De plus, puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΕΗ; la droite ΔΗ sera commensurable en longueur avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais ΔΗ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes ΔΘ, ΕΚ est donc médial (22. 10). Et puisque les droites ΑΗ, ΗΔ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΗ sera incommensurable en longueur avec ΔΗ. Mais ΑΗ est commensurable en longueur ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ[3]. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΑΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΑΜ, ΝΞ.

surabilis est longitudine, ipsa verò ΔΗ ipsi ΗΕ; incommensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΕΗ longitudine. Ut autem ΑΖ ad ΕΗ ita est ΑΙ ad ΕΚ; incommensurabile igitur est ΑΙ ipsi ΕΚ. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, eumdem angulum habens cum ipso ΑΜ; ergo circa eamdem dia-



Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ[4] τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ[5]· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ

metrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, est igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ. Sed ut quidem ΑΖ ad ΕΗ ita est ΑΙ ad ΕΚ, ut verò ΕΗ ad ΖΗ ita est ΕΚ ad ΖΚ; et ut igitur ΑΙ ad ΕΚ ita ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale est ΕΚ. Est autem et quadratorum ΑΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, et est æquale quidem ΑΙ ipsi ΑΜ,

avec ΑΖ, et ΔΗ avec ΗΕ; la droite ΑΖ est donc incommensurable en longueur avec ΕΗ (13. 10). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme le parallélogramme ΑΙ est au parallélogramme ΕΚ (1. 6); le parallélogramme ΑΙ est donc incommensurable avec le parallélogramme ΕΚ. Faisons le quarré ΑΜ égal à ΑΙ (14. 2), et retranchons de ΑΜ le quarré ΝΞ égal à ΖΚ, ce quarré étant dans le même angle que ΑΜ, les quarrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit ΟΡ, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ est égal au quarré de ΕΗ; la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ (1. 6), et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ; le parallélogramme ΑΙ est donc à ΕΚ comme ΕΚ est à ΖΚ; le parallélogramme ΕΚ est donc moyen proportionnel entre ΑΙ et ΖΚ. Puisque ΜΝ est moyen proportionnel entre les quarrés ΑΜ, ΝΞ, que le parallélogramme ΑΙ est égal

ΖΚ τῷ ΝΞ, καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ ΕΚ ἴσον ἐστὶ[6] τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν ΑΟ, ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ[7], σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΜ τῷ ΜΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· ὥστε καὶ ἡ ΑΟ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν

ipsum verò ΖΚ ipsi ΝΞ, et ΕΚ igitur æquale est ipsi ΜΝ. Sed quidem ΜΝ æquale est ipsi ΛΞ, ipsum verò ΕΚ æquale est ipsi ΔΘ; et totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ; est autem et ΑΚ æquale ipsis ΑΜ, ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est ex ΑΝ quadrato; ergo ΑΝ potest spatium ΑΒ. Dico ΑΝ mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim media ostensa sunt ΑΙ, ΖΚ, et sunt æqualia quadratis ex ΑΟ, ΟΝ; medium igitur et utrumque ex ΑΟ, ΟΝ quadratorum; media igitur utraque ipsarum ΑΟ, ΟΝ. Et quoniam commensurabile est ΑΙ ipsi ΖΚ, commensurabile igitur et ex ΑΟ quadratum quadrato ex ΟΝ. Rursus, quoniam incommensurabile demonstratum est ΑΙ ipsi ΕΚ, incommensurabile igitur est et ΑΜ ipsi ΜΝ, hoc est quadratum ex ΑΟ rectangulo sub ΑΟ, ΟΝ; quare et ΑΟ incommensurabilis est longitudine ipsi ΟΝ; ipsæ ΑΟ, ΟΝ igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Dico et medium eas continere. Quoniam enim medium ostensum est ΕΚ, atque est æquale rectangulo sub ΑΟ, ΟΝ;

à ΑΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ, le parallélogramme ΕΚ sera égal à ΜΝ. Mais ΜΝ est égal à ΛΞ (43. 1), et ΕΚ égal à ΔΘ (37. 1); le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Mais ΑΚ est égal à la somme des quarrés ΑΜ, ΝΞ; le parallélogramme restant ΑΒ est donc égal à ΣΤ, c'est-à-dire au quarré de ΑΝ; la droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Je dis que ΑΝ est un second apotome d'une médiale. Car puisqu'on a démontré que les surfaces ΑΙ, ΖΚ sont médiales, et qu'elles sont égales aux quarrés des droites ΑΟ, ΟΝ, chacun des quarrés des droites ΑΟ, ΟΝ sera médial; chacune des droites ΑΟ, ΟΝ est donc médiale. Et puisque ΑΙ est commensurable avec ΖΚ, le quarré de ΑΟ sera commensurable avec le quarré de ΟΝ. De plus, puisqu'on a démontré que ΑΙ est incommensurable avec ΕΚ, le quarré ΑΜ sera incommensurable avec ΜΝ, c'est-à-dire le quarré de ΑΟ avec le rectangle sous ΑΟ, ΟΝ; la droite ΑΟ est donc incommensurable en longueur avec ΟΝ; les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis que ces droites comprènent une surface médiale. Car puisqu'on a démontré que ΕΚ est médial, et qu'il est égal au rectangle sous ΑΟ, ΟΝ, le rectangle sous ΑΟ, ΟΝ

ΛΟ, ΟΝ[8]· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε[9] αἱ ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ἡ ΛΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον[10]· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

medium igitur est et rectangulum sub ΛΟ, ΟΝ; quare ΛΟ, ΟΝ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ergo ΛΝ mediæ apotome est secunda, et potest spatium ΑΒ; recta igitur spatium ΑΒ potens mediæ apotome est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟέ.

Εὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστί.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς[1] ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται[2] τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Επεὶ οὖν ἡ ΑΗ

PROPOSITIO XCV.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potens minor est.

Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ et apotome quartâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΒ potest, minorem esse.

Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ longitudine, et tota ΑΗ quam congruens ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quo-

sera médial; les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprènent une surface médiale; la droite ΑΝ est donc un second apotome d'une médiale (76. 10), et elle peut la surface ΑΒ; la droite qui peut la surface ΑΒ est donc un second apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

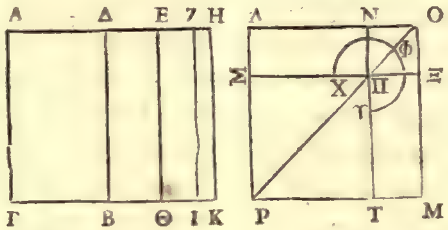
PROPOSITION XCV.

Si une surface est comprise sous une rationelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationelle ΑΓ et sous un quatrième apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est une mineure.

Car que ΔΗ conviène à ΑΔ, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΑΓ, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΗΔ du quarré d'une droite incommensurable en longueur τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ

niam igitur ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔΗ bifariam in Ε, et quadrato ex ΕΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ;



μήκει ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ[3]. Ηχθωσαν οὖν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Επεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ ΑΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν

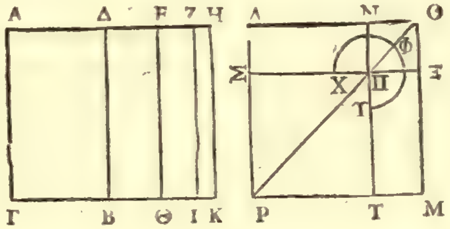
incommensurabilis igitur est longitudine ipsa ΑΖ ipsi ΖΗ. Ducantur igitur per puncta Ε, Ζ, Η parallelæ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ ipsis ΑΓ, ΒΔ. Quoniam igitur rationalis est ΑΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; rationale igitur est totum ΑΚ. Rursus, quoniam incommensurabilis est ΔΗ ipsi ΑΓ longitudine, et sunt ambæ rationales; medium igitur est ΔΚ. Rursus, quoniam incom-

avec ΑΗ (déf. trois. 4. 10). Puisque la puissance de ΑΗ surpasse la puissance de ΗΔ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ; si nous appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔΗ, soit défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties incommensurables (18. 10). Coupons ΔΗ en deux parties égales en Ε; appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal au quarré de ΕΗ, soit défaillant d'une figure quarrée; que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera incommensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles aux droites ΑΓ, ΒΔ. Puisque ΑΗ est rationelle et commensurable en longueur avec ΑΓ, le parallélogramme entier ΑΚ sera rationel (20. 10). De plus, puisque ΔΗ est incommensurable en longueur avec ΑΓ, et que ces droites sont rationelles l'une et l'autre, le parallélogramme ΔΚ sera médial (22. 10). De plus, puisque ΑΖ est ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ[4]· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι[5] τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. Εστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Επεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν[6] ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Αλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ[7] τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Εστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. Αλλὰ τῷ[8] μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τὸ[9] ΔΘ, τὸ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. Επεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ,

mensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine, incommensurabile igitur et ΑΙ ipsi ΖΚ. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΛΜ, ipsi verò ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, eumdem habens angulum ΛΟΜ cum ipso ΛΜ; ergo circa eamdem diametrum sunt quadrata ΛΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, proportionale igitur est ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΗΖ. Sed ut quidem ΑΖ ad ΕΗ ita est ΑΙ ad ΕΚ, ut verò ΕΗ ad ΖΗ ita est ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale est ΕΚ. Est autem et quadratorum ΛΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, et est æquale quidem ΑΙ ipsi ΛΜ, et ΖΚ ipsi ΝΞ; et ΕΚ igitur æquale est ipsi ΜΝ. Sed ipsi quidem ΕΚ æquale est ΔΘ, et ΜΝ æquale est ipsi ΛΞ; totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ. Quoniam igitur totum ΑΚ æquale est quadratis ΛΜ, ΝΞ, quorum ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et quadrato ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ,

incommensurable en longueur avec ΖΗ, le parallélogramme ΑΙ sera incommensurable avec ΖΚ (1.6). Faisons le quarré ΛΜ égal à ΑΙ, et retranchons de ΛΜ un quarré ΝΞ égal à ΖΚ, ce quarré étant autour d'un même angle ΛΟΜ que le quarré ΛΜ; les quarrés ΛΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26.6). Que ΟΡ soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ est égal au quarré de ΕΗ, la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΗΖ (17.6). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ, et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ (1.6); le parallélogramme ΕΚ est donc moyen proportionnel entre ΑΙ et ΖΚ. Et puisque ΜΝ est moyen proportionnel entre les quarrés ΛΜ, ΝΞ, que le parallélogramme ΑΙ est égal à ΛΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ, le parallélogramme ΕΚ sera égal à ΜΝ. Mais ΔΘ est égal à ΕΚ (37.1), et ΜΝ égal à ΛΞ (43.1); le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Et puisque le parallélogramme entier ΑΚ est égal à la somme des quarrés ΛΜ, ΝΞ, et que ΔΚ est égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec le quarré ΝΞ, le parallélogramme restant ΑΒ sera égal à ΣΤ, c'est-à-dire au quarré de τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. Λέγω δὴ[10] ὅτι ἡ ΑΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν

hoc est ex AN quadrato; ergo AN potest spatium AB. Dico et AN irrationalem esse quæ appellatur minor. Quoniam enim rationale est AK, et est æquale quadratis ex AO, ON; compositum igitur ex quadratis ipsarum AO, ON rationale est. Rursus, quoniam ΔK medium est, et est æquale ΔK rectangulo bis sub AO, ON; rectan-



ΑΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ τετραγώνῳ[11]· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ΑΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tangulum igitur bis sub AO, ON medium est. Et quoniam incommensurabile demonstratum est AI ipsi ZK, incommensurabile igitur et ex AO quadratum quadrato ex ON; ipsæ AO, ON igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium; ergo AN irrationalis est, quæ appellatur minor, et potest spatium AB; recta igitur spatium AB potens minor est. Quod oportebat ostendere.

AN; la droite AN peut donc la surface AB. Or, je dis que AN est l'irrationelle qu'on nomme mineure. Car, puisque le parallélogramme AK est rationel, et qu'il est égal à la somme des quarrés des droites AO, ON, la somme des quarrés des droites AO, ON sera rationelle. De plus, puisque ΔK est médial, et qu'il est égal au double rectangle compris sous AO, ON, le double rectangle sous AO, ON sera médial. Et puisque on a démontré que AI est incommensurable avec ZK, le quarré de AO sera incommensurable avec le quarré de ON; les droites AO, ON sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant rationelle la somme de leurs quarrés, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite AN est donc l'irrationelle qu'on appèle mineure (77. 10); mais cette droite peut la surface AB; la droite qui peut la surface AB est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟϛ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον

PROPOSITIO XCVI.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AΓ et apotome quintâ AΔ; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum rationali medium totum facit.

Sit enim ipsi AΔ congruens ΔH; ipsæ igitur AH, HΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et congruens ΔH commensurabilis est longitudine expositæ rationali AΓ, et tota AH quam congruens ΔH plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔH æquale ad ipsam AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔH bifariam in puncto E, et quadrato ex EH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ qua-

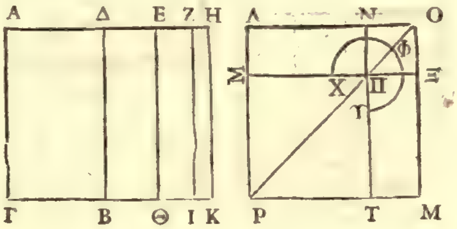
PROPOSITION XCVI.

Si une surface est comprise sous une rationelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Que la surface AB soit comprise sous une rationelle AΓ et un cinquième apotome AΔ; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car, que la droite ΔH conviène avec AΔ; les droites AH, HΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement, la congruente ΔH sera incommensurable en longueur avec la rationelle exposée AΓ, et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente ΔH du quarré d'une droite incommensurable avec la droite entière AH (déf. trois. 5. 10); si donc nous appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔH, soit défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite AH en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite ΔH en deux parties égales en E, et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal au quarré de EH, soit εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ[1]. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητόν ἐστι

dratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; incommensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine. Et ducantur per Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ parallelæ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΗ ipsi ΑΓ longitudine, et sunt ambæ rationales; medium igitur est ΑΚ. Rursus, quoniam rationalis est ΔΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longi-

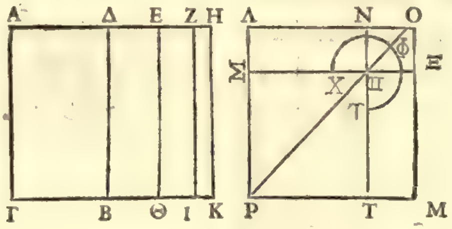


τὸ ΔΚ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὂν τῷ ΑΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ, τὸ ΝΞ[2]· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΑΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον[3]. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ μέσον

tudine, rationale est ΔΚ. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale quadratum auferatur ΝΞ, eumdem habens angulum ΛΟΜ cùm ipso ΑΜ; ergo circa eamdem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Similiter utique demonstrabimus rectam ΑΝ posse spatium ΑΒ. Dico ΑΝ esse eam quæ cum rationali medium totum facit. Quoniam

défaillant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera incommensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque la droite ΑΗ est incommensurable en longueur avec ΑΓ, et que ces droites sont rationelles l'une et l'autre, le parallélogramme ΑΚ sera médial (22. 10). De plus, puisque la droite ΔΗ est rationelle, et qu'elle est incommensurable en longueur avec ΑΓ, la surface ΔΚ sera rationelle (20. 10). Faisons le quarré ΑΜ égal à ΑΙ, et retranchons de ΑΜ un quarré ΝΞ égal à ΖΚ, ce quarré étant autour du même angle ΑΟΜ que ΑΜ; les quarrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diamètre soit ΟΡ, et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière que la droite ΑΝ peut la surface ΑΒ. Or, je dis que ΑΝ fait avec une surface rationelle un tout médial. Car, puisqu'on a démontré que le parallélogramme ΑΚ est médial, et ἐδείχθη τὸ AK, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ON· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ON μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ON· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛΟ, ON ῥητόν ἐστι[4]. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ AI τῷ ZK, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ON· αἱ ΛΟ, ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον· τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ[5] ΛΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον[6] τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἡ τὸ AB ἄρα[7] χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

enim medium ostensum est AK, et est æquale quadratis ex ΛO, ON; compositum igitur ex quadratis ipsarum ΛO, ON medium est. Rursus, quoniam rationale est ΔK, et est æquale rectangulo bis sub ΛO, ON; et rectangulum bis igitur sub ΛO, ON rationale est. Et quoniam incommensurabile est AI ipsi ZK, incommensurabile igitur est et ex ΛO quadratum quadrato ex ON; ipsæ ΛO, ON igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium; rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua igitur ΛN irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum faciens, et potest spatium AB; recta igitur spatium AB potens est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.



puisque ce parallélogramme est égal à la somme des quarrés des droites ΛO, ON, la somme des quarrés des droites ΛO, ON sera médiale. De plus, puisque le parallélogramme ΔK est rationel, et qu'il est égal au double rectangle sous ΛO, ON, le double rectangle sous ΛO, ON sera rationel. Mais le parallélogramme AI est incommensurable avec ZK; le quarré de ΛO est donc incommensurable avec le quarré de ON; les droites ΛO, ON sont donc incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites étant rationel; la droite restante ΛN est donc l'irrationelle qui est dite pouvant avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Mais cette droite peut la surface AB; la droite qui peut la surface AB est donc celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛζ.

Εὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν[1] σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Επεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ[2] ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ

PROPOSITIO XCVII.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ cum medio medium totum facit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AΓ et apotome sextâ AΔ; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum medio medium totum facit.

Sit enim ipsi AΔ congruens ΔH; ipsæ igitur AH, HΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est expositæ rationali AΓ longitudine, et tota AH quam congruens ΔH plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quoniam igitur AH quam HΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si igitur quartæ parti ex ΔH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur

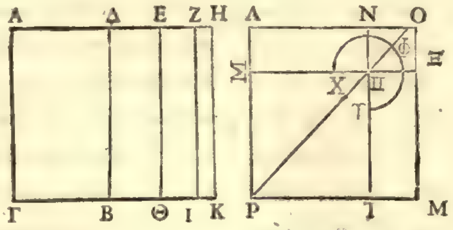
PROPOSITION XCVII.

Si une surface est comprise sous une rationelle èt un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Que la surface AB soit comprise sous une rationelle AΓ et un sixième apotome AΔ; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Que ΔH conviène avec AΔ, les droites AH, HΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; aucune de ces droites ne sera commensurable en longueur avec la rationelle exposée AΓ, et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente ΔH du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec AH (déf. trois. 6. 10). Puisque la puissance de AH surpasse la puissance de HΔ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec AH; si on applique à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔH, soit défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite AH en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite ΔH en deux parties τὸ Ε[3], καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ

igitur ΔH bifariam in E, et quadrato ex EH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub AZ, ZH; incommensurabilis igitur est AZ ipsi ZH longitudine. Ut autem AZ ad ZH ita est AI ad ZK; incommensurabile igitur est AI ipsi ZK. Et quoniam AH, AΓ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium est AK. Rursus, quoniam AΓ, ΔH rationales sunt et incommensu-



καὶ τὸ ΔΚ[4]. Επεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφη-

rabiles longitudine, medium est et ΔK. Quoniam igitur AH, HΔ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est AH ipsi HΔ longitudine. Ut autem AH ad HΔ ita est AK ad KΔ; incommensurabile igitur est AK ipsi KΔ. Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum ΛM, ipsi verò ZK æquale auferatur NΞ,

égales en E, et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal au quarré de AH, soit défaillant d'une figure quarrée; que ce soit le rectangle sous AZ, ZH; la droite AZ sera incommensurable en longueur avec ZH. Mais AZ est à ZH comme AI est à ZK (1. 6); le parallélogramme AI est donc incommensurable avec ZK (10. 10). Et puisque les droites AH, AΓ sont des rationelles commensurables en puissance seulement, le parallélogramme AK sera médial (22. 10). De plus, puisque les droites AΓ, ΔH sont rationelles, et incommensurables en longueur, le parallélogramme ΔK sera médial. Puisque les droites AH, HΔ sont commensurables en puissance seulement, la droite AH sera incommensurable en longueur avec HΔ. Mais AH est à HΔ comme AK est à KΔ (1. 6); le parallélogramme AK est donc incommensurable avec KΔ (10. 10). Faisons le quarré ΛM égal à AI (14. 2), et retranchons de ΛM un quarré NΞ égal à ZK, ce quarré ῥήσθω περὶ τὴν αὐτὴν, ὂν τῷ ΑΜ γωνίαν τὸ ΝΞ[5]· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Εστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ομοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἡ ΑΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Επεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ, καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ, καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· καὶ τὸ δὶς ἄρα[8] ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν·

eumdem angulum habens cum ipso AM; ergo circa eamdem diametrum sunt quadrata AM, NΞ. Sit ipsorum diameter OP, et describatur figura. Congruenter utique præcedentibus ostendemus rectam AN posse spatium AB. Dico AN esse eam quæ cum medio medium totum facit. Quoniam enim medium ostensum est AK, atque est æquale quadratis ex AO, ON; compositum igitur ex quadratis ipsarum AO, ON medium est. Rursus, quoniam medium ostensum est ΔK, et est æquale rectangulo bis sub AO, ON; et rectangulum bis igitur sub AO, ON medium est. Et quoniam incommensurabile ostensum est AK ipsi ΔK, incommensurabilia igitur sunt et ex AO, ON quadrata rectangulo bis sub AO, ON. Et quoniam incommensurabile est AI ipsi ZK, incommensurabile igitur et ex AO quadratum quadrato ex ON; ipsæ AO, ON igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum bis sub ipsis medium, et adhuc ipsarum quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub

étant autour du même angle que AM; les quarrés AM, NΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit OP, et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que la droite AN peut la surface AB. Je dis que la droite AN est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Car, puisque nous avons démontré que le parallélogramme AK est médial, et qu'il est égal à la somme des quarrés des droites AO, ON, la somme des quarrés des droites AO, ON sera médiale. De plus, puisqu'on a démontré que le parallélogramme ΔK est médial, et puisqu'il est égal au double rectangle sous AO, ON, le double rectangle sous AO, ON sera médial. Et puisqu'on a démontré que AK est incommensurable avec ΔK, la somme des quarrés des droites AO, ON sera incommensurable avec le double rectangle sous AO, ON. Et puisque AI est incommensurable avec ZK, le quarré de AO sera incommensurable avec le quarré de ON; les droites AO, ON sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant médial, et la somme des quarrés de ces droites étant incommensurable avec le ἡ ἄρα ΑΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsis; ergo AN irrationalis est, quæ vocatur cum medio medium totum faciens, et potest spatium AB; recta igitur spatium AB potens est quæ cum medio medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟη΄.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ

PROPOSITIO XCVIII.

Quadratum ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

Sit apotome AB, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex AB æquale ad ipsam ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse primam.

Sit enim ipsi AB congruens BH; ipsæ igitur AH, HB rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ, quadrato autem ex BH ipsum ΚΛ, totum igitur ΓΛ æquale est qua-

double rectangle sous ces mêmes droites; la droite AN est donc l'irrationelle appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial (79. 10); mais cette droite peut la surface AB; la droite qui peut la surface AB est donc celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

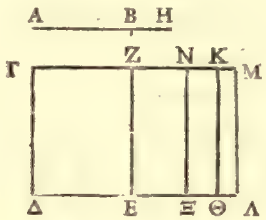
PROPOSITION XCVIII.

Le quarré d'un apotome appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un premier apotome.

Soit l'apotome AB, et la rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ égal au quarré de AB, ce parallélogramme ayant ΓΖ pour largeur; je dis que ΓΖ est un premier apotome.

Car que BH conviène avec AB, les droites AH, HB seront des rationelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ égal au quarré de AH, et un parallélogramme ΚΛ égal au quarré de BH (45. 1); le parallélogramme entier ΓΛ sera égal à la somme des quarrés τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν[1] ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ

dratis ex AH, HB. Quorum ΓE æquale est quadrato ex AB; reliquum igitur ZΔ æquale est rectangulo bis sub AH, HB. Secetur ZM bifariam in puncto N, et ducatur per N ipsi ΓΔ parallela NΞ; utrumque igitur ipsorum ZΞ, AN æquale est rectangulo sub AH, HB. Et quoniam quadrata ex AH, HB rationalia sunt, atque est quadratis ex AH, HB æquale ΔM; rationale igitur

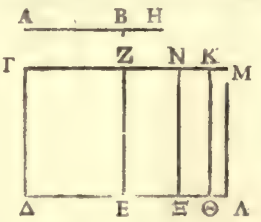


ΔΜ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι[2] τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΛΖ· μέσον ἄρα τὸ ΛΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν[3] ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν

est ΔM. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓM; rationalis igitur est ΓM, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub AH, HB, et est rectangulo bis sub AH, HB æquale AZ; medium igitur AZ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ZM; rationalis igitur est ZM et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata quidem ex AH,

des droites AH, HB. Mais ΓE est égal au quarré de AB; le parallélogramme restant ZΔ est donc égal au double rectangle sous AH, HB (7. 2). Coupons ZM en deux parties égales au point N, et par le point N menons NΞ parallèle à ΓΔ; chaçun des parallélogrammes ZΞ, AN sera égal au rectangle sous AH, HB. Et puisque les quarrés des droites AH, HB sont rationels, et que ΔM est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, le parallélogramme ΔM sera rationel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓM; la droite ΓM est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous AH, HB est médial, et que le parallélogramme AZ est égal au double rectangle sous AH, HB, le parallélogramme AZ sera médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ZM, la droite ZM est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον[5], ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ[6] τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀπο-

HB rationalia sunt, rectangulum verò bis sub AH, HB medium, incommensurabilia igitur quadrata ex AH, HB rectangulo bis sub AH, HB. Et quadratis quidem ex AH, HB æquale est ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB ipsum ZΛ; incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ZΛ. Ut autem ΓΛ ad ZΛ ita est ΓM ad MZ; incommensurabilis igitur est ΓM ipsi MZ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓM, MZ rationales sunt potentiâ solùm commensura-



τομή ἐστι. Λέγω δὴ[7] ὅτι καὶ πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ[8]· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν

biles; ergo ΓZ apotome est. Dico et primam. Quoniam enim quadratorum ex AH, HB medium proportionale est rectangulum sub AH, HB, atque est quadrato quidem ex AH æquale ΓΘ; quadrato verò ex BH æquale KΛ, quadrato autem ex AH, HB ipsum NΛ; et ipsorum ΓΘ, KΛ igitur medium proportionale est NΛ; est

les quarrés des droites AH, HB sont rationels, et que le double rectangle sous AH, HB est médial, la somme des quarrés des droites AH, HB sera incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB. Mais ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et ZΛ égal au double rectangle sous AH, HB; le parallélogramme ΓΛ est donc incommensurable avec ZΛ. Mais ΓΛ est à ZΛ comme ΓM est à MZ (1. 6); la droite ΓM est donc incommensurable en longueur avec la droite MZ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓM, MZ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓZ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un premier apotome. Car, puisque le rectangle sous AH, HB est moyen proportionnel entre les quarrés des droites AH, HB (55. 10), que ΓΘ est égal au quarré de AH, que KΛ est égal au quarré de BH, et que NΛ est égal au quarré de AH, HB, le parallélogramme NΛ sera moyen proportionnel entre les parallélogrammes ΓΘ, KΛ; le parallélogramme ΓΘ est donc à NΛ ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν[9] ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ[10]· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι[11] καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ως δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Επεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ[12] ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ ἔστι σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad ΝΜ; ut verò ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et quoniam commensurabile est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, commensurabile est et ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita ΓΚ ad ΚΜ; commensurabilis igitur est ΓΚ ipsi ΚΜ. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ, et est commensurabilis ΓΚ ipsi ΚΜ; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est ΓΜ commensurabilis expositæ rationali ΓΔ longitudine; ergo ΓΖ apotome est prima.

Quadratum igitur, etc.

comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΜΝ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ (17. 6). Et puisque le quarré de ΑΗ est commensurable avec le quarré de ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc commensurable avec ΚΜ (10. 10). Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, qu'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΖΜ, est défaillant d'une figure quarrée, que ce parallélogramme est celui qui est compris sous ΓΚ, ΚΜ, et que ΓΚ est commensurable avec ΚΜ, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΓΜ (18. 10). Mais ΓΜ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Le quarré, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϞΘʹ.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Εστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσοις οὖσι· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ

PROPOSITIO XCIX.

Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Sit mediæ apotome prima AB, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex AB æquale ad ΓΔ applicetur ΓE, latitudinem faciens ΓZ; dico ΓZ apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi AB congruens BH; ipsæ igitur AH, HB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ, latitudinem faciens ΓK, quadrato verò ex HB æquale KΛ, latitudinem faciens KM; totum igitur ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB quæ media sunt; medium igitur et ΓΛ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓM; rationalis igitur est ΓM, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB, quorum quadratum ex AB

PROPOSITION XCIX.

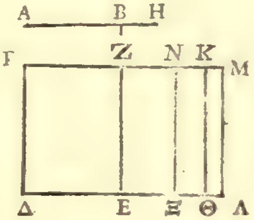
Le quarré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un second apotome.

Soient un premier apotome d'une médiale AB, et la rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓE, qui étant égal au quarré de AB, ait pour largeur la droite ΓZ; je dis que ΓZ est un second apotome.

Car que BH conviène avec AB, les droites AH, HB seront des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprendront une surface rationelle (75. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au quarré de AH, ait la droite ΓK pour largeur; appliquons aussi à ΓΔ un parallélogramme KΛ, qui étant égal au quarré de HB, ait KM pour largeur (45. 1); le parallélogramme entier ΓΛ sera égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, ces quarrés étant médiaux; le parallélogramme ΓΛ sera donc médial. Mais il est appliqué à ΓΔ, et il a ΓM pour largeur; la droite ΓM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et que

ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΛ. Ῥητὸν δέ ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ῥητὸν ἄρα[2] τὸ ΖΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ[3] καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΛ, μέσον ἐστί· τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ,

æquale est ipsi ΓΕ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ipsi ΖΛ. Rationale autem est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ; rationale igitur ΖΛ, et ad rationalem ΖΕ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Quoniam igitur quadrata quidem ex ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΓΛ, medium est; rectangulum verò bis

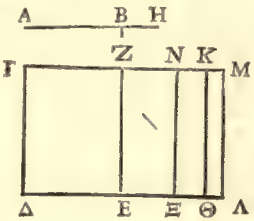


τουτέστι τὸ ΖΛ, ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν[4] ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον

sub ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΖΛ, rationale; incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΓΖ apotome est. Dico et secundam. Secetur enim ΖΜ bifariam in Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΛ

le quarré de ΑΒ est égal à ΓΕ, le double rectangle restant compris sous ΑΗ, ΗΒ sera égal à ΖΛ (7. 2). Mais le double rectangle compris sous ΑΗ, ΗΒ est rationel; le parallélogramme ΖΛ est donc rationel; mais il est appliqué à la rationelle ΖΕ, et il a pour largeur ΖΜ; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire le parallélogramme ΓΛ, est médiale, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire ΖΛ, est rationel; le parallélogramme ΓΛ sera incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΖΜ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Or, je dis que cette droite est un second apotome. Car coupons ΖΜ en deux parties égales en Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ[5] ΚΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς

æquale est rectangulo sub AH, HB. Et quoniam quadratorum ex AH, HB medium proportionale est rectangulum sub AH, HB, atque est æquale quadratum quidem ex AH ipsi ΓΘ, rectangulum verò sub AH, HB ipsi NΛ, quadratum autem ex HB ipsi KΛ; et ipsorum ΓΘ, KΛ igitur medium proportionale est NΛ; est igitur ut ΓΘ ad NΛ ita NΛ ad KΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad NΛ ita est ΓK ad NM, ut verò NΛ ad KΛ ita est NM ad KM; ut igitur ΓK ad NM ita est NM ad KM; rectangulum



τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ[6]· Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ[7] τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον

igitur sub ΓK, KM æquale est quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex ZM. Et quoniam commensurabile est ex AH quadratum quadrato ex HB, commensurabile est et ΓΘ ipsi KΛ, hoc est ΓK ipsi KM. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓM, MZ, et quartæ parti

NΛ sera égal au rectangle sous AH, HB. Et puisque le rectangle sous AH, HB est moyen proportionnel entre les quarrés des droites AH, HB, que le quarré de AH est égal à ΓΘ, que le rectangle sous AH, HB est égal à NΛ, et que le quarré de BH est égal à KΛ, le parallélogramme NΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et KΛ; la droite ΓΘ est donc à NΛ comme NΛ est à KΛ. Mais le parallélogramme ΓΘ est à NΛ comme ΓK est à NM, et NΛ est à KΛ comme NM est à KM (1. 6); la droite ΓK est donc à NM comme NM est à KM; le rectangle sous ΓK, KM est donc égal au quarré de NM, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ZM (17. 6). Et puisque le quarré de AH est commensurable avec le quarré de HB, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec KΛ, c'est-à-dire ΓK avec KM. Et puisque les deux droites ΓM, MZ sont inégales, et que l'on a appliqué à la plus grande ΓM un parallélogramme compris sous ΓK, KM, qui étant égal à la quatrième partie du quarré παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ[8] ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει[9] τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

quadrati ex MZ æquale ad majorem ΓM applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub ΓK, KM, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo ΓM quam MZ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est congruens ZM commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓZ apotome est secunda.

