J. KARAMATA

Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 55-62
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__55_0>

SUR UN MODE DE CROISSANCE RÉGULIÈRE. THÉORÈMES FONDAMENTAUX;

PAR M. J. KARAMATA

(Beograd).

Dans ma Note intitulée *Sur un mode de croissance régulière des fonctions* (*Mathematica* (Cluj), V. IV, 1930, p. 38-53), j'ai défini un mode de croissance régulière, dont des cas particuliers furent étudiés par divers auteurs cités dans ladite Note (¹).

Cette notion de régularité trouvant bien des applications dans diverses questions relatives à l'étude des relations asymptotiques, je voudrais reprendre ici les théorèmes fondamentaux. La démonstration de ces théorèmes, qui se trouve dans ma Note citée, étant longue et assez confuse, M. Vilmos Schmidt a bien voulu me signaler (²) qu'on peut y parvenir par une voie bien plus courte. Cette méthode devient encore plus claire si l'on remarque qu'elle repose sur un théorème classique de Cauchy, comme je vais l'exposer dans ce qui suit.

La notion de régularité, dont il est question ici, peut être définie de la manière suivante :

Une fonction $q(x)$, définie pour tout $x \geqq 0$, sera dite à croissance régulière lorsque

$$q(x) > 0, \qquad \text{pour tout} \quad x \geqq 0,$$

et lorsque

$$(\mathrm{D}_1) \qquad \frac{q(tx)}{q(x)} \to h(t) \qquad \text{pour tout} \quad t > 0, \quad x \to \infty.$$

(¹) On peut ajouter encore le travail de I. SCHUR, *Zur Theorie der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte* (*Math. Zeit.*, t. 31, 1929, p. 391-407), se rapportant en particulier aux suites à termes complexes, appelées « *Mittelfolgen* ». tandis que notre étude est faite entièrement dans le réel.

(²) Par une lettre datée du 5 octobre 1931.

Cette définition correspond à celle qu'emploie M. R. Schmidt [1] pour définir ses « Gestrahlte Folgen ». Au contraire la définition dont je suis parti dans ma Note citée (qui lui est d'ailleurs équivalente et dont il sera question plus tard) correspond à celle qu'emploie M. I. Schur, dans la Note ci-dessus, pour définir ses « Mittelfolgen ».

Premier groupe de théorèmes :

Théorème I. — *Soit $q(x)$ une fonction définie dans* $(0, \infty)$ *et telle que*

$$q(x) > 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \geqq 0.$$

Lorsque

$$(1) \qquad \frac{q(tx)}{q(x)} \to h(t) \qquad (x \to \infty),$$

pour une seule valeur $t_0 \neq 1$ de t, alors

$$(2) \qquad \frac{\log\{q(x)\}}{\log x} \to \frac{\log\{h(t_0)\}}{\log t_0} = a \qquad (x \to \infty);$$

lorsque, d'autre part, la relation (1) *a lieu pour tout $t > 0$, avec $0 < h(t_0) < \infty$, alors*

$$(3) \qquad h(t) = t^a, \qquad \text{pour tout} \quad t > 0.$$

Par contre, lorsque $h(t_0) = 0$ ou ∞, il en sera de même de $h(t)$ pour tout $t > 0$, et suivant que $t \gtrless 1$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème classique de Cauchy, à savoir : *De la relation*

$$c(x+1) - c(x) \to c \qquad (x \to \infty),$$

il résulte

$$\frac{c(x)}{x} \to c \qquad (x \to \infty),$$

quel que soit le nombre c fini ou infini.

