

E. CESÀRO

Sur une équation aux différences mêlées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 36-40

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__36_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES;

PAR M. E. CESARO.

1. En partant d'une fonction arbitraire $y = f(x)$, l'équation

$$y_p dx = x dy_{p-1},$$

dont un cas particulier a été considéré par M. Catalan, fournit, de proche en proche, la série de fonctions

$$\begin{aligned} y_1 &= xy', & y_2 &= xy' + x^2 y'', & y_3 &= xy' + 3x^2 y'' + x^3 y''', \\ y_4 &= xy' + 7x^2 y'' + 6x^3 y''' + x^4 y^{IV}, & \dots \end{aligned}$$

On est conduit à poser

$$(1) \quad y_p = \lambda_{1,p} x y' + \lambda_{2,p} x^2 y'' + \lambda_{3,p} x^3 y''' + \dots,$$

en prenant $\lambda_{m,p} = 0$, lorsque m est supérieur à p ou inférieur à 1.

2. Puisque les valeurs des nombres λ sont *indépendantes de la nature de la fonction y* , faisons, pour les déterminer, $y = x^m$. Il est clair que

$$y^{(p)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)x^{m-p}, \quad y_p = m^p x^m.$$

Si l'on pose

$$\delta_m = 1.2.3\dots m \lambda_{m,p}, \quad u_m = m^p,$$

la relation (1) prend la forme *symbolique*

$$(\delta + 1)^m = u^m,$$

et l'on en déduit immédiatement

$$\delta_m = (u - 1)^m = \Delta^m(u_0),$$

c'est-à-dire

$$\lambda_{m,p} = \frac{\Delta^m(o^p)}{1.2.3\dots m}.$$

Par suite, la formule (1) devient

$$(2) \quad y_p = \frac{xy'}{1} \Delta(o^p) + \frac{x^2y''}{1.2} \Delta^2(o^p) + \frac{x^3y'''}{1.2.3} \Delta^3(o^p) + \dots$$

3. Pour *invertir* la dernière relation, il est évident que l'on peut poser

$$(3) \quad x^p y^{(p)} = \mu_{1,p} y_1 + \mu_{2,p} y_2 + \mu_{3,p} y_3 + \dots,$$

les nombres μ , analogues aux nombres λ , étant, comme ceux-ci, *indépendants de la nature de y* . Pour $y = x^m$, la formule (3) devient

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1) = \mu_{1,p} m + \mu_{2,p} m^2 + \mu_{3,p} m^3 + \dots$$

Comme cette égalité doit être vérifiée *identiquement*, on voit que $(-1)^{p-r} \mu_{r,p}$ est la *somme des produits $p-r$ à $p-r$ des $p-1$ premiers nombres entiers*. Conséquemment, la relation (3) prend la forme *symbolique*

$$(4) \quad x^p y^{(p)} = y(y-1)(y-2)\dots(y-p+1).$$

4. Soit, par exemple, $y = x + x^2 + \dots + x^n$; puis, faisons $x = 1$. Il est visible que

$$y^{(p)} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-p+1)}{p+1},$$

$$y_p = s_p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p.$$

Par suite, l'égalité (2) devient

$$s_p = C_{n+1,2} \Delta(o^p) + C_{n+1,3} \Delta^2(o^p) + C_{n+1,4} \Delta^3(o^p) + \dots$$

Si B_p est le *p ième nombre de Bernoulli*, c'est-à-dire le *coefficient de n dans s_p* , la dernière relation donne im-

médiatement

$$B_p = \frac{1}{1.2} \Delta(o^p) - \frac{1}{2.3} \Delta^2(o^p) + \frac{1}{3.4} \Delta^3(o^p) - \dots$$

Ces égalités sont fort connues.