Quadratum igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρ.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Ἔστω μέση ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ

PROPOSITIO C.

Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit media apotome secunda AB, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex AB æquale ad ΓΔ applicetur ΓE, latitudinem faciens ΓZ; dico ΓZ apotomen esse tertiam.

Sit enim ipsi AB congruens BH; ipsæ igitur AH, HB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ

de MZ, est défaillant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise ΓM en parties commensurables, la puissance de ΓM surpassera la puissance de MZ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΓM (18. 10). Mais la congruente ZM est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓZ est donc un second apotome (déf. trois. 2. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION C.

Le quarré d'un second apotome médial appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

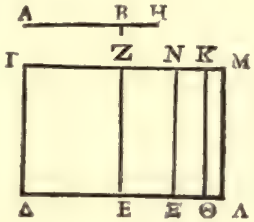
Soient un second apotome médial AB, et une rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓE, qui étant égal au quarré de AB, ait pour largeur la droite ΓZ; je dis que ΓZ est un troisième apotome.

Que BH conviène avec AB; les droites AH, HB seront des médiales, qui étant incommensurables en puissance seulement, comprendront une surface médiale (76. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au quarré πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἔστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα

latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex ΒΗ æquale ad ΚΘ applicetur ΚΛ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΛ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ. Et sunt media quadrata ex ΑΗ, ΗΒ; medium igitur et ΓΛ, et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam totum ΓΛ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΛ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur igitur ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ipsi ΓΔ parallela ducatur ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΛ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Medium autem rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ; medium igitur est et ΖΛ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles, incommensurabilis igitur est longi-

de ΑΗ, ait pour largeur la droite ΓΚ; appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΛ, qui étant égal au quarré de ΒΗ, ait pour largeur la droite ΚΜ (45. 1); le parallélogramme entier ΓΛ sera égal à la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ est médiale; le parallélogramme ΓΛ est donc médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et que le parallélogramme ΓΕ est égal au quarré de ΑΒ, le parallélogramme restant ΖΛ sera égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et menons la droite ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΝΛ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial; le parallélogramme ΖΛ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΗ sera incommensurable en ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ σύμμετρόν ἐστι[1] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ[2]. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα

tudine ipsa AH ipsi HB; incommensurabile igitur est et ex AH quadratum rectangulo sub AH, HB. Sed quadrato quidem ex AH commensurabilia sunt quadrata ex AH, HB, rectangulo verò sub AH, HB commensurabile est rectangulum bis sub AH, HB; incommensurabilia igitur sunt ex AH, HB quadrata rectangulo bis sub AH, HB. Sed quadratis quidem ex AH, HB æquale est ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB æquale

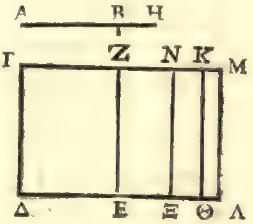


ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΖΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γὰρ σύμ-

est ZA; incommensur abile igitur est ΓΛ ipsi ZΛ. Ut autem ΓΛ ad ZΛ ita est ΓM ad ZM; incommensurabilis igitur est ΓM ipsi ZM longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓM, ZM rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓZ. Dico et tertiam. Quoniam enim commensurabile est ex

longueur avec HB; le quarré de AH est donc incommensurable avec le rectangle sous AH, HB (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des quarrés de AH et de HB est commensurable avec le quarré de AH, et le double rectangle sous AH, HB commensurable avec le rectangle sous AH, HB; la somme des quarrés de AH et de HB est donc incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB. Mais le parallélogramme ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et le parallélogramme ZΛ égal au double rectangle sous AH, HB; le parallélogramme ΓΛ est donc incommensurable avec ZΛ. Mais ΓΛ est à ZΛ comme ΓM est à ZM; la droite ΓM est donc incommensurable en longueur avec la droite ZM (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓM, MZ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓZ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un troisième apotome. Car puisque μετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα καὶ[3] τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ.

AH quadratum quadrato ex HB, commensurabile igitur et ΓΘ ipsi KΛ; quare et ΓK ipsi KM. Et quoniam quadratorum ex AH, HB medium proportionale est rectangulum sub AH, HB, atque est quadrato quidem ex AH æquale ΓΘ, quadrato verò ex HB æquale KΛ, rectangulo autem sub AH, HB æquale NΛ; et ipsorum ΓΘ, KΛ igitur medium proportionale est NΛ; est igitur ut ΓΘ ad NΛ ita NΛ ad



Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς[4] ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ

KΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad NΛ ita est ΓK ad NM, ut verò NΛ ad KΛ ita est NM ad KM; ut igitur ΓK ad NM ita est NM ad KM; rectangulum igitur sub ΓK, KM æquale est quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex ZM. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓM, MZ, et quartæ parti quadrati

le quarré de AH est commensurable avec le quarré de HB, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec KΛ; la droite ΓK est donc aussi commensurable avec KM. Et puisque le rectangle sous AH, HB est moyen proportionnel entre les quarrés des droites AH, HB (55. 10), que ΓΘ est égal au quarré de AH, que KΛ est égal au quarré de HB, et que NΛ est égal au rectangle sous AH, HB, le parallélogramme NΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et KΛ; le parallélogramme ΓΘ est donc à NΛ comme NΛ est à KΛ. Mais ΓΘ est à NΛ comme ΓK est à NM, et NΛ est à KΛ comme NM est à KM (1. 6); la droite ΓK est donc à NM comme NM est à KM; le rectangle sous ΓK, KM est donc égal au quarré de NM, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ZM (17. 10). Et puisque les deux droites ΓM, MZ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓM un parallélogramme, qui ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει[5] τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ex ZM æquale ad ΓM applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo ΓM quam MZ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΓM, MZ commensurabilis est longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓZ apotome est tertia.

Quadratum igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρά.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Εστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν[1] τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ

PROPOSITIO CI.

Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor AB, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex AB æquale ad rationalem ΓΔ applicetur ΓE, latitudinem faciens ΓZ; dico ΓZ apotomen esse quartam.

Sit enim ipsi AB congruens BH; ipsæ igitur AH, HB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum AH,

étant égal à la quatrième partie du quarré de ZM, est défaillant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise ΓM en parties commensurables, la puissance de ΓM surpassera la puissance de MZ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΓM (18. 10); aucune des droites ΓM, MZ n'est donc commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓZ est donc un troisième apotome (déf. trois. 3. 10). Le quarré, etc.

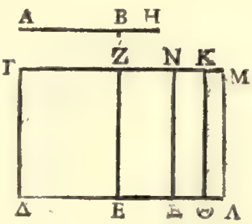
PROPOSITION CI.

Le quarré d'une mineure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

Soient une mineure AB, et une rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓE, qui étant égal au quarré de AB, ait ΓZ pour largeur; je dis que la droite ΓZ est un quatrième apotome.

Car que BH conviène avec AB; les droites AH, HB seront incommensurables en puissance; la somme des quarrés des droites AH, HB sera rationelle, et le τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον[2] τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παρά-

HB quadratis rationale, rectangulum verò bis sub AH, HB medium. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ, latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex BH æquale ΚΛ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB. Atque est compositum ex quadratis ipsarum AH, HB rationale; rationale igitur est et ΓΛ, et ad ra-



κειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω οὖν καὶ[3] ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν

tionalem ΓΔ applicatur latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur et ΓΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam totum ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex AB; reliquum igitur ΖΛ æquale est rectangulo bis sub AH, HB. Secetur igitur et ZM bifariam in puncto N, et ducatur per N alterutri ipsarum ΓΔ, ΜΛ paral-

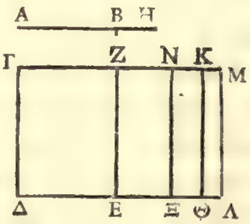
double rectangle sous AH, HB sera médial (77. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au quarré de AH, ait ΓΚ pour largeur, et appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΛ, qui étant égal au quarré de BH, ait KM pour largeur (45. 1), le parallélogramme entier ΓΛ sera égal à la somme des quarrés des droites AH, HB. Mais la somme des quarrés des droites AH, HB est rationelle; le parallélogramme ΓΛ est donc rationel; mais il est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationelle et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et que ΓΕ est égal au quarré de AB; le parallélogramme restant ΖΛ sera égal au double rectangle sous AH, HB (7. 2). Coupons ZM en deux parties égales au point N, et par le point N menons ΝΞ parallèle aux droites ΓΔ, ΜΛ; chacun des parallélo-

ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν[4] ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΖΛ· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ισον δέ ἐστι[5] τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστι[6] τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ως δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ[7] πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. Επεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Καὶ ἔστι τῷ

lela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΛ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ medium est, et est æquale ipsi ΖΛ; et ΖΛ igitur medium est, et ad rationalem ΖΕ applicatur latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΗ, ΗΒ rationale est, rectangulum verò bis sub ΑΗ, ΗΒ medium, incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΗ, ΗΒ rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Æquale autem est ΓΛ quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, rectangulo verò bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΖΛ; incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΖΜ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et quartam. Quoniam enim ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles; incommensurabile igitur et ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Atque est quadrato quidem

grammes ΖΞ, ΝΛ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial et égal à ΖΛ, le parallélogramme ΖΛ sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΖΕ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ est rationelle, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera incommensurable avec le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le parallélogramme ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et ΖΛ égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; le parallélogramme ΓΛ est donc incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΖΜ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΖΜ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un quatrième apotome. Car, puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont incommensurables en puissance, le quarré de ΑΗ sera incommensurable avec le μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ως δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ

ex AH æquale ΓΘ, quadrato verò ex HB æquale KΛ; incommensurabile igitur est ΓΘ ipsi KΛ. Ut autem ΓΘ ad KΛ ita est ΓK ad KM; incommensurabilis igitur est ΓK ipsi KM longitudine. Et quoniam quadratorum ex AH, HB medium proportionale est rectangulum sub AH, HB, atque est æquale quadrato quidem ex AH ipsum ΓΘ, quadrato verò ex HB ipsum KΛ, rectangulo autem sub AH, HB ipsum NΛ; ipsorum igitur ΓΘ, KΛ medium proportionale est NΛ;



πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Αλλ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. Ως δὲ τὸ ΝΛ[8] πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ; τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς

est igitur ut ΓΘ ad NΛ ita NΛ ad KΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad NΛ ita est ΓK ad NM. Ut autem NΛ ad KΛ ita est NM ad KM; ut igitur ΓK ad NM ita est NM ad KM; rectangulum igitur sub ΓK, KM æquale est quadrato ex MN, hoc est quartæ parti quadrati ex ZM.

quarré de HB. Mais ΓΘ est égal au quarré de AH, et KΛ égal au quarré de HB; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec KΛ. Mais ΓΘ est à KΛ comme ΓK est à KM; la droite ΓK est donc incommensurable en longueur avec KM. Et puisque le rectangle sous AH, HB est moyen proportionnel entre le quarré de AH et le quarré de HB (55. lemm. 10), que le parallélogramme ΓΘ est égal au quarré de AH, le parallélogramme KΛ égal au quarré de HB, et le parallélogramme NΛ égal au rectangle sous AH, HB, le parallélogramme NΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et KΛ; la droite ΓΘ est donc à NΛ comme NΛ est à KΛ. Mais ΓΘ est à NΛ comme ΓK est à NM, et NΛ est à KΛ comme NM est à KM; la droite ΓK est donc à NM comme NM est à KM; le rectangle sous ΓK, KM est donc égal au quarré de NM, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ZM (17. 6). Et

ΖΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ9, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΜΖ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est tota ΓΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quarta.

Quadratum igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρϐ.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

PROPOSITIO CII.

Quadratum ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Sit recta ΑΒ quæ cum rationali medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse quintam.

puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΜΖ, est défaillant d'une figure quarrée, que ce rectangle est celui qui est compris sous ΓΚ, ΚΜ, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du quarré d'une droite incommensurable avec ΓΜ (19. 10). Mais la droite entière ΓΜ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION CII.

Le quarré d'une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

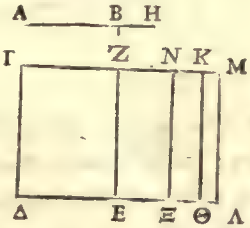
Que la droite ΑΒ fasse avec une surface rationelle un tout médial, et soit la rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que ΓΖ est un cinquième apotome.

Ἔστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH· αἱ ἄρα AH, HB εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ KΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB. Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB ἅμα μέσον ἐστί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB, ὧν τὸ ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB· λοιπὸν ἄρα τὸ ZΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB. Τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N, καὶ ἤχθω διὰ[1] τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, MΛ παράλληλος ἡ NΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ZΞ, NΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. Καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB ῥητόν ἐστι, καὶ ἔστιν[2] ἴσον τῷ

Sit enim ipsi AB congruens BH; ipsæ igitur AH, HB rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ; quadrato verò ex HB æquale KΛ; totum igitur ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB. Compositum autem ex quadratis ipsarum AH, HB simul medium est; medium igitur est ΓΛ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur latitudinem faciens ΓM; rationalis igitur est ΓM, et incommensurabilis ipsi ΓΔ. Et quoniam totum ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB, quorum ΓE æquale est quadrato ex AB; reliquum igitur ZΛ æquale est rectangulo bis sub AH, HB. Secetur igitur ZM bifariam in N, et ducatur per N alterutri ipsarum ΓΔ, MΛ parallela NΞ; utrumque igitur ipsorum ZΞ, NΛ æquale est rectangulo sub AH, HB. Et quoniam rectangulum bis sub AH, HB rationale est, et est æquale ipsi ZΛ;

Car que BH conviène avec AB; les droites AH, HB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant rationel (78. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui soit égal au quarré de AH; appliquons aussi à cette droite un parallélogramme KΛ, qui soit égal au quarré de HB (45. 1), le parallélogramme entier ΓΛ sera égal à la somme des quarrés des droites AH, HB. Mais la somme des quarrés des droites AH, HB est médiale; le parallélogramme ΓΛ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a ΓM pour largeur; la droite ΓM est donc rationelle et incommensurable avec ΓΔ (23. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et que ΓE est égal au quarré de AB, le parallélogramme restant ZΛ sera égal au double rectangle sous AH, HB (7. 2). Coupons la droite ZM en deux parties égales en N, et par le point N menons la droite NΞ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΔ, MΛ; chacun des parallélogrammes ZΞ, NΛ sera égal au rectangle sous AH, HB. Et puisque le double rectangle sous AH, HB est rationel, et qu'il est égal à ZΛ, ΖΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ως δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν[3] ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. Ομοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ[4] τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ως δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ

rationale igitur est ΖΛ. Et ad rationalem ΕΖ applicatur latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quidem ΓΛ medium est, ipsum verò ΖΛ rationale; incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et quintam. Similiter enim demonstrabimus rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et quoniam incommensurabile est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, æquale autem quadratum ex ΑΗ ipsi ΓΘ, quadratum verò ex ΗΒ ipsi ΚΛ; incommensurabile igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita ΓΚ ad ΚΜ;



le parallélogramme ΖΛ sera rationel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque ΓΛ est médial, et ΖΛ rationel, le parallélogramme ΓΛ sera incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un cinquième apotome. Nous démontrerons semblablement que le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ. Puisque le quarré de ΑΗ est incommensurable avec le quarré de ΗΒ, que le quarré de ΑΗ est égal à ΓΘ, et que le quarré de ΗΒ est égal à ΚΛ, le parallélogramme ΓΘ sera incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ

ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ[5]· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

incommensurabilis igitur ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est congruens ΖΜ commensurabilis expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quinta.

Quadratum igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ργ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι[1] ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

PROPOSITIO CIII.

Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit recta ΑΒ quæ cum medio medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse sextam.

est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΖΜ, est défaillant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ (19. 10). Mais la congruente ΖΜ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10). Le quarré, etc.

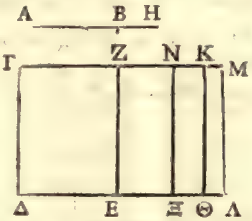
PROPOSITION CIII.

Le quarré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface médiale un tout médial; soit la rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que la droite ΓΖ est un sixième apotome.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν[2] ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς

Sit enim ipsi AB congruens BH; ipsæ igitur AH, HB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum bis sub AH, HB medium, adhuc autem incommensurabilia ex AH, HB quadrata rectangulo bis sub AH, HB. Applicetur igitur ad ΓΔ quadrato quidem ex AH æquale ΓΘ latitudinem faciens ΓK, quadrato



ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ[3] καὶ τὸ ΓΛ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ[4] τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα

verò ex BH ipsum KΛ; totum igitur ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB; medium igitur est et ΓΛ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur latitudinem faciens ΓM; rationalis igitur est ΓM, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Quoniam igitur ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB, quorum ΓE æquale est quadrato ex AB; reliquum igitur ZΛ æquale est rectangulo bis sub AH, HB. Atque est rectangulum bis sub AH, HB medium;

Car que BH convière avec AB; les droites AH, HB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces mêmes droites étant incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB (79. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au quarré de AH, ait ΓK pour largeur; appliquons à KΘ un parallélogramme KΛ égal au quarré de BH; le parallélogramme entier ΓΛ sera égal à la somme des quarrés des droites AH, HB; le parallélogramme ΓΛ sera donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a ΓM pour largeur; la droite ΓM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et que ΓE est égal au quarré de AB, le parallélogramme restant ZΛ sera égal au double rectangle sous AH, HB (7. 2). Mais le double rectangle sous AH, HB est médial; le parallélogramme μέσον ἐστί. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν[5] ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ[6] τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ[7] ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ

et ZΛ igitur medium est. Et ad rationalem ZE applicatur latitudinem faciens ZM; rationalis igitur est ZM, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata ex AH, HB incommensurabilia sunt rectangulo bis sub AH, HB, atque est quadratis quidem ex AH, HB æquale ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB æquale ZΛ; incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ZΛ. Ut autem ΓΛ ad ZΛ ita est ΓM ad MZ; incommensurabilis igitur est ΓM ipsi MZ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΓM, MZ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓZ. Dico et sextam. Quoniam enim ZΛ æquale est rectangulo bis sub AH, HB, secetur bifariam ZM in N, et ducatur per N ipsi ΓΔ parallela NΞ; utrumque igitur ipsorum ZΞ, NΛ æquale est rectangulo

ZΛ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ZE, et il a ZM pour largeur; la droite ZM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ. Et puisque la somme des quarrés des droites AH, HB est incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB, que ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et que ZΛ est égal au double rectangle sous AH, HB, le parallélogramme ΓΛ sera incommensurable avec ZΛ. Mais ΓΛ est à ZΛ comme ΓM est à MZ (1. 6); la droite ΓM est donc incommensurable en longueur avec la droite MZ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓM, MZ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓZ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un sixième apotome. Car puisque ZΛ est égal au double rectangle sous AH, HB, coupons ZM en deux parties égales en N, et par le point N menons la droite NΞ parallèle à ΓΔ, chacun des parallélogrammes ZΞ, NΛ sera ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Αλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ[8] ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ[9] τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ως δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν[10] ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΓΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν[11] ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ[12] τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ[13]. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles, incommensurabile igitur est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Sed quadrato quidem ex ΑΗ æquale est ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale est ΚΛ; incommensurabile igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita est ΓΚ ad ΚΜ; incommensurabilis igitur est ΓΚ ipsi ΚΜ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΛ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΝΛ; est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Et eâdem ratione ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et neutra ipsarum commensurabilis est expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est sexta.

Quadratum igitur, etc.

égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont incommensurables en puissance, le quarré de ΑΗ sera incommensurable avec le quarré de ΗΒ. Mais ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, et ΚΛ égal au quarré de ΗΒ; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc incommensurable avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ (55. lem. 10), que ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au quarré de ΗΒ, et que ΝΛ est égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Par la même raison, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ; aucune des droites ΓΜ, ΜΖ n'est donc commensurable avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Le quarré, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρδ΄.

Η τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Εστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω[1] ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

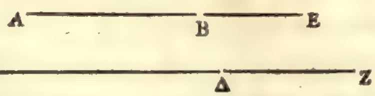
Επεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς

PROPOSITIO CIV.

Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est et ordine eadem.

Sit apotome AB, et ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ apotomen esse atque ordine eamdem quæ AB.

Quoniam enim apotome est AB, sit ipsi congruens BE; ipsæ AE, EB igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quæ est ipsius AB ad ΓΔ ratio eadem fiat ipsius BE ad ΔZ;



ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἓν ἄρα ἐστὶ[2] πρὸς ἕν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΕ μὲν[3] τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. Καὶ αἱ[4] ΑΕ, ΕΒ ῥηταί εἰσι δυ-

et ut una igitur est ad unam, omnes sunt ad omnes; est igitur et ut tota AE ad totam ΓZ ita AB ad ΓΔ. Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur et AE quidem ipsi ΓZ, ipsa verò BE ipsi ΔZ. Et AE, EB rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles;

PROPOSITION CIV.

Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

Soit l'apotome AB, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec AB; je dis que ΓΔ est un apotome, et que cet apotome est du même ordre que AB.

Car puisque AB est un apotome, que BE lui conviène; les droites AE, EB seront des rationelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Faisons en sorte que la raison de BE à ΔZ soit la même que celle de AB à ΓΔ. Un antécédent est donc à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5); la droite entière AE est donc à la droite entière ΓZ comme AB est à ΓΔ. Mais AB est commensurable en longueur avec ΓΔ; la droite AE est donc commensurable avec ΓZ, et la droite BE avec ΔZ (10. 10). Mais les droites AE, EB sont des rationelles commensurables en puissance seulement; les νάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Επεὶ γάρ[5] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν[6] ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ητοι δὴ[7] ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδετέρα[8] τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ

et ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓΔ. Dico et ordine eamdem quæ ΑΒ. Quoniam enim est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΒΕ ad ΖΔ; permutando igitur est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ. Vel autem ΑΕ quam ΕΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΑΕ quam ΕΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΓΖ. Si autem ΕΒ, et ΔΖ. Si autem neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, et neutra ipsarum ΓΖ, ΖΔ. Si autem ΑΕ quam ΕΒ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ rationali longitudine,

droites ΓΖ, ΖΔ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement (10. 10); la droite ΓΔ est donc un apotome (74. 10). Je dis que cet apotome est du même ordre que ΑΒ. Car puisque ΑΕ est à ΓΖ comme ΒΕ est à ΖΔ, par permutation ΑΕ sera à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ. Mais la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du quarré d'une droite commensurable, ou incommensurable avec ΑΕ. Si donc la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du quarré d'une droite commensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΓΖ. Si ΑΕ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle. Si ΕΒ est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΔΖ le sera aussi; et si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable en longueur avec elle; et si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du quarré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΓΖ. Si la droite ΑΕ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle; si ΒΕ est commensurable avec la rationelle exposée, δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΖΔ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

et ipsa ΓΖ. Si autem ΒΕ, et ΖΔ. Si autem neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, neutra ipsarum ΓΖ, ΖΔ; apotome igitur est ΓΔ et ordine eadem quæ ΑΒ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρέ.

Η τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Εστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Επεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ[1]· αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα

PROPOSITIO CV.

Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome ΑΒ, et ipsi ΑΒ longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ mediæ apotomen esse et ordine eamdem quæ ΑΒ.

Quoniam enim mediæ apotome est ΑΒ, sit ipsi congruens ΒΕ; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et fiat ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΒΕ ad ΔΖ, commensurabilis igitur et ΑΕ ipsi ΓΖ, ipsa verò ΒΕ ipsi ΔΖ; ipsæ autem ΑΕ, ΕΒ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ΓΖ, ΖΔ igitur mediæ sunt

ΖΔ le sera aussi; et si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle; la droite ΓΔ est donc une apotome, et cet ápotome est du même ordre que ΑΒ (déf. trois. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

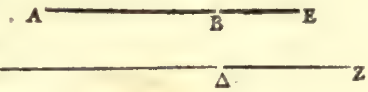
PROPOSITION CV.

Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

Que ΑΒ soit un apotome d'une médiale, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est un apotome d'une médiale, et que cet apotome est du même ordre que ΑΒ.

Car, puisque ΑΒ est un apotome d'une médiale, que ΒΕ conviène avec la droite ΑΒ, les droites ΑΕ, ΕΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement (76. 10). Faisons en sorte que ΑΒ soit à ΓΔ comme ΒΕ est à ΔΖ; la droite ΑΕ sera commensurable avec ΓΖ, et la droite ΒΕ commensurable avec ΔΖ; mais les droites ΑΕ, ΕΒ sont des médiales commensurables en puissance seulement; les μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι[2]· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Επεὶ γάρ[3] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ[4]· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ[5]. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ[6] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἔσται[7] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· εἴτε μέσον ἐστὶ[8] τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον ἐστὶ[9] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

potentiâ solùm commensurabiles; mediæ igitur apotome est ΓΔ. Dico et ordine esse eamdem quæ AB. Quoniam enim est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; est igitur et ut ex AE quadratum ad rectangulum sub AE, EB ita ex ΓZ quadratum ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ. Commensurabile autem ex AE quadratum quadrato ex ΓZ; commensurabile igitur est et sub AE, EB rectangulum rectangulo sub ΓZ, ZΔ. Et si igitur rationale est rectangulum sub AE, EB, rationale erit et rectangulum sub ΓZ, ZΔ; et si medium est rectangulum sub AE, EB, medium est et rectangulum sub ΓZ, ZΔ; mediæ igitur apotome est ΓΔ atque ordine eadem quæ AB. Quod oportebat ostendere.



droites ΓZ, ZH sont donc des médiales commensurables en puissance seulement; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale. Je dis que cette droite est un apotome du même ordre que AB. Car, puisque AE est à EB comme ΓZ est à ZΔ, le quarré de AE sera au rectangle sous AE, EB comme le quarré de ΓZ est au rectangle sous ΓZ, ZΔ (1. 6); mais le quarré de AE est commensurable avec le quarré de ΓZ; le rectangle sous AE, EB est donc commensurable avec le rectangle sous ΓZ, ZΔ. Si donc le rectangle sous AE, EB est rationel, le rectangle sous ΓZ, ZΔ sera rationel; et si le rectangle sous AE, EB est médial, le rectangle sous ΓZ, ZΔ sera médial; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que AB. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρς'.

Η τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Εστω γάρ[1] ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστί.

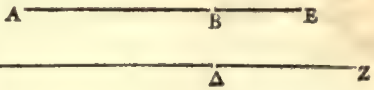
Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτὰ τῷ προτέρῳ[2]. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Επεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν[3] ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ[4]. Σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. Ρητὸν

PROPOSITIO CVI.

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit enim minor AB, et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ minorem esse.

Fiant enim eadem quæ suprà. Et quoniam AE, EB potentiâ sunt incommensurabiles, et ΓZ, ZΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Quoniam igitur est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; est igitur et ut ex AE quadratum ad ipsum ex EB ita ex ΓZ quadratum ad ipsum ex ZΔ; componendo igitur est ut ex AE, EB quadrata ad ipsum ex EB ita ex ΓZ, ZΔ quadrata ad ipsum ex ZΔ. Commensurabile autem est ex BE quadratum quadrato ex ΔZ; commensurabile igitur et compositum ex ipsarum AE, EB quadratis composito ex ipsarum ΓZ, ZΔ quadratis. Rationale autem est compositum ex



PROPOSITION CVI.

Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

Soit AB une mineure, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que ΓΔ est une mineure.

Car faisons les mêmes choses qu'auparavant. Puisque les droites AE, EB sont incommensurables en puissance, les droites ΓZ, ZΔ seront incommensurables en puissance. Et puisque AE est à EB comme ΓZ est à ZΔ, le quarré de AE sera au quarré de EB comme le quarré de ΓZ est au quarré de ZΔ (22.6); donc, par addition, la somme des quarrés des droites AE, EB est au quarré de EB comme la somme des quarrés des droites ΓZ, ZΔ est au quarré de ZΔ (18.5). Mais le quarré de BE est commensurable avec le quarré de ZΔ; la somme des quarrés des droites AE, EB est donc commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓZ, ZΔ (10.10). Mais la somme des quarrés des droites AE, EB est rationelle; la somme δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν[5] AE, EB τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ[6]· σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ[7], σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB· μέσον ἄρα ἐστὶ[8] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsarum AE, EB quadratis; rationale igitur est et compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis. Rursus, quoniam est ut ex AE quadratum ad rectangulum sub AE, EB ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; commensurabile autem ex AE quadratum quadrato ex ΓΖ, commensurabile igitur est et sub AE, EB rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Medium autem rectangulum sub AE, EB; medium igitur est et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; minor igitur est ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

ΑΛΛΩΣ[1].

Εστω ἐλάσσων ἡ A, καὶ τῇ A σύμμετρος ἔστω[2] ἡ B· λέγω ὅτι ἡ B ἐλάσσων ἐστίν.

Εκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητὴ[3], καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ τετάρτη[4]

ALITER.

Sit minor A, et ipsi A commensurabilis sit B; dico B minorem esse.

Exponatur enim ΓΔ rationalis, et quadrato ex A æquale ad ipsam ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; apotome igitur est quarta ΓΖ.

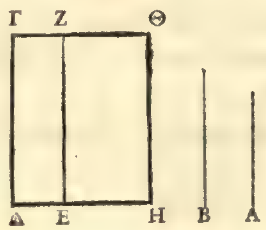
des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc aussi rationelle. De plus, puisque le quarré de AE est au rectangle sous AE, EB comme le quarré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ, et que le quarré de AE est commensurable avec le quarré de ΓΖ; le rectangle sous AE, EB sera commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le rectangle sous AE, EB est médial; le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ est donc médial; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial (24. 10); la droite ΓΔ est donc une mineure (77. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

AUTREMENT.

Soit A une mineure, et que B soit commensurable avec A; je dis que la droite B est une mineure.