En effet, posons dans ce théorème

$$c(x) = a(ux), \qquad ux = y \qquad \text{et} \qquad c = \alpha(u) \qquad (u \neq 0),$$

---

[1] R. Schmidt, *Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen* (*Math. Zeit.*, t. 22, 1925, p. 89-152).

il en résulte alors que

$$(4) \qquad a(y+u)-a(y)\to \alpha(u) \qquad (y\to\infty)$$

entraîne

$$(5) \qquad \frac{a(y)}{y}\to\frac{\alpha(u)}{u} \qquad (y\to\infty).$$

En supposant donc, que (4) a lieu pour tout u, il en doit être de même pour (5). D'autre part, en supposant qu'au moins pour un $u=u_0\neq 0$, $\alpha(u_0)$ soit fini, puisque $\lim\limits_{y=\infty}\frac{a(y)}{y}$ est indépendant de u, il s'ensuit que

$$\frac{\alpha(u)}{u}=\frac{\alpha(u_0)}{u_0}=a=\text{const. indépendante de } u.$$

Donc

$$\alpha(u)=au,$$

et l'on obtient le :

Théorème II. — *Soit $a(y)$ une fonction définie pour tout y. Lorsque*

$$(6) \qquad a(y+u)-a(y)\to\alpha(u) \qquad (y\to\infty),$$

pour une valeur de $u=u_0\neq 0$, alors

$$(7) \qquad \frac{a(y)}{y}\to\frac{\alpha(u_0)}{u_0}=a \qquad (y\to\infty).$$

Donc, si la relation (6) *a lieu pour tout u, avec*

$$-\infty<\alpha(u_0)<+\infty,$$

on aura

$$(8) \qquad \alpha(u)=au, \qquad \text{pour tout } u.$$

Par contre, lorsque $\alpha(u_0)=\pm\infty$, il en sera de même de $\alpha(u)$ pour tout u, et suivant que $u\gtrless 0$.

Or, ce théorème est équivalent au théorème I, que l'on obtient en y posant

$$a(y)=\log\{q(e^y)\}, \qquad e^y=x, \qquad e^u=t \quad \text{et} \quad e^{\alpha(\log t)}=h(t).$$

Il résulte de ce premier théorème *que toute fonction à crois-*

sance régulière $q(x)$ peut être mise sous la forme

$$q(x) = x^a L(x) \qquad (-\infty < a < +\infty), \tag{9}$$

où la fonction $L(x)$, dite *à croissance lente*, est définie par la relation

$$\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1, \qquad \text{pour tout} \quad t > 0, \quad x \to \infty. \tag{10}$$

Remarques. — 1° Il serait intéressant de voir jusqu'à quel point peuvent être réduites les conditions définissant la croissance régulière.

Ainsi, par exemple, il suffit déjà de supposer que la relation (1) ait lieu pour des valeurs de t d'un intervalle arbitrairement petit.

Dans ce même ordre d'idées, on peut encore rappeler la remarque suivante de E. Landau ([1]) : *Lorsque* $L(x)$ *ne décroît pas, la relation*

$$\frac{L(2x)}{L(x)} \to 1 \qquad (x \to \infty)$$

entraîne la relation (10) *pour tout* $t > 0$.

Toutefois, ce fait n'a plus lieu pour des relations plus générales (1). Une remarque analogue devrait être, plutôt, formulée comme suit : *Lorsque la fonction $q(x)$ ne décroît pas, et la relation* (1) *a lieu pour deux valeurs de t, t_1 et t_2, telles que* $\log t_1$ *et* $\log t_2$ *aient un rapport incommensurable, alors* (1) *a lieu pour tout* $t > 0$.

Dans cette remarque l'on peut encore remplacer la condition de la monotonie de la fonction $q(x)$ par la condition plus générale :

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\{q(tx) - q(x)\}}{q(x)} \geqq -w(t) \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad t \to 1.$$

2° Le théorème de Cauchy restant encore valable dans le cas où la fonction $c(x)$ n'est plus réelle, les considérations précédentes peuvent être encore étendues dans cette direction.