§. De même, la formule (4) donne lieu à l'identité symbolique

$$\begin{aligned} & s(s-1)(s-2)\dots(s-p+1) \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-p+1)}{p+1}. \end{aligned}$$

En considérant, dans les deux membres, les seuls coefficients de n , on obtient l'égalité connue

$$B(B-1)(B-2)\dots(B-p+1) = \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} 1.2.3\dots(p-1).$$

6. Dans le Mémoire *Sur une suite de polynômes entiers*, M. Catalan a considéré le cas particulier de n infini, en laissant x quelconque. Alors, à cause de

$$j^{(p)} = \frac{1.2.3\dots p}{(1-x)^{p+1}},$$

la formule (2) devient

$$\begin{aligned} & 1 + 2^p x + 3^p x^2 + \dots \\ &= \frac{\Delta(o^p)}{(1-x)^2} + \frac{x \Delta^2(o^p)}{(1-x)^3} + \frac{x^2 \Delta^3(o^p)}{(1-x)^4} + \dots \end{aligned}$$

La série du premier membre est donc égale au quotient d'un polynôme entier, de degré $p-1$, par $(1-x)^{p+1}$. Cette propriété a été mise en évidence, par M. Catalan, dans le Mémoire cité.

7. Un cas plus remarquable est celui de $y = e^x$. On

trouve, d'après (2), pour $x = 1$,

$$\frac{1^p}{1} + \frac{2^p}{1.2} + \frac{3^p}{1.2.3} + \frac{4^p}{1.2.3.4} + \dots = N_p e,$$

pourvu que l'on pose

$$N_p = \frac{\Delta(o^p)}{1} + \frac{\Delta^2(o)^p}{1.2} + \frac{\Delta^3(o)^p}{1.2.3} + \dots$$

On voit que N_p est un nombre entier, et, par suite, *la série considérée est égale à un certain nombre de fois le nombre e*. Cette propriété, énoncée par M. Dobinski, a été démontrée dans le tome IV de la *Nouvelle Correspondance mathématique*.

8. Les nombres N étant particulièrement importants, nous allons en dire quelques mots. On reconnaît sans difficulté qu'ils obéissent à la loi symbolique

$$(5) \quad (N + 1)^p = N^{p+1},$$

qui donne, de proche en proche, pour les termes de la série N_1, N_2, N_3, \dots , les valeurs

$$(6) \quad 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, \dots$$

Si l'on pose $N_{p+1} = v_p$, on sait que l'égalité (5) donne lieu à l'égalité symbolique générale

$$F(N + 1) = F(v).$$

Par exemple, pour $F(z) = (z - 1)^p$, on trouve

$$N_p = (v - 1)^p = N(N - 1)^p = \Delta^p(N_1).$$

Ainsi, *le $p^{\text{ième}}$ terme de la série (6) est égal à la $p^{\text{ième}}$ différence du premier terme*.

9. Prenons encore $F(z) = e^{xz}$; il vient

$$e^{(N+1)x} = e^{v_x},$$

(40)

c'est-à-dire

$$e^x e^{Nx} = (e^{Nx})',$$

d'où

$$e^{e^x - 1} = 1 + N_1 \frac{x}{1} + N_2 \frac{x^2}{1.2} + N_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

D'après cela,

$$N_p = \left(\frac{d^p e^x}{dx^p} \right)_{x=0}.$$

10. Enfin, faisons remarquer la relation symbolique

$$N(N-1)(N-2)\dots(N-p+1) = 1,$$

que l'on déduit immédiatement de (4).

11. Signalons, pour finir, l'expression de y_p sous forme d'intégrale définie. Moyennant l'égalité connue

$$\frac{\Delta^m (x^p)}{1.2.3\dots p} = -\frac{2i}{\pi} \int_0^\pi (e^{\cos\theta + i\sin\theta} - 1)^m \sin p\theta \, d\theta,$$

la formule (2) donne

$$\frac{y_p}{1.2.3\dots p} = -\frac{2i}{\pi} \int_0^\pi f(x e^{\cos\theta + i\sin\theta}) \sin p\theta \, d\theta,$$

pourvu que l'on néglige la partie imaginaire du second membre. C'est pour exprimer cette restriction que nous avons remplacé par \equiv le signe d'égalité. Par exemple, la dernière formule donne, pour les nombres N , cette expression générale

$$N_p \equiv -\frac{2i}{\pi} \int_0^\pi e^{e^{\cos\theta}} \sin p\theta \, d\theta,$$

c'est-à-dire

$$N_p = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{e^{\cos\theta}} \sin[\cos(\sin\theta)] \sin p\theta \, d\theta.$$