Soit exposée la rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de A, ait ΓΖ pour largeur; la droite ΓΖ sera un quatrième ἡ ΓΖ. Τῷ[5] δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραϐεϐλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. Επεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ[6] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Αλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ[7] τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ[8] τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ. Ως δὲ τὸ ΓΕ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως ἐστὶν[9] ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΘ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν[10] ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Αποτομὴ δέ ἐστι τετάρτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ τετάρτη· τὸ ΖΗ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς[11] καὶ ἀποτομῆς τετάρτης. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης[12]· ἡ τὸ χωρίον ἄρα δυναμένη ἐλάσσων ἐστί. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἐλάττων ἄρα[13] ἐστὶν ἡ Β. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quadrato autem ex B æquale ad ZE applicetur ZH latitudinem faciens ZΘ. Quoniam igitur commensurabilis est A ipsi B; commensurabile igitur est et ex A quadratum quadrato ex B. Sed quadrato quidem ex A æquale est ΓE, quadrato verò ex B æquale est ZH; commensurabile igitur est ΓE ipsi ZH. Ut autem ΓE ad ZH ita est ΓZ ad ZΘ; commensurabilis igitur est ΓZ ipsi ZΘ longitudine. Apotome autem est quarta ΓZ; apotome igitur est et ZΘ quarta; spatium ZH igitur continetur sub rationali et apotome quartâ. Si autem spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ; recta spatium igitur potens minor est. Potest autem ipsum ZH ipsa B; minor igitur est B. Quod oportebat ostendere.



apotome (101. 10). Appliquons à ZE un parallélogramme ZH, qui étant égal au quarré de B, ait ZΘ pour largeur. Puisque A est commensurable avec B, le quarré de A sera commensurable avec le quarré de B. Mais ΓE est égal au quarré de A, et ZH égal au quarré de B; le parallélogramme ΓE est donc commensurable avec ZH. Mais ΓE est à ZH comme ΓZ est à ZΘ (1.6); la droite ΓZ est donc commensurable en longueur avec ZΘ (10. 10); mais la droite ΓZ est un quatrième apotome; la droite ZΘ est donc un quatrième apotome (104. 10); la surface ZH est donc comprise sous une rationelle et un quatrième apotome. Mais si une surface est comprise sous une rationelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure (95. 10). Mais la droite B peut la surface ZH; la droite B est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ΄.

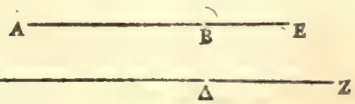
Η τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ[1] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ[2] ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

PROPOSITIO CVII.

Recta ei quæ cum rationali medium totum facit commensurabilis et ipsa cum rationali medium totum faciens est.

Sit cum rationali medium totum faciens AB, et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ cum rationali medium totum facere.



Εστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Ομοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ[3] ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρον ἐστι τὸ[4] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ

Sit enim ipsi AB congruens BE; ipsæ AE, EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum AE, EB quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale. Et eadem construantur. Congruenter præcedentibus utique ostendemus, rectas ΓZ, ZΔ in eâdem ratione esse cum ipsis AE, EB, et commensurabile esse compositum ex ipsarum AE, EB quadratis composito ex ipsarum ΓZ, ZΔ quadratis, rectangulum

PROPOSITION CVII.

La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationelle un tout médial.

Que la droite AB fasse avec une surface rationelle un tout médial, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que ΓΔ fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car que BE conviène avec AB, les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (78. 10). Faisons la même construction. Nous démontrerons comme auparavant que les droites ΓZ, ZΔ sont en même raison que les droites AE, EB; que la somme des quarrés des droites AE, EB est commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓZ, ZΔ, et que le ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

verò sub AE, EB rectangulo sub ΓZ, ZΔ; quare et ΓZ, ZΔ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΓZ, ZΔ quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; recta ΓΔ igitur est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΑΛΛΩΣ[1].

Εστω[2] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ ΓΖ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. Επεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Αλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ

ALITER.

Sit cum rationali medium totum faciens A, et B commensurabilis ipsi; dico B cum rationali medium totum facere.

Exponatur rationalis ΓΔ, et quadrato quidem ex A æquale ad ΓΔ applicetur ΓE latitudinem faciens ΓZ; apotome igitur est quinta ΓZ. Quadrato autem ex B æquale ad ipsam ZE applicetur ZH latitudinem faciens ZΘ. Quoniam igitur commensurabilis est A ipsi B, commensurabile est et ex A quadratum quadrato ex B. Sed quadrato quidem ex A æquale ΓE; quadrato

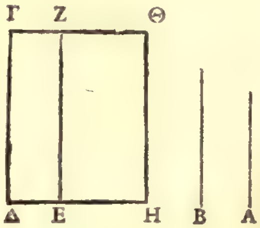
rectangle sous AE, EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓZ, ZΔ; les droites ΓZ, ZΔ sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant médiale la somme de leurs quarrés, et rationel le rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite ΓΔ fait donc avec une surface rationelle un tout médial (78.10). Ce qu'il fallait démontrer.

AUTREMENT.

Que A fasse avec une rationelle un tout médial, et que B soit commensurable avec A; je dis que B fait avec une surface rationelle un tout médial.

Soit exposée la rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓE, qui étant égal au quarré de A, ait ΓZ pour largeur; la droite ΓZ sera un cinquième apotome (102. 10). Appliquons à ZE un parallélogramme ZH, qui étant égal au quarré de B, ait ZΘ pour largeur. Puisque A est commensurable avec B, le quarré de A sera commensurable avec le quarré de B. Mais ΓE est égal au quarré de A, ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Αποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ, ῥητὴ[3] δὲ ἡ ΖΕ.

autem ex Β æquale ΖΗ; commensurabile igitur est ΓΕ ipsi ΖΗ; commensurabilis igitur et ΓΖ ipsi ΖΘ longitudine. Apotome autem quinta ΓΖ; apotome igitur est quinta et ΖΘ, rationalis verò ΖΕ.



Εὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα[4] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Si autem spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens cum rationali medium totum facit. Potest autem ipsum ΖΗ ipsa Β; ipsa igitur Β cum rationali medium totum faciens est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρη'.

Η τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

PROPOSITIO CVIII.

Recta ei quæ cum medio medium totum facit commensurabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

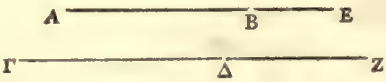
et ΖΗ au quarré de Β; le parallélogramme ΓΕ est donc commensurable avec ΖΗ; la droite ΓΖ est donc commensurable en longueur avec ΖΘ. Mais ΓΖ est un cinquième apotome; la droite ΖΘ est donc un cinquième apotome (104. 10). Mais la droite ΖΕ est rationelle : or, si une surface est comprise sous une rationelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface fait avec une surface rationelle un tout médial (96. 10). Mais la droite Β peut la surface ΖΗ; la droite Β fait donc avec une surface rationelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CVIII.

Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.

Εστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ ἔστω[1] σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ[2] ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Sit cum medio medium totum faciens ipsa AB, et ipsi AB sit commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ cum medio medium totum facere.



Εστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. Καὶ εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε[3] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'

Sit enim ipsi AB congruens BE, et eadem construantur; ipsæ AE, EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsarum quadratis rectangulo sub ipsis. Et sunt, ut ostensum est, AE, EB commensurabiles ipsis ΓZ, ZΔ, et compositum ex ipsarum AE, EB quadratis composito ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ, rectangulum autem sub AE, EB rectangulo sub ΓZ, ZΔ; et ipsæ ΓZ, ZΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsa-

Que la droite AB fasse avec une surface médiale un tout médial, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que la droite ΓΔ fait aussi avec une surface médiale un tout médial.

Que BE conviène avec AB, et faisons la même construction; les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces droites étant incommensurable avec le rectangle compris sous ces mêmes droites (79. 10). Et puisque les droites AE, EB sont commensurables avec les droites ΓZ, ZΔ, ainsi qu'on l'a démontré; que la somme des quarrés des droites AE, EB est aussi commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓZ, ZΔ, et que le rectangle sous AE, EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓZ, ZΔ, les droites ΓZ, ZΔ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces droites étant aussi incommensurable avec αὐτῶν τετραγώνων[4] τῷ ὑπ' αὐτῶν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

rum quadratis rectangulo sub ipsis; ipsa igitur ΓΔ cum medio medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρθ'.

Απὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομὴ, ἢ ἐλάττων.

Απὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον[1] δυναμένη τὸ ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομὴ, ἢ ἐλάττων.

Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΒΔ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. Επεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν[2] ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ· ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον

PROPOSITIO CIX.

Medio a rationali detracto, recta reliquum spatium potens una duarum irrationalium fit, vel apotome, vel minor.

A rationali enim ΒΓ medium auferatur ΒΔ; dico rectam, quæ reliquum spatium ΕΓ potest, unam duarum irrationalium fieri, vel apotomen, vel minorem.

Exponatur enim rationalis ΖΗ, et ipsi quidem ΒΓ æquale ad ΖΗ applicetur rectangulum parallelogrammum ΗΘ, ipsi verò ΒΔ æquale auferatur ΗΚ; reliquum igitur ΕΓ æquale est ipsi ΛΘ. Quoniam igitur rationale quidem est ΒΓ; medium verò ΒΔ, æquale ΒΓ quidem ipsi ΗΘ, ipsum verò ΒΔ ipsi ΗΚ; rationale quidem igitur est ΗΘ,

le rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite ΓΔ fera avec une surface médiale un tout médial (79. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

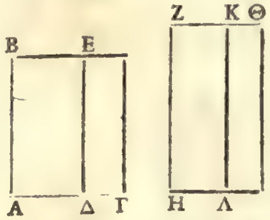
PROPOSITION CIX.

Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationelle, la droite qui peut la surface restante est une des deux irrationelles suivantes ; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

Qu'une surface médiale ΒΔ soit retranchée d'une surface rationelle ΒΓ ; je dis que la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationelles suivantes ; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

Car soit exposée une rationelle ΖΗ ; appliquons à ΖΗ un parallélogramme rectangle ΗΘ qui soit égal à ΒΓ, et retranchons ΗΚ égal à ΒΔ ; le reste ΕΓ sera égal à ΛΘ. Puisque ΒΓ est rationel, que ΒΔ est médial, que ΒΓ est égal à ΗΘ, et que ΒΔ est égal à ΗΚ, le parallélogramme ΗΘ sera rationel, et le parallélogramme ΗΚ méδὲ τὸ ΗΚ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα μὲν[3] ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. Ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου[4]. Δυνάσθω πρότερον τῷ

medium verò HK; et ad rationalem ZH applicatur; rationalis igitur quidem ZΘ et commensurabilis ipsi ZH longitudine, rationalis verò ZK et incommensurabilis ipsi ZH longitudine; incommensurabilis igitur est ZΘ ipsi ZH longitudine; ipsæ ZΘ, ZK igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est KΘ, ipsi autem congruens KZ. Vel autem ΘZ quam ZK plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili.



ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιέχομενον[5] ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΓΕ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ

Possit primum quadrato ex rectâ incommensurabili. Atque est tota ΘZ commensurabilis expositæ rationali ZH longitudine; apotome igitur prima est KΘ. Spatium autem sub rationali et apotome primâ contentum recta potens apotome est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΓE, apotome est. Si autem ΘZ quam ZK plus

dial. Mais ces parallélogrammes sont appliqués à la rationelle ZH; la droite ZΘ est donc rationelle et commensurable en longueur avec ZH (21. 10), et la droite ZK rationelle et incommensurable en longueur avec ZH (23. 10); la droite ZΘ est donc incommensurable en longueur avec ZH (13. 10); les droites ZΘ, ZK sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite KΘ est donc un apotome, et KZ est la droite qui convient à KΘ (74. 10): or, la puissance de ΘZ surpasse la puissance de ZK du quarré d'une droite ou commensurable ou incommensurable avec ΘZ. Qu'elle la surpasse d'abord du quarré d'une droite incommensurable. Mais la droite entière ΘZ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ZH; la droite KΘ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationelle et un premier apotome est elle-même un apotome (92. 10); la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΓE, est donc un apotome. Si la puissance de ΘZ surpasse la puissance de ZK du quarré μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα[6] τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιέχομενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν[7]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et est tota ΖΘ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur quarta est ΚΘ. Spatium autem sub rationali et apotome quartâ contentum recta potens minor est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, minor est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρι'.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία· ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ

PROPOSITIO CX.

Rationali a medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum faciens.

A medio enim ΒΓ rationale auferatur ΒΔ; dico rectam, quæ reliquum ΕΓ potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam cum rationali medium totum facientem.

Exponatur enim rationalis ΖΗ, et applicentur similiter spatia; est igitur consequenter rationalis

d'une droite incommensurable avec ΘΖ, la droite ΚΘ sera un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10), parce que la droite entière ΘΖ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ. Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationelle et un quatrième apotome est une mineure (95. 10); la droite qui peut la surface ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CX.

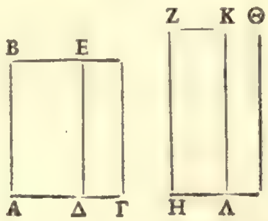
Une surface rationelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Retranchons la surface rationelle ΒΔ de la surface mediale ΒΓ; je dis que la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationelles suivantes; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car soit exposée une rationelle ΖΗ; appliquons semblablement des surfaces à ΖΗ;

μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ[1] ἡ ΖΚ. Ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν

quidem ΖΘ, et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine. Rationalis autem ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΖΗ longitudine; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΚΘ, et ipsi congruens ΖΚ. Vel autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi



ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ δευτέρα[2] ἡ ΚΘ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη, μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν[3]. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον[4] δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ[5], καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ

commensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur est secunda ΚΘ. Rationalis autem ΖΗ; quare ipsa potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome prima est. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine;

la droite ΖΘ sera conséquemment une rationelle, et cette droite sera incommensurable en longueur avec ΖΗ (21. 10); mais la droite ΖΚ est rationelle, et commensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΚΘ est donc un apotome, et ΖΚ convient avec cette droite (74. 10). Or, la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΘΖ. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un second apotome (déf. trois. 2. 10). Mais ΖΗ est une rationelle; la droite qui peut ΑΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc un premier apotome d'une médiale (93. 10). Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite incommensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée

ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα[6] πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

apotome igitur quinta est ΚΘ; quare recta potens spatium ΕΓ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρια΄.

PROPOSITIO CXI.

Απὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέτρου τῷ ὅλῳ, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Αφῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ, ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ τοῦ[1] μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Επεὶ γὰρ μέσον 'στὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρόν 'στι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ[2], τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστι[3] καὶ ἡ ΘΖ

Medio a medio detracto incommensurabili toti, reliquæ duæ rationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum faciens.

Auferatur enim ut in propositis figuris a medio ΒΓ medium ΒΔ, incommensurabile toti; dico rectam, quæ potest spatium ΕΓ, unam esse duarum irrationalium, vel mediæ apotomen secundam, vel cum medio medium totum facientem.

Quoniam enim medium est utrumque ipsorum ΒΓ, ΒΔ, et incommensurabile est ΒΓ ipsi ΒΔ, hoc est ΗΘ ipsi ΗΚ, incommensurabilis

ΖΗ, la droite ΚΘ sera un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10); la droite qui peut la surface ΕΓ fait donc avec une surface rationelle un tout médial (96. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

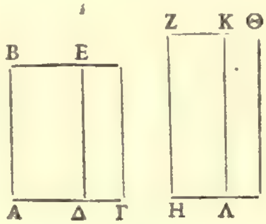
PROPOSITION CXI.

Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable avec la surface entière, il résulte deux droites irrationelles; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Retranchons, comme dans les figures précédentes, de la surface médiale ΒΓ la surface médiale ΒΔ, incommensurable avec la surface entière; je dis que la droite qui peut ΕΓ est une des deux irrationelles suivantes; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Car puisque chacun des parallélogrammes ΒΓ, ΒΔ est médial, et que ΒΓ est incommensurable avec ΒΔ, c'est-à-dire ΗΘ avec ΗΚ, la droite ΘΖ sera incomτῇ ΖΚ· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. Εἰ μὲν δὴ[4] ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΖΗ μήκει[5]· ἀποτομὴ ἐστιν ἄρα τρίτη[6] ἡ ΚΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης

est et ΘΖ ipsi ΖΚ; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΘΚ. Si quidem igitur ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome est igitur tertia ΚΘ. Rationalis autem ΚΛ, rectangulum verò sub ratio-



περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα[7]. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα[8] τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει· ἀποτομὴ ἐστιν ἄρα ἕκτη ἡ ΚΘ[9]. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ

nali et apotome tertiâ contentum irrationale est, et recta potens ipsum irrationalis est, vocatur autem mediæ apotome secunda; quare recta potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome est secunda. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine; apotome est igitur sexta ΚΘ. Rectangulum autem sub rationali et apotome

mensurable avec ΖΚ (1. 6 et 10. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc de rationelles commensurables en puissance seulement (23. 10); la droite ΘΚ est donc un apotome (74. 10). Si donc la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un troisième apotome (déf. 3. 10). Puisque ΚΛ est une rationelle, que le rectangle compris sous une rationelle et un troisième apotome est irrationel (94. 10), que la droite qui peut cette surface est irrationelle, et que cette droite est appelée second apotome d'une médiale, la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, sera un second apotome d'une médiale. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec ΖΗ, la droite ΚΘ sera un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Mais la droite qui peut un rectangle ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶν ἡ[10] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· ἡ τὸ ΛΘ ἄρα[11], τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

sextâ recta potens est quæ cum medio medium totum facit; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, cum medio medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριϐ'.

Η ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΓ παραϐεϐλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. Επεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. Εστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ

PROPOSITIO CXII.

Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus.

Sit apotome ΑΒ; dico ΑΒ non esse eamdem quæ ex binis nominibus.

Si enim possibile, sit; et exponatur rationalis ΔΓ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad rationalem ΔΓ applicetur rectangulum ΓΕ, latitudinem faciens ΔΕ. Quoniam igitur apotome est ΑΒ, apotome prima est ΔΕ. Sit ipsi congruens ΕΖ; ipsæ ΔΖ, ΖΕ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΔΖ quam ΖΕ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensu-

compris sous une rationelle et un sixième apotome, est une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial (97. 10); la droite qui peut ΑΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

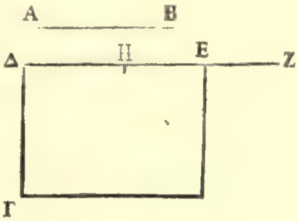
PROPOSITION CXII.

Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

Soit l'apotome ΑΒ; je dis que ΑΒ n'est pas la même droite que celle de deux noms.

Car que cela soit, si c'est possible; soit exposée une rationelle ΔΓ, et appliquons à la rationelle ΔΓ un rectangle ΓΕ, qui étant égal au quarré de ΑΒ, ait ΔΕ pour largeur (45. 1). Puisque la droite ΑΒ est un apotome, la droite ΔΕ sera un premier apotome (98. 10). Que ΕΖ conviène avec ΔΕ; les droites ΔΖ, ΖΕ seront des rationelles commensurables en puissance saulement; la puissance de ΔΖ surpassera la puissance de ΖΕ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΖ, et ΔΖ sera com-σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ[2] ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν[3] ἡ ΔΕ. Διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἡ ΔΗ

rabili, et ΔZ commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine. Rursus, quoniam ex binis nominibus est AB; ex binis igitur nominibus prima est ΔE. Dividatur in nomina ad punctum H, et sit majus nomen ΔH; ipsæ ΔH, HE igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et ΔH quam HE plus potest



τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΓ μήκει· καὶ[4] ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπῇ ἄρα τῇ[5] ΖΗ σύμμετρός ἐστιν ἡ[6] ΔΖ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει[7], ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ

quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et major ΔH commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine; et ΔZ igitur ipsi ΔH commensurabilis est longitudine; et reliquæ igitur ZH commensurabilis est ΔZ. Quoniam igitur commensurabilis est ΔZ ipsi ZH, rationalis autem est ΔZ; rationalis igitur est et ZH. Quoniam igitur commensurabilis est ΔZ ipsi ZH longitudine, incommensurabilis autem ΔZ ipsi ZE longitudine; incommensurabilis igitur est et ZH

mensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΓ (déf. trois. 1. 10). De plus, puisque AB est une droite de deux noms, la droite ΔE sera une première de deux noms (61. 10). Que ΔE soit divisée en ses noms au point H, et que ΔH soit son plus grand nom; les droites ΔH, HE seront des rationelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10). Mais la puissance de ΔH surpasse la puissance de HE du quarré d'une droite commensurable avec ΔH, et la plus grande droite ΔH est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΓ; la droite ΔZ est donc commensurable en longueur avec ΔH (12. 10); la droite ΔZ est donc commensurable avec la droite restante HZ. Et puisque ΔZ est commensurable avec ZH, et que ΔZ est rationelle, la droite ZH sera rationelle. Et puisque ΔZ est commensurable en longueur avec ZH, et que la droite ΔZ est incommensurable en longueur avec ZE, la droite ZH sera incommensurable en longueur avec la μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί[8]· αἱ ΗΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι[9] δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕ. Αλλὰ καὶ ῥητὴ, ὅπερ ἐστὶν[10] ἀδύνατον.

Η ἄρα ἀποτομὴ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsi EZ. Et sunt rationales; ipsæ HZ, ZE igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est HE. Sed et rationalis, quod est impossibile.

Apotome igitur, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Η ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον

COROLLARIUM.

Apotome et quæ post ipsam irrationales neque mediæ neque inter se sunt eædem; quadratum quidem enim ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem et incommensurabilem ipsi ad quam applicatur longitudine. Quadratum autem ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. Quadratum autem ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. Quadratum autem ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. Quadratum autem ex minori ad rationalem applicatum

droite EZ ; mais ces droites sont rationelles; les droites HZ, ZE sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement ; la droite HE est donc un apotome (74. 10). Mais elle est aussi rationelle, ce qui est impossible. Un apotome, etc.

COROLLAIRE.

L'apotome et les irrationelles qui la suivent ne sont ni médiales, ni les mêmes entr'elles; car le quarré d'une médiale étant appliqué à une rationelle fait une largeur rationelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle elle est appliquée (23. 10). Le quarré d'un apotome étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un premier apotome (98. 10); le quarré d'un premier apotome d'une médiale étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un second apotome (99. 10); le quarré d'un second apotome d'une médiale étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un troisième apotome (100. 10); le quarré d'une mineure étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un quaπλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. Επεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦτε[1] πρώτου καὶ ἀλλήλων· τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν· ἀλλήλων δὲ, ἐπεὶ τῇ[2] τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμεναι αἱ μὲν[3] μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολούθως ἑκάστῃ τῇ τάξει τῇ[4] καθ' αὐτήν· αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολούθως· ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ[5] τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγʹ,

latitudinem facit apotomen quartam. Quadratum verò ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam. Quadratum autem ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et a primâ et inter se; a primâ quidem, quod rationalis sit; inter se verò, quod ordine non sint eædem; manifestum et ipsas irrationales differre inter se. Et quoniam demonstratum est apotomen non esse eamdem quæ ex binis nominibus; faciunt autem latitudines ad rationalem applicatæ post apotomen apotomas consequenter eodem ordine quæ post ipsam; ipsæ verò post ipsam ex binis nominibus latitudines ex binis nominibus, et quæ sunt eodem ordine congruenter; aliæ igitur sunt quæ post apotomen, et aliæ quæ post ipsam ex binis nominibus, ita ut sint ordine omnes irrationales tredecim,

trième apotome (101. 10); le quarré d'une droite, qui fait avec une surface rationelle un tout médial, étant appliqué à une rationelle fait un cinquième apotome (102. 10); le quarré d'une droite, qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationelle fait un sixième apotome (103. 10). Puis donc que les largeurs dont nous venons de parler diffèrent de la première droite et entr'elles; qu'elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationelle, et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre, il est évident que ces irrationelles sont différentes entr'elles. Et puisqu'on a démontré que l'apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms (112. 10), que les quarrés de l'apotome et des droites qui viènent ensuite étant appliqués à une rationelle font des largeurs qui sont des apotomes du même ordre que les droites qui suivent l'apotome, et que les quarrés de la droite de deux noms, et des droites qui viènent ensuite, étant appliqués à une rationelle, font des largeurs qui sont des droites de deux noms du même ordre que celles qui suivent la droite de deux noms (61, 62, 63, 64, 65 et 66. 10); les droites qui suivent l'apotome et la droite de deux noms sont donc différentes entr'elles, de manière que toutes ces irrationelles sont au nombre de treize.

α΄. Μέσην.
β΄. Ἐκ δύο ὀνομάτων.
γ΄. Ἐκ δύο μέσων πρώτην.
δ΄. Ἐκ δύο μέσων δευτέραν.
ε΄. Μείζονα.
ς΄. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην.
ζ΄. Δύο μέσα δυναμένην.
η΄. Ἀποτομήν.
θ΄. Μέσης[6] ἀποτομὴν πρώτην.
ι΄. Μέσης[7] ἀποτομὴν δευτέραν.
ια΄. Ἐλάττονα.
ιβ΄. Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.
ιγ΄. Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

1. Media.
2. Recta ex binis nominibus.
3. Ex binis mediis prima.
4. Ex binis mediis secunda.
5. Major.
6. Rationale et medium potens.
7. Bina media potens.
8. Apotome.
9. Mediæ apotome prima.
10. Mediæ apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum rationali medium totum faciens.
13. Cum medio medium totum faciens.

1. La médiale.
2. La droite de deux noms.
3. La première de deux médiales.
4. Le seconde de deux médiales.
5. La majeure.
6. La droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.
7. La droite qui peut deux surfaces médiales.
8. L'apotome.
9. Le premier apotome d'une médiale.
10. Le second apotome d'une médiale.
11. La mineure.
12. La droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.
13. La droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριγ'.

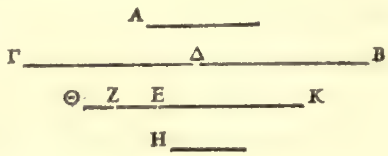
Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν[1] τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ[2] ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἕξει[3] τάξιν τῇ ΒΓ.

PROPOSITIO CXIII.

Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in in eâdem ratione; et adhuc apotome quæ fit eumdem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

Sit rationalis quidem A, ex binis nominibus verò ΒΓ, cujus majus nomen sit ΓΔ, et quadrato ex A æquale sit rectangulum sub ΒΓ, ΕΖ; dico ΕΖ apotomen esse, cujus nomina commensurabilia sunt ipsis ΓΔ, ΔΒ, et in eâdem ratione, et adhuc ΕΖ eumdem habituram ordinem quem ΒΓ.



Εστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. Επεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ

Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum sub ΒΔ, H. Quoniam igitur rectangulum sub ΒΓ, ΕΖ æquale est rectangulo sub ΒΔ, H;

PROPOSITION CXIII.

Le quarré d'une rationelle étant appliqué à une droite de deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commmensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

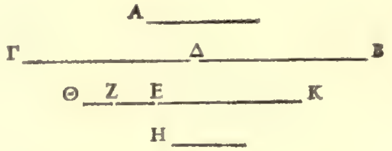
Soit A une rationelle, et ΒΓ une droite de deux noms, dont le plus grand nom soit ΓΔ; que le rectangle sous ΒΓ, ΕΖ soit égal au quarré de A; je dis que ΕΖ est un apotome dont les noms sont commensurables avec les droites ΓΔ, ΔΒ, et en même raison que ces droites, et que ΕΖ sera du même ordre que ΒΓ.

Que le rectangle sous ΒΔ, H soit encore égal au quarré de A. Puisque le rectangle sous ΒΓ, ΕΖ est égal au rectangle sous ΒΔ, H, la droite ΓΒ sera à ΒΔ comme H πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. Μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. Εστω τῇ Η ἴση[4] ἡ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἐστὶν[5] ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. Γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἐστὶν ὡς ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων[6] πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. Ως δὲ ἡ ΖΚ πρὸς τὴν[7] ΚΕ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς τὴν[8] ΚΖ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ[9] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ ἐστὶ[10] τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ[11] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΚ, ΒΔ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ

est igitur ut ΓΒ ad ΒΔ ita Η ad ΕΖ. Major autem ΓΒ quam ΒΔ; major igitur et Η quam ΕΖ. Sit ipsi Η æqualis ΕΘ; est igitur ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΕ ad ΕΖ; dividendo igitur est ut ΓΔ ad ΒΔ ita ΘΖ ad ΖΕ. Fiat ut ΘΖ ad ΖΕ ita ΖΚ ad ΚΕ; et tota igitur ΘΚ ad totam ΚΖ est ut ΖΚ ad ΚΕ, ut enim unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut autem ΖΚ ad ΚΕ ita est ΓΔ ad ΔΒ; et ut igitur ΘΚ ad ΚΖ ita ΓΔ ad ΔΒ. Commensurabile autem ex ΓΔ quadratum quadrato ex ΔΒ; commensurabile igitur est et ex ΘΚ quadratum quadrato ex ΚΖ. Atque est ut ex ΘΚ quadratum ad ipsum ex ΚΖ ita ΘΚ ad ΚΕ, quoniam tres rectæ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ proportionales sunt; commensurabilis igitur ΘΚ ipsi ΚΕ longitudine; quare et ΘΕ ipsi ΕΚ commensurabilis est longitudine. Et quoniam quadratum ex Α æquale est rectangulo sub ΘΕ, ΒΔ, rationale autem est quadratum ex Α; rationale igitur est et rectangulum sub ΘΚ, ΒΔ. Et

est à ΕΖ (16. 6). Mais ΓΒ est plus grand que ΒΔ ; la droite Η est donc plus grande que ΕΖ. Que ΕΘ soit égal à Η, la droite ΓΒ sera à ΒΔ comme ΘΕ est à ΕΖ ; donc, par soustraction, ΓΔ est à ΒΔ comme ΘΖ est à ΖΕ (17. 5). Faisons en sorte que ΘΖ soit à ΖΕ comme ΖΚ est à ΚΕ ; la droite entière ΘΚ sera à la droite entière ΚΖ comme ΖΚ est à ΚΕ ; car un antécédent est à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5). Mais ΖΚ est à ΚΕ comme ΓΔ est à ΔΒ ; la droite ΘΚ est donc à ΚΖ comme ΓΔ est à ΔΒ ; mais le quarré de ΓΔ est commensurable avec le quarré de ΔΒ (37. 10) ; le quarré de ΘΚ est donc commensurable avec le quarré de ΚΖ (10. 10). Mais le quarré de ΘΚ est au quarré de ΚΖ comme ΘΚ est à ΚΕ, parce que les trois droites ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ sont proportionnelles (20. cor. 2. 6) ; la droite ΘΚ est donc commensurable en longueur avec ΚΕ ; la droite ΘΕ est donc aussi commensurable en longueur avec ΕΚ (16. 10). Et puisque le quarré de Α est égal au rectangle sous ΘΕ, ΒΔ, et que le quarré de Α est rationel, le rectangle sous ΘΚ, ΒΔ sera rationel. Mais ce rectangle est appliqué à la rationelle ΒΔ ; la droite παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. Επεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν[12] ΔΒ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν[13] ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Ρητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει[14]· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ[15] καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει[16]· αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ[17] σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. Ητοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ[18], καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

ad rationalem ΒΔ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine; quare et ipsi commensurabilis ΕΚ rationalis est et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine. Quoniam igitur est ut ΓΔ ad ΔΒ ita ΖΚ ad ΚΕ, ipsæ autem ΓΔ, ΔΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Rationalis autem est ΚΕ, et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine; rationalis igitur est et ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine; ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur rationales potentiâ solùm sunt commensurabiles; apotome igitur est ΕΖ. Vel autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex



ΘΕ est donc rationelle et commensurable en longueur avec ΒΔ (21. 10); la droite ΕΚ, qui est commensurable avec ΘΕ, est donc rationelle et commensurable en longueur avec ΒΔ. Et puisque ΓΔ est à ΔΒ comme ΖΚ est à ΚΕ, et que les droites ΓΔ, ΔΒ sont commensurables en puissance seulement, les droites ΖΚ, ΚΕ seront commensurables en puissance seulement. Mais ΚΕ est rationelle, et commensurable en longueur avec ΒΔ; la droite ΖΚ est donc rationelle et commensurable en longueur avec ΓΔ; les droites ΖΚ, ΚΕ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΖ est donc un apotome (74. 10). Mais la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΓΔ. Si la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du quarré d'une droite commensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du quarré d'une droite commensurable avec ΖΚ, et

Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ οὐδετέρα[19] τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα[20] τῶν ΖΚ, ΚΕ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ[21]. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα[22] τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ[23] ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει[24] τῇ ΒΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΓΔ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si autem neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ. Si autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem ΓΔ commensurabilis est expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si verò neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ; quare apotome est ΖΕ, cujus nomina ΖΚ, ΚΕ commensurabilia sunt nominibus ΓΔ, ΔΒ rectæ ex binis nominibus, et in eâdem ratione, et eumdem habebit ordinem quem ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi; si ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, ΚΕ lui sera aussi commensurable; et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable. Si la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du quarré d'une droite incommensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du quarré d'une droite incommensurable avec ΖΚ. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi; si la droite ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΕ lui sera aussi commensurable. Et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable; la droite ΖΕ est donc un apotome, dont les noms ΖΚ, ΚΕ sont commensurables avec les noms ΓΔ, ΔΒ d'une droite de deux noms, et en même raison qu'eux; et la droite ΖΕ sera du même ordre que ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριδ'.