Deuxième groupe de théorèmes :

Théorème III. — *Soit $q(x)$ une fonction à croissance régu-*

([1]) E. Landau, *Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1911, p. 443-472).

lière. Alors,

$$q(x) = x^a L(x) \qquad (-\infty < a < +\infty),$$

où $L(x)$, *supposé intégrable pour tout* $x \geqq 0$, *a la forme canonique*

$$L(x) = c(x) e^{\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt},$$

avec

$$c(x) \to c \neq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) \to 0 \qquad (x \to \infty). \tag{11}$$

Ce théorème repose sur les deux propriétés suivantes des fonctions à croissance lente :

1° On a

$$\int_0^x L(t)\,dt \to \infty \qquad (x \to \infty); \tag{12}$$

2° On a

$$\lim_{x=\infty} \int_0^1 \frac{L(tx)}{L(x)} dt = \int_0^1 \lim_{x=\infty} \left\{ \frac{L(tx)}{L(x)} \right\} dt = 1. \tag{13}$$

La première de ces propriétés est facile à vérifier. On a, en effet, d'après (10) et (2),

$$\frac{\log \{ x L(x) \}}{\log x} \to 1 \qquad (x \to \infty),$$

donc

$$x L(x) \to \infty \qquad (x \to \infty),$$

ce qui entraîne la relation (12).

Pour démontrer la seconde propriété (13), posons

$$a(x) = \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 \frac{L(tx)}{L(x)}} dt = \frac{x L(x)}{\displaystyle\int_0^x L(t)} dt. \tag{14}$$

D'après (10) et du fait que $L(x) > 0$, il résulte

$$\liminf_{x=\infty} \int_0^1 \frac{L(tx)}{L(x)} dt \geqq 1 \quad [1],$$

---

[1] Car, en posant $M_x(t) = \underset{0 \leqq t \leqq 1}{\text{Min}} \left\{ M, \frac{L(tx)}{L(x)} \right\}$, $M > 1$, $M_x(t)$ est uniformément borné et $M_x(t) \to 1$, $x \to \infty$, pour tout $t > 0$. Donc

$$\liminf_{x=\infty} \int_0^1 \frac{L(tx)}{L(x)} dt \geqq \lim_{x=\infty} \int_\varepsilon^1 M_x(t)\,dt = 1 - \varepsilon.$$

donc

$$a(x) = O(1) \qquad (x \to \infty). \tag{15}$$

Considérons à présent le quotient

$$\frac{a(rx)}{a(x)} = \frac{r\mathrm{L}(rx)}{\mathrm{L}(x)} \frac{\displaystyle\int_0^x \mathrm{L}(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^{rx} \mathrm{L}(t)\,dt} \qquad (r > 0).$$

D'après (10), (12) et le théorème de l'Hôpital, il s'ensuit que

$$\frac{a(rx)}{a(x)} \to 1 \qquad (r > 0,\ x \to \infty); \tag{16}$$

donc, d'après (15),

$$a(rx) - a(x) \to 1 \qquad (r > 0,\ x \to \infty). \tag{17}$$

D'autre part, de (14) l'on déduit

$$x\mathrm{L}(x) = c\,a(x)\, e^{\int_\alpha^x \frac{a(t)}{t}\,dt}, \tag{18}$$

c et α étant des constantes. De là, en tenant compte de (16), il résulte

$$e^{\int_x^{rx} \frac{a(t)}{t}\,dt} = r\,\frac{\mathrm{L}(rx)\,a(x)}{\mathrm{L}(x)\,a(rx)} \to r \qquad (x \to \infty),$$

c'est-à-dire

$$\int_1^r \frac{a(xt)}{t}\,dt \to \log r \qquad (x \to \infty),$$

ou bien

$$\{a(x) - 1\} \log r - \int_1^r \frac{\{a(xt) - a(x)\}}{t}\,dt \to 0 \qquad (x \to \infty). \tag{19}$$

Or, d'après (15) et (17) $a(tx) - a(x) \to 0$ avec $\frac{1}{x}$ en restant uniformément borné pour tout $1 \leqq t \leqq r$, donc

$$\int_1^r \frac{\{a(tx) - a(x)\}}{t}\,dt \to 0 \qquad (x \to \infty).$$

De (19) il résulte alors que

$$a(x) \to 1 \qquad (x \to \infty), \tag{20}$$

ce qui, d'après (14), démontre l'affirmation (13).