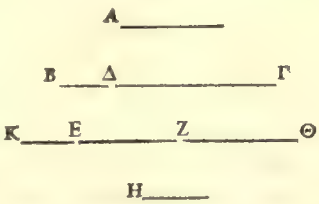
Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς[1] τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔτι δὲ ἡ γενομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ· λέγω ὅτι καὶ[2] ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ[3] ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ.

PROPOSITIO CXIV.

Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eumdem ordinem habet quem apotome.

Sit rationalis quidem A, apotome verò ΒΔ; et quadrato ex A æquale sit rectangulum sub ΒΔ, ΚΘ, ita ut quadratum ex rationali A ad apotomen ΒΔ applicatum latitudinem faciat ΚΘ; dico et ex binis nominibus esse ΚΘ; cujus nomina commensurabilia sunt ipsius ΒΔ nominibus, et in eâdem ratione, et adhuc ΚΘ eumdem habere ordinem quem ΒΔ.



PROPOSITION CXIV.

Le quarré d'une rationelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

Soit la rationelle A, et l'apotome ΒΔ; que le rectangle sous ΒΔ, ΚΘ soit égal au quarré de A, de manière que le quarré de la rationelle A étant appliqué à l'apotome ΒΔ ait ΚΘ pour largeur; je dis que ΚΘ est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de ΒΔ, et en même raison qu'eux, et que ΚΘ est du même ordre que ΒΔ.

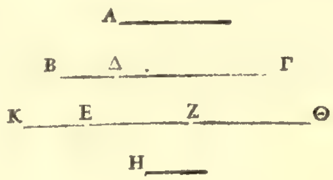
Ἔστω γὰρ τῇ ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω[4] τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβληται[5]· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ[6] τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν Η[7]. Μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. Κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ. Γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, τουτέστιν ὡς[8] ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον εἰσὶ[9] σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως[10] ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως[11] ἡ ΘΖ πρὸς τὴν

Sit enim ipsi ΒΔ congruens ΔΓ; ipsæ ΒΓ, ΓΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quadrato ex Α æquale sit rectangulum sub ΒΓ, Η. Rationale autem quadratum ex Α; rationale igitur et rectangulum sub ΒΓ, Η. Et ad rationalem ΒΓ applicatur; rationalis igitur est Η, et commensurabilis ipsi ΒΓ longitudine. Quoniam igitur rectangulum sub ΒΓ, Η æquale est rectangulo sub ΒΔ, ΚΘ, proportionaliter igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΚΘ ad Η. Major autem ΓΒ quam ΒΔ; major igitur et ΚΘ quam Η. Ponatur ipsi Η æqualis ΚΕ; commensurabilis igitur est ΚΕ ipsi ΒΓ longitudine. Et quoniam est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΚ ad ΚΕ; convertendo igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΘ ad ΘΕ. Fiat ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΕ; et reliqua igitur ΚΖ ad ΖΘ est ut ΚΘ ad ΘΕ, hoc est ut ΒΓ ad ΓΔ. Ipsæ autem ΒΓ, ΓΔ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΚΖ, ΖΘ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et quoniam est ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΚΖ ad ΖΘ, sed ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΕ; et ut igitur ΚΖ ad ΖΘ

Car que ΔΓ conviène avec ΒΔ, les droites ΒΓ, ΓΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Que le rectangle sous ΒΓ, Η soit égal au quarré de Α. Puisque le quarré de Α est rationel, le rectangle sous ΒΓ, Η sera aussi rationel. Mais il est appliqué à la rationelle ΒΓ ; la droite Η est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΒΓ (21. 10). Et puisque le rectangle sous ΒΓ, Η est égal au rectangle sous ΒΔ, ΚΘ, la droite ΓΒ sera à la droite ΒΔ comme ΚΘ est à Η (16. 6). Mais la droite ΓΒ est plus grande que ΒΔ ; la droite ΚΘ est donc plus grande que la droite Η. Faisons ΚΕ égale à Η ; la droite ΚΕ sera commensurable en longueur avec ΒΓ. Et puisque ΓΒ est à ΒΔ comme ΘΚ est à ΚΕ, par conversion ΒΓ sera à ΓΔ comme ΚΘ est à ΘΕ. Faisons en sorte que ΚΘ soit à ΘΕ comme ΘΖ est à ΖΕ, la droite restante ΚΖ sera à ΖΘ comme ΚΘ est à ΘΕ, c'est-à-dire comme ΒΓ est à ΓΔ (19. 5). Mais les droites ΒΓ, ΓΔ sont commensurables en puissance seulement ; les droites ΚΖ, ΖΘ sont donc commensurables en puissance seulement. Et puisque ΚΘ est à ΘΕ comme ΚΖ est à ΖΘ, et que ΚΘ est à ΘΕ comme ΘΖ est à ΖΕ ; la droite

ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως[12] ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης[13] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. Σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ, αἱ γὰρ ΚΖ, ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ[14] καὶ ἡ ΚΖ τῇ

ita ΘΖ ad ΖΕ; quare et ut prima ad tertiam ita ex primâ quadratum ad ipsum ex secundâ; et ut igitur ΚΖ ad ΖΕ ita ex ΚΖ quadratum ad ipsum ex ΖΘ. Commensurabile autem est ex ΚΖ quadratum quadrato ex ΖΘ, ipsæ enim ΚΖ, ΖΘ potentiâ sunt commensurabiles; commensurabilis igitur est et ΚΖ ipsi ΖΕ longitudine; quare ΖΚ



ΖΕ μήκει· ὥστε ἡ ΖΚ καὶ τῇ ΚΕ σύμμετρός ἐστι[15] μήκει. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ· ἐναλλὰξ ἄρα[16] ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΖ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΖΘ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΚΖ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΖΘ[17] μήκει. Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ[18] ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-

et ipsi ΚΕ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem est ΚΕ, et commensurabilis ipsi ΒΓ longitudine; rationalis igitur et ΚΖ, et commensurabilis ipsi ΒΓ longitudine. Et quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΖ ad ΖΘ; permutando igitur ut ΒΓ ad ΚΖ ita ΔΓ ad ΖΘ. Commensurabilis autem ΒΓ ipsi ΚΖ; commensurabilis igitur et ΓΔ ipsi ΖΘ longitudine. Ipsæ autem ΒΓ, ΓΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ipsæ ΚΖ, ΖΘ igitur rationales sunt potentiâ

ΚΖ sera à ΖΘ comme ΘΖ est à ΖΕ; la première droite est donc à la troisième comme le quarré de la première est au quarré de la seconde (20. cor. 2. 6); la droite ΚΖ est donc à ΖΕ comme le quarré de ΚΖ est au quarré de ΖΘ; mais le quarré de ΚΖ est commensurable avec le quarré de ΖΘ, parce que les droites ΚΖ, ΖΘ sont commensurables en puissance; la droite ΚΖ est donc commensurable en longueur avec ΖΕ; la droite ΖΚ est donc commensurable en longueur avec ΚΕ (16. 10). Mais ΚΕ est rationelle, et commensurable en longueur avec ΒΓ; la droite ΚΖ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΒΓ. Et puisque ΒΓ est à ΓΔ comme ΚΖ est à ΖΘ, par permutation ΒΓ sera à ΚΖ comme ΔΓ est à ΖΘ. Mais ΒΓ est commensurable avec ΚΖ; la droite ΓΔ est donc commensurable en longueur avec ΖΘ (10. 10). Mais les droites ΒΓ, ΓΔ sont des rationelles commensurables en puissance seulement; les droites ΚΖ, ΖΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement;

τρον· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν[19] ἡ ΚΘ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται[20] τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ[21] οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ. Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται[22] τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ[23] οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά ἐστι[24] τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΚΘ. Si quidem igitur ΒΓ quam ΓΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ commensurabilis est expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ. Si autem ΒΓ quam ΓΔ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem commensurablis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ; ex binis igitur nominibus est ΚΘ, cujus nomina ΚΖ, ΖΘ commensurabilia sunt apotomæ nominibus ΒΓ, ΓΔ, et in eâdem ratione; et adhuc ΚΘ eumdem quem ΒΓ habet ordinem. Quod oportebat ostendere.

la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Si donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puissance de ΖΘ du quarré d'une droite commensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable avec la rationelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle. Si la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puisssance de ΖΘ du quarré d'une droite incommensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle; la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms, dont les noms ΚΖ, ΖΘ sont commensurables avec les noms ΒΓ, ΓΔ de cet apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, ΚΘ sera du même ordre que ΒΓ (déf. sec. et tr. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριέ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ[1] ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστι.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομά ἐστι τὸ ΓΕ· καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς[2] τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω ἡ[3] ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ, σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί τέ[4] εἰσι ταῖς ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἐν τῷ

PROPOSITIO CXV.

Si spatium contineatur sub apotome et rectâ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; recta spatium potens rationalis est.

Contineatur enim spatium sub AB, ΓΔ, sub apotome AB, et rectâ ΓΔ ex binis nominibus, cujus majus nomen est ΓE; et sint nomina ΓE, EΔ rectæ ex binis nominibus commensurabilia et apotomæ nominibus AZ, ZB, et in eâdem ratione; et sit recta H spatium sub AB, ΓΔ potens; dico rationalem esse ipsam H.

Exponatur enim rationalis Θ, et quadrato ex Θ æquale ad ΓΔ applicetur latitudinem faciens KΛ; apotome igitur est KΛ, cujus nomina sint KM, MΛ, commensurabilia nominibus ΓE, EΔ rectæ ex binis nominibus, et in eâdem ratione. Sed et ipsæ ΓE, EΔ commensurabiles sunt ipsis AZ, ZB, et in eâdem ratione; est igitur

PROPOSITION CXV.

Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui peut cette surface est rationelle.

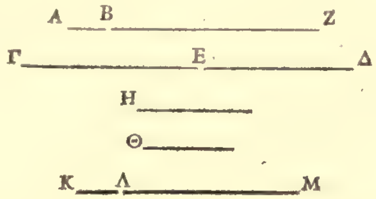
Qu'une surface soit comprise sous AB, ΓΔ, c'est-à-dire sous un apotome AB, et sous une droite de deux noms ΓΔ, dont ΓE est le plus grand nom; que les noms ΓE, EΔ de la droite de deux noms soient commensurables avec les noms AZ, ZB de l'apotome AB, et en même raison qu'eux; et que H soit la droite qui peut la surface comprise sous AB, ΓΔ; je dis que la droite H est rationelle.

Car soit exposée la rationelle Θ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme, qui étant égal au quarré de Θ, ait KΛ pour largeur (45. 1); la droite KΛ sera un apotome, dont les noms KM, MΛ seront commensurables avec les noms ΓE, EΔ de la droite de deux noms, et en même raison qu'eux (113. 10). Mais les droites ΓE, EΔ sont commensurables avec les droites AZ, ZB, et en même raison qu'elles; la droite AZ est αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς τὴν ΜΛ[5]· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΛΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ[6]. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ[7] καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν[8] ΚΛ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν[9] ΓΔ, ΚΛ. Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ[10] ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα καὶ[11] τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ[12] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ut ΑΖ ad ΖΒ ita ΚΜ ad ΜΛ; permutando igitur est ut ΑΖ ad ΚΜ ita ΖΒ ad ΛΜ; et reliqua igitur ΑΒ ad reliquam ΚΛ est ut ΑΖ ad ΚΜ. Commensurabilis autem ΑΖ ipsi ΚΜ; commensurabilis igitur est et ΑΒ ipsi ΚΛ. Atque est ut ΑΒ ad ΚΛ ita sub ΓΔ, ΑΒ rectangulum ad ipsum sub ΓΔ, ΚΛ; commensurabile igitur est et sub ΓΔ, ΑΒ rectangulum rectangulo sub ΓΔ, ΚΛ. Æquale autem sub ΓΔ, ΚΛ rectangulum quadrato ex Θ; commensurabile igitur est sub ΓΔ, ΑΒ rectangulum quadrato ex Θ. Rectangulum autem sub ΓΔ, ΑΒ æquale est quadrato ex Η; commensurabile igitur et ex Η quadratum quadrato ex Θ. Rationale autem quadratum ex Θ; rationale igitur est et quadratum ex Η; rationalis igitur est Η, et potest spatium sub ΓΔ, ΑΒ.

Si igitur spatium, etc.



donc à ΖΒ comme ΚΜ est à ΜΛ (11. 5); donc, par permutation, la droite ΑΖ sera à ΚΜ comme ΖΒ est à ΛΜ; la droite restante ΑΒ est donc à la droite restante ΚΛ comme ΑΖ est à ΚΜ (19. 5). Mais ΑΖ est commensurable avec ΚΜ; la droite ΑΒ est donc commensurable avec ΚΛ (10. 10). Mais ΑΒ est à ΚΛ comme le rectangle sous ΓΔ, ΑΒ est au rectangle sous ΓΔ, ΚΛ (1. 6); le rectangle sous ΓΔ, ΑΒ est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΔ, ΚΛ. Mais le rectangle sous ΓΔ, ΚΛ est égal au quarré de Θ; le rectangle sous ΓΔ, ΑΒ est donc commensurable avec le quarré de Θ. Mais le rectangle sous ΓΔ, ΑΒ est égal au quarré de Η; le quarré de Η est donc commensurable avec le quarré de Θ. Mais le quarré de Θ est rationel; le quarré de Η est donc rationel; la droite Η est donc rationelle, et cette droite peut la surface comprise sous ΓΔ, ΑΒ. Si donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτων φανερὸν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι[1].

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρις'.

Απὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία[1] οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Εστω μέση ἡ Α· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία[2] οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν[3] ἡ αὐτή.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστι. Καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν[4] ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. Πάλιν δὴ, τῷ

COROLLARIUM.

Et ex iis manifestum nobis est fieri posse, ut rationale spatium sub irrationalibus rectis contineatur.

PROPOSITIO CXVI.

A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nulla nulli præcedentium eadem.

Sit media A; dico ex ipsâ A infinitas irrationales gigni, et nullam nulli præcedentium esse eamdem.

Exponatur rationalis B, et rectangulo sub A, B æquale sit quadratum ex Γ; irrationalis igitur est Γ; rectangulum enim sub irrationali et rationali irrationale est. Et nulli præcedentium est eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit mediam. Rursus utique, rectangulo sub

COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident pour nous qu'il est possible qu'une surface rationelle soit comprise sous deux droites irrationelles.

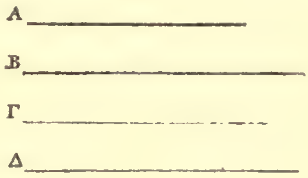
PROPOSITION CXVI.

Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

Soit la médiale A; je dis qu'il résulte de A une infinité d'irrationelles, et qu'aucune d'elles n'est commensurable avec aucune de celles qui la précèdent.

Soit exposée la rationelle B, et que le quarré de Γ soit égal au rectangle sous A, B, la droite Γ sera irrationelle (déf. 11. 10); car le rectangle compris sous une irrationelle et une rationelle est irrationel (39. sch. 10), et la droite Γ ne sera aucune de celles qui la précèdent; car le quarré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une surface rationelle ne fait une largeur médiale (61, 62, 63, 64, 65, 66, 98, 99, 100, 101, 102, 113. 10). De plus, que le quarré de Δ soit égal ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν[5] ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. Ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία[6] οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

B, Γ æquale sit quadratum ex Δ; irrationale igitur quadratum ex Δ; irrationalis igitur est Δ, et nulli præcedentium est eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit ipsam Γ. Similiter utique eodem ordine infinitè protracto, evidens est a mediâ infinitas irrationales gigni, et nullam nulli præcedentium eamdem. Quod oportebat ostendere.



ΑΛΛΩΣ ι'.

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίνονται[2], καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή[3].

Ἤχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον

ALITER.

Sit media AΓ; dico ex ipsâ AΓ infinitas irrationales gigni, et nullam nulli præcedentium esse eamdem.

Ducatur ipsi AΓ ad rectos angulos ipsa AB, et sit rationalis AB, et compleatur BΓ, irra-

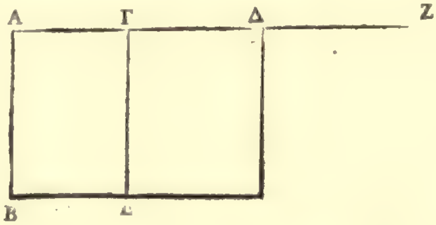
au rectangle sous B, Γ; le quarré de Δ sera irrationel (39. sch. 10); la droite Δ est donc irrationelle, et elle n'est aucune de celles qui la précèdent; car le quarré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationelle ne fait la largeur Γ. En procédant à l'infini de la même manière, il est évident qu'il résultera d'une médiale une infinité d'irrationelles, et qu'aucune d'elles ne sera la même qu'aucune de celles qui la précèdent. Ce qu'il fallait démontrer.

AUTREMENT.

Soit la médiale AΓ; je dis qu'il résulte de AΓ une infinité d'irrationelles, et qu'aucune d'elles n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

Menons la droite AB perpendiculaire à AΓ; que la droite AB soit rationelle, et achevons le parallélogramme BΓ; le parallélogramme BΓ sera irrationel, ainsi que ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἡ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. Πάλιν, συμ-

tionale igitur est ΒΓ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΓΔ; irrationalis igitur ΓΔ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit mediam. Rursus,



πεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ[4] τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν[5] ἡ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τῆς[6] μέσης ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

compleatur ΕΔ; irrationale igitur est ΕΔ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΔΖ; irrationalis igitur est ΔΖ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit ipsam ΓΔ.

A mediâ igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριθ'.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

PROPOSITIO CXVII.

Proponatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

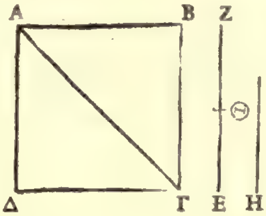
la droite qui pourra ce parallélogramme. Que la droite ΓΔ puisse ce parallélogramme; la droite ΓΔ sera irrationelle, et ne sera aucune de celles qui la précèdent; car le quarré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationelle ne fera une largeur médiale. De plus, achevons le parallélogramme ΕΔ, le parallélogramme ΕΔ sera irrationel, ainsi que la droite qui peut ce parallélogramme. Que la droite ΔΖ puisse ce parallélogramme; la droite ΔΖ sera irrationelle, et cette droite ne sera aucune des droites qui la précèdent; car le quarré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationelle ne fera la largeur ΓΔ. Il résulte donc, etc.

PROPOSITION CXVII.

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures quarrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Εστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Sit quadratum ΑΒΓΔ, ipsius autem diameter ΑΓ; dico ΑΓ incommensurabilem esse ipsi ΑΒ longitudine.



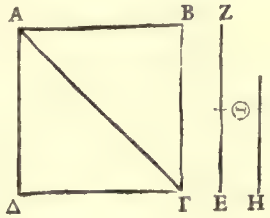
Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν· φανερὸν μὲν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἐστι[2] τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εχέτω ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν[3] Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. Εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ[4] λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονὰς[5] τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν[6] ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ

Si enim possibile, sit commensurabilis; dico ex hoc sequi eumdem numerum parem esse et imparem; evidens est quidem quadratum ex ΑΓ duplum esse quadrati ex ΑΒ. Et quoniam commensurabilis est ΑΓ ipsi ΑΒ, ipsa ΑΓ igitur ad ΑΒ rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat rationem quam ΕΖ ad Η, et sint ΕΖ, Η minimi eorum eamdem rationem habentium cum ipsis; non igitur unitas est ΕΖ. Si enim ΕΖ esset unitas, et habet rationem ad Η quam habet ΑΓ ad ΑΒ, et major ΑΓ quam ΑΒ; major igitur et ΕΖ unitas quam Η numerus, quod absurdum; non igitur unitas est ΕΖ; numerus igitur. Et quoniam est ut

Soit le quarré ΑΒΓΔ, et que ΑΓ soit sa diagonale; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΑΒ.

Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le quarré de ΑΓ est double du quarré de ΑΒ (47. 10); mais ΑΓ est commensurable avec ΑΒ; la droite ΑΓ a donc avec la droite ΑΒ la raison qu'un nombre a avec un nombre (6. 10). Que ΑΓ ait avec ΑΒ la raison que le nombre ΕΖ a avec le nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; le nombre ΕΖ ne sera pas l'unité. Car si ΕΖ était l'unité, à cause que ΕΖ a avec Η la raison que ΑΓ a avec ΑΒ, et que ΑΓ est plus grand que ΑΒ, l'unité ΕΖ serait plus grande que le nombre Η, ce qui est absurde; ΕΖ n'est donc pas l'unité; ΕΖ est donc un nombre. Et puisque ΓΑ est à ΑΒ comme ΕΖ est à Η, le quarré de ΓΑ οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. Διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ[7] τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν[8] ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν. Εἰ γὰρ ἦν περισσὸς, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἂν[9] ἦν, ἐπειδήπερ ἐὰν

ΓΑ ad ΑΒ ita ΕΖ ad Η, et ut igitur ex ΓΑ quadratum ad ipsum ex ΑΒ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex Η. Duplum autem ex ΓΑ quadratum quadrati ex ΑΒ; duplus igitur et ex ΕΖ quadratus quadrati ex Η; par igitur est quadratus ex ΕΖ; quare et ipse ΕΖ par est. Si enim esset impar, et ex ipso quadratus impar esset, quoniam si impares numeri quotcunque com-



περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἀριθμοὶ[10] ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς[11], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἔστιν[12] ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η. Εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς ἂν[13] ἐμέτρει, πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ, πρώτους ὄντας

ponantur, multitudo autem ipsorum impar sit, totus impar est; ipse ΕΖ igitur par est. Secetur bifariam in Θ. Et quoniam numeri ΕΖ, Η minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Atque est ΕΖ par; impar igitur est Η. Si enim esset par, ipsos ΕΖ, Η binarius metiretur, omnis enim par habet partem dimidiam, primos existentes

sera au quarré de AB comme le quarré de EZ est au quarré de H. Mais le quarré de ΓA est double du quarré de AB; le quarré de EZ est donc double du quarré de H; le quarré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair; car s'il était impair, son quarré serait impair; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (23. 9); le nombre EZ est donc un nombre pair. Partageons le nombre EZ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres EZ, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entr'eux. Mais le nombre EZ est pair; le nombre H est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EZ, H, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible.

πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιων ἐστὶν[14] ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ[15]· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η. Ἀλλὰ καὶ περισσὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα[16]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

inter se, quod est impossibile; non igitur par est H; impar igitur. Et quoniam duplus est EZ ipsius EΘ, quadruplus igitur ex EZ quadratus quadrati ex EΘ; duplus autem ex EZ quadratus quadrati ex H; duplus igitur ex H quadratus quadrati ex EΘ; par igitur est quadratus ex H; par igitur ex dictis ipse H. Sed et impar, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est AΓ ipsi AB longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

ΑΛΛΩΣ[1].

Ἔστω[2] ἀντὶ μὲν τοῦ διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω σύμμετρος· καὶ γεγονέτω[3] πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Η[4]· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Λέγω πρῶτον ὅτι Η οὐκ ἔστι μονάς. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω

ALITER.

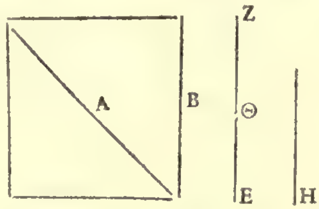
Sit pro diametro quidem A, pro latere verò B; dico incommensurabilem esse A ipsi B longitudine. Si enim possibile, sit commensurabilis; et fiat rursus ut A ad B ita EZ numerus ad H, et sint minimi EZ, H eorum eamdem rationem habentium cum ipsis; ipsi EZ, H igitur primi inter se sunt. Dico primum H non esse unitatem. Si enim

Le nombre H n'est donc pas un nombre pair; il est donc impair. Mais EZ est double de EΘ; le quarré de EZ est donc quadruple du quarré de EΘ (11. 8). Mais le quarré de EZ est double du quarré de H; le quarré de H est donc double du quarré de EΘ; le quarré de H est donc pair; le nombre H est donc pair, d'après ce qui a été dit (29. 9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible; la droite AΓ n'est donc pas commensurable en longueur avec AB; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

AUTREMENT.

Soit A la diagonale, et B le côté; je dis que A est incommensurable en longueur avec B. Que A, s'il est possible, soit commensurable avec B; faisons en sorte que A soit encore à B comme le nombre EZ est au nombre H, et que les nombres EZ, H soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (24. 7); les nombres EZ, H seront premiers entr'eux. Je dis d'abord que H n'est pas l'unité; que H soit l'unité, μονάς. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ὁ EZ πρὸς τὸν H· καὶ ὡς ἄρα τὸ[5] ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ[6] ἀπὸ τῆς B οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ[7] EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H. Διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A τοῦ ἀπὸ τῆς B· διπλάσιος[8] ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H. Καὶ ἔστι μονὰς ὁ H. δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ[9] EZ τετράγωνος, ὅπερ

possibile, sit unitas. Et quoniam est ut A ad B ita EZ ad H; et ut igitur ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex EZ quadratus ad ipsum ex H. Duplum autem ex A quadratum quadrati ex B; duplus igitur et ex EZ quadratus quadrati ex H. Atque est unitas ipse H; binarius igitur ex EZ quadratus, quod est impossibile;



ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ H· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ[10] EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς A οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ H πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ. Μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B τὸ ἀπὸ τῆς A· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ H τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ EZ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ H τὸν EZ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ H· ὁ H ἄρα τοὺς EZ, H μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

non igitur unitas est ipse H; numerus igitur. Et quoniam est ut ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex EZ quadratus ad ipsum ex H, et invertendo ut ex B quadratum ad ipsum ex A ita ex H quadratus ad ipsum ex EZ. Metitur autem quadratum ex B quadratum ex A; metitur igitur et quadratus ex H quadratum ex EZ; quare et H latus ipsius ipsum EZ metitur. Metitur autem et H se ipsum; ipse H igitur ipsos EZ, H metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est A ipsi B longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

si cela est possible. Puisque A est à B comme EZ est à H, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de EZ est au quarré de H. Mais le quarré de A est double du quarré de B; le quarré de EZ est donc double du quarré de H; mais H est l'unité; le quarré de EZ est donc le nombre deux, ce qui est impossible, H n'est donc pas l'unité; H est donc un nombre. Et puisque le quarré de A est au quarré de B comme le quarré de EZ est au quarré de H, par inversion, le quarré de B sera au quarré de A comme le quarré de H est au quarré de EZ. Mais le quarré de B mesure le quarré de A; le quarré de H mesure donc le quarré de EZ, le nombre H mesure donc le nombre EZ (14. 8). Mais H se mesure lui-même; le nombre H mesure donc les nombres EZ, H qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; la droite A n'est donc pas commensurable en longueur avec la droite B; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

ΣΧΟΛΙΟΝ[1].

Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Εὰν γὰρ τῶν Α, Β εὐθειῶν[2] μέσον ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εἶδος[3] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε καὶ[4] κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς[5] Α, Γ, ἐπείπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· εὕρηνται ἄρα καὶ[6] ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεδειγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων ἀσυμμέτρων χωρίων[7], δείξομεν τοῖς[8] ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις.

SCHOLIUM.

Inventis utique longitudine incommensurabilibus rectis, ut A, B, invenientur et aliæ plurimæ magnitudines ex duabus dimensionibus, dico et superficies incommensurabiles inter se. Si enim rectarum A, B mediam proportionalem Γ sumamus, erit ut A ad B ita figura ex A ad figuram ex Γ, similem et similiter descriptam, sive quadrata sint descripta, sive alia rectilinea similia, sive circuli circa diametros A, Γ, quoniam circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata; inventa igitur erunt et plana spatia incommensurabilia inter se. Quod oportebat ostendere.

Ostensis utique et duarum dimensionum diversis incommensurabilibus spatiis, demonstrabimus ex solidorum theoriâ, esse etiam solida et commensurabilia et incommensura-

SCHOLIE.

Des droites incommensurables en longueur étant trouvées, comme les droites A, B, on trouvera plusieurs autres grandeurs de deux dimensions, c'est-à-dire des surfaces incommensurables entr'elles. Car si l'on prend une moyenne proportionnelle Γ entre les droites A, B (13. 6); la droite A sera à B comme la figure construite sur la droite A est à la figure construite sur la droite Γ, les figures A, Γ étant semblables et semblablement décrites (20. 6), soit que les figures décrites soient des quarrés ou des figures rectilignes semblables; ou bien des cercles décrits autour des diamètres A, Γ, parce que les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres (2. 12). On aura donc trouvé des surfaces planes incommensurables entr'elles. Ce qu'il fallait démontrer.

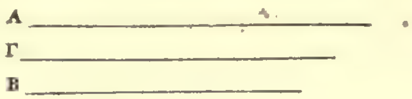
Ayant donc démontré que diverses figures de deux dimensions sont incommensurables entr'elles, nous démontrerons qu'il y a des solides commensurables et incommensurables entr'eux, d'après la théorie des solides. Car si sur les quarrés

Εὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στερεὰ, παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ[9] τὰ στερεά· εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Αλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κώνους, ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς[10] αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἵτε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους[11] καὶ οἱ κύλινδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. Καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπί τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστὶ συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία[12], ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

bilia inter se. Si enim super quadrata ex A, B, vel æqualia ipsis rectilinea, constituamus æque alta solida, parallelepipeda, vel pyramides, vel prismata, solida constructa erunt inter se ut bases. Et si quidem commensurabiles sint bases, commensurabilia erunt et solida; si verò incommensurabiles, incommensurabilia. Quod oportebat ostendere.

Sed quidem et duobus circulis existentibus A, B, si super ipsos conos æque altos, vel cylindros constituamus, erunt hi inter se ut bases, hoc est ut circuli A, B. Et si quidem commensurabiles sint circuli, commensurabiles erunt et coni inter se et cylindri; si verò incommensurabiles sint circuli, incommensurabiles erunt et coni et cylindri. Et manifestum est nobis fieri non solùm et in lineis et superficiebus commensurabilitatem et incommensurabilitatem, sed et in solidis figuris.



des droites A, B ou sur des figures rectilignes qui leur soient égales, nous construisons des solides de même hauteur, des parallélépipèdes, des pyramides, des prismes; les solides qu'on aura construits seront entr'eux comme leurs bases (32. 11, et 6. 5. 12). Si les bases sont commensurables, les solides seront commensurables; et si les bases sont incommensurables, les solides le seront aussi (10. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on a deux cercles A, B, et si sur ces cercles on construit des cônes ou des cylindres de même hauteur, ces solides seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire comme les cercles A, B (11. 12). Si les cercles sont commensurables, les cônes et les cylindres seront commensurables entr'eux (10. 10); et si les cercles sont incommensurables, les cônes et les cylindres seront incommensurables. Il est donc évident pour nous que la commensurabilité ou l'incommensurabilité se rencontre non seulement dans les lignes et dans les surfaces, mais encore dans les solides.

FIN DU DIXIÈME LIVRE.

COLLATIO

CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ

REGIÆ,

CUM EDITIONE OXONIÆ,

CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI SUNT MOMENTI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῶν A, B, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν E, Z, H, Θ·	τῷ πλήθει·	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οἱ δὲ ἐλάχιστοι	*Id.*	deest.
4. ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστι	*Id.*	deest.

PROPOSITIO II.

1, ἄν τις ἐπιτάξῃ, ...	*Id.*	ἐπίταξῄ τις,
2. ἀριθμὸς δὴ ὁ A δύο τοὺς A, B πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν·	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

in hâc demonstratione quater deest adhuc hoc vocabulum.

4. τῶν	τὸν	concordat cum edit. Paris.
5. Ὡς δὲ	*Id.*	ἀλλ' ὡς

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. οὕτως	οὕτως καὶ	concordat cum edit. Paris.
7. Ἀλλ'.	*Id.*	ἐδείχθη δὴ καὶ
8. τε	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς,	deest.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

10. ἐὰν	ἂν	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO III.

1. μὲν ἀριθμοὶ	*Id.*	ἀριθμοὶ μὲν
2. αἰεὶ	αἰ	concordat cum edit. Paris.
3. οὐ	deest.	concordat cum edit Paris.
4. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Ζ ἑαυτὸν μὲν . . .	*Id.*	Οἱ ἄρα αὐτῶν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Ε, Ζ πρῶτοί εἰσιν, ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν
5. ἑκάτερον τῶν	*Id.*	τὸν ἕτερον τῶν
6. καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί.	*Id.*	οἱ Η, Κ ἄρα πρῶτοι καὶ οἱ Λ, Ξ.
7. Καὶ εἴσιν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους·	*Id.*	Καὶ ἐπεὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ μὲν Λ τῷ Α, ὁ δὲ Ξ τῷ Δ·

PROPOSITIO IV.

1. ἀνάλογον	*Id.*	deest.
2. ἀνάλογον	*Id.*	deest.
3. καὶ	*Id.*	deest.
4. ἀνάλογον	*Id.*	deest.
5. ἀνάλογον	*Id.*	deest.
6. τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσ-	ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· . . .	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
σονες ἀριθμοὶ ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις.	*a.*	*b, d, e, f, g, h, k, l, n.*
7. οἱ δὲ ἐλάχιστοι	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ	*Id.*	τῶν ὑπὸ Β, Γ
9. μετρούμενός ἐστιν,	μετρεῖται,	concordat cum edit. Paris.
10. ἐν	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἐν	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. Καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε	*Id.*	εἰσὶν ἐν τοῖς τοῦ
15. ἔτι	*Id.*	deest.
16. ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Εἰ γὰρ μὴ,	*Id.*	Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις,
17. ἀνάλογον	*Id.*	deest.
18. τε	*Id.*	deest.
19. ἀνάλογον	*Id.*	deest.
20. ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς	ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσι τοῖς	ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς

PROPOSITIO V.

1. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸν	ὁ	concordat cum edit. Paris.
3. τὸν	ὁ	concordat cum edit. Paris.
4. Καὶ ὁ Δ	*Id. a, d, e, f, g, n.*	Οἱ ἄρα Η, Θ, Κ πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν τοὺς τῶν πλευρῶν λόγους. Ἀλλ' ὁ τοῦ Η πρὸς τὸν Κ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ Η πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς τὸν Κ· ὁ Η ἄρα πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· λέγω οὖν ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ. Ο Δ γὰρ *h, k, l.*

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VI.

1. Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείτω ὁ Α τὸν Γ. Καὶ ὅσοί	*Id.*	Λέγω γὰρ ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ. Ὅσοι γὰρ
2. ἀριθμὸν μετρεῖ,	*Id.*	μετρεῖ ἀριθμόν.
3. οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

1. οὐ	*Id.*	μὴ
2. μετρήσει	*Id.*	μετρήσει, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖν·

PROPOSITIO VIII.

1. αὐτοῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οἱ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἰσάκις ἄρα ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, καὶ ὁ Α τὸν Ζ· ὁσάκις δὴ	*Id.*	ἰσάκις ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ Η καὶ ὁ Α τὸν Ζ. Ὁσάκις δὲ
4. εἰσὶν	καί εἰσιν	concordat cum edit. Paris.
5. ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν·	*Id.*	ἀνάλογόν εἰσιν ἑξῆς

PROPOSITIO IX.

1. μονάδος	μονάδος ἑξῆς	concordat cum edit. Paris.
2. μεταξὺ	*Id.*	deest.
3. τῆς	τῆς Ε	concordat cum edit. Paris.
4. ὁ Ζ	*Id.*	ὁ Ζ πρὸς
5. τῷ Ζ	*Id.*	αὐτῷ
6. ὁ Θ	ὁ Ε	concordat cum edit. Paris.
7. Ἴσος δὲ ὁ Μ τῷ Α·	*Id.*	Ὁ δὲ Μ τῷ Α ἴσος ἐστίν·

PROPOSITIO X.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἀριθμῶν	ἀριθμῶν ἑκατέρου . . .	concordat cum edit. Paris.
2. μονάδος	*Id.*	μονάδος ἑξῆς
3. τε	*Id.*	deest.
4. ἄρα	ἄρα ἀριθμὸς	concordat cum edit. Paris.
5. μονὰς	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. πεποίηκεν·	*Id.*	deest.
7. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, . .	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐστιν	*Id.*	ἐστὶν ἀριθμὸς
2. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β· .	*Id. a.*	Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ ἕνα ἀριθμὸν καὶ τὸν αὐτὸν τὸν Δ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Ε, Β πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε· *b, d, e, f, g, h, k, l, n.*
3. ὁ Ε.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πλευράν.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ ὁ Γ	*Id.*	ὁ Γ ἄρα
2. ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, . .	*Id.*	deest.
3. ἐπεὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Θ,	καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Θ	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἑξῆς	Id.	deest.
2. εἰσιν ἀνάλογον	Id.	ἀνάλογόν εἰσιν
3. ἀνάλογον	Id.	deest.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO XIV.

1. ἔστωσαν	Id.	deest.
2. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. .	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Ἀλλὰ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ·	πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ μετρείτω	concordat cum edit. Paris.
4. ἑξῆς	Id.	deest.
5. μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XV.

1. ἀριθμὸν	Id.	deest.
2. μετρεῖ.	Id.	μετρήσει.
3. ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ,	Id.	καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω,
4. δὴ	Id.	δὲ
5. Καὶ ἐπεὶ	Id.	ἐπεὶ γὰρ

PROPOSITIO XVI.

1. οὐδ'	Id.	οὐδὲ ὅδε
2. ἀριθμοὶ	Id.	deest.
3. ἔστωσαν	Id.	deest.
4. λέγω	λέγω δὲ	concordat cum edit. Paris.
5. μετρεῖ.	Id.	μετρήσει.
6. μετρείτω	Id.	μετρείτω δὴ
7. μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. . .	καὶ ὁ τὸν Δ.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι . .	ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· τουτέστιν ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον.	*Id.*	ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ὁ Γ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. μὲν	*Id.*	deest.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ὅ, τε	*Id.*	ὅ

PROPOSITIO XIX.

1. μὲν ὁ	*Id.*	ὁ μὲν
2. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐδείχθη.	*Id.*	ἐδείχθη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Λ.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. εἰσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· .	Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ πρὸς τὸν Θ· *a.* . .	concordat cum edit. Paris. *b, d, e, f, g, h, k, l, n.*
8. εἰσιν ἀνάλογον	*Id.*	ἀνάλογόν εἰσιν
9. λόγῳ.	*Id.*	deest.
10. Θ	*Id.*	Θ λόγῳ
11. πολλαπλασιάσας	*Id.*	πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῆς Ζ, Η
12. καὶ	*Id.*	deest.
13. ἔστιν ἄρα ὡς	καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα	concordat cum edit. Paris.
14. ὅ, τε	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. οἱ	*Id.*	deest.
2. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. Ὡς δὴ ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β·	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν·	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. δὲ	*Id.*	δὴ
6. καὶ	*Id.*	deest.
7. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε· τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ· ἔστιν ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποίηκεν·	*Id. a, h, l.*	Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Ζ, Η τὸν Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, Β πεποίηκεν· *b, d, e, f, g, k, n.*
8. Καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η· . .	*Id.*	deest.
9. πλευραὶ αὐτῶν	*Id.*	αὐτῶν πλευραὶ

PROPOSITIO XXI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. οἱ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. γὰρ	*Id.*	γὰρ τρεῖς
3. τρεῖς	*Id.*	deest.
4. ἀριθμοί.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τοῦ πρὸ	*Id.*	deest.
6. εἰσιν ἀνάλογον	*Id.*	ἀνάλογόν εἰσιν
7. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ·	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
8. δὴ ὁ Ε τὸν Γ	*Id.*	δὲ ὁ Η τὸν Β
9. Καὶ	*Id.*	deest.
10. πεποίηκε·	*Id.*	πεποίηκε· τὸν δὲ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν·
11. αὐτοῦ	*Id.*	αὐτῶν
12. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIV.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXV.

1. λέγω	*Id.*	λέγω δὴ
2. ἀριθμοὶ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVII.

1. ἀριθμοὶ	*Id.*	deest.

LIBER NONUS.

PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐπίπεδοι	Id.	deest.
2. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν . .	Id.	Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν
3. ἀριθμῶν μεταξὺ	Id.	μεταξὺ ἀριθμῶν

PROPOSITIO II.

1. ἀριθμοί.	Id.	deest.
2. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω· .	Id.	Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τετράγωνον τὸν Γ ποιείτωσαν·
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἀριθμός.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα Α, Β	Id.	Α, Β ἄρα

PROPOSITIO III.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἀριθμοὶ ἐμπεπτώκασιν· . .	Id.	ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί·
6. ἐμπεσοῦνται	Id.	ἐμπεπτώκασιν
7. δεύτερος	Id.	τέταρτος

PROPOSITIO IV.

1. γὰρ Α	Id.	Α γὰρ
2. οἱ Α, Β·	Id.	deest.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμὸς	Id.	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῶν	*Id.*	τὸν

PROPOSITIO VI.

1. ἑαυτὸν	*Id.*	ἑαυτὸν μὲν
2. ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα	*Id.*	τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς *b*, *d*, *f*, *g*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*. *Nota.* Tredecim priores propositiones desunt in codice 2344.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οἱ	*Id.*	deest.
5. Β, Γ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

1. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· .	*Id.*	deest.
2. πεποίηκεν·	*Id.*	πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν ἐκ τῶν Δ, Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν·

PROPOSITIO VIII.

1. ἔσται	*Id.*	ἐστιν
2. πάντες, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. πάντες, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πάντες.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. πάντες.	Id.	ἅπαντες.
6. ἀριθμὸν	Id.	deest.
7. πάντες	Id.	deest.
8. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἐστὶ·	Id.	deest.
10. πάντες κύβοι εἰσὶ	Id.	ἅπαντες κύβοι τέ εἰσι

PROPOSITIO IX.

1. ἀριθμοὶ ἑξῆς	ἑξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ	concordat cum edit. Paris.
2. ὁσοιδηποτοῦν	Id.	ὁποσοιοῦν
3. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	τε	concordat cum edit. Paris.
5. δὴ	Id.	δὲ
6. καὶ	Id.	deest.
7. λέγω	Id.	λέγω δὴ
8. καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO X.

1. γὰρ	Id.	deest.
2. ὁσοιδηποτοῦν	Id.	deest.
3. χωρὶς	Id.	πλὴν
4. καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων. .	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ὑπόκειτο·	Id.	ὑπόκειται·
7. τετράγωνός ἐστι, ...	Id.	deest.
8. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. κύβον·	Id.	κύβον· οἱ Β, Γ ἄρα ὅμοιοι στέρεοι.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐλάχιστος ὁ B τὸν E . . .	*Id.*	ἐλάσσων ὁ B τὸν E μείζονα
2. αὐτῷ	*Id.*	τῷ Δ
3. τῷ Δ	*Id.*	αὐτῷ
4. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.
	ΠΟΡΙΣΜΑ.	
deest.	Καὶ φανερὸν ὅτι ἣν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ μονάδος τὴν αὐτὴν ἔχει, καὶ ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρουμένου κατὰ τὸν πρὸ αὐτοῦ ὡς τὸν Δ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	deest in codicibus *b*, *c*, *d*, *e*, *g*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*; hoc corollarium inter lineas codicis *f* est exaratum.

PROPOSITIO XII.

1. ἑξῆς	*Id.*	deest.
2. μετρῆται, ...	*Id.*	μετρεῖται,
3. ὁποσοιδηποτοῦν	*Id.*	ὁσοιδηποτοῦν
4. ἑξῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μετρείτω ὁ E τὸν A. . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἀριθμὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἔστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, E ἴσος	ὁ ἄρα ἐκ τῶν Θ, E ἴσος ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ὅ τε	*Id.*	ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ
13. καὶ ὁ E τὸν A.	ὁ E τὸν A, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον.	concordat cum edit. Paris.
14. πρώτου	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. οἱ A, E ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται. . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
16. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἄλλου	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς	deest.	ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος
3. πᾶς	Id.	ἅπας
4. ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	Id.	deest.
5. πρώτου μετρηθήσεται, . .	Id.	μετρηθήσεται πρώτου,
6. τὸν Δ μετρεῖ	Id	μετρεῖ τὸν Δ,
7. ὁ Ζ οὐκ ἔστι	Id.	οὐκ ἔστιν ὁ Ζ
8. ἐστὶ πρῶτος, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	Id.	ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ὑπὸ τῶν	Id.	ἐκ τῶν
12. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ὑφ'	ὑπὸ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIV.

1. πρώτου	Id.	deest.
2. τῶν	Id.	deest.
3. ἐστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. μετρούμενος·	Id.	μετρούμενον·

PROPOSITIO XV.

1. τῶν Α, Β, Γ	Id.	deest.
2. δὴ	Id.	δὲ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· .	*Id.*	πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν ΕΖ·
4. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ωστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Εὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν.	*Id. a, l, n.* . . .	καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. *b, d, e, f, g, h, k, m.*
6. ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι.	ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί. .	concordat cum edit. Paris.
7. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀριθμοὶ	*Id.*	deest.
3. ἔχοντας	*Id.*	ἔχοντας αὐτοῖς
4. ἄτοπον·	*Id.*	ἄτοπόν ἐστιν·
5. ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β . .	*Id.*	ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ἐστὶν

PROPOSITIO XVII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀριθμοὶ	*Id.*	deest.
3. ἔχοντας	*Id.*	ἔχοντας αὐτοῖς
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ὁ Α καὶ	*Id.*	καὶ ὁ Α

PROPOSITIO XVIII.

1. Καὶ εἰ	*Id.*	Εἰ μὲν οὖν
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἀνάλογον	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XIX.

1. πότε	*Id.*	
2. πότε	*Id.*	εἰ

Tertium *alinea* sic se habet in codicibus *a*, *b*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

Η οὐκ εἰσὶν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἢ οὔ τε ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, οὔ τε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ καὶ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Tertium *alinea* sic se habet in editionibus Basiliæ et Oxoniæ.

Οἱ δὴ Α, Β, Γ ἤτοι ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσιν, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν· ἢ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ οὔτε ἀνάλογον ἑξῆς, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Post quartum *alinea* hæc leguntur in codicibus *a, d, g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογον, τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Α, 4. Β, 6. Γ, 5.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσευρήσθω ὁ Δ, ὥστε εἶναι ὡς τὸν Α πρὸς τὸν Β οὕτως τὸν Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ ὁ Ε πρὸς τὸν Ε· διίσου ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Γ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ, ὡς ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ ἄρα τοὺς Α, Γ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοῖς Α, Β, Γ δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ Α, Γ μὴ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν·

In editionibus Basiliæ et Oxoniæ.

Εἰδ᾽ οὐκ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσιν, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἐστιν ἀδύνατον. Εἰ γὰρ μὴ, προσευρήσθω, καὶ ἔστω ὁ Δ· ὡς οὖν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ

Δ——— Ε—————

Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐξ ἴσου γοῦν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλὰ μὴν οἱ Α, Γ πρῶτοί εἰσι, πρῶτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Γ μετρεῖ πρώτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας, ὅπερ ἀδύνατον· τοῖς Α, Β, Γ ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀδύνατον.

Πάλιν οἱ Α, Β, Γ ἀνάλογον ἑξῆς ἔστωσαν μὲν οἱ δὲ Α, Γ ἄκροι οὐ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν δυνατόν ἐστιν·

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ὁ δὴ Α	ὁ Α ἄρα	concordat cum edit. Paris.
4. μὲν	μὴν	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τοῖς	*Id.*	τῶν
7. ἀνάλογον	ἀνάλογον εἷς	concordat cum edit. Paris.

Post ultimum *alinea* editionis Parisiensis hæc leguntur in codicibus *a*, *d*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

Αλλὰ δὴ οἱ Α, Β, Γ μήτε ἑξῆς ἔστωσαν ἀνάλογον, μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω.

Ομοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ, δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

In editionibus Basiliæ et Oxoniæ.

Αλλὰ μὴν οὔτ' ἀνάλογον ἑξῆς οἱ Α, Β, Γ οὔτε πρῶτοι οἱ Α, Γ ἄκροι ἔστωσαν, καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, ὁμοίως δείξομεν ἐὰν ὁ Α τὸν Δ μετρῇ ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν δυνατόν ἐστιν· ἐὰν δὲ μὴ μετρῇ, ὅτι ἀδύνατον. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 3.	Β, 4.	Γ, 9.	Ε, 12.	Δ, 36.
Α, 4.	Β, 5.	Γ, 14.	Ε,----	Δ, 70.

Nota. Subsequentia adsunt in codice 190 inter et vocabulum ἀλλήλους et vocabulum λέγω secundi *alinea* paginæ 439; quæ quidem Euclidis esse non possunt.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
deest.	* Λέγω ὅτι καὶ οὕτως δύνατον. Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν ὑπὸ Β, Γ μετρεῖ, προβήσεται ἡ δεῖξις ὁμοίως τοῖς ἑξῆς. Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν ὑπὸ Β, Γ, ἀδύνατον αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Οἷον ἔστω ὁ μὲν Α τριῶν τινῶν, ὁ δὲ Β, ἕξ· ὁ δὲ Γ, ἑπτά· καὶ δηλονοτὶ δυνατόν. Εἰ δὲ ὁ Α εἴη πέντε, οὐκ ἔτι δυνατὸν καὶ ἁπλῶς· ὅτε μὲν ὁ Β πολλαπλάσιός ἐστι τοῦ Α, δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν. Εἰ δὲ μή, ἀδύνατον.	deest.

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ	*Id.*	deest.
1. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω. . .	*Id.*	Εἰ γὰρ ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν αὐτὸς,
2. ἄρα	*Id.*	concordat cum edit. Paris.
3. Ο αὐτὸς δὲ καὶ	*Id.*	καὶ

PROPOSITIO XXII.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Εστι	Εστω	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIII.

1. ὁποσοιοῦν περισσοὶ ἀριθμοὶ, .	*Id.*	ἀριθμοὶ περισσοὶ ὁποσοιοῦν,

PROPOSITIO XXIV.

1. ὁ	*Id.*	καὶ ὁ
2. ἀφῃρήσθω ἄρτιος, ...	*Id.*	ἄρτιος ἀφῃρήσθω
3. ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ.	ἄρτιός ἐστιν ὁ ΑΓ. . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXV.

1. ο	*Id.*	καὶ ὁ
2. ὅτι ὁ	*Id.*	ὅτι καὶ

PROPOSITIO XXVI.

1. ὁ	*Id.*	καὶ ὁ

PROPOSITIO XXVII.

1. περισσοῦ	*Id.*	περισσοῦ ἀριθμοῦ
2. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Εστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ· .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ὁποσοιοῦν	ὁποσοὶ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIX.

1. ἐστιν·	*Id.*	Ο δὲ συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν, περισσός ἐστιν·

PROPOSITIO XXX.

1. ὁ ἄρα B	ὁ B ἄρα	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶν	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXXI.

1. διπλασίονα	*Id.*	διπλάσιον
2. διπλασίων	*Id.*	διπλάσιος
3. ὁ A	*Id.*	ὁ A καὶ
4. ὁ Δ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXII.

1. δυάδος	*Id.*	διάδος
2. δυάδος	*Id.*	διάδος
3. Οτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν B, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος . . .	Οτι μὲν ἕκαστος ἀρτιός ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ διάδος	concordat cum edit. Paris.
4. Λέγω	*Id.*	Λέγω δὴ
5. ἡ E.	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ὅτι	deest.	ὅτι καὶ

PROPOSITIO XXXIII.

1. ἄρτιος, ...	*Id.*	ἄρτιος, ὁ ἥμισυς αὐτοῦ ἄρτιός ἐστι, καὶ

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἄρτιος	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. δυάδος	*Id.*	διάδος
3. δυάδος	*Id.*	διάδος
4. περισσός ἐστιν.	*Id.*	ἐστὶ περισσός.
5. τέμνωμεν	*Id.*	τέμωμεν
6. ποιοῦμεν	*Id.*	ποιῶμεν,
7. ἀριθμὸν	*Id.*	deest.
8. δυάδα, ...	*Id.*	τινα περισσὸν ὃ μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν, καταντήσομεν εἰς διάδα,
9. δυάδος	*Id.*	διάδος
10. ὁ Α	*Id.*	ὁ Α καὶ

PROPOSITIO XXXV.

2. ἴσοι	*Id.*	ἴσος
2. πάντας	*Id.*	ἅπαντας
3. ὁποσοιδηποτοῦν	*Id.*	ὁσοιδηποτοῦν
4. ἐστί·	*Id.*	deest.
5. τοὺς	*Id.*	τὸν

PROPOSITIO XXXVI.

1. ὁσοιδηποτοῦν	*Id.*	ὁποσοιοῦν
2. deest.	Περιττὸν ἐχέτω. Λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περισσός. Οτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστιν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. Εἀν γὰρ τὸν Α	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
	τέμνωμεν δίχα, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦμεν, καταντήσωμεν εἴς τινα ἀριθμὸν περισσὸν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ οὒ, καταντήσωμεν εἴς τινα ἀριθμὸν περισσὸν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· καταντήσωμεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· ὥσπερ ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. Εδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	
3. καὶ	*Id.*	deest.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν·	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὐδὲ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἀριθμὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστιν·	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. αὐτοῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

LIBER DECIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει· . .	*Id. a.*	σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει μόνον. *b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.*
4. τετράγωνα	*Id. a, b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.*	τετράγωνος
5. ἴσα	*Id. a, b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.*	ἴσαι

PROPOSITIO I.

1. γίγνηται· λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ .	*Id.*	ἂν γίγνηται· ληφθήσεταί τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον
2. καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος ὃ ἔσται . .	*Id.*	καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, ληφθήσεταί τι μέγεθος ὅ ἐστιν
3. Τὸ Γ γὰρ	*Id.*	Τὸ γὰρ Γ
4. AB	*Id.*	AB μεγέθους
5. ἡμίσους	*Id.*	ἡμίσεος
6. ἢ τὸ ἥμισυ	*Id.*	τοῦ ἡμίσεος
7. ἢ τὸ ἥμισυ	*Id.*	τοῦ ἡμίσεος
8. ἡμίση	*Id.*	ἡμίσεα

ΑΛΛΩΣ*.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB, Γ, ἔστω δὲ τὸ Γ ἔλασσον[1], καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ,

ALITER.

Exponantur duæ magnitudines inæquales AB, Γ, sit autem Γ minor, et quoniam minor est

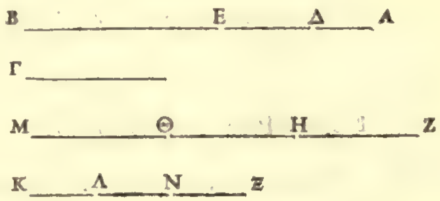
AUTREMENT.

Soient exposées deux grandeurs inégales AB, Γ; que Γ soit la plus petite.

* Hoc ἄλλως in margine codicis *a* est exaratum; deest autem in codicibus *d*, *g*, et in omnibus aliis est in textu.

πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους μεῖζον. Γεγονέτω ὡς τὸ ΖΜ, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ, καὶ ἔστω[2] τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΕΔ. Καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω[3] ἕως αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΖΜ διαιρέσεσι. Γεγονέτωσαν ὡς αἱ ΒΕ, ΕΔ, ΔΑ, καὶ τῷ ΔΑ ἕκαστον τῶν ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γιγνέσθω[4] ἕως ἂν[5] αἱ διαιρέσεις τοῦ ΚΞ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ΖΜ.

Γ, multiplicata, erit aliquando magnitudine ΑΒ major. Fiat ut ΖΜ, et dividatur in partes æquales ipsi Γ, et sit ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ, et ab ΑΒ auferatur majus quam dimidium ΒΕ, et ab ΑΕ majus quam dimidium ΕΔ. Atque hoc semper fiat quoad divisiones quæ in ΑΒ æquales fiant divisionibus quæ in ΖΜ. Fiant ut ΒΖ, ΕΔ, ΔΑ, et ipsi ΔΑ unaquæque ipsarum ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ sit æqualis, atque hoc fiat quoad divisiones ipsius ΚΞ æquales fiant divisionibus ipsius ΖΜ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ ΒΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΑΒ, τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΕΑ· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΝ[6]· τὸ ΒΕ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΞ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΔ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΕΑ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ ΑΔ ἐστιν ἴσον τῷ

Et quoniam ΒΕ major quam dimidium est ipsius ΑΒ, ipsa ΒΕ major est quam ΕΑ; multo igitur major est quam ΔΑ. Sed ΔΑ æqualis est ipsi ΞΝ; ergo ΒΕ major est quam ΝΞ. Rursus, quoniam ΕΔ major quam dimidium est ΕΑ, major est quam ΔΑ. Sed ΑΔ est æqualis ipsi ΝΛ; ergo

Puisque la grandeur Γ est la plus petite, cette grandeur étant multipliée deviendra enfin plus grande que ΑΒ. Qu'elle deviène ΖΜ. Partageons ΖΜ en parties égales chacune à Γ; que ces parties soient ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ; retranchons de ΑΒ une partie ΒΕ plus grande que sa moitié, de ΑΕ une partie ΕΔ plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de ΑΒ soit égal au nombre des divisions de ΖΜ. Que les divisions de ΑΒ soient ΒΕ, ΕΔ, ΔΑ; que chacune des droites de ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ soit égale à ΔΑ, et que le nombre des divisions de ΚΞ soit égal au nombre des divisions de ΖΜ.

Puisque ΒΕ est plus grand que la moitié de ΑΒ, la droite ΒΕ sera plus grande que ΔΑ, et à plus forte raison que ΔΑ. Mais ΔΑ est égal à ΞΝ; la droite ΒΕ est donc plus grande que ΝΞ. De plus, puisque la droite ΕΔ est plus grande que la moitié de ΕΑ, cette droite sera plus grande que ΔΑ. Mais

ΝΑ[7]· τὸ ΕΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΑ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΑ. Ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΑΚ[8]· ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ μεῖζόν ἐστιν ὅλου τοῦ ΞΚ. Ἀλλὰ τοῦ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ΞΝ, ΝΑ, ΑΚ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως τὸ ΞΚ πρὸς τὸ ΖΜ. Μεῖζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΞΚ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΑΚ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΑ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΔ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΔ major est quam ΝΑ; tota igitur ΒΔ major est quam ΞΑ. Æquale autem ΔΑ ipsi ΑΚ; tota igitur ΒΑ major est quam tota ΞΚ. Sed quam ΒΑ major est ΜΖ; multo igitur ΜΖ major est quam ΞΚ. Et quoniam ΞΝ, ΝΑ, ΑΚ æquales inter se sunt, sunt autem et ipsæ ΜΘ, ΘΗ, ΗΞ æquales inter se, atque est æqualis multitudo ipsarum in ΜΖ multitudini ipsarum in ΞΚ; est igitur ut ΚΑ ad ΖΗ ita ΞΚ ad ΖΜ. Major autem ΖΜ quam ΞΚ; major igitur et ΖΗ quam ΑΚ. Atque est quidem ΖΗ æqualis ipsi Γ; ipsa autem ΚΑ ipsi ΑΔ; ergo Γ major est quam ΑΔ. Quod oportebat ostendere.

ΑΔ est égal à ΝΑ ; la droite ΕΔ est donc plus grande que ΝΑ ; la droite entière ΒΔ est donc plus grande que ΞΑ. Mais ΔΑ est égal à ΑΚ ; la droite entière ΒΑ est donc plus grande que la droite entière ΞΚ. Mais ΜΖ est plus grand que ΒΑ; la droite ΜΖ est donc à plus forte raison plus grande que ΞΚ. Et puisque les droites ΞΝ, ΝΑ, ΑΚ sont égales entr'elles, que les droites ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties de ΜΖ est égal au nombre des parties de ΞΚ, la droite ΚΑ sera à ΖΗ comme ΞΚ est à ΖΜ (12. 5). Mais ΖΜ est plus grand que ΞΚ ; la droite ΖΗ est donc plus grande que ΑΚ (14. 5). Mais ΖΗ est égal à Γ, et ΚΑ égal à ΑΔ; la droite Γ est donc plus grande que ΑΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἔστω δὲ τὸ Γ ἔλασσον, . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὰ ἴσα τῷ Γ, καὶ ἔστω . .	*Id.*	τὰ ἴσα τῷ Γ
3. γιγνέσθω	γίνεσθω	concordat cum edit. Paris.
4. γιγνέσθω	γινέσθω	concordat cum edit. Paris.
5. ἂν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΝ· . .	*Id.*	τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΝ·
7. τὸ ΑΔ ἐστὶν ἴσον τῷ ΝΑ· . .	*Id.*	τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΝΑ·
8. Ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΑΚ . . .	*Id.*	Ἀλλὰ καὶ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΚ·

PROPOSITIO II.

1. ὄντων	*Id.*	ἐκκειμένων

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. καὶ	*Id.*	καὶ ὄντος
3. τὸ	*Id.*	ὁ
4. ἐστὶν	*Id.*	deest.

PROPOSITIO III.

1. μεγέθη σύμμετρα	*Id.*	σύμμετρα μεγέθη
2. μέγεθος ἤτοι	μέγεθος	ἤτοι
3. οὖν	*Id.*	οὖν τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ
4. τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστὶ, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον·	*Id.*	κοινὸν μέτρον ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ. Καὶ φανερὸν ὅτι μέτρον ἐστὶ μέγιστον·
5. καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος	*Id.*	ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάττονος ἀεὶ
6. ΕΔ	*Id.*	ΓΔ
7. ΑΖ δὲ	*Id.*	δὲ ΑΖ
8. τὸ ΑΖ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ·	Hæc phrasis contracta margini exarata est manu alienâ.	concordat cum edit. Paris.
9. Ἔστω	*Id.*	μετρείτω, καὶ
10. καὶ	*Id.*	deest.
11. λοιπὸν	*Id.*	λοιπὸν ἄρα
12. ΑΒ, ΓΔ	*Id.*	ΑΒ, ΓΔ μεγέθη

PROPOSITIO IV.