L'affirmation du théorème III est une conséquence immédiate de la seconde propriété (13) des fonctions à croissance lente.

Il suffit, en effet, en tenant compte de (20) de poser dans (18)

$$a(x) = 1 + \varepsilon(x) \qquad \text{où} \quad \varepsilon(x) \to 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{x}$$

et

$$c(x) = c\,\frac{a(x)}{\alpha}$$

pour obtenir la forme canonique (11), avec les conditions indiquées.

Moyennant le théorème III, on peut donner une autre définition des fonctions à croissance régulière, celle dont il a été question au début de cette Note, et qui résulte du théorème suivant :

Théorème IV. — *La fonction $q(x)$ étant à croissance régulière, il existe toujours un nombre k tel que*

$$\frac{1}{x^{k+1}q(x)}\int_0^x t^k q(t)\,dt \to \frac{1}{(a_k+1)}, \tag{21}$$

avec

$$-1 < a_k < \infty, \qquad x \to \infty.$$

Inversement, s'il existe un nombre k tel que (21) *soit satisfait, $q(x)$ sera à croissance régulière, c'est-à-dire satisfera la condition* (1) *pour tout $t > 0$. Dans ce cas $a_k - k = a$ est indépendant de k, et*

$$q(x) = x^a \mathrm{L}(x),$$

$\mathrm{L}(x)$ *étant une fonction à croissance lente.*

Ce théorème est facile à vérifier. En premier lieu, lorsque $q(x)$ est à croissance régulière, c'est-à-dire lorsque $q(x) = x^a\mathrm{L}(x)$, il suffit de poser $k = -a$. On voit alors, d'après (13), que (21) sera satisfait avec $a_k = 0$.

En second lieu, s'il existe un k tel que (21) soit satisfait, posons

$$\frac{1}{x^{k+1}q(x)}\int_0^x t^k q(t)\,dt = \frac{1}{a_k + 1 + \varepsilon(x)}, \qquad \text{où} \quad \varepsilon(x) \to 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{x}.$$

On en tire alors

$$q(x) = c(x)\,x^{a_k - k}\,e^{\int_\alpha^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt} = x^a \mathrm{L}(x),$$

ce qui démontre l'affirmation.

D'après ce théorème on peut donc définir la croissance régulière de la manière suivante :

Une fonction $q(x)$, définie et intégrable pour tout $x \geqq 0$, sera à croissance régulière lorsque

$$q(x) > 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \geqq 0,$$

et lorsqu'il existe un nombre k tel que

$$(D_2) \quad \frac{1}{x^{k+1} q(x)} \int_0^x t^k q(t)\, dt = \int_0^1 t^k \frac{q(tx)}{q(x)} dt \to \frac{1}{(a_k+1)} > 0 \quad (x \to \infty).$$

Remarque. — Cette seconde définition (D_2) de la croissance régulière d'une fonction a, en particulier, l'avantage suivant.

Tandis que la définition (D_1) exige l'existence de la relation (1) pour une infinité de valeurs de t (ou, d'après la première remarque, pour deux valeurs de t, avec une condition supplémentaire), pour la définition (D_2) il suffit l'existence de la seule relation (21). En d'autres termes, l'existence de la limite, pour $x \to \infty$, d'un seul moment $M(x)$, de la famille de fonction $\frac{q(tx)}{q(x)}$, entraîne l'existence de la limite $\lim\limits_{x=\infty} \frac{q(tx)}{q(x)} = t^a$, pour tout $t > 0$, l'exposant a étant déterminé par $\lim\limits_{x=\infty} M(x)$.