1. δύο	*Id.*	deest.
2. οὐ	*Id.*	οὐ μετρεῖ
3. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β· τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· . .	Hæc phrasis exarata est litteris minoribus in infimâ paginâ.	concordat cum edit. Paris.
4. τὸ Δ ἄρα	τὸ δὲ ΑΔ	concordat cum edit. Paris.
5. Α, Β οὐ μετρεῖ.	*Id.*	Α, Β, Γ οὐ μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείτω τὰ Α, Β, Γ μεῖζον τοῦ Δ μεγέθους, τὸ Ε.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
	a, e.	Καὶ ἐπεὶ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Δ, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἀδύνατον. *d, f, g, h, l, m, n.*
6. οὖν	*Id.*	deest.
7. μετρήσει	*Id.*	μετρεῖ
8. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ·	*Id.*	deest.
9. ἐστὶ μέτρον.	*Id.*	μέτρον ἐστί.
10. ἄρα	*Id.*	deest.
11. Α, Β	*Id.*	Α, Β ἄρα
12. Τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ, ...	ἔστι δὲ τὸ Ε, τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρήσει, . . .	concordat cum edit. Paris.
13. μεγέθη	deest.	concordat cum edit Paris.
14. ἐὰν	ἂν	concordat cum edit. Paris.
15. συμμέτρων δοθέντων, . . .	*Id.*	δοθέντων συμμέτρων,

COROLLARIUM.

16. μέτρον μετρήσει.	*Id.*	μετρήσει μέτρον.
17. προχωρήσει.	προχωρήσει. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμὸν	*Id.*	deest.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VI.

1. ἔσται	*Id.*	ἐστι
2. τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα . .	*Id.*	πρὸς ἄλληλα τὰ Α, Β
3. τὸ αὐτὸ	*Id.*	ταὐτὸ
4. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
linea 1 μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ A.	Legere est in infimâ paginâ edit. Oxoniæ : *illa in uncis inclusa desiderantur in utroque codd. mss.* Illa non desiderantur in codicibus *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ Γ	ὁ Γ	concordat cum edit. Paris.
6. ἀριθμόν·	*Id.*	deest.
7. τῷ Z	*Id.*	τῷ Z μεγέθη
8. τὸν E.	*Id.*	τὸν E ἀριθμόν.
9. ἐστὶ	*Id.*	deest.
10. τὸ A	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. μετρεῖ	deest.	μὲν

ALITER*.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	τὸν	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ	*Id.*	τὸν
6. καὶ	*Id.*	deest.
7. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ E τὸ A, ἐπεὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	*Id.*	deest.

COROLLARIUM**.

1. ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν E ἀριθμὸν οὕτως ἡ εὐθεῖα	*Id.*	τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν E ἀριθμὸν οὕτως τὴν εὐθεῖαν
2. εὐθείας.	εὐθείας. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

* Deest in codd. *d*, *e*; reperitur autem in codd. *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*; atque est exaratum in summâ paginâ codicis *a*.

** Reperitur in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO VIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐστι	*Id.*	ἔσται
2. Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἕξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.	*Id.*	Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει ὅνπερ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

PROPOSITIO IX.

1. ὃν	*Id.*	ὅνπερ
2. ὃν	*Id.*	ὅνπερ
3. γὰρ	*Id.*	deest.
4. ὃν	*Id.*	ὅνπερ
5. πρὸς τὸν Δ, ...	*Id.*	ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν,
6. τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸν Δ . . .	*Id.*	τοῦ δὲ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν
7. ἀριθμὸν	*Id.*	deest.
8. καὶ	*Id.*	deest.
9. τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον.	*Id.*	ἀριθμοῦ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετράγωνον ἀριθμόν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.
10. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τετράγωνον·	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. τῆς Β	*Id.*	τῆς Β τετράγωνον
13. τοῦ Δ·	*Id.*	τοῦ Δ τετράγωνον·
14. τῆς Β	*Id.*	τῆς Β τετράγωνον
15. ἐστὶ	*Id.*	deest.
16. τοῦ Γ	*Id.*	τοῦ Γ ἀριθμοῦ
17. τετραγώνου	*Id.*	τετραγώνου ἀριθμοῦ
18. τοῦ Δ	*Id.*	τοῦ Δ ἀριθμοῦ
19. τετράγωνον	*Id.*	τετράγωνον ἀριθμὸν
20. τοῦ Γ	*Id.*	τοῦ Γ ἀριθμοῦ
21. λόγου·	*Id.*	ἀριθμοῦ λόγον
22. ὁ Γ	*Id.*	ὁ Γ ἀριθμὸς
23. τὸν Δ	*Id.*	τὸν Δ ἀριθμόν·

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
24. μήκει.	*Id.*	μήκει. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.
25. δὴ	*Id.*	δὲ
26. τῆς Β	*Id.*	τῆς Β τετράγωνον
27. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
28. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
29. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
30. δὴ	*Id.*	δὲ.
31. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
32. ἔσται	*Id.*	ἐστι
33. μήκει,	deest.	concordat cum edit. Paris.

ALITER.

In editionibus Basiliæ et Oxoniæ variæ partes hujus ἄλλως insertæ sunt in varias partes propositionis 9; in codicibus autem *a* et *d* hoc ἄλλως exaratum est in margine; in codicibus vero *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n* sic ordo se habet: 1° prop. 9 corollarium; 2° lemma prop. 10; 3° ἄλλως prop. 9; 4° prop. 11; 5° prop. 10.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μήκει,	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ δὲ Γ τὸν Δ	*Id.*	τὸν δὲ Δ
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ὁ δὲ Δ τὸν Γ	*Id.*	τὸν δὲ Γ
linea 13 ἀριθμόν.	*Id.*	ἀριθμόν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.
5. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστι	εἰσι	concordat cum edit. Paris.
7. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η,	Legere est in infimâ paginâ editionis Oxoniæ : *desiderantur in codd. mss.* Illa non desiderantur in codicibus *a*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
linea 12 ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, etc. usque ad vocabulum ὅπερ	Legere quoque est in infimâ paginâ: *illa uncis inclusa non agnoscunt codd. mss.* Illa agnoscunt codices *a, e, f, g, h, l, m, n.*	concordat cum edit. Paris.
8. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. τὸν Ζ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	τὸν Ζ.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM*.

1. φανερὸν	*Id.*	φανερὸν ἔστω
2. ἔσται	*Id.*	deest.
3. σύμμετροι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.	deest. *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*	concordat cum edit. Paris.
5. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. εἰσὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. οὖν	*Id.*	deest.
8. ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, ...	*Id.*	ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἕτερόν τινα ἀριθμὸν, σύμμετρά ἐστι τὰ τετράγωνα, τουτέστιν αἱ εὐθεῖαι ἀφ᾽ ὧν ἀνεγράφησαν δυνάμει,
9. τὰ μὲν μήκει σύμμετρα . .	*Id.*	αἱ μὲν μήκει σύμμετροι
10. τὰ	*Id.*	αἱ
11. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. δυνάμει.	deest.	δυνάμει ἀσύμμετροι.
13. Ἐπεὶ δὴ γὰρ	*Id.*	Ἐπειδήπερ
14. ἀριθμὸς	τετράγωνος ἀριθμὸς . .	concordat cmm edit. Paris.

* Non deest in codicibus *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
15. ἀριθμὸν,	τετράγωνον ἀριθμὸν,	concordat cum edit. Paris.
16. τῷ	*Id.*	deest.
17. μήκει δύνανται,	*Id.*	καὶ δύνανται μήκει,
18. μήκει	*Id.*	εἰσιν

PROPOSITIO X.

2. ἔσται	*Id.*	ἐστιν.
3. ἔσται.	*Id.*	ἐστιν.
4. ἀριθμόν·	*Id. a, d, e, h, l.*	ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἔχει λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, καὶ ἔσται σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον· τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· *f, g, m, n.*

PROPOSITIO XI.

1. τῆς	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
5. τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε· μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε.	*Id. a, e, h, l.*	τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ᾽ ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἱονεὶ τῇ Α, δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. Ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ. *d, f, g, m, n.*

PROPOSITIO XII.

1. Β τῷ Γ,	Γ τῷ Β	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

Hæc propositio, quæ prorsus eadem est quæ subsequens, exarata est vocabulis contractis, et alienâ manu in summâ paginâ codicis *a*, in margine vero cod. *d*, et in textu codd. *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO XIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἄλλῳ	*Id.*	ἑτέρῳ
lin. 9 paginæ 147 τὸ Β τῷ Γ,	τὸ Γ τῷ Β	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστι·	*Id.*	deest.

LEMMA.

1. ὀρθή ἐστιν	*Id.*	ἐστὶν ὀρθὴ
2. τῆς	*Id.*	τῇ
3. εὐθείας δοθεῖσαι	*Id.*	δοθεῖσαι εὐθείας
4. Κείσθωσαν	*Id.*	Εκκείσθωσαν

PROPOSITIO XV.

1. ἑαυτῇ·	*Id.*	ἑαυτῇ μήκει·
2. ἑαυτῇ.	*Id.*	ἑαυτῇ μήκει.
3. ἑαυτῇ·	*Id.*	ἑαυτῇ μήκει·
4. ἑαυτῇ.	*Id.*	ἑαυτῇ μήκει.
5. δὴ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
6. τῇ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
7. καὶ	*Id.*	deest.
8. ἐστὶ	*Id.*	deest.
9. ἐστὶν	*Id.*	deest.
10. ἐστι	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XVI.

1. ἐστὶ σύμμετρον.	*Id.*	σύμμετρόν ἐστιν.
2. ΑΓ	*Id.*	καὶ τὸ ΑΓ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἔστω σύμμετρον, ἔστω δὲ τῷ ΑΒ· . .	ΑΒ, ΒΓ ἔστω σύμμετρον τῇ ΑΒ·	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVII.

1. Συγκείσθω	*Id.*	Συγκείσθωσαν
2. ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω, εἰ δυνατὸν, τὸ Δ.	ἀσύμμετρον τὸ ΓΑ, ΑΓ μετρήσει τι μέγεθος. Μετρείτω, εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω τὸ Δ.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν ἀδύνατον·	*Id.*	ἀδύνατόν ἐστιν·
4. ἔστω, καὶ	ἔστω δὴ	concordat cum edit. Paris.
5. ἔσται	*Id.*	ἐστι
6. Υπέκειτο	*Id.*	Υπέκειντο
7. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἔσται. .	deest. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*.	concordat cum edit. Paris.

LEMMA*.

1. παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ, .	*Id.*	τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον,
2. ΑΓ, ΓΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.	*Id.*	ΑΓ, ΓΒ.

PROPOSITIO XVIII.

1. παραλληλόγραμμον . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. μήκει·	*Id.*	μήκη·
3. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. δύνηται	*Id.*	δυνήσεται
5. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τετάρτῳ	*Id.*	τετάρτῳ μέρει
7. παραλληλόγραμμον . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. μήκει.	*Id.*	μήκη.
9. παραλληλόγραμμον . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codicibus *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
10. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τῇ	*Id.*	τῷ
12. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τετραπλασίου τοῦ . . .	*Id.*	τετράκις
14. τετραπλασίῳ τοῦ	*Id.*	τετράκις
15. τετραπλασίῳ τοῦ	*Id.*	τετράκις
16. ἡ ΖΔ	*Id.*	ΖΔ
17. τετραπλασίῳ τοῦ . . .	*Id.*	τετράκις
18. σύμμετρός ἐστι ταῖς ΒΖ, ΓΔ μήκει·	*Id.*	ταῖς ΒΖ, ΓΔ ἐστὶ σύμμετρος μήκει·
19. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
21. μεῖζον τῆς Α	deest.	τῆς Α μεῖζον
22. ἑαυτῇ·	ἑαυτῆς.	concordat cum edit. Paris.
linea 2 paginæ 159 σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι	*Id.*	τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἴση γάρ ἐστι ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΔΓ· δηλονότι

PROPOSITIO XIX.

1. μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. δύνηται	*Id.*	δυνήσεται
3. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πρότερον, ...	*Id.*	προτέρῳ
5. ὅτι καὶ	*Id.*	οὖν ὅτι
6. μήκει, ...	*Id.*	deest.
linea 13 paginæ 160 ἄρα .	*Id.*	deest.
linea 2 paginæ 161 ἑαυτῇ. .	ἑαυτῆς.	concordat cum edit. Paris.
8. ἑαυτῇ·	ἑαυτῆς	concordat cum edit. Paris.
9. ἡ	*Id.*	καὶ ἡ

SCHOLIUM I*.

1. Επεὶ	*Id.*	Επεὶ δὴ

* Non deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. εἰσὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει	αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι	concordat cum edit. Paris.
3. δὴ δύνανται μήκει	Id.	δηλαδὴ δύναται καὶ μήκει
4. ἐπεὶ αἱ	Id.	αἱ γὰρ
5. αὐτῇ	Id.	deest.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'*.

Ρητὰς γὰρ[1] καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. Εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας καθ' ὃ ῥηταὶ, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταὶ μήκει σύμμετροι, ἐπακουομένου καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ οὕτως[2] ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Οτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν,

SCHOLIUM II.

Rationales enim vocat eas expositæ rationali vel longitudine et potentiâ commensurabiles, vel potentiâ solùm. Sunt autem et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt expositæ rationali, potentiâ vero solùm commensurabiles, et ob id rursus dicuntur rationales et commensurabiles inter se quatenus rationales, sed commensurabiles inter se, vel longitudine scilicet et potentiâ vel potentiâ solùm. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut intelligatur etiam potentiâ; si vero potentiâ solùm inter se sunt commensurabiles, dicuntur et ipsæ sic rationales potentiâ solùm commensurabiles. Quod et rationales commensurabiles sint, ex his manifestum est; quoniam

SCHOLIE II.

Car il appèle rationelles celles qui sont commensurables en longueur et en puissance, ou en puissance seulement avec la rationelle exposée. Il est d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec la rationelle exposée, lui sont commensurables en puissance seulement; et à cause de cela elles sont encore dites rationelles et commensurables entr'elles en tant que rationelles; mais commensurables entr'elles en longueur et en puissance, ou en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, elles sont dites rationelles commensurables en longueur, afin que l'on entende qu'elles le sont aussi en puissance; mais si elles sont commensurables entr'elles en puissance seulement, elles sont dites rationelles commensurables en puissance seulement. Or, il est évident que les rationelles sont com-

* Non deest in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν[3].

enim rationales sunt quæ expositæ rationali commensurabiles, quæ vero eidem commensurabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ igitur rationales commensurabiles sunt.

mensurables; car puisque les rationelles sont commensurables avec la rationelle exposée, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles (12. 10), il s'ensuit que les rationelles sont commensurables.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. Ρητὰς γὰρ	*Id.*	Ρητὰς
2. οὕτως	*Id.*	deest.
3. εἰσιν.	*Id.*	εἰσιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XX.

1. εἰρημένων	*Id.*	προειρημένων
2. σύμμετρος δέ ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ·	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXI.

1. προειρημένων	*Id.*	εἰρημένων
2. ἄρα	*Id.*	ἄρα ἐστὶ

LEMMA*.

1. ἔσται	*Id.*	ἐστι
2. ἐστιν	*Id.*	deest.
3. ἐστὶν ἡ Α.	*Id.*	ἡ Α ἐστὶν.
4. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	hæc phrasis contracta est.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXII.

1. ἔσται·	*Id.*	ἔστω

* Non deest in codicibus *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. μέση.	μέση, διὰ τὸ τὴν ἴσον ἀναγράφουσαν τετράγωνον τῷ ΑΓ χωρίῳ ἂν καλεῖ μέσην, μέσην ἀνάλογον εἶναι τῶν ΑΒ, ΒΓ. *a*, *d*.	μέση, διὰ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι τῶν ΑΒ, ΒΓ. *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

Subsequens scholium nihil aliud est quam propositio 22 aliter demonstrata.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

Μέση ἐστὶν ἄλογος ἡ δυναμένη χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων.

Υπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν Α, Β περιεχέσθω χωρίον. Δεικτέον ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

SCHOLIUM.

Media est irrationalis quæ potest spatium contentum sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm commensurabilibus rectis Α, Β contineatur spatium. Ostendendum est irrationale esse hujusmodi spatium.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ· ὥστε ἡ Γ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα

Sumatur enim ipsarum Α, Β media proportionalis Γ; rectangulum igitur sub Α, Β æquale est quadrato ex Γ; quare Γ potest rectangulum

SCHOLIE.

La médiale qui peut une surface comprise sous des rationelles commensurables en puissance seulement, est irrationelle.

Qu'une surface soit comprise sous les droites rationelles Α, Β commensurables en puissance seulement; il faut démontrer qu'une telle surface est irrationelle.

Car prenons une droite Γ moyenne proportionnelle entre Α et Β; le rectangle sous Α, Β sera égal au quarré de Γ (17. 6); la droite Γ peut donc le rectangle

* Deest in codd. *a*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*; reperitur vero in cod. *g*.

ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πορίσματι τοῦ ιθ' τοῦ ϛ' Στοιχείου. Ασύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Γ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ. Μέση δὲ ἐκλήθη, ὅτι ἄλογος οὖσα μέσον δύο ῥητῶν τῶν Α, Β ἀνάλογόν ἐστιν.

sub A, B; est igitur ut A ad B ita ex A quadratum ad ipsum ex Γ, ut enim prima ad tertiam ita ex primâ quadratum ad ipsum ex secundâ, hoc enim demonstratum est in corollario propositionis 28 sexti Elementorum. Incommensurabilis autem A ipsi B longitudine; incommensurabile igitur et ex A quadratum quadrato ex Γ. Rationale autem quadratum ex A; irrationale igitur rectangulum sub A, B; irrationalis igitur est Γ. Media autem vocatur, quod irrationalis existens media duarum rationalium A, B proportionalis est.

sous A, B; la droite A est donc à B comme le quarré de A est au quarré de Γ; car la première est à la troisième comme le quarré de la première est au quarré de la seconde, ainsi que cela est démontré dans le corollaire 28 du sixième livre des Éléments. Mais A est incommensurable en longueur avec B; le quarré de A est donc incommensurable avec le quarré de Γ (10. 10). Mais le quarré de A est rationel; le rectangle compris sous A, B est donc irrationel; la droite Γ est donc irrationelle; et on l'appèle médiale, parce qu'étant irrationelle, elle est moyenne proportionelle entre les deux rationelles A, B.

LEMMA*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐστιν	*Id.*	ἔσται
2. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXIII.

1. παραβαλλόμενον	*Id.*	παρεμβαλλόμενον
2. ὀρθογώνιον	*Id.*	deest.
3. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστι	*Id.*	deest.
5. ἐστι	*Id.*	εἰσι
6. περιεχομένῳ.	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO XXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Η δὲ τὸ	Id.	τὸ δὲ
3. δυναμένη μέση ἐστίν· . . .	Id.	εὐθεῖον περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἡ δυναμένη μέση·

COROLLARIUM*.

1. καὶ	deest. . . . . . ,	concordat cum edit. Paris.
2. σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει.	Id.	μήκει καὶ δυνάμει σύμμετροι.

Subsequentia, quæ desunt in codd. *e*, *m*, *n*, reperiuntur in codd. *a*, *d*, *f*, *g*, *l*.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι, διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ἑπομένου τοῦ ὅτι καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι[1] δυνάμει μόνον σύμμετροι. Οτι δὲ

Sunt autem rursus et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt mediæ, potentiâ vero solùm commensurabiles, et dicuntur rursus mediæ, quoniam commensurabiles sunt potentiâ mediæ et commensurabiles inter se, nam mediæ aliæ commensurabiles inter se vel longitudine scilicet et potentiâ, vel potentiâ solùm. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ mediæ longitudine commensurabiles, consequenter etiam et potentiâ. Si autem potentiâ solùm sunt commensurabiles, dicuntur et sic mediæ potentiâ solùm com-

Il est encore d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec une médiale, ne sont commensurables avec elle qu'en puissance; on les appèle encore médiales, parce qu'elles sont commensurables en puissance avec une médiale et commensurables entr'elles; car les autres médiales sont commensurables entr'elles, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, on les appèle médiales commensurables en longueur, et par conséquent en puissance; et si elles ne sont commensurables qu'en puissance, on les appèle médiales commensurables en puissance seulement. On

* Non deest in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως[2] δεικτέον. Επεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

mensurabiles. Quod vero mediæ commensurabiles sint, sic ostendendum est. Quoniam mediæ mediæ cuidam commensurabiles sunt, et quæ eidem commensurabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ igitur mediæ commensurabiles sunt.

démontre ainsi que ces médiales sont commensurables. Puisque ces médiales sont commensurables avec une médiale, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles, les médiales sont commensurables.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μέσαι	*Id.*	deest.
2. οὕτως	*Id.*	οὕτω

PROPOSITIO XXV.

1. κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων	*Id.*	deest.
2. ἐστι	*Id.*	ἐστι καὶ

PROPOSITIO XXVI.

1. εὐθειῶν	*Id.*	deest.
2. περιεχέσθω ὀρθογώνιον . . .	*Id.*	ὀρθογώνιον περιεχέσθω
3. ἢ μέσον ἐστίν.	*Id.*	ἐστιν ἢ μέσον.
4. ἄρα	*Id.*	ἄρα ἐστὶ
5. Καὶ ἐπεὶ	*Id.*	Επεὶ οὖν
6. Καὶ ἔστιν	*Id.*	Εστιν ἄρα καὶ
7. σύμμετρός ἐστι	*Id.*	ἡ ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ΘΝ, τουτέστι
8. ΘΜ	*Id.*	ΘΜ ἄρα
9. ἢ μέσον ἐστίν.	*Id.*	ἐστιν ἢ μέσον

PROPOSITIO XXVII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐστὶν ἴσον	*Id.*	ἴσον ἐστί.
2. παράκειται	*Id.*	παράκεινται·
4. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 21 paginæ 179 Μέσον ἄρα μέσου, ...	*Id.*	Οὐκ ἄρα μέσον μέσου,

PROPOSITIO XXVIII.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστὶ	*Id.*	deest.
6. σύμμετροι. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	*Id.*	σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITION XXIX.

1. τρεῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσί.	καὶ αἱ Δ, Ε ἄρα δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι. . .	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. μέσον περιέχουσαι. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.	καὶ τὰ ἑξῆς.	concordat cum edit. Paris.

LEMMA I*.

1. δὲ	*Id.*	δὴ
2. ἐκ	*Id.*	ὑπὸ

* Non deest in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
4. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM*.

1. τὸν	*Id.*	τὴν
2. ὦσιν ἐπίπεδοι.	*Id.*	ἐπίπεδοι ὦσιν.
3. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τετράγωνος.	τετράγωνος. Ὁ ἄρα ὁ .	concordat cum edit. Paris.

LEMMA II**.

1. κατὰ τὸ Δ·	τῷ Δ	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
4. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
5. Ἀφῃρήσθω	Ἀφῃρήσθω ὁμοίως . . .	concordat cum edit. Paris.
6. ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος . . .	ΑΒ, ΒΓ	concordat cum edit. Paris.
7. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
9. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶ	*Id.*	ἔσται
11. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
12. τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, ...	*Id.*	deest.
13. μονάς.	*Id.*	μονάς, μήτε ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΔ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ.
14. τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίων ὁ ΗΑ.	τῆς ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλάσιος ὁ ΗΑ.	τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω διπλασίων ὁ ΗΑ τῆς ΔΕ μονάδος.
15. ὁ δὲ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστὶ διπλασίων·	*Id.*	ὢν ὁ ΑΗ ἐστὶ διπλασίων τοῦ ΔΕ·
16. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Reperitur in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

** Reperitur in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
17. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
18. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. ἐκ τῶν	*Id.*	ὑπὸ τῶν
21. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
23. ὁ AB ἴσος τῷ HB, . . .	ἡ AB ἴση τῇ HB, . . .	concordat cum edit. Paris.
24. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
25. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
26. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
27. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
28. διπλασίων	*Id.*	διπλάσιος κείσθω
29. Καὶ	*Id.*	deest.
30. διπλασίων	*Id.*	διπλάσιος
31. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
32. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
33. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
34. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
35. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ,	*Id.*	συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ τῷ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΖ,
36. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
37. τῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
38. αὐτῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
39. τοῦ ΒΕ, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ·	τῆς ΒΕ·	concordat cum edit. Paris.
40. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
41. τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος,	τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικνύειν, ἀρκείσθωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι,	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXX.

1. τὸν	τὴν	concordat cum edit. Paris.
2. τετράγωνον, ...	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. οὖν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 12 μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μεῖζον	μείζονα	concordat cum edit. Paris.
7. ποιῆσαι.	Id.	δεῖξαι.

PROPOSITIO XXXI.

1. ἀριθμοὶ	Id.	deest.
2. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῷ	τῇ	concordat cum edit. Paris.

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis 1 lib. 6 consequentia sit proxima.

ΛΗΜΜΑ*.

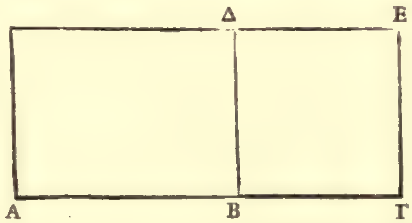
Εὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Εστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἐν λόγῳ τινί· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ

LEMMA.

Si sint duæ rectæ in ratione aliquâ, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub duabus rectis ad quadratum ex minori.

Sint igitur duæ rectæ ΑΒ, ΒΓ in ratione aliquâ; dico esse ut ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum ad quadratum ex ΒΓ. Describatur enim ex ΒΓ quadratum ΒΔΕΓ, et compleatur



LEMME.

Si l'on a deux droites dans une raison quelconque, l'une d'elles sera à l'autre comme le rectangle sous ces deux droites est au quarré de la plus petite.

Soient les deux droites ΑΒ, ΒΓ dans une raison quelconque; je dis que ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est au quarré de ΒΓ. Car décrivons sur ΒΓ

* Deest in codd. *a*, *d*, *e*, *h*, *l*, *m*, *n*; reperitur autem in cod. *f*.

ΒΔΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. Φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, τὸ δὲ ΒΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΔ parallelogrammum. Manifestum est igitur esse ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ parallelogrammum ad ΒΕ parallelogrammum. Atque est ΑΔ quidem rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΒΔ, sed ΒΕ quadratum ex ΒΓ; ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum ad quadratum ex ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

le quarré ΒΔΕΓ, et achevons le parallélogramme ΑΔ. Il est évident que ΑΒ est à ΒΓ comme le parallélogramme ΑΔ est au parallélogramme ΒΕ (1.6). Mais le rectangle ΑΔ est compris sous ΑΒ, ΒΓ; car ΒΓ égale ΒΔ, et le parallélogramme ΒΕ est le quarré de ΒΓ; donc ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est au quarré de ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITIO XXXII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	*Id.*	τῷ
3. ἐστὶ	*Id.*	deest.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. συμμέτρου	ἀσυμμέτρου	concordat cum edit. Paris.
6. δύναται	*Id.*	δυνήσεται
7. συμμέτρου	ἀσυμμέτρου	concordat cum edit. Paris.
8. συμμέτρου ἑαυτῇ	ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.	συμμέτρου ἑαυτῷ
9. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Ομοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν τῆς Β μεῖζον δύνηται ἡ Α τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. *d, e.*	*Id. a.*	Ομοίως δὲ δειχθήσηται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α μεῖζον δυνῆται τοῦ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. *d, f.*

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis 1 lib. 6 consequentia sit proxima.

ΛΗΜΜΑ*.

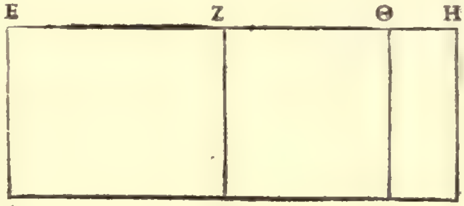
Εὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Εστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ.

LEMMA.

Si sint tres rectæ in ratione aliquâ, erit ut prima ad tertiam ita rectangulum sub primâ et mediâ ad ipsum sub mediâ et minimâ.

Sint tres rectæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ in ratione aliquâ; dico esse ut ΑΒ ad ΓΔ ita sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum ad ipsum sub ΒΓ, ΓΔ.



Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ εὐθεῖα παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Γ, Δ σημείων τῇ ΑΕ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΒ, ΘΓ, ΗΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΖ

Ducatur enim a puncto Α ipsi ΑΒ ad rectos angulos ΑΕ, et ponatur ipsi ΒΓ æqualis ΑΕ, et per punctum Ε ipsi ΑΔ recta parallela ducatur ΕΗ, sed per puncta Β, Γ, Δ ipsi ΑΕ parallelæ ducantur ΖΒ, ΘΓ, ΗΔ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΖ parallelogrammum ad ΒΘ pa-

LEMME.

Si l'on a trois droites dans une raison quelconque, la première sera à la troisième comme le rectangle sous la première et la moyenne est au rectangle sous la moyenne et la plus petite.

Soient les trois droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ dans une raison quelconque; je dis que ΑΒ est à ΓΔ comme le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est au rectangle sous ΒΓ, ΓΔ.

Car du point Α menons la droite ΑΕ perpendiculaire à ΑΒ; faisons ΑΕ égal à ΒΓ; par le point Ε menons la droite ΕΗ parallèle à ΑΔ, et par les points Β, Γ, Δ menons ΖΒ, ΘΓ, ΗΔ parallèles à ΑΕ. Puisque ΑΒ est à ΒΓ comme le parallélo-

** Deest in codd. *a*, *d*, *e*, *h*, *m*, *n*; reperitur autem in codd. *c*, *f*, *l*.

παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΒΘ πρὸς τὸ ΓΗ· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΗ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ, τὸ δὲ ΓΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.

Εὰν ἄρα τρεῖς ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

rallelogrammum, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita ΒΘ ad ΓΗ; ex æquo igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΖ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΗ. Atque est quidem ΑΖ rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΑΕ ipsi ΒΓ, rectangulum vero ΓΗ sub ΒΓ, ΓΔ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΓΘ.

Si igitur tres sint, etc.

gramme ΑΖ est au parallélogramme ΒΘ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme ΒΘ est à ΓΗ (1.6); par égalité, ΑΒ sera à ΓΔ comme le parallélogramme ΑΖ est au parallélogramme ΓΗ. Mais ΑΖ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; car ΑΕ égale ΒΓ, et ΓΗ est le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ; car ΒΓ égale ΓΘ. Donc, etc.

PROPOSITIO XXXIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ·	Id.	αἱ Α, Β, Γ δυνάμει μόνον σύμμετροι,
2. τῆς Δ·	Id.	τῆς Δ, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β.
3. ἴσον	Id.	ἴσον ἐστὶ
4. Ως δὲ	Id.	Αλλ' ὡς
5. μόνον·	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὸ	τῷ	concordat cum edit. Paris.
8. τῷ	Id.	τὸ
9. τὸ	τῷ	concordat cum edit. Paris.
10. αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ...	Id.	deest.
11. τὴν μείζονα	Id.	deest.
12. Οπερ ἔδει ποιῆσαι. ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. Ομοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ..	Id.	Ομοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Ε τοῦ ἀπὸ τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

ΛΗΜΜΑ*. — LEMMA.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω .	ὑπὸ Α γωνίαν, καὶ ἤχθω	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ ἔτι τὸ	*Id.*	τὸ δὲ
3. ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ·	ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ·	ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ·
4. τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ . . .	ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ . . .	τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον
5. Καὶ ὅτι	Η καὶ ὅτι	concordat cum edit. Paris.
6. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

ΛΗΜΜΑ β'**.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

LEMMA II.

Si recta linea secetur in partes inæquales, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub totâ et majori ad rectangulum sub totâ et minori.

Recta enim aliqua AB secetur in partes inæquales ad E; dico ut AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν

Describatur enim ex AB quadratum AΓΔB, et per punctum E alterutri ipsarum AΓ, ΔB

LEMME II.

Si une ligne droite est partagée en deux parties inégales, une partie sera à une partie comme le rectangle compris sous la droite entière et la plus grande partie est au rectangle compris sous la droite entière et sous la plus petite.

Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties inégales en E; je dis que AE est à EB comme le rectangle sous BA, AE est au rectangle sous AB, BE.

Car décrivons avec AB le quarré AΓΔB, et par le point E menons la droite EZ

* Reperitur in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

** Deest in codd. *a*, *d*, *e*, *h*, *m*, *n*; reperitur autem in codd. *f*, *g*, *l*.

ΑΓ, ΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. Φανερὸν οὖν ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. Καί ἐστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῇ ΑΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ γ'*.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

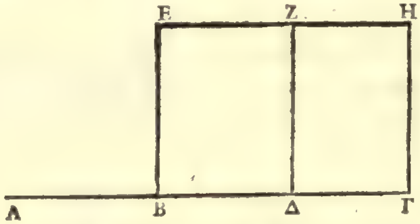
Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ.

parallela ducatur ΕΖ. Evidens est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΑΖ parallelogrammum ad parallelogrammum ΖΒ. Atque est quidem ΑΖ rectangulum sub ΒΑ, ΑΕ, æqualis enim ΑΓ ipsi ΑΒ, rectangulum vero ΖΒ sub ΑΒ, ΒΕ, æqualis enim ΔΒ ipsi ΑΒ; ut igitur ΑΕ ad ΕΒ ita sub ΒΑ, ΑΕ rectangulum ad ipsum sub ΑΒ, ΒΕ. Quod oportebat ostendere.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, secetur autem minima ipsarum in partes æquales; rectangulum sub duabus rectis duplum erit rectanguli sub majori et dimidiâ minimæ.

Sint duæ rectæ inæquales ΑΒ, ΒΓ, quarum major sit ΑΒ, et secetur ΒΓ bifariam in Δ; dico rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ duplum esse rectanguli sub ΑΒ, ΒΔ.



parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΒ. Il est évident que ΑΕ sera à ΕΒ comme le parallélogramme ΑΖ est au parallélogramme ΖΒ (1.6). Mais ΑΖ est le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ; car ΑΓ égale ΑΒ, et ΖΒ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΕ, car ΔΒ est égal à ΑΒ; donc ΑΕ est à ΕΒ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ est au rectangle sous ΑΒ, ΒΕ. Ce qu'il fallait démontrer.

LEMME III.

Si deux droites sont inégales, et si la plus petite est coupée en deux parties égales, le rectangle compris sous ces deux droites sera double du rectangle compris sous la plus grande et la moitié de la plus petite.

Soient les deux droites inégales ΑΒ, ΒΓ; que ΑΒ soit la plus grande; coupons ΒΓ en deux parties égales au point Δ; je dis que le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle sous ΑΒ, ΒΔ.

* Deest in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *h*, *l*, *m*, *n*; reperitur autem in codd. *g*, *l*.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Επεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ. Καὶ ἔστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΓ διπλασίων· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Ducatur enim a puncto B ipsi BΓ ad rectos angulos ipsa BE, et ponatur ipsi BA æqualis BE, et describatur figura. Quoniam igitur est ut ΔB ad ΔΓ ita BZ ad ΔH, componendo igitur ut BΓ ad ΔΓ ita BH ad ΔH. Atque est BΓ ipsius ΔΓ dupla; duplum igitur est et BH ipsius ΔH. Atque est quidem BH rectangulum sub AB, BΓ, æqualis enim AB ipsi BE, rectangulum vero ΔH est ipsum sub AB, BΔ, æqualis enim quidem ipsi BΔ ipsa ΔΓ, ipsi vero AB ipsa ΔZ. Quod oportebat ostendere.

Lemma subsequens in codice 190 locum tenet lemmatis secundi edit. Oxoniæ.

ΛΗΜΜΑ.

Εὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔσται ὡς ἡ μία πρὸς τὴν ἑτέραν οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφότερας καὶ μίας αὐτῶν πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφότερας καὶ τῆς ἑτέρας.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ, erit ut una ad alteram ita rectangulum sub utrâque et unâ ipsarum ad rectangulum sub utrâque et alterâ.

Sint duæ rectæ AB, BΓ; dico esse ut AB ad BΓ ita sub AΓ, AB rectangulum ad ipsum sub AΓ, ΓB.

Du point B menons BE à angles droits à BΓ; faisons BE égal à BA, et décrivons la figure. Puisque ΔB est à ΔΓ comme BZ est à ΔH (1. 6); par addition, BΓ sera à ΔΓ comme BH est à ΔH. Mais BΓ est double de ΔΓ; donc BH est double de ΔH. Mais BH est le rectangle sous AB, BΓ, car la droite AB est égale à BE; et ΔH est le rectangle sous AB, BΔ, car ΔΓ est égal à BΔ, et ΔZ à AB. Ce qu'il fallait démontrer.

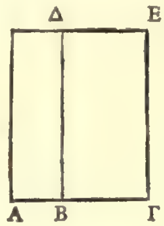
LEMME.

Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le rectangle compris sous leur somme et sous l'une de ces droites est au rectangle compris sous la somme de ces droites et sous l'autre droite.

Soient les deux droites AB, BΓ; je dis que AB est à BΓ comme le rectangle compris sous AΓ, AB est au rectangle compris sous AΓ, ΓB.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς ἴση τῇ ΑΓ ἡ ΒΔ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον.

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΓ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ



ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ, ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ΒΔ τῇ ΓΔ· τὸ δὲ ΔΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Ducatur enim a puncto Β ad rectos angulos æqualis ipsi ΑΓ ipsa ΒΔ, et compleatur ΑΕ parallelogrammum.

Quoniam enim est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΓ; atque est quidem rectangulum ΑΔ ipsum sub ΒΔ, ΑΒ, hoc est rectangulum sub ΓΑ, ΑΒ, æqualis enim supponitur ΒΔ ipsi ΓΔ; est autem rectangulum ΔΓ ipsum sub ΒΔ, ΓΒ, hoc est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΓΑ, ΑΒ rectangulum ad ipsum sub ΑΓ, ΓΒ. Quod oportebat ostendere.

Car du point Β menons à angles droits la droite ΒΔ égale à ΑΓ, et achevons le parallélogramme ΑΕ.

Car puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΔ est à ΔΓ (1. 6), que ΑΔ est le rectangle sous ΒΔ, ΑΒ, c'est-à-dire sous ΓΑ, ΑΒ, car ΒΔ est supposé égal à ΓΑ, et que ΔΓ est le rectangle sous ΒΔ, ΓΒ, c'est-à-dire sous ΑΓ, ΓΒ; la droite ΑΒ sera à ΒΓ comme le rectangle sous ΓΑ, ΑΒ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῆς	*Id.*	τῇ
2. ἀπὸ	*Id.*	ἀπὸ ἐλάσσονος
3. ἐπεὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. σύμμετρόν ἐστι τῷ	*Id.*	διπλάσιόν ἐστι τοῦ

PROPOSITIO XXXV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τοῦ	*Id.*	τῆς
2. τῆς ΔΒ.	*Id.*	τῆς ΔΒ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι.
3. διπλῆ	*Id.*	διπλασίων
4. ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ.	*Id.*	ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ· ὥστε καὶ σύμμετρον.
5. τῶν ΑΒ, ΒΓ·	*Id.*	τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπόκειται γὰρ οὕτως·
6. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· . . .	Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ·	concordat cum edit. Paris.
7. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVI.

1. τῆς	*Id.*	τῇ
2. τοῖς ἐπάνω ὁμοίως	*Id.*	ὁμοίως τοῖς ἐπάνω
3. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν ἀπὸ	*Id.*	deest.
5. ἴσον ἐστὶ	*Id.*	ἐστὶν ἴσον
6. ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ·	*Id.*	ἡ ΔΖ τῇ ΒΕ·
7. μέσον ἄρα	*Id.*	μέσον, μέσον
8. ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.	*Id.*	ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.
9. αἱ ΑΔ, ΔΒ	*Id.*	deest.
10. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVII.

1. καλείσθω	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. ὅλη	*Id.*	deest.
3. αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ,	*Id.*	τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστι,

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. ἐστὶ	*Id.*	deest. *d, f, l.*
5. ὀνομάτων.	ὀνομάτων. Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, διὰ τὸ ἐκ δύο ῥητῶν αὐτὴν σύγκεισθαι, κύριον ὄνομα καλῶν τὸ ῥητὸν καθ' ὃ ῥητόν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *a, e, g, h, m, n.*	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. ἄρα	*Id.*	deest.
2. καὶ συνθέντι	*Id.*	συνθέντι ἄρα
3. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι.	*Id.*	Ὑπόκεινται δὲ ῥητὸν περιέχουσαι·
4. πρώτη.	πρώτη. Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτην, διὰ τὸ ῥητὸν περιέχειν καὶ προτερεῖν τὸ ῥητόν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *a, e, g, h, m, n.*	concordat cum edit. Paris. *d, f, l.*

PROPOSITIO XXXIX.

1. γὰρ	*Id.*	deest.
2. τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ	*Id.*	παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ
3. ἐστὶ	*Id.*	deest.
4. παράκειται·	*Id.*	παράκεινται·
5. Ἐπεὶ οὖν	*Id.*	Καὶ ἐπεὶ
6. τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ	*Id.*	τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ
7. ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. Ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί.	ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει·	concordat cum edit. Paris.
8. χωρίον· καὶ	deest.	χωρίον· ὥστε καὶ
9. αὐτὸ	deest.	concordat cum edit. Paris.

Post propositionem 40 adest in *b* subsequens scholium, quod Euclidis esse minime potest.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ[1] μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητὸν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστι, δῆλον. Εἰ γάρ ἐστι[2] ῥητὸν καὶ παραβέβληται παρὰ ῥητὴν, εἴη ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. Ἀλλὰ καὶ ἄλογος, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν[3].

SCHOLIUM.

Vocavit autem illam ex binis mediis secundam, quoniam medium et non rationale continetur sub ipsis, posterius est vero medium rationali. Quod autem sub rationali et irrationali continetur irrationale esse, manifestum est. Si enim sit rationale et applicetur ad rationalem, esset et alterum ipsius latus rationale. Sed et irrationale, quod absurdum; spatium igitur sub rationali et irrationali irrationale est.

SCHOLIE.

Il l'appèle seconde de deux médiales, parce que la surface comprise sous ΑΒ, ΒΓ est médiale et non rationelle, car la surface médiale est après la rationelle. Et il est évident que la surface comprise sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle; car si elle était rationelle, et qu'elle fût appliquée à une droite rationelle, l'autre côté serait rationel. Mais il est irrationel, ce qui est absurde; donc une surface sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τὸ	*Id.*	τὸ τὸ
2. ἐστι	ἔσται	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστιν.	ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XL.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ΑΒ, ΒΓ·	*Id.*	ΑΒ, ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ·

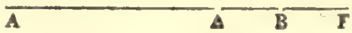
* Deest in codd. *d*, *f*, *l*; reperitur autem in codd. *a*, *e*, *g*, *h*, *m*, *n*.

Post propositionem 40 adest in *b* scholium subsequens, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

Εκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα, διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσου[1], καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος τὴν ὀνομασίαν τάττεσθαι. Οτι δὲ καὶ[2] μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Φανερὸν μὲν οὖν ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ. Εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΓ. Υποκείσθω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΒΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς[3] ΑΔ. Ισῃ δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ



SCHOLIUM.

Vocavit autem ipsam majorem, quia quadrata ex AB, BΓ rationalia majora sunt rectangulo medio bis sub AB, BΓ, et oportet ex rationalium proprietate nomen imponere. At vero majora esse quadrata ex AB, BΓ rectangulo bis sub AB, BΓ, sic demonstrabimus.

Evidens est quidem inæquales esse AB, BΓ. Si enim sint æquales, æqualia erunt et quadrata ex AB, BΓ rectangulo bis sub AB, BΓ, et erit rectangulum sub AB, BΓ rationale, quod non supponitur; inæquales igitur sunt AB, BΓ. Supponatur major AB, et ponatur ipsi BΓ æqualis BΔ; quadrata igitur ex AB, BΔ æqualia sunt et rectangulo bis sub AB, BΔ et quadrato ex AΔ. Æqualis autem ΔB ipsi BΓ; qua-

SCHOLIE.

Il l'appèle majeure, parce que la somme des quarrés des rationelles AB, BΓ est plus grande que le rectangle médial qui est le double rectangle sous AB, BΓ, et qu'il fallait choisir un nom d'après la propriété des rationelles. Nous démontrerons ainsi que la somme des quarrés de AB et de BΓ est plus grande que le double rectangle sous AB, BΓ.

Car il est évident que les droites AB, BΓ sont inégales. Car si elles étaient égales, la somme des quarrés de AB et de BΓ serait égale au double rectangle sous AB, BΓ, et le rectangle sous AB, BΓ serait rationel, ce qui n'est point supposé; donc les droites AB, BΓ sont inégales. Supposons que AB est la plus grande, et faisons BΔ égal à BΓ; la somme des quarrés de AB et de BΔ sera égale au double rectangle sous AB, BΔ, et au quarré de AΔ (7.2). Mais ΔB est égal à BΓ; donc

* Deest in codd. *d*, *f*, *l*; reperitur autem in codd. *a*, *e*, *g*, *h*, *m*, *n*.

ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μείζονά ἐστι[4] τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς[5] ΑΔ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

drata igitur ex AB, BΓ æqualia sunt et rectangulo bis sub AB, BΓ et quadrato ex AΔ; quare quadrata ex AB, BΓ majora sunt quam rectangulum bis sub AB, BΓ quadrato ex AΔ. Quod oportebat ostendere.

la somme des quarrés de AB et de BΓ est égale au double rectangle sous AB, BΓ et au quarré de AΔ; donc la somme des quarrés de AB et de BΓ surpasse le double rectangle sous AB, BΓ du quarré de AΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μέσου	μέσων	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	*Id.*	deest.
3. τῆς	*Id.*	deest.
4. ἐστι	εἶναι	concordat cum edit. Paris.
5. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLI.

1. καλείσθω	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. συνθέντι	deest.	concordat cum edit. Paris.

Post propositionem 41 adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

Ρητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένην αὐτὴν ἐκάλεσε[1], διὰ τὸ δυνάσθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῥητὸν, τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προύπαρξιν, πρῶτον τὸ ῥητὸν[3] ἐκάλεσεν[4].

SCHOLIUM.

Rationale autem et medium potentem ipsam vocavit, quia potest bina spatia, unum quidem rationale, alterum vero medium; et quoniam ipsius rationalis prius mentionem fecit, primum rationale vocavit.

SCHOLIE.

Il l'appèle celle dont la puissance est rationelle et médiale, parce que sa puissance renferme deux surfaces, l'une rationelle, et l'autre médiale; et à cause que la surface rationelle est avant la rationelle, il parle d'abord de la rationelle.

* Deest in codd. *d*, *f*, *l*; reperitur autem in codd. *a*, *e*, *g*, *h*, *m*, *n*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. αὐτὴν ἐκάλεσε, ...	καλεῖται αὐτὴ . . .	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ ῥητὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐκάλεσεν.	ἐκάλεσεν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLII.

1. τετραγώνων·	τετραγώνῳ·	concordat cum edit. Paris.
2. τὰ προκείμενα·	*Id.*	τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν AB, ΒΓ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραγώνων·
3. ἐστιν	*Id.*	deest.
4. ἀσύμμετρά ἐστι τὰ . . .	*Id.*	ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ
5. ἄρα	*Id.*	deest.

Post propositionem 42 adsunt in *b* duo scholia subsequentia, quæ quidem Euclidis non sunt.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄*.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διὰ τὸ δυνάσθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία, τό, τε συγκείμενον[1] ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ, καὶ τὸ[2] δὶς ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ[3].

SCHOLIUM I.

Vocat autem ipsam bina media potentem, quia potest bina media spatia, et compositum ex ipsarum AB, ΒΓ quadratis, et rectangulum bis sub AB, ΒΓ.

SCHOLIE I.

Il l'appèle celle dont la puissance est une double médiale, parce que sa puissance égale deux surfaces médiales; savoir, la somme des quarrés de AB et de ΒΓ, et le double rectangle sous AB, ΒΓ.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τό, τε συγκείμενον	τά, τε συγκείμενα . .	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
3. AB, ΒΓ.	AB, ΒΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

* Deest in cod. *d*; reperitur autem in codd. *a*, *e*, *f*, *g*, *h*, *m*, *n*.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'*.

Οτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ὧν σύγκεινται, ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη, προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον.

SCHOLIUM II.

At vero dictas irrationales uno tantum modo dividi in rectas ex quibus componuntur, et quæ faciunt propositas species, mox ostendemus, si prius exposuerimus quoddam lemma hujusmodi.

SCHOLIE II.

Après avoir exposé le lemme suivant, nous démontrerons que les irrationelles dont nous avons parlé ne peuvent se diviser que d'une seule manière dans les droites qui les composent, et qui constituent les espèces proposées.

LEMMA A**.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, καὶ ὑποκείσθω	deest.	ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ
2. καὶ	*Id.*	deest.
3. ἐστὶν	*Id.*	deest.
4. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ·	*Id.*	ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ·
5. ΑΔ, ΔΒ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	*Id.*	ΑΔ, ΔΒ, εἴπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

PROPOSITIO XLIII.

1. ΑΓ	*Id.*	ΑΒ
2. τμῆμα κατὰ τὸ Γ	*Id.*	τῇ κατὰ τὸ Δ
3. τῆς διχοτομίας	τοῦ διχοτόμου	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	*Id.*	τοῦ
5. ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ	*Id.*	ὄντα· μέσον δὲ

* Reperitur in codd. *a*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*; deest autem in cod. *d*.

** Reperitur in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO XLIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. διαιρεῖται.	*Id.*	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. Εστω	*Id.*	Εστω δὴ

PROPOSITIO XLV.

1. διαιρεῖται.	*Id.*	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ	τῆς διχοτομίας, ὅτι . .	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	*Id.*	deest.
4. ΑΔ, ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ...	*Id.*	ΑΓ, ΓΒ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ,
5. Καὶ	*Id.*	deest.
6. παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον	*Id.*	deest.
7. ἐστὶ	*Id.*	deest.
8. καὶ	*Id.*	deest.
9. ἐστὶ	*Id.*	deest.
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἐπειδήπερ	ὅτι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLVI.

1. διαιρεῖται.	*Id.*	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. καὶ	*Id.*	deest.
5. τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ...	*Id.*	ῥητῷ ὑπερέχει τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,
linea 9 μόνον διαιρεῖται. . . .	deest.	ἄρα διαιρεῖται μόνον.

PROPOSITIO XLVII.

1. διαιρεῖται.	*Id.*	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. τὸ δὲ δὶς	*Id.*	τὸ δ'
3. τὸ δὲ δὶς	*Id.*	τὸ δ'
linea 12 τὰ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
4. ὑπερέχει ῥητῷ, ...	*Id.*	ῥητῷ ὑπερέχουσι,

PROPOSITIO XLVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. διαιρεῖται	*Id.*	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. δύο μέσα δυναμένη	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῶν	*Id.*	deest.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. ἐλάσσονος	vocabulum ἐλάσσονος contractum est, et inter lineas manu recenti exaratum.	concordat cum edit. Paris.

Has post definitiones adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Euclidis non e st.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

Ἐξ οὖν οὐσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐθειῶν, τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται[1] τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μὲν, ἐφ' ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ

SCHOLIUM.

Sex igitur rectis existentibus ita sumptis, facit primas ordine tres, in quibus major quam minor plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; secundas autem ordine reliquas tres, in quibus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, propterea quod prius est commensurabile incommensurabili; et adhuc primam quidem, in quâ majus nomen

SCHOLIE.

Six droites étant prises ainsi, il (Euclide) fait une classe de trois droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable avec la plus grande; il fait ensuite une classe de trois autres droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande, parce que le commensurable est avant l'incommensurable. La première classe est celle dont le plus grand nom est commensurable avec la rationelle exposée; la seconde

* Reperitur in codd. *a, d, e, f, g, h, m, n;* deest autem in cod. *l.*

ῥητῇ· δευτέραν δὲ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον διὰ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον· τρίτην δὲ, ἐφ' ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ἐστὶ[2] τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τριῶν ὁμοίως, τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν, καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην, καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

commensurabile est expositæ rationali; secundam vero, in quâ minus, propterea quod rursus majus antecedit minus, cùm contineat minus; tertiam autem, in quâ neutrum nominum est commensurabile expositæ rationali; et deinceps in tribus similiter, primam dictæ secundi ordinis quartam appellans, et secundam quintam, et tertiam sextam.

classe, est celle dont le plus petit nom est commensurable avec la rationelle exposée, parce que le plus grand précède le plus petit, puisque le plus grand contient le plus petit; la troisième classe enfin, est celle où aucun des noms n'est commensurable avec la rationelle exposée. Il fait de la même manière une classe des trois autres droites, appelant la première la quatrième de la seconde classe, la seconde la cinquième, et la troisième la sixième.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. δύναται	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶ σύμμετρον	σύμμετρόν ἐστι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLIX.

1. μὲν	Id.	deest.
2. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO L.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα καὶ	ἄρα τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρόν ἐστι . . .	concordat cum edit. Paris.
3. σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ	τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρόν ἐστι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LI.

linea 11 τετράγωνος ἀριθμὸς .	Id.	ἀριθμὸς τετράγωνος
2. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε·	Id.	Ρητὴ δὲ ἡ Ε·

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν	Id.	ἀσύμμετρος ἄρα
4. ἐστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστὶν	Id.	deest.

PROPOSITIO LII.

1. τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ	Id.	ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν
2. καὶ	Id.	deest.
3. οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·	Id.	deest.
4. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς	τὸ ἀπὸ	concordat cum edit. Paris.
5. τετράγωνος ἀριθμὸς . . .	Id.	ἀριθμὸς τετράγωνος
6. οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·	Id.	deest.
7. ἐστὶν	Id.	deest.

PROPOSITIO LIII.

1. ῥητή τις εὐθεῖα	Id.	τις εὐθεῖα ῥητὴ
2. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ	Ὁ δὲ	concordat cum edit Paris.
4. ἄρα	Id.	deest.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα	vocabulum ἄρα, difficile lectu, inter lineas manu recenti exaratum est.	concordat cum edit. Paris.
7. τῆς	Id.	τῇ

PROPOSITIO LIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μήτε	Id.	μήδε
2. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. . . .	Id.	σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ δυνάμει.
3. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ	ῥητὸν ἄρα καὶ . . .	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	Id.	deest.
linea 9 ΗΘ	Id.	ΚΘ
5. τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς . . .	ΖΘ τοῦ ἀπὸ ΗΘ . . .	concordat cum edit. Paris.
6. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. αὐτῶν	Id.	τῶν ΖΗ, ΗΘ

LEMMA*.

1. τῇ ΒΗ·	Id.	τῇ ΒΗ μήκει·
2. ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση· . . .	ΑΘ, ΚΓ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση·	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· . .	ἑκατέρᾳ·	concordat cum edit. Paris.
5. τὴν ΚΔ οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ·	ΚΔ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΕ·	concordat cum edit. Paris.
linea 16 τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 17 τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LV.

1. ΑΒΓΔ	ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
2. ἐκ δύο ὀνόματων ἐστὶ . . .	Id.	ἐστιν ἐκ δύο ὀνομάτων
3. δὴ	Id.	δὲ
4. τοῦ	Id.	τῶν
5. τοῦ	Id.	τῶν

* Reperitur in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. . .	σύμμετρον αὐτὴν διαιρεῖ.	σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ.
7. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἀπὸ	*Id.*	διὰ
9. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ οὕτως τὸ ΕΛ πρὸς τὴν ΚΗ· . . .	τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ τὸ ΕΛ πρὸς ΚΗ·	concordat cum edit. Paris.
12. τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ,	*Id.*	τῷ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ΣΝ,
13. ΕΛ τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ·	*Id.*	ΜΡ τῷ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΘΞ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ, ΟΞ·
14. μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. ἐστίν	*Id.*	deest.
16. τῇ ΕΖ·	*Id.*	τῇ ΕΖ μήκει·
17. ἐστιν.	*Id.*	deest.
18. οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς ΝΡ· . .	ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ· . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LVI.

1. τό	*Id.*	τὸ μὲν
2. σύμμετρόν	*Id.*	σύμμετρός
3. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	*Id.*	τῷ
5. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπεὶ . . .	ΑΒ. Καὶ	concordat cum edit. Paris.
7. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΕ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ, ...	Ἀλλ' ἡ ΑΕ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα σύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ· αἱ	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῷ	τῇ	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
10. ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ MN, NΞ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. EZ σύμμετρος·	*Id.*	EZ·
12. ἐστὶ	*Id.*	deest.
13. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. ἄρα MΞ	*Id.*	MΞ ἄρα

PROPOSITIO LVII.

1. μεῖζον ἔστω	τὸ μεῖζον ἐστὶ . . .	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ αἱ MN, NΞ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ MΞ ἐκ δύο μέσων ἐστί· . .	*Id.*	καὶ ὅτι αἱ MN, NΞ ἐκ δύο μέσων εἰσί·
4. ἀσύμμετρος	*Id.*	ἀσύμμετρον
5. ἐστὶ	*Id.*	deest.
6. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LVIII.

1. ἐστὶν	*Id.*	deest.
2. δὴ	*Id.*	δὲ
3. Ἐπεὶ	*Id.*	Ἐπεὶ γὰρ
4. δυνάμει	*Id.*	deest.
5. ἐστὶ	*Id.*	deest.
6. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τῇ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. συγκείμενον	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. καὶ εἰσιν ἀσύμμετροι αἱ MN, NΞ	*Id.*	καὶ ἔστιν ἀσύμμετρος ἡ MN τῇ NΞ

PROPOSITIO LIX.

1. ἄρα	*Id.*	deest.
2. τῆς	τῶν	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. καὶ ἔστιν	καὶ	concordat cum edit. Paris.
4. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. Καὶ ῥητὴ	*Id.*	Ῥητὴ δὲ
7. τῶν ΜΝ, ΝΞ·	ΜΝΞ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LX.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἀπὸ τῶν	*Id.*	deest.
4. ἄρα	*Id.*	deest.
5. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Καὶ ἔστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

LEMMA*.

1. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῆς	*Id.*	τῶν
4. ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· . .	ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΔ· . .	τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ·
5. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXI.

1. ἑκατέρᾳ τῶν ΜΛ, ΗΞ· . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστι	*Id.*	εἰσι
3. ΑΓ, ΓΒ.	*Id.*	ΑΓ, ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ΑΓ, ΓΒ.
4. ἡ ΜΗ ἐστὶν, ...	*Id.*	ἐστὶν ἡ ΜΗ,
5. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. μέρει	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Reperitur in codicibus *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
9. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῇ.	Id.	deest.

PROPOSITIO LXII.

1. τὰς μέσας	deest.	τὰ μέσα
2. παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τὸ . .	Id.	παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον
3. τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται·	ἐστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν ΔΕ παραβέβληται·	τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν παράκειται·
4. ἐστι	Id.	deest.
5. ἐστὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO LXIII.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶ δευτέρα	Id.	δευτέρα ἐστὶν
3. τὴν ΔΕ ῥητήν·	Id.	ῥητὴν τὴν ΔΕ·
4. καὶ	Id.	deest.
5. καὶ	Id.	deest.
6. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. προτέροις	Id.	πρότερον
8. ἐστὶν	Id.	deest.

PROPOSITIO LXIV.

linea 7 τις ἔστω	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 2 καὶ	ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΜΛ παράκειται· . . .	ἐστὶ τὴν ΜΛ·	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. δείξομεν τοῖς πρότερον, . .	Id.	τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα,
8. ἐστὶ	Id.	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
9. ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ.	*Id.*	καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ ἀσύμμετρός ἐστιν.
10. παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ	*Id.*	παραβληθῇ παρὰ τὴν μείζονα
11. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXV.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῇ ΚΜ μήκει·	*Id.*	μήκει τῇ ΚΜ·
5. ῥηταὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXVI.

1. ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον τῷ ἐκ τῶν . . .	*Id.*	συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ
2. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. δὴ πάλιν	*Id.*	γὰρ πάλιν τοῖς πρὸ τούτου

PROPOSITIO LXVII.

1. τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς	ΓΖ ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ	concordat cum edit. Paris.
2. τὴν ΖΔ·	ΓΖ πρὸς ΖΔ·	
3. ἤτοι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. δύναται	*Id.*	δυνήσεται
5. ἔσται·	*Id.*	’στί.
6. ἔσται	*Id.*	’στὶν
7. δύναται	*Id.*	δυνήσεται
8. ἐστι	*Id.*	ἔσται

PROPOSITIO LXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ αὐτὴ	*Id.*	deest.
2. διῃρήσθω	*Id.*	διῃρημένη
3. τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ·	ΓΔ ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ· . .	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΓΔ.	ΓΔ.	concordat cum edit. Paris.
5. ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ·	*Id.*	ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι μέσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ·
6. τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ...	ΕΒ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, . .	concordat cum edit. Paris.
7. σύμμετροί εἰσι·	*Id.*	εἰσὶ σύμμετροι·
8. ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν.	δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν.	ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι.
9. τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ·	ΕΒ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ· . .	concordat cum edit. Paris.
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη. Εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή. . .	εἴτε μέσον, μέσον καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXIX.

1. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Γεγονέτω γὰρ	*Id.*	Καὶ γεγονέτω
3. τὴν ΓΔ οὕτως ἥτε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· .	ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ·	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΖΔ, ...	ΖΔ	concordat cum edit. Paris.
5. τὴν ΕΒ	ΕΒ.	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶν	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
8. τὴν ΔΖ·	ΔΖ·	concordat cum edit. Paris.
9. ἀσύμμετροί εἰσι, ...	*Id.*	εἰσὶν ἀσύμμετροι,
10. ἅμα	*Id.*	deest.

PROPOSITIO LXX.

1. καὶ αὐτὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν .	ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ . . .	concordat cum edit. Paris.
3. μὲν	*Id.*	deest.

PROPOSITIO LXXI.

1. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ δὲ	ὥστε καὶ τὸ	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ ἄρα ΓΔ	*Id.*	ἡ ΓΔ ἄρα

PROPOSITIO LXXII.

1. τουτέστι τὴν ΘΗ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῷ ΕΗ·	*Id.*	τὸ ΕΗ.
3. ῥητὴν	deest.	concordat cmm edit. Paris.
4. ἡ ΕΘ ἄρα ῥητή ἐστι . . .	*Id.*	ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ
5. ἐστὶ	*Id.*	deest.
6. τῷ ΘΙ·	*Id.*	τὸ ΘΙ·
7. τουτέστι τὴν ΘΗ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἔστιν ἡ	*Id.*	ἔστω
9. ἔστιν ἡ	*Id.*	ἔστω
10. ἔστιν ἡ	*Id.*	ἔστω
11. περιέχηται	περιέχεται	concordat cum edit. Paris.
12. χωρίον	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ἔστιν	*Id.*	ἔστω

PROPOSITIO LXXIII.

1. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. Εστω	Εστω εἰ τύχοι	concordat cum edit. Paris.
4. ἢ	*Id.*	deest.
5. καὶ	*Id.*	deest.
6. ἢ	*Id.*	deest.
linea 17 Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι, κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶ, δύο ἡ μέσα δυναμένη	deest.	concordat cum edit. Paris.

Subsequens corollarium in textu adesse deberet.

ΠΟΡΙΣΜΑ*.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοί οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον

COROLLARIUM.

Quæ ex binis nominibus et irrationales quæ post ipsam neque mediæ neque inter se sunt eædem; quadratum enim ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem et longitudine incommensurabilem ipsi ad quam applicatur. Quadratum autem rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam. Quadratum autem primæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam. Quadratum autem secundæ ex binis mediis ad rationalem appli-

COROLLAIRE.

La droite de deux noms et les irrationelles qui la suivent ne sont les mêmes ni avec la médiale, ni entr'elles; en effet, le quarré d'une médiale étant appliqué à une rationelle fait une largeur rationelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle elle est appliquée (23. 10). Le quarré d'une droite de deux noms étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une première de deux noms (61. 10). Le quarré d'une première de deux médiales étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une seconde de deux noms (63. 10). Le quarré d'une seconde de deux médiales étant appliqué à une rationelle fait une largeur

* Reperitur in codicibus *a*, *d*, *e*, *f*, *h*, *l*, *m*, *n*.

πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. Τὰ δὲ[1] εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταὶ, ὥστε[2] καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

catum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quadratum autem ex majori ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum autem ex rectâ rationale et medium potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam. Quadratum autem ex rectâ bina media potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Ipsæ vero dictæ latitudines differunt et à primâ et inter se, à primâ quidem quod rationalis sit, inter se vero quod ordine non sint eædem, quare et ipsæ irrationales differunt inter se.

qui est une troisième de deux noms (63. 10). Le quarré d'une majeure étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une quatrième de deux noms (64. 10). Le quarré d'une droite, qui peut une surface rationelle et une surface médiale, étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une cinquième de deux noms (65. 10). Le quarré d'une droite, qui peut deux surfaces médiales, étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une sixième de deux noms (66. 10). Or les largeurs dont nous venons de parler sont différentes de la première et différentes entr'elles; elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationelle; et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre; ces irrationelles sont donc différentes entr'elles.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. Τὰ δὲ	*Id.*	Επεὶ οὖν τὰ
2. ὥστε	*Id.*	δῆλον ὡς

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

Επτά εἰσιν ἑξάδες ἄχρι τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων· ὧν ἡ μὲν πρώτη ἐδείκνυ τὴν γένεσιν αὐτῶν· ἡ δὲ δευτέρα τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦνται· ἡ δὲ τρίτη τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὕρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἕκτης, ἀφ' ἧς ἡ τετάρτη ἑξὰς τὴν διαφορὰν ἐπεδείκνυε τῶν ἀλόγων, πῇ διαφέρουσι· προσχρώμενος γὰρ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν ἓξ ἀλόγων. Πέμπτην καὶ ἕκτην ἐξέθετο, δεικνύων ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολὰς, τὰς ἀπὸ τῶν ἀλόγων, ποίας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων. Εν δὲ τῇ ἕκτῃ, πῶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ὁμοειδεῖς αὐταῖς εἰσί. Πάλιν, ἐν τῇ ἑβδόμῃ σαφῶς διαφορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν.

SCHOLIUM.

Septem sunt senarii usque ad ea de quibus hactenus dictum est; quorum primus quidem ostendit generationem ipsarum; secundus vero divisionem, propterea quod ad unum duntaxat punctum dividuntur; tertius autem ex binis nominibus inventionem primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, sextæ, post quam quartus senarius ostendit differentiam irrationalium, quomodo illæ differant; usus enim eis quæ ex binis nominibus ostendit differentiam sex irrationalium. Quintum et sextum exposuit, ostendens in quinto quidem applicationes quadratorum ex irrationalibus, quales irrationales faciant latitudines applicatorum spatiorum. In sexto autem, quomodo commensurabiles irrationalibus ejusdem speciei sint. Rursus, in septimo evidenter differentiam ipsarum nobis ostendit.

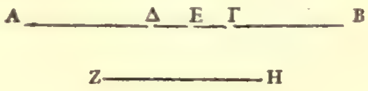
SCHOLIE.

Il y a sept sixains dans ce qui a été dit jusqu'à présent. Le premier fait voir l'origine des irrationelles (37, 38, 39, 40, 41, 42); le second leur division, parce qu'elles ne peuvent être divisées qu'en un seul point (43, 44, 45, 46, 47, 48); le troisième enseigne à trouver les droites de deux noms : la première de deux noms (49), la seconde (50), la troisième (51), la quatrième (52), la cinquième (53), et enfin la sixième (54); le quatrième sixain démontre la différence des irrationelles, c'est-à-dire ce en quoi elles diffèrent; car faisant usage des droites de deux noms, il (Euclide) fait voir la différence des six irrationelles (55, 56, 57, 58, 59, 60); il expose le cinquième et le sixième sixain; dans le cinquième, il démontre les applications des quarrés des irrationelles, c'est-à-dire qu'il démontre quelles sont les irrationelles que produisent les largeurs des surfaces appliquées (61, 62, 63, 64, 65, 66); dans le sixième, il fait voir comment les droites commensurables avec les irrationelles sont de la même espèce qu'elles (67, 68, 69, 70, 71); et enfin dans le septième, il nous démontre clairement leur différence (72, 73).

* Deest in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

Ἀναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλογον· καὶ ἡ μέση λαμβανομένη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἱασδήποτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδής ἐστιν ὧν ἐστι μέση ἀνάλογον. Καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης ἐν τούτοις ἐστί. Κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων εἰ τύχοι ΑΒ, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ ἐστὶ μείζων. Ἀφῃρήσθω ἀπὸ

Apparet autem et in his irrationalibus arithmetica proportio; et media sumpta proportionalis portionum cujusque irrationalis secundum arithmeticam proportionem, et ipsa ejusdem speciei est cum eis quarum est media proportionalis. Et primum arithmetica medietas in his est. Ponatur enim ex binis nominibus si contigerit AB, et dividatur in nomina ad Γ; evidens est AΓ quam ΓB esse majorem. Auferatur ex AΓ



τῆς ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Ε· φανερὸν ὅτι ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Κείσθω ὁποτέρᾳ αὐτῶν ἴση ἡ ΖΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ᾧ διαφέρει ἡ ΑΓ τῆς ΖΗ τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ ΕΒ τῆς ΓΒ, ἡ μὲν γὰρ ΑΓ τῆς ΖΗ τῇ ΕΓ, τῷ αὐτῷ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΓΒ, ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ, τῇ γὰρ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἐστιν ἴση· ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

ipsi ΓB æqualis AΔ, et bifariam secetur ΓΔ in E; evidens est AE ipsi EB esse æqualem. Ponatur alterutri ipsarum æqualis ZH; manifestum est igitur quo differt AΓ ab ipsâ ZH hoc differre et EB ab ipsâ ΓB, etenim differt AΓ ab ipsâ ZH ipsâ EΓ, eâdem vero magnitudine et ipsa ZH differt ab ipsâ ΓB, quod est arithmeticæ proportionis. Perspicuum est autem ZH commensurabilem esse ipsi AB, dimidiæ enim ipsius est æqualis; quare ipsa ex binis nominibus est. Similiter demonstrabitur et in aliis.

Il y a évidemment dans les irrationelles une proportion arithmétique; et la moyenne proportionelle prise arithmétiquement entre les parties d'une irrationelle quelconque est de la même espèce que les droites entre lesquelles elle est moyenne proportionelle. Il y a d'abord une médiété arithmétique entre les parties d'une irrationelle. Car, que AB soit une droite quelconque de deux noms, et que cette droite soit divisée en ses noms au point Γ; il est évident que AΓ est plus grand que ΓB. Retranchons de AΓ une droite AΔ égale à ΓB, et partageons ΓΔ en deux parties égales en E; il est évident que la droite AE sera égale à la droite EB. Que ZH soit égal à chacune de ces droites; il est évident que la différence de AΓ à ZH sera la même que la différence de EB à ΓB; car la différence de AΓ à ZH est EΓ, ainsi que la différence de ZH à ΓB, ce qui appartient à la proportion arithmétique. Mais il est évident que la droite ZH est commensurable avec AB, car elle en est la moitié; la droite ZH est donc une droite de deux noms (67. 10). Nous démontrerons la même chose pour les autres irrationelles.

PROPOSITIO LXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ·	καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ· . . .	concordat cum edit. Paris.
2. ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXV.

1. καλείσθω	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶ	*Id.*	deest.
3. τῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶν	*Id.*	deest.
5. δὲ	δὴ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXVI.

1. περιέχῃ·	περιέχουσα	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶ	καὶ σύμμετρά ἐστι . .	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	*Id.*	deest.
5. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ.	*Id.*	ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ.
6. ἐστὶ	*Id.*	deest.
7. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὀρθογώνιον	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. μέσης	*Id.*	μέση

PROPOSITIO LXXVII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μετὰ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα μέσον· .	τὰ προκείμενα· . . .	concordat cum edit. Paris.
2. καλείσθω δὲ	ἡ καλουμένη	concordat cum edit. Paris.
3. ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. . .	λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. . . .	concordat cum edit. Paris.
4. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, ...	ἄλογόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ...	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXVIII.

1. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν·	τὰ προκείμενα· . . .	concordat cum edit. Paris.
2. καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. . . .	ἡ προειρημένη.	concordat cum edit. Paris.
3. ΑΒ, ΒΓ	*Id.*	ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων
4. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXIX.

1. τὸ μὲν	τό, τε	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ δὲ	τό, τε	concordat cum edit. Paris.
3. τὰ προκείμενα·	*Id.*	τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ·

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. ἡ καλουμένη	*Id.*	καλείσθω δὲ
5. ῥητὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῷ ΔΘ.	τῇ ΔΘ.	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶ	*Id.*	ἐστὶ καὶ
11. τὴν ΔΖ·	ΔΖ·	concordat cum edit. Paris.
12. ὀρθογώνιον	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXX.

1. μόνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	*Id.*	deest.
3. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Τὰ	*Id.*	τὸ
5. ἀμφότερα·	*Id.*	ἑκατέρα.

PROPOSITIO LXXXI.

1. μία μόνον	*Id.*	μόνον μία
2. ΑΓ, ΓΒ ἄρα	*Id.*	ἄρα ΑΓ, ΓΒ
3. αὐτῷ	*Id.*	αὐτῷ πάλιν

PROPOSITIO LXXXII.

1. μέση	μέσης	concordat cum edit. Paris.
2. οὖσα	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. μέση	μέσης	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	*Id.*	deest.
4. μὲν	*Id.*	deest.
6. σύμμετροί εἰσιν, ...	*Id.*	εἰσὶ σύμμετροι,
7. ἐστὶ	*Id.*	καὶ
8. ἐστὶ	*Id.*	ἐστὶ καὶ

PROPOSITIO LXXXIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ	Id.	deest.
2. τὰ προειρημένα.	Id.	τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα ἅμα ῥητὸν, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον.
3. τετραγώνων	Id.	deest.
4. ἐστιν	Id.	deest.
5. ἐστιν	Id.	deest.

PROPOSITIO LXXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ· . .	καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ·	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα. Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν.	τὰ προκείμενα. . . .	concordat cum edit. Paris.
3. τοῖς	Id.	τῶν
3. ἐστιν	Id.	deest.
4. τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει.	Id.	τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόσει.

PROPOSITIO LXXXV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μόνον	μόνη	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. τὰ προειρημένα·	*Id.*	τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ·
3. εὐθεῖα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ποιοῦσα τὰ προειρημένα. . .	*Id.*	δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα.
5. τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα	τό, τε ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων	concordat cum edit. Paris.
6. ἀσύμμετρα	ἀσύμμετρον	concordat cum edit. Paris.
7. ἀφῃρήσθω	παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω	concordat cum edit. Paris.
8. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἐστιν ἴσον τῷ	*Id.*	ἴσον τὸ
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. σύμμετρος	*Id.*	ἀσύμμετρος
12. τετράγωνα	τετράγωνον	concordat cum edit. Paris.
13. καὶ ἔτι	*Id.*	ἔτι τε

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. ᾖ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. μήκει, ...	deest.	concordat cum édit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVI.

1. ἡ ΖΔ	ὁ ΔΖ	concordat cum edit. Paris.
2. ΗΓ τετράγωνον·	*Id.*	ΗΓ·
3. ΗΓ·	*Id.*	ΘΓ·
4. τῇ Α μήκει·	μήκει τῇ Α·	concordat cum edit. Paris.
5. ποιῆσαι.	εὑρεῖν.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVII.

1. καὶ	*Id.*	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. ΗΒ·	ΗΒ τετράγωνον· . . .	concordat cum edit. Paris.
3. ΓΗ τετράγωνον	*Id.*	ΓΗ
4. ἐστὶ	*Id.*	deest.
5. ἀπὸ	*Id.*	deest.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει·	τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρος τῇ Α· . . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVIII.

1. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετράγωνον·	τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον·	concordat cum edit. Paris.
2. τετραγώνῳ·	*Id.*	deest.
3. τετράγωνον·	*Id.*	deest.
4. τετράγωνον	*Id.*	deest.
5. τετράγωνον	*Id.*	deest.
6. οὐδ'	*Id.*	οὐκ
7. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τῇ Α μήκει.	*Id.*	μήκει τῇ Α.
9. τετράγωνον	*Id.*	deest.
10. ἀπὸ	*Id.*	ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ

PROPOSITIO LXXXIX.

1. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη. .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστι	*Id.*	deest.
3. καὶ	*Id.*	deest.
4. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ	Καὶ ἔστιν	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα ΒΓ	*Id.*	ΒΓ ἄρα
7. ΒΓ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XC.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μήκει	*Id.*	deest.
2. ἐστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ·	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 4 ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητή	ῥητὸν	concordat cum edit. Paris.
5. οὐδ' ἄρα	οὐδὲ	concordat cum edit. Paris.
6. μεῖζον	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCI.

1. ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·	*Id.*	deest.
3. οὐδετέρα ἄρα	*Id.*	καὶ οὐδετέρα

SCHOLIUM.

1. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΒ.	*Id.*	ἐστὶν ἡ ΑΓ πρώτη.

PROPOSITIO XCII.

1. πρώτης	*Id.*	deest.
2. παραλληλόγραμμον	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. διελεῖ.	διαιρεῖ.	concordat cum edit. Paris.
4. περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ,	*Id.*	τῷ ὑπὸ τῆς ΕΗ,
5. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	*Id.*	deest.
7. μὲν	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
8. ἐστὶν ἴσον, ...	*Id.*	ἴσον ἐστὶ,
9. λοιπὸν	*Id.*	καὶ λοιπὸν
10. καὶ	*Id.*	deest.
11. ἑκατέρων	ἑκατέρας.	concordat cum edit. Paris.
12. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCIII.

1. ὅλη ἡ ΑΗ	*Id.*	ΑΗ ὅλη
2. μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. διελεῖ.	διαιρεῖ.	concordat cum edit. Paris.
4. τῷ	*Id.*	τὸ
5. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΑΚ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris·
6. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν ὑπὸ ΛΟΜ·	τῷ ἀπὸ τῶν ΛΟΜ· . .	concordat cum edit. Paris.
8. καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Επεὶ γὰρ . . .	*Id.*	δυνάμει σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ γὰρ
11. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τουτέστι τῷ	τὸ δὲ ΤΣ ἐστὶ τῷ . . .	concordat cum edit. Paris.
14. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ . .	τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἄρα . .	concordat cum edit. Paris.
15. τὸ	τὸ ἀπὸ τῆς	concordat cum edit. Paris.
16. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. μέσης	μέση	concordat cum edit. Paris.
18. τῷ ΜΝ, τουτέστι . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. ὡς δὲ	*Id.*	καὶ ὡς ἄρα

PROPOSITIO XCIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ	ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ· .	concordat cum edit. Paris.
2. μήκει·	Id.	deest.
3. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	Id.	deest.
5. τὸ ΖΚ·	ΖΚ·	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	Id.	deest.
7. τῷ ΖΚ, ...	Id.	τῷ τῷ ΖΚ,
8. τῶν ΛΟ, ΟΝ·	Id.	τῆς ΛΟ, ΟΝ·
9. ὥστε	Id.	ὥστε καὶ
10. χωρίον·	Id.	deest.

PROPOSITIO XCV.

1. τῆς	Id.	deest.
2. δύναται	δυναμένη	concordat cum edit. Paris.
3. μήκει ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ·	Id.	ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει.
4. τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· . .	περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ἀπὸ τῶν ΛΟΜ, τὴν ΝΞ·	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶ	Id.	deest.
8. τῷ	Id.	τὸ
9. τὸ	Id.	τῷ
10. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τετραγώνῳ·	Id.	deest.

PROPOSITIO XCVI.

1. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῷ ΑΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ, τὸ ΝΞ·	τὸν ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γώνιαν, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ·	concordat cum edit. Paris.
3. χωρίον.	*Id.*	deest.
4. καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστι.	καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστι. .	concordat cum edit. Paris.
5. λοιπὴ	ἡ λοιπὴ	concordat cum edit. Paris.
6. μέσον	*Id.*	deest.
7. ἄρα χωρίον	*Id.*	χωρίον

PROPOSITIO XCVII.

1. τῶν ΑΗ, ΗΔ	αὐτῶν	concordat cum edit. Paris.
2. παραβληθῇ	*Id.*	παραβάλλωμεν
3. τὸ Ε, ...	*Id.*	τὸ Ε σημεῖον,
4. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ὃν τῷ ΛΜ γωνίαν τὸ ΝΞ· .	γωνίαν τὸ ΝΞ· . . .	concordat cum edit. Paris.
6. ἡ	*Id.*	ὁ
7. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ΑΒ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCVIII.

1. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν	*Id.*	deest.
4. τὸ	τὰ	concordat cum edit. Paris.
5. μέσον, ...	μέσα	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	*Id.*	deest.
7. δὴ	*Id.*	deest.
8. ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ· .	*Id.*	ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ·
9. ἐστὶν	*Id.*	deest.
10. ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΝΜ·	deest.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
11. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. τὸ	*Id.*	τῷ

PROPOSITIO XCIX.

1. μέσοις οὖσι·	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα	*Id.*	ἄρα καὶ
3. ἐστὶ	*Id.*	deest.
4. ἐστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ . . .	τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB τὸ	concordat cum edit. Paris.
6. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ· .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. καὶ τῷ	*Id.*	τῷ δὲ
8. τὸ	τῷ	concordat cum edit. Paris.
9. μήκει	*Id.*	deest.

PROPOSITIO C.

1. σύμμετρόν ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB·	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	*Id.*	deest.
4. ὡς	*Id.*	καὶ ὡς
5. σύμμετρός ἐστι μήκει . . .	*Id.*	μήκει σύμμετρός ἐστι

PROPOSITIO CI.

1. ῥητὴν	*Id.*	deest.
2. ἴσον	*Id.*	ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω
3. καὶ	*Id.*	deest.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶν ἡ ΓΜ	*Id.*	ἡ ΓΜ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
8. τὸ ΝΛ	*Id.*	ἡ ΝΛ
9. ἄρα ἀπὸ	*Id.*	ἄρα ὑπὸ

PROPOSITIO CII.

1. διὰ	*Id.*	ἀπὸ
2. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. αὐτὴν διαιρεῖ·	*Id.*	διαιρεῖ αὐτήν.

PROPOSITIO CIII.

1. ὅτι	*Id.*	ὅσι
2. ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν	καὶ ἀσύμμετρον τὸ ἀπὸ τῶν	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἀπὸ τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὸ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τὸ	τὸ ἀπὸ τῆς	concordat cum edit. Paris.
9. ἐστὶ	*Id.*	deest.
10. ἐστὶν	*Id.*	deest.
11. ἀπὸ τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἐστὶ	*Id.*	deest.
13. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ·	*Id.*	καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ·

PROPOSITIO CIV.

1. μήκει σύμμετρος ἔστω . . .	*Id.*	σύμμετρος ἔστω μήκει
2. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ΑΕ μὲν	*Id.*	μὲν ΑΕ
4. Καὶ αἱ	*Id.*	Αἱ δὲ
5. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ	Ἐπεὶ οὖν	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. ἐστὶν	*Id.*	deest.
7. δὲ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὐδετέρα	οὐθέρα	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CV.

1. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ·	*Id.*	deest.
2. καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι·	*Id.*	deest.
3. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Επεὶ γάρ	*Id.*	Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Επεὶ γὰρ
4. τὴν ΖΔ·	*Id.*	τὴν ΖΔ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ·
5. ΓΖ, ΖΔ.	*Id.*	ΓΖ, ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
6. ἐστὶ	*Id.*	deest.
7. ἔσται	*Id.*	ἐστι
8. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CVI.

1. γὰρ	*Id.*	deest.
2. τῷ προτέρῳ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν	ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῆς	ὡς τὸ ἀπὸ τῶν
4. ΖΔ.	*Id.*	ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ·
5. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ΓΖ, ΖΔ·	*Id.*	ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ·
7. τετραγώνῳ,	*Id.*	deest.
8. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

ALITER*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. ἔστω	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Εκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητὴ, . .	Κείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, . .	concordat cum edit. Paris.
4. τετάρτη	Id.	deest.
5. Τῷ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	Id.	deest..
7. ἐστὶ	Id.	deest.
8. ἐστὶ	Id.	deest.
9. ἐστὶν	Id.	deest.
10. ἐστὶν	Id.	deest.
11. ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης.	ῥητῆς τῆς ΖΕ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΖΘ.	concordat cum edit. Paris.
12. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης·	Id.	deest.
13. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CVII.

1. καὶ αὐτὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	Id.	deest.
3. αἱ	Id.	ἡ
4. ἐστι τὸ	Id.	τὸ μὲν

ALITER**.

2. Εστω	Εστω ἡ	concordat cum edit. Paris.
3. ῥητὴ	ῥητὸν	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	ἄρα ἡ	concordat cum edit. Paris.

* Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a*, *e*, *l*, *m*, *n* post propositionem 116, et in capite habet ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν; et in codd. *d*, *f*, *g*, *h* reperitur post propositionem 106.

** Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a*, *e*, *l*, *m*, *n* post ἄλλως præcedens, et habet in capite ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν; et in codd. *d*, *f*, *g*, *h* reperitur post propositionem 107.

PROPOSITIO CVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἔστω	*Id.*	deest.
2. καὶ	*Id.*	deest.
3. τε	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τετραγώνων . . . . . . -	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CIX.

1. χωρίον	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. μὲν	*Id.*	deest.
3. ἄρα μὲν	μὲν ἄρα	ἄρα ἐστὶν
4. ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.	ἢ οὔ.	concordat cum edit. Paris.
5. περιεχόμενον	*Id.*	deest.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΒΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITION CX.

1. αὐτῇ	ταύτῃ	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα ἐστὶ δευτέρα	δευτέρα ἐστὶν	concordat cum edit. Paris.
3. πρώτη ἐστίν.	*Id.*	ἐστὶ πρώτη.
4. τῆς ΖΚ μεῖζον	*Id.*	μεῖζον τῆς ΖΚ
5. ἑαυτῇ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXI.

1. τοῦ	*Id.*	deest.
2. ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ...	τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκολούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὑπόκειται τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ,	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Εἰ μὲν δὴ	*Id.*	προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΚΖ. Ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν
5. τῇ ΖΗ μήκει.	*Id.*	μήκει τῇ ΖΗ.
6. ἐστὶν ἄρα τρίτη	τρίτη ἐστὶν	concordat cum edit. Paris.
7. μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.	μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.	ἀποτομὴ μέσης δευτέρα.
8. μήκει, καὶ οὐδετέρα . . .	καὶ οὐδέτερα	concordat cum edit. Paris.
9. ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἐστιν ἄρα ἕκτη ἡ ΚΘ.	ἡ ΖΗ μήκει· ἀποτομὴ ἕκτη ἐστιν ἡ ΚΘ. . . .	ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομή ἐστιν ἄρα ἕκτη ἡ ΘΚ.
10. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, ...	*Id.*	ὥστε ἡ τὸ ΛΘ,

PROPOSITIO CXII.

linea 16 τῆς	*Id.*	τῇ
2. μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ .	*Id.*	τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν,
3. πρώτη ἐστὶν	*Id.*	ἐστι πρώτη
4. μήκει· καὶ	καὶ	μήκει·
5. τῇ	ἡ	concordat cum edit. Paris.
6. ἡ	τῇ	concordat cum edit. Paris.
7. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. εἰσι	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶν	*Id.*	deest.

COROLLARIUM*.

1. τοῦ τε	*Id.*	τό τε

* Hoc corollarium in omnibus adest codicibus.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. ἐπεὶ τῇ	*Id.*	ὅτι
3. αἱ μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῇ	*Id.*	deest.
5. μετὰ	κατὰ	concordat cum edit. Paris.
6. Μέσης	*Id.*	Μέσην
7. Μέσης	*Id.*	Μέσην

PROPOSITIO CXIII.

1. ἕξει τάξιν	*Id.*	ἔχει
2. ὀνομάτων δὲ	*Id.*	δὲ ὀνομάτων
3. ἕξει	*Id.*	ἔχει
4. τῇ Η ἴση	*Id.*	ἴση τῇ Η
5. ἐστὶν	*Id.*	deest.
6. τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων	ΚΕ ἓν ἡγούμενον . . .	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἐστὶ	*Id.*	deest.
10. ἐστὶ	*Id.*	deest.
11. ἐστὶ	*Id.*	deest.
12. τὴν	deest.	concordat 'cum edit Paris.
13. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. ἐστὶ	*Id.*	deest.
16. καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. εἰσὶ	*Id.*	deest.
18. ἑαυτῇ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. οὐδετέρα	οὐθέτερα	concordat cum edit. Paris.
20. οὐδετέρα	οὐθέτερα	concordat cum edit. Paris.
21. καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. οὐδετέρα	οὐθέτερα	concordat cum edit. Paris.
23. τὰ	deest.	concordat cum edit. Paris.
24. τάξιν ἔχει	*Id.*	ἔχει τάξιν

PROPOSITIO CXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐστι τοῖς	*Id.*	deest.
2. καὶ	*Id.*	deest.
3. ἔτι ἡ	*Id.*	ὅτι ἡ
4. ἔστω	ἔστω καὶ	concordat cum edit. Paris.
5. παραβέβληται·	*Id.*	παράκειται·
6. ἴσον ἐστὶ	*Id.*	ἐστὶν ἴσον
7. τὴν H.	in reliquâ demonstratione vocabulum τὴν deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. εἰσὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης	τὸ ἀπὸ τῆς ά	concordat cum edit. Paris.
14. ἐστὶ	*Id.*	deest.
15. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
16. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. ΓΔ τῇ ΖΘ	ΘΖ τῇ ΓΔ	concordat cum edit. Paris.
18. δὲ ΒΓ, ΓΔ	ΒΓ, ΓΔ δὲ	concordat cum edit. Paris.
19. ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν . . .	ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα . .	concordat cum edit. Paris.
20. δυνήσεται	*Id.*	δύναται
21. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. δυνήσεται	*Id.*	δύναται
23. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
24. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXV.

1. τί	*Id.*	deest.
2. τοῖς	*Id.*	τοῖς ἀπὸ
3. ἡ	*Id.*	deest.
4. τί	*Id.*	deest.
5. τὴν ΜΛ·	ΜΛ·	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. τὴν ΚΜ.	ΚΜ.	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶ	*Id.*	deest.
8. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ	Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τὸ . . .	concordat cum edit. Paris.
11. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἐστὶ	*Id.*	deest.

COROLLARIUM.

1. περιέχεσθαι.	περιέχεσθαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXVI.

1. οὐδεμία	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὐδεμία	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν πρότερόν ἐστιν	*Id.*	πρότερόν ἐστιν
5. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὐδεμία	deest.	concordat cum edit. Paris.

ALITER*.

2. γίνονται, ...	γίγνονται, ...	concordat cum edit. Paris.
3. οὐδεμιᾷ πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή.	τῶν πρότερον ἡ αὐτή. .	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	*Id.*	deest.
5. ἐστὶν	*Id.*	deest.
6. Ἀπὸ τῆς	Ἀπὸ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXVII**.

2. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Hoc *aliter* in omnibus adest codicibus.

** In codicibus hæc propositio numero non signatur.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. ἔχει δὲ	*Id.*	καὶ ἔχει
5. μονὰς	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστιν	*Id.*	deest.
7. τῆς ΓΑ	τοῦ ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶν	*Id.*	deest.
9. ἂν	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἀριθμοὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. αὐτοῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἔστιν	deest.	concordat cum edit. Pa ri.
13. ἂν	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. διπλάσιων ἐστὶ	διπλάσιος	concordat cum edit. Paris.
15. ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· . .	*Id.*	ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ·
16. ἀσύμμετρος ἄρα.	deest.	concordat cum edit. Paris.

ALITER*.

1. deest.	deest.	Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.
2. Εστω	*Id.*	Εστω γὰρ
3. σύμμετρος· καὶ γεγονέτω . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οἱ ΕΖ, Η·	*Id.*	deest.
5. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ	τὸν	concordat cum edit. Paris.
7. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. διπλάσιος	διπλάσιον	concordat cum edit. Paris.
9. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. αὐτοῦ	αὐτῇ	concordat cum edit. Paris.

* Hoc *aliter* in omnibus adest codicibus.

SCHOLIUM*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. εὐθειῶν	*Id.*	deest.
3. εἶδος	ἐπίπεδον	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	*Id.*	deest.
5. τὰς	*Id.*	τοὺς
6. καὶ	*Id.*	deest.
7. ἀσυμμέτρων χωρίων, . . .	*Id.*	χωρίων ἀσυμμέτρων,
8. τοῖς	*Id.*	deest.
9. καὶ	*Id.*	deest.
10. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. πρὸς ἀλλήλους	*Id.*	ἀλλήλοις
12. γέγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπί τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστὶ συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, .	γέγονε διὸ οὐ μόνον ἐπί τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστὶ συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, . .	γέγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν ἐστι συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία,

* Hoc scholium, quod in omnibus adest codicibus, Euclidis esse non potest, utpote ex sequentibus pendet.

FINIS TOMI SECUNDI.

ERRATA.

Pagina	linea	
xxxiv,	5,	ea et, *lege* ea et fere.
xxliv,	alinea 3,	in aliquot exemplaribus pro B, *lege* A.
164*,	5, *b.*	encore, *lege* déjà.
166*,	4, *b.*	irrationel, *lege* rationel.
171,		littera Γ deest in figurâ.
254*,	3, *b.*	la droite AE, *lege* la puissance de AE.
264*,		littera B deest in figurâ.
277*,	7, *b.*	la somme, *lege* la somme des.
279,		in figurâ littera B ponatur in loco litteræ E, et vice versâ.
283*,	3,	ΔB, *lege* AB.
308*,	6,	surface médiale, *lege* surface rationelle.
316*,	5,	commensurable, *lege* incommensurable.
329*		in secundâ lineâ figuræ littera B ponatur in loco litteræ E.
251,	5,	18. 10, *lege* 19. 10.
352,	3,	AOM, *lege* ΛOM.
358*,	1,	quarré de AH, *lisez* quarré de EH.
362*,	2, *b.*	*ἀπὸ*, *lege* *ὑπὸ*.
362*,	3,	quadrato autem ex, *lege* rectangulo autem sub.
362*,	2,	quarré de, *lege* rectangle sous.
365*,	5,	*ἀσύμμετρος*, *lege* *σύμμετρος*.
365*,	6,	incommensurabilis, *lege* commensurabilis.
365*,	4,	incommensurabile, *lege* commensurabile.
365*,	10, *b.*	rationelle et incommensurable, *lege* rationelle et commensurable.
366*,	6,	la droite, *lege* le parallélogramme.
367*,	2,	imcommensurable, *lege* commensurable.
374*,	4,	la droite, *lege* le parallélogramme.
394*,	4,	ZH, *lege* ZK; et eadem correctio in linguâ græcâ et in linguâ latinâ.
394*,	8,	incommensurabile, *lege* commensurabile.
394*,	10,	*ἀσυμμέτρου*, *lege* *συμμέτρου*.
394*,	11,	incommensurabili, *lege* commensurabili.
396*,	2,	21, 10, *lege* 32, 10.
396,	3,	23, 10, *lege* 21, 10.
405*,	1, *b.*	ΘK, *lege* ΘE, et eadem correctio in linguâ græcâ et linguâ latinâ.
405,	1, *b.*	ΘK, BΔ, *lege* ΘE, BΔ.
446*,	3, *b.*	plus grande que ΔA, *lege* plus grande que EA.
446*,	1, *b.*	ΔA, *lege* ΔA.
479*,	1, *b.*	avant la rationelle, *lege* avant la médiale